



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Agrégation d'une famille finie de relations floues et de filtres flous

Présenté par :
Refice Nawal

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> Abdelaziz Amroune	Prof,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> Aissa Bouad	MCB,	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r</i> Ail Oumhani	MAA,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont encouragé et soutenu moralement et matériellement pendant les moments les plus difficiles et durant toute ma vie , et qui me sont les plus chères sur cette planète : mon père et ma mère .

A mon cher mari

A mes chères frères

A tous mes amies

A tous ceux que j'aime

A tous les étudiants de ma promotion

Avec l'expression de tous mes sentiments de respect,

Je dédie ce mémoire.

Remerciements

*Avant tout, nous remercions « ALLAH », le clément
le miséricordieux, le plus puissant.*

*En premier lieu j'adresse ma reconnaissance
à mon encadreur le Professeur :*

Mr. A. BOUAD

*Son sérieux et sa compétence m'ont été très utiles
pour mener à bien ce travail.*

Je remercie les professeurs

Mr. A. AMROINE

*qui m'ont faite l'honneur d'être membres
du jury.*

*Merci à tous les enseignants et les étudiants
de département mathématique
pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont
met à notre disposition pour réaliser ce travail.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amis, qui
directement ou indirectement ont contribué
à la réalisation de ce travail.*

Table des matières

Notations	1
introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Généralités sur les ensembles classiques, relations classiques et treillis	4
1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques	4
1.1.2 Rappels sur les relations classiques	5
1.1.3 Treillis	6
1.2 Généralités sur les ensembles flous, relations flous et treillis flous	8
1.2.1 Ensembles flous	8
1.2.2 Relations floues	9
1.2.3 Treillis flous	10
1.3 Traces d'une relation floue et relation d'ordre qui respect une t-norme T et une T -équivalence E	11
1.3.1 Norme triangulaire.	11
1.3.2 Implication flous	12
1.3.3 Traces d'une relation floue	13
1.3.4 Relation T-equivalence et T-E-ordre	14
1.4 Filtre classique et Filtre flou	15

2	Agrégation de certaines familles finies d'ensembles flous	16
2.1	Fonction d'agrégation	16
2.2	Agrégation d'une famille finie des relations binaires flous	21
2.3	Agrégation des traces des relations binaires floues	25
3	Agrégation d'une famille finie des treillis flous et filters flous	28
3.1	Agrégation d'une famille finie des treillis flous	28
3.2	Agrégation d'une famille finie des filters flous	29
	Conclusion	36
	Bibliographie	37

Notations

E : un ensemble non vide.

χ_A : Une fonction caractéristique.

R : une relation binaire.

$P(E)$: l'ensemble des parties de E .

$A \subset B$: L'inclusion.

$A = B$: L'égalité.

A^c : Le complément.

$A \cap B$: L'intersection.

Γ : est un opérateur implicatement.

R^g : La trace de gauche de R sur X .

R^d : La trace de droite de R sur X .

T : t-norme.

T_M : la t-norme minimale.

(X, \leq) : Un treillis.

$x \wedge y$: un borne inférieur.

$x \vee y$: un borne supérieur.

A : Une agrégation.

$(R_i)_{i \in I}$ une famille des relations binaires.

\mathcal{L} : une famille de relation K-aires floues.

$(X_i, R_i)_{i \in I}$: est une famille finie de treillis.

Introduction

L'agrégation d'un ensemble d'informations de sorte que le résultat de cette agrégation soit une seule information, est une question intéressante. L'exemple le plus ancien à cet égard est le concept des moyennes, moyenne arithmétique, et moyenne géométrique...etc, de sorte que les fonctions d'agrégation jouent un rôle important, rôle décisif dans de nombreuses tâches de la technologie et ses application où l'agrégation est largement utilisés que ce soit dans les mathématiques pures, les sciences informatique, ingénierie et économie...ext.

C'est ce que nous avons abordé en étudiant certaines familles floues telle que relations floues, treillis flous et filtres flous dont ont été identifiés par Zadeh [26, 25], et d'autres auteurs dans ses ouvrages [24, 15, 23], tout en agrégeant ces différentes familles, à titre d'exemple agrégeant une famille de filtres flous de sorte que l'image de cette famille par l'agrégation soit un filtre flou, tout en essayant de trouver des connexions entre ces familles et leurs images via la fonction d'agrégation.

La formule que nous choisissons est la suivante $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, Il est symbolisé par \mathcal{L}_A telle que:

$$\mathcal{L}_A(x, y) = A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y))$$

et $\mathcal{L} = \{L_i : X^2 \rightarrow [0, 1], i \in \{1, \dots, n\}\}$ une famille des relations binaires floues sur un domaine X .

Ce travail est composé de trois chapitres:

Le premier chapitre consiste un rappel des notions et notations utilisées par la suite : les ensembles flous, relations floues, treillis flous, trace d'une relation floue et filtre flou.

Dans le second chapitre, on fait étudier l'agrégation de certaines familles finies d'ensembles flous.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'agrégation d'une famille finie de treillis flous et filters flous.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les ensembles classiques, relations classiques et treillis

1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques

Dans ce qui suit on va définir l'ensemble classique intuitivement.

Un ensemble B de l'ensemble de référence X est une collection d'objets, cet ensemble peut être défini par :

i. L'écriture de tous ses éléments, β_1, \dots, β_n et on écrit $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

ii. Une propriété ou des propriétés sont satisfaites par ses éléments et on écrit

$B = \{x \mid P(x)\}$, où $P(x)$ est une proposition de la forme " x a une propriété P ".

iii. Une fonction sera dite fonction caractéristique χ_B qui prend la valeur 0 pour les éléments qui n'appartiennent pas à B et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à B :

$$\begin{aligned} \chi_B &: X \longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B; \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.1.1 (*Opérations sur les ensembles classiques*)

Soient B, C deux sous-ensembles de l'ensemble de référence X .

- **Intersection** : $B \cap C = \{x \in X \mid x \in B \text{ et } x \in C\}$

c-à-d, pour tout $x \in X$ on a : $\chi_{B \cap C}(x) = \min(\chi_B(x), \chi_C(x))$.

- **Réunion** : $B \cup C = \{x \in X \mid x \in B \text{ ou } x \in C\}$

c-à-d, pour tout $x \in X$ on a : $\chi_{B \cup C}(x) = \max(\chi_B(x), \chi_C(x))$.

- **Inclusion** : $B \subset C$ si et seulement si $\forall x \in X, (x \in B) \implies (x \in C)$

(c-à-d, pour tout $x \in X$ on a : $\chi_B(x) \leq \chi_C(x)$).

- **Egalité** : $B = C$ si et seulement si $B \subseteq C$ et $C \subseteq B$

(c-à-d, pour tout $x \in X$ on a : $\chi_B(x) = \chi_C(x)$).

- **Complément** : $B^c = \{x \in X \mid x \notin B\}$ c-à-d, pour tout $x \in X$ on a :

$$\chi_{B^c}(x) = 1 - \chi_B(x).$$

On a :

$$\begin{cases} B \cap B^c = \emptyset \text{ est appelé lois de non contradiction;} \\ B \cup B^c = X \text{ est appelé lois de tiers exclu.} \end{cases}$$

1.1.2 Rappels sur les relations classiques

Définition 1.1.2 [24] Soient X et Y deux ensemble non vides, une relation binaire R entre les deux ensembles X, Y est une partie de $X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$, on note xRy .

Définition 1.1.3 [20, 3] Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide X (R est une partie de $X \times X$), on dit que:

- R est réflexive si et seulement si $\forall x \in X, xRx$;
- R est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, xRy \implies yRx$;
- R est antisymétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, (xRy \text{ et } yRx) \implies x = y$;
- R est transitive si et seulement si $\forall x, y, z \in X, (xRy \text{ et } yRz) \implies xRz$.

Définition 1.1.4 (*relation d'équivalence et relation d'ordre*)

[12, 3] Soit X un ensemble non vide, une relation binaire R dans X est dit une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

On dit que R est une relation d'ordre partielle sur X si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Une relation d'ordre R est dit partielle s'il existe ou moins deux éléments $x, y \in X$ tel que $(x, y) \notin R$ et $(y, x) \notin R$. Le couple (X, R) est appelle ensemble partiellement ordonné. Si pour tout $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$, la relation d'ordre est dite total ou linéaire et le couple (X, R) est dit ensemble totalement ordonné.

1.1.3 Treillis

[13, 2] Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné et $A \subseteq X$, un élément $m \in X$ est appelé majorant de A si et seulement si $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Un majorant m_0 de A est dit le plus petit des majorant (borne supérieur) de A si et seulement si $m_0 \leq m$ pour tout majorant m de A .

Un élément $n \in X$ est appelé minorant de A si seulement si $n \leq a$ pour tout $a \in A$. Un minorant n_0 de A est dit le plus grand des minorant (borne inférieur) de A si seulement si $n \leq n_0$ pour tout minorant n de A .

On note le plus petit des majorants de l'ensemble $\{x, y\}$ par $\sup\{x, y\}$ ou $x \vee y$, et le plus grand des minorants de l'ensemble $\{x, y\}$ par $\inf\{x, y\}$ ou $x \wedge y$.

Définition 1.1.5 (*treillis algébrique*)

[21] Un treillis (X, \leq) est un ensemble ordonné tel que pour tout partie de deux élément $\{x, y\}$ il existé un borne supérieur notée par $x \vee y$ est une borne inférieur notée $x \wedge y$.

Dans un treillis quelconque muni de deux lois enternes \vee et \wedge telle que pour tout x, y, z dans X .

- $x \leq y \iff \begin{cases} x = x \wedge y; \\ y = x \vee y. \end{cases}$
- Indempotcité : $\begin{cases} x \wedge x = x; \\ x \vee x = x. \end{cases}$

- Commutativité : $\begin{cases} x \vee y = y \vee x; \\ \text{et} \\ x \wedge y = y \wedge x. \end{cases}$
- Associativité : $\begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z; \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z. \end{cases}$
- La lois d'absorption : $\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = x; \\ x \vee (y \wedge z) = x. \end{cases}$

Définition 1.1.6 (Sous-treillis)

[13] Soit (X, \leq) un treillis et A une partie non vide de X . (A, \leq) est dit un sous-treillis de X si pour tout x, y dans A , on a $x \wedge y$ et $x \vee y$ dans A .

Définition 1.1.7 (treillis fermé)

Un treillis est dit fermé s'il possède un plus petit élément noté "0" et un plus grand élément noté "1".

Définition 1.1.8 (treillis complet)

Un treillis est dit complet lorsque tout partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Définition 1.1.9 (treillis distributif)

Un treillis (X, \leq) est distributif si pour tout x, y, z dans X on a un des deux conditions:

1. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Définition 1.1.10 (treillis complémenté)

Si dans un treillis fermé (X, \leq) tout élément x dans X possède un complément x' dans X , alors (X, \leq) est dit un treillis complémenté telle que:

$$\begin{cases} x \wedge x' = 0; \\ x \vee x' = 1. \end{cases}$$

1.2 Généralités sur les ensembles flous, relations flous et treillis flous

1.2.1 Ensembles flous

Définition 1.2.1 .

[1] Soit X un ensemble non vide et $P(X)$ l'ensemble des parties de X , $P(X)$ muni des opérations usuelles, l'intersection (\cap), la réunion (\cup) et le complément (C) est une algèbre de Boole.

Si l'on note par U l'ensemble à deux éléments $U = \{0, 1\}$ on sait qu'il y a une correspondance (bijection) entre $P(X)$ et U^X (ensemble des applications de X dans $\{0, 1\}$) de la façon suivante:

chaque partie B de X on associe sa fonction caractéristique

$F_B : P(X) \rightarrow U^X$ définie par:

$$B \rightarrow F_B$$

définie par:

$$F_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B; \\ 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

A chaque application $\Psi : X \rightarrow \{0, 1\}$ on associe la partie $B = \Psi^{-1}(1)$.

Dans tout ce qui suit nous conviendrons d'identifier chaque partie B avec sa fonction F_B .

Ainsi on écrira aussi bien

$$x \in B \text{ ou } B(x) = 1.$$

$$x \notin B \text{ ou } B(x) = 0.$$

Par ailleurs l'ensemble U ordonné naturellement ($0 < 1$) est une algèbre de Boole (en même temps qu'une chaîne) avec les opérations

$$\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$$

$$\neg \alpha = 1 - \alpha$$

Avec les identifications précédentes, les opérations ensemblistes se traduisent alors par :

$B \cap C$ est définie par : $(B \cap C)(x) = B(x) \wedge C(x)$, pour tout $x \in X$;

$B \cup C$ est définie par : $(B \cup C)(x) = B(x) \vee C(x)$, pour tout $x \in X$;

CB est définie par : $CB(x) = \lceil B(x)$, pour tout $x \in X$;

\emptyset est définie par : $\emptyset(x) = 0$, pour tout $x \in X$.

1.2.2 Relations floues

Définition 1.2.2 .

[25] Soient X et Y non vide une relation floue R entre deux ensembles de références X et Y est un sous-ensemble flou du produit cartésien $X \times Y$ de fonction d'appartenance

$\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, ou simplement $R(x, y)$ qui est appelée le degré de relation entre x et y .

$$R = \{((x, y), R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}.$$

Cas particulier :

- i. Si $X = Y$, on dit que la relation floue R définit sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue sur X .
- ii. Si X et Y sont finis, une relation floue R définit sur les deux univers X et Y peut être décrite par la matrice M_R des valeurs de fonction d'appartenance, les coefficients de M_R indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $R(x, y)$ pour tout x de X et y de Y .

Les propriétés d'une relation binaire floue dans X

Définition 1.2.3 [11] Soit R relation binaire floue sur un ensemble de référence non vide, on dit que:

- R est réflexive si et seulement si $\forall x \in X, R(x, x) = 1$;
- R est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, R(x, y) = R(y, x)$;
- R est antisymétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, R(x, y) \wedge R(y, x) = 0 \Rightarrow x \neq y$;

- R est transitive si et seulement si $\forall x, y, z \in X, R(x, y) \wedge R(y, z) \leq R(x, z)$;

Définition 1.2.4 .

Une relation floue réflexive, et transitive est appelée une relation de préordre flou.

Une relation floue réflexive, symétrique et transitive est dite une relation d'équivalence floue.

Une relation floue réflexive, antisymétrique et transitive est appelée une relation ordre partiel flou.

1.2.3 Treillis flous

Définition 1.2.5 .

[19, 14, 16, 5, 22] Soit (X, R) un ensemble partiellement ordonné flou et $B \subseteq X$. Un élément $m \in X$ est appelé majorant de B si et seulement si $R(a, m) > 0$ pour tout $a \in B$. Un majorant m_0 de B est dit plus petit des majorants (borne supérieur) de B si et seulement si $R(m_0, m) > 0$ pour tout m majorant B .

Un élément $n \in X$ est appelé minorant de B si et seulement si $R(n, a) > 0$ pour tout $a \in B$. Un minorant n_0 de B est dit plus grand des minorants (borne inférieur) de B si et seulement si $R(n, n_0) > 0$ pour tout n minorant B .

On note le plus petit des majorants de l'ensemble $\{x, y\}$ par $\sup\{x, y\}$ ou $x \vee y$, et le plus grand des minorants de l'ensemble $\{x, y\}$ par $\inf\{x, y\}$ ou $x \wedge y$.

Définition 1.2.6 .

[11] Soit (X, R) un ensemble partiellement ordonné flou, on appelle (X, R) un treillis flou si et seulement si $x \vee y$ et $x \wedge y$ existent pour tout x, y dans X .

Définition 1.2.7 .

[19] Soit (X, R) un treillis flou, pour tout x, y, z dans X on a:

1. $R(x, x \vee y) > 0, R(y, x \vee y) > 0, R(x \wedge y, x) > 0, R(x \wedge y, y) > 0$;
2. $R(x, z) > 0$ et $R(y, z) > 0 \implies R(x \vee y, z) > 0$;
3. $R(z, x) > 0$ et $R(z, y) > 0 \implies R(z, x \wedge y) > 0$;

4. $R(x, y) > 0 \iff x \vee y = y$;
5. $R(x, y) > 0 \iff x \wedge y = y$;
6. Si $R(y, z) > 0 \implies R(x \wedge y, x \wedge z) > 0$ et $R(x \vee y, x \vee z) > 0$.

1.3 Traces d'une relation floue et relation d'ordre qui respect une t-norme T et une T -équivalence E

1.3.1 Norme triangulaire.

Définition 1.3.1 .

[11] Une norme triangulaire $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ est une application tel que pour tout $x, y, z \in [0, 1]$ les quatre axiomes suivants sont satisfaits:

- (T1) Commutativité : $T(x, y) = T(y, x)$;
- (T2) Associativité : $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$;
- (T3) Monotonie : $T(x, y) < T(x, z)$ chaque fois que $y < z$;
- (T4) Condition aux limites : $T(x, 1) = x$.

Définition 1.3.2 .

[10] Si pour deux t-normes T_1 et T_2 on a $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, alors on dit que T_1 est plus forte que T_2 et nous écrivons $T_1 \leq T_2$.

Définition 1.3.3 .

[10] Soit T_1 et T_2 deux t-normes on dit que T_1 domine T_2 si seulement si pour tout $x, y, z, t \in [0, 1]$, on a $T_1(T_2(x, y), T_2(z, t)) \leq T_2(T_1(x, z), T_1(y, t))$.

Définition 1.3.4 .

[10] Pour une famille fini de t-normes $(T_i)_{i \in I}$ on dit que $(T_i)_{i \in I}$ vérifie la loi d'associativité généralisée si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $x, y, z \in [0, 1]$, on a

$$T_i(T_j(x, y), z) = T_i(x, T_j(y, z)).$$

Remarque 1.3.1 .

Entre les quatre t-normes de base, nous avons les inégalités strictes:

$$T_D < T_L < T_P < T_M$$

- i. Toute t-norme T domine elle meme.
- ii. La t-norme minimale T_M domine tout autre t-norme T .
- iii. Si une t-norme T_1 domine une autre t-norme T_2 , alors T_1 est plus fort que T_2 .

Exemple 1.3.1 .

Voici les quatre t-norms de base T_M, T_P, T_L et T_D données respectivement par:

$T_M(x,y) = \min(x,y)$	(Minimum)
$T_P(x,y) = x.y$	(Product)
$T_L(x,y) = \max(x+y-1; 0)$	(Lukasiewicz t-norm)
$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in]0,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{si non} \end{cases}$	(Drastic product)

tableau 1.1

Proposition 1.3.1 .

Tout t-norms T satisfait $T(0,x) = T(x,0) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1.3.2 Implication flous

Définition 1.3.5 .

[11] Une opération binaire $\Gamma : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ est un opérateur implicatif s'il remplit les conditions suivantes:

(I₁) $\Gamma(1,1) = \Gamma(0,1) = \Gamma(0,0) = 1$ et $\Gamma(1,0) = 0$;

(I₂) $x \leq z$ implique $\Gamma(x,y) \geq \Gamma(z,y)$;

(I₃) $y \leq z$ implique $\Gamma(x,y) \leq \Gamma(x,z)$;

(I₄) $\Gamma(0,y) = 1$;

Les propriétés les plus utilisées sont le tableau suivant:

I_5	$\Gamma(x, 1) = 1;$
I_6	$\Gamma(1, y) = 1;$
I_7	$\Gamma(x, \Gamma(y, z)) = \Gamma(y, \Gamma(x, z)) ;$
I_8	$x \leq y \rightarrow \Gamma(x, y) = 1;$
I_9	$N_\Gamma(x) = \Gamma(x, 0) \text{ si } NF;$
I_{10}	$N_\Gamma(x) = \Gamma(x, 0) \text{ si a NF continu};$
I_{11}	$N_\Gamma(x) = \Gamma(x, 0) \text{ si a NF fort};$
I_{12}	$\Gamma(x, y) \leq y$
I_{13}	$\Gamma(x, x) = 1;$
I_{14}	$\Gamma(x, y) = \Gamma(N(x), N(y)) ;$
I_{15}	$x > 0 \rightarrow \Gamma(x, y) < 1;$
I_{16}	$y < 0 \rightarrow \Gamma(1, y) < 1;$
I_{17}	$\Gamma \text{ si a continu};$
I_{18}	$\Gamma(x, y) = \Gamma(x, \Gamma(x, y)) ;$
I_{19}	$\Gamma(x, \Gamma(y, x)) = 1;$
I_{20}	$\Gamma(x, N(x)) = N(x) .$

tableau 1.2: Propriétés de Implication flous

1.3.3 Traces d'une relation floue

Définition 1.3.6 .

[3] Soit R une relation binaire floue sur un domaine X , et T une t -norme continue à gauche, la trace gauche (droite) du relation R , notée respectivement R^g , R^d est définie pour tout $x, y, z \in X$:

$$R^g(x, y) = \inf_{z \in X} \Gamma(R(z, x), R(z, y));$$

$$R^d(x, y) = \inf_{z \in X} \Gamma(R(y, z), R(x, z)).$$

Proposition 1.3.2 .

1. Pour une relation floue binaire R sur un domaine X et pour tout t -norme T continu à gauche, les trois énoncés suivants sont équivalents:

i. R est réflexive;

ii. $R^g \subseteq R$;

iii. $R^d \subseteq R$.

2. Pour une relation floue binaire R sur un domaine X et pour tout t -norme T continu à gauche, les trois énoncés suivants sont équivalents:

i. R est T -transitive;

ii. $R \subseteq R^g$;

iii. $R \subseteq R^d$.

1.3.4 Relation T -équivalence et T - E -ordre

Définition 1.3.7 .

Soit E une relation binaire sur X et soit T une t -norme, on dit que E est T -transitive si et seulement si pour tout $x, y, z \in X$, $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$.

Définition 1.3.8 .

Soit E une relation binaire sur X et soit T une t -norme, on dit que E est une relation T -équivalence floue sur X si et seulement si elle est réflexive, symétrique et T -transitive.

Définition 1.3.9 .

[11, 27] Soit X un ensemble non vide, et soit E une relation binaire T -équivalence floue sur X . Une relation binaire floue L sur X , est dite un ordre flou qui respecte la t -norme T est la relation T -équivalence E notée brièvement T - E -ordre si et seulement si elle est T -transitive et remplit les deux axiomes suivants:

1. E -réflexive i.e, pour tout $x, y \in X$, $E(x, y) \leq L(x, y)$,

2. T-E-antisymtrique i.e, pour tout $x, y \in X, T(L(x, y), L(y, x)) \leq E(x, y)$.

Remarque 1.3.2 .

la relation E est le plus petit T-E-ordre.

1.4 Filtre classique et Filtre flou

Définition 1.4.1 .

[7] Soit L un treillis, On appelle filtre dans le treillis L tout partie non vide F de L vérifiant les deux conditions suivantes:

1. $x \in F, y \geq x$ alors $y \in F$;
2. $x \in F$ et $y \in F$ alors $x \wedge y \in F$.

Définition 1.4.2 .

[6, 22] Soit (X, R) un treillis flou, F est un sous-ensemble flou de X . F est dit un filtre flou si ce qui suit est valable pour tout $x, y \in X$.

1. $F(x) > 0$ et $R(x, y) > 0$, alors $F(y) > 0$;
2. $F(x) > 0$ et $F(y) > 0$, alors $F(x \wedge y) > 0$.

Un filtre flou F est dit un filtre premier flou si $F(x \vee y) \leq F(x) \vee F(y)$ pour tout $x, y \in X$.

Un filtre F est dit maximal, si pour tout sous ensemble G de X , $F(x) \leq G(x)$ pour tout $x \in X$, implique que $F = G$.

Chapitre 2

Agrégation de certaines familles finies d'ensembles flous

2.1 Fonction d'agrégation

Notation 2.1.1 .

On note par \vec{x} au (x_1, \dots, x_n) telle que $x_i \in [0, 1]$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définition 2.1.1 .

[9] Une fonction d'agrégation est une fonction $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes:

- i. $f(\underbrace{0, \dots, 0}) = \vec{0}$ et $f(\underbrace{1, \dots, 1}) = \vec{1}$;
- ii. $x_i \leq y_i$ implique $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$ pour tout $x_i, y_i \in [0, 1]$ et $1 \leq i \leq n$.

Définition 2.1.2 .

[24] Une agrégation de n -aire est une application $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ remplissant les conditions suivantes pour tout \vec{x}, \vec{y}

(a) $A(\vec{1}) = 1; A(\vec{0}) = 0;$

(b) Si pour tout $i \in I; x_i \leq y_i$ alors $A(\vec{x}) \leq A(\vec{y});$

1. Une agrégation A est dite être conjointement strictement monotone si pour tout les $\vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^n$ avec $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$ alors $A(\vec{x}) \leq A(\vec{y})$.

2. Une agrégation A est dite idempotente si pour tout $x \in [0, 1]$, $A(x, \dots, x) = x$ (propriété d'idempotence).

3. Une agrégation A est dite sans diviseur nul autre que 0, si si et seulement si et seulement si

$$A(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0 \text{ ou, \dots, ou } x_n = 0.$$

4. Une agrégation A est dite continu a (gauche)droite pour la première composante si pour tout séquence non croissante (non décroissante) $(x_i)_{i \in I}$

$$\lim_n A(x_n, y) = A(\lim_n x_n, y).$$

Remarque 2.1.1 .

(a) Soient $\vee, \wedge : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ deux fonction idempotentes binaires définies

$\vee(x, y) = \max(x, y)$ et $\wedge(x, y) = \min(x, y)$, Danc A est une fonction d'agregation idempotente, alors $\vee(x, y) \leq A(x, y) \leq \wedge(x, y)$ pour tout $x, y \in [0, 1]$.

(b) Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^n$ on a:

1. $A(\vec{x} \vee \vec{y}) \geq A(\vec{x}) \vee A(\vec{y})$ ou $\vec{x} \vee \vec{y} = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$.

2. $A(\vec{x} \wedge \vec{y}) \leq A(\vec{x}) \wedge A(\vec{y})$ ou $\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$.

3. $(A(\vec{x} \wedge \vec{y}))^2 \leq A(\vec{x}) \cdot A(\vec{y})$ ou $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n)$.

Définition 2.1.3 .

Une agrégation A_1 domine une autre agrégation A_2 si et seulement si l'inégalité suivants soit suivants pour tout $x, y, u, v \in [0, 1]$.

$$A_1(A_2(x, y), A_2(u, v)) \leq A_2(A_1(x, u), A_1(y, v)).$$

Définition 2.1.4 .

[24] Soit $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une fonction d'agregatin et $\mathcal{L} = \{L_i : X^K \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ une famille de relation K -aires floues sur un domaine X . $A(\mathcal{L}.A)$ une relation K -aires sur X notée par \mathcal{L}_A est obtenu comme la composition donnée par:

$$\mathcal{L}_A(x_1, \dots, x_K) = A(L_1(x_1, \dots, x_K), \dots, L_n(x_1, \dots, x_K)).$$

Définition 2.1.5 .

[11] Soit $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une fonction d'agrégation et $\mathcal{L} = \{L_i : X^2 \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ une famille des relations binaires floues sur un domaine X . $A(\mathcal{L}.A)$ une relation binaires flous sur X notée par \mathcal{L}_A est obtenu comme la composition donnée par:

$$\mathcal{L}_A(x, y) = A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y)).$$

Définition 2.1.6 .

[11] Soient $(X_i, R_i)_{i \in I}$ une famille de treillis flou, $(F_i)_{i \in I}$ une famille des sous-ensembles flous de X_i et $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation. R_A, F_A deux relations définis sur $(\prod_{i=1}^n X_i)^2$, $(\prod_{i=1}^n X_i)$ respectivement par:

$$R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n));$$

$$F_A(x_1, \dots, x_n) = A(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Proposition 2.1.1 .

[11] Soit T_M la t -norme minimale.

L'agrégation $T_{M(\alpha, \beta)}$ défini par:

$$T_{M(\alpha, \beta)}(x, y) = x^\alpha \wedge y^\beta, \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ est bidomine } T_M.$$

(1) $T_{M(\alpha, \beta)}$ est une agrégation.

(2) $T_{M(\alpha, \beta)}$ bidomine T_M .

Démonstration. .

(1) On montre que $T_{M(\alpha, \beta)}$ est une agrégation.

1. $T_{M(\alpha, \beta)}(0, 0) = 0^\alpha \wedge 0^\beta = 0$ et $T_{M(\alpha, \beta)}(1, 1) = 1^\alpha \wedge 1^\beta = 1$.

2. Si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$ donc, $x_1^\alpha \leq x_2^\alpha$ et $y_1^\beta \leq y_2^\beta$, implique que $x_1^\alpha \wedge y_1^\beta \leq x_2^\alpha \wedge y_2^\beta$ alors,

$$T_{M(\alpha,\beta)}(x_1, y_1) \leq T_{M(\alpha,\beta)}(x_2, y_2).$$

donc $T_{M(\alpha,\beta)}$ est une agrégation.

(2) Soit $x, y, z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} T_M(T_{M(\alpha,\beta)}(x, y), T_{M(\alpha,\beta)}(u, v)) \\ &= (x^\alpha \wedge y^\beta) \wedge (u^\alpha \wedge v^\beta) \\ &= (x^\alpha \wedge u^\alpha) \wedge (y^\beta \wedge v^\beta) \\ &= (x \wedge u)^\alpha \wedge (y \wedge v)^\beta \\ &= T_{M(\alpha,\beta)}(T_M(x, u), T_M(y, v)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 .

1. Contrairement aux t-normes, il existe des agrégations qui ne se dominent pas.
2. Si une agrégation A_1 domine une autre agrégation A_2 , il n'est pas nécessairement que A_1 soit plus forte que A_2 .
3. L'agrégation minimale domine toutes les autres agrégations.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \text{ Soit } A(x, y) &= \frac{x^2+y^2}{2} \\ A(A(x, y), A(u, v)) &= A\left(\frac{x^2+y^2}{2}, \frac{u^2+v^2}{2}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2}{2} \\ &= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4+u^4+2u^2v^2+v^4}{8} \text{ .et} \\ A(A(x, u), A(y, v)) &= A\left(\frac{x^2+u^2}{2}, \frac{y^2+v^2}{2}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{x^2+u^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y^2+v^2}{2}\right)^2}{2} \\ &= \frac{x^4+2x^2u^2+u^4+y^4+2y^2v^2+v^4}{8} \text{ .} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $A(A(x, y), A(u, v)) \leq A(A(x, u), A(y, v))$ n'est pas vérifié ni $A(A(x, u), A(y, v)) \leq A(A(x, y), A(u, v))$. Par conséquent, A ne se domine pas.

2. On montre que $T_{M(2,2)}$ domine T_P cela signifie que pour tout $x, y, u, v \in [0, 1]$ l'inégalité $T_{M(2,2)}(T_P(x, y), T_P(u, v)) \geq T_P(T_{M(2,2)}(x, u), T_{M(2,2)}(y, v))$ est vérifiée. Cela équivaut à $(xy)^2 \wedge (uv)^2 \geq (x^2 \wedge u^2) (y^2 \wedge v^2)$.

Pour montrer cela, nous avons quatre cas possibles comme dans le tableau 2.1.

Cas	$(x \leq u)$	$(y \leq v)$	\Leftrightarrow
a	1	1	$(x \leq u) \wedge (y \leq v)$
b	1	0	$(x \leq u) \wedge (v < y)$
c	0	1	$(u < x) \wedge (y \leq v)$
d	0	0	$(u < x) \wedge (v < y)$

tableau 2.1

Cas (a) si $x \leq u$ et $y \leq v$ en suite $x^2 \leq u^2$ et $y^2 \leq v^2$ qui donne $x^2y^2 \leq u^2v^2$, par conséquent $(xy)^2 \wedge (uv)^2 = (x^2y^2) \wedge (u^2v^2) = x^2y^2$.

Evidemment que $(x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2) = x^2y^2$.

Donc $(xy)^2 \wedge (uv)^2 = (x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2)$.

Cas (b) si $x \leq u$ et $v \leq y$ en suite $x^2 \leq u^2$ et $v^2 \leq y^2$,

implique que $(x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2) = x^2y^2$.

Et $x^2v^2 \leq u^2v^2$ et $v^2x^2 \leq y^2x^2$,

ce qui implique que $x^2v^2 \leq (u^2v^2) \wedge (y^2x^2)$.

En conséquence, $(xy)^2 \wedge (uv)^2 \geq (x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2)$.

Cas (c) si $u \leq x$ et $y \leq v$ en suite $u^2 \leq x^2$ et $y^2 \leq v^2$,

implique que $(x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2) = x^2y^2$.

Et $u^2y^2 \leq x^2y^2$ et $u^2y^2 \leq v^2u^2$,

donc $u^2y^2 \leq (x^2y^2) \wedge (v^2u^2)$.

En conséquence $(xy)^2 \wedge (uv)^2 \geq (x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2)$.

Cas (d) si $u \leq x$ et $v \leq y$ en suite $u^2 \leq x^2$ et $v^2 \leq y^2$.

Par conséquent $(x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2) = u^2v^2$.

Et $u^2v^2 < x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2y^2) \wedge (u^2v^2) = u^2v^2$,

en suite $(xy)^2 \wedge (uv)^2 = (x^2 \wedge u^2)(y^2 \wedge v^2)$.

On peut voir que les assertions a, b, c et d donnent,

pour tout $x, y, u, v \in [0, 1]$,

$$T_{M(2,2)}(T_P(x, y), T_P(u, v)) \geq T_P(T_{M(2,2)}(x, u), T_{M(2,2)}(y, v)).$$

Par conséquent $T_{M(2,2)}$ domine T_P .

Mais $T_{M(2,2)}(x, y) \leq T_P(x, y)$ pour tout $x, y \in [0, 1]$.

En effet, si $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$,

alors $T_{M(2,2)}(x, y) = x^2 \wedge y^2 = x^2 \leq xy = T_P(x, y)$.

Pour $y < x$, $T_{M(2,2)}(x, y) = x^2 \wedge y^2 = y^2 < T_P(x, y)$

par conséquent $T_{M(2,2)}$ n'est pas plus fort que T_P .

2.2 Agrégation d'une famille finie des relations binaires flous

Proposition 2.2.1 .

[11] Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille des ensembles non vides, $(R_i)_{i \in I}$ une famille des relations binaires flous sur $(X_i)_{i \in I}$, $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation et R_A une relation floue définie sur $(\prod_{i=1}^n X_i)^2$ par:

$$R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)).$$

1. R_i est reflexive pour tout $i \in I$, alors R_A est reflexive;
2. R_i est symtrique pour tout $i \in I$, alors R_A est symtrique;

Si l'agrégation A est difini comme suite $A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors

3. R_i est antisymtrique pour tout $i \in I$, alors R_A est antisymtrique;
4. R_i est transitive pour tout $i \in I$, alors R_A est transitive.

Démonstration.

(1) On montre que l'agrégation des relations reflexives est une relation reflexive :

On suppose que R_i est reflexive pour tout $i \in I$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\prod_{i=1}^n X_i)$.

$$R_A((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = A(R_1(x_1, x_1), \dots, R_n(x_n, x_n)) = A(1, \dots, 1) = 1.$$

donc R_A est reflexive.

(2) On montre que l'agrégation des relations symtriques est une relation symtrique:

Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$,

On suppose que R_i est symtrique pour tout $i \in I$.

$$\begin{aligned} & R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \\ &= A((R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n))) \\ &= A(R_1(y_1, x_1), \dots, R_n(y_n, x_n)) \\ &= R_A((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Donc R_A est symtrique.

(3) On montre que l'agrégation des relations antisymtriques est une relation antisymtrique

Soient $(R_i)_{i \in I}$ une famille fini des relations antisymtrique (respctivment transitive), si

la

agrégation A defini par :

$A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$, donc R_A est une relation antisymtrique (respctivment transitive).

On suppose que R_i est antisymtrique pour tout $i \in I$.

i.e : pour tout $x_i, y_i \in X_i$ $R_i(x_i, y_i) \wedge R_i(y_i, x_i) > 0$ implique $x_i = y_i$.

Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$,

$$\begin{aligned} & R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \wedge R_A((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n)) \\ &= A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)) \wedge A(R_1(y_1, x_1), \dots, R_n(y_n, x_n)) \\ &= A(R_1(x_1, y_1) \wedge R_1(y_1, x_1), \dots, R_n(x_n, y_n) \wedge R_n(y_n, x_n)) > 0, \end{aligned}$$

ça signifie que $R_i(x_i, y_i) \wedge R_i(y_i, x_i) > 0$

pour tout $i \in I$, donc $y_i = x_i$ pour tout $i \in I$ et donc $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$.

Donc R_A est antisymtrique.

(4) On montre que l'agrégation des relations transitives est une relation transitive.

On suppose que R_i est transitive pour tout $i \in I$, *i.e*, pour tout $x_i, y_i, z_i \in X_i$,

an a $R_i(x_i, y_i) \wedge R_i(y_i, z_i) \leq R_i(x_i, z_i)$.

Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$,

$$\begin{aligned} & R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \wedge R_A((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) \\ &= A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)) \wedge A(R_1(y_1, z_1), \dots, R_n(y_n, z_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(R_1(x_1, y_1) \wedge R_1(y_1, z_1), \dots, R_n(x_n, y_n) \wedge R_n(y_n, z_n)) \leq A(R_1(x_1, z_1), \dots, R_n(x_n, z_n)) \\
&= R_A((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)). \text{Donc } R_A \text{ est transitive. } \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 .

Soient $(X_i, R_i)_{i \in I}$ une famille finie de treillis et $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation définie par $A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ alors, R_A est un ordre sur $(\prod_{i=1}^n X_i)$.

Corollaire 2.2.2 .

[11] Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille des ensembles non vides, $(R_i)_{i \in I}$ une famille des relations binaires telle que pour tout $i \in I$, R_i est une relation d'équivalence sur X_i . $A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ une agrégation alors la relation R_A défini sur $(\prod_{i=1}^n X_i)$ par:

$$\begin{aligned}
&R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \\
&= A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)) \text{ est une relations binaires d'équivalence:}
\end{aligned}$$

Démonstration. .

La demonstretion de cette corollaire deceule drectement de le **Proposition 2.2.1** et la Corollaire précédente. \blacksquare

Proposition 2.2.2 .

[11] Soit T une t -norme est $(L_i)_{i \in I}$ une famille de T -préordre sur un domaine X et soit A une agrégation sans zéro diviseur autre que zéro qui domine T . Alors la relation \mathcal{L}_A définie par:

$$\mathcal{L}_A(x, y) = A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y)).$$

Est un T - E_A -ordre telle que

$$E_A(x, y) = A(T(L_1(x, y), L_1(y, x)), \dots, T(L_n(x, y), L_n(y, x))).$$

Démonstration.

Premièremnt, montrons que E_A est une relation T -équivalence, pour tout $x \in X$,

$E_A(x, x) = 1$, donc E_A est réflexive.

Clairement, $E_A(x, y) = E_A(y, x)$ pour tout $x, y \in X$. Alors E_A est symétrique.

Pour prouver la T-transitivité, soit $x, y, z \in X$.

$$\begin{aligned}
& T(E_A(x, y), E_A(y, x)) \\
&= T(A(T(L_1(x, y), L_1(y, x)), \dots, T(L_n(x, y), L_n(y, x))), \\
&A(T(L_1(y, z), L_1(z, y)), \dots, T(L_n(y, z), L_n(z, y)))) \\
&\leq A(T(T(L_1(x, y), L_1(y, x)), T(L_1(y, z), L_1(z, y))), \dots, \\
&T(T(L_n(x, y), L_n(y, x)), T(L_n(y, z), L_n(z, y)))) \\
&\leq A(T(T(L_1(x, y), L_1(y, z)), T(L_1(y, x), L_1(z, y))), \dots, \\
&T(T(L_n(x, y), L_n(y, z)), T(L_n(y, x), L_n(z, y)))) \\
&= A(T(T(L_1(x, y), L_1(y, z)), T(L_1(z, y), L_1(y, x))), \dots, \\
&T(T(L_n(x, y), L_n(y, z)), T(L_n(z, y), L_n(y, x)))) \\
&\leq A(T(L_1(x, z), L_1(z, x)), \dots, T(L_n(x, z), L_n(z, x))). \\
&= E_A(x, z). \text{ Selon la définition } E_A.
\end{aligned}$$

Donc E_A est T-transitive. Par conséquence E_A est une relation T-équivalence.

Deuxièmement. Pour prouver que \mathcal{L}_A est T- E_A -ordre, soit $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
& E_A(x, y) = A(T(L_1(x, y), L_1(y, x)), \dots, T(L_n(x, y), L_n(y, x))). \\
&\leq A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y)), \text{ en utilisant } T(x, y) \leq x \\
&= \mathcal{L}_A(x, y), \text{ par la définition de } \mathcal{L}_A.
\end{aligned}$$

Par conséquence, \mathcal{L}_A est E_A -réflexive.

Soient $x, y \in X$.

$$\begin{aligned}
& T(\mathcal{L}_A(x, y), \mathcal{L}_A(y, x)) \\
&= T(A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y)), A(L_1(y, x), \dots, L_n(y, x))) \\
&\leq A(T(L_1(x, y), L_1(y, x)), \dots, T(L_n(x, y), L_n(y, x))) \\
&= E_A(x, y).
\end{aligned}$$

Donc \mathcal{L}_A est T- E_A -antisymétrique.

Enfin, on prouve que \mathcal{L}_A est T-transitive. Soit $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned}
& T(\mathcal{L}_A(x, y), \mathcal{L}_A(y, z)) \\
&= T(A(L_1(x, y), \dots, L_n(x, y)), A(L_1(y, z), \dots, L_n(y, z))) \\
&\leq A(T(L_1(x, y), L_1(y, z)), \dots, A(L_n(x, y), L_n(y, z)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq A(L_1(x, z), \dots, L_n(x, z)) \\ &= \mathcal{L}_A(x, z). \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de \mathcal{L}_A est un T - E_A -ordre. ■

2.3 Agrégation des traces des relations binaires floues

[4, 8, 12, 15, 18] Dans ce qui suit, nous définirons l'agrégation des relations binaires.

Définition 2.3.1 .

Soient $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation idempotente et $\{T_1, \dots, T_n\}$ une famille de t -normes. Définir l'agrégation T_A de la famille $\{T_1, \dots, T_n\}$ par:

$$T_A(x, y) = A(T_1(x, y), T_2(x, y), \dots, T_n(x, y)).$$

Remarque 2.3.1 .

Pour une famille $\{T_1, \dots, T_n\}$ de t -normes distributive et généralement associative alors l'agrégation T_A est une t -norme continue à gauche.

Définition 2.3.2 .

Soit T_A une t -norme continue à gauche donné dans **Définition 2.5.1**, et l'implication résiduelle Γ associée à T_A , et R une relation binaire floue sur un domaine X . La trace gauche (resp, droite) de R notée R_A^g respectivement R_A^d est définie comme suit pour tout $x, y, z \in X$:

$$R_A^g(x, y) = \inf_{z \in X} \Gamma(R(z, x), R(z, y)).$$

$$R_A^d(x, y) = \inf_{z \in X} \Gamma(R(x, z), R(y, z)).$$

Maintenant, nous caractérisons l'agrégation d'une famille finie de relation de trace gauche et droite d'une relation floue R en terme d'un implication floue d'agrégation.

Définition 2.3.3 .

Soit A une agrégation sur $[0, 1]$, R une relation binaire floue sur un domaine X , $\{\Gamma_i/i \in I\}$ une famille d'implication résiduelles et $R_{\Gamma}^g, R_{\Gamma}^d$ la trace gauche (resp.droite) correspondante à R . On défini les relations L_A^g, L_A^d comme suit:

$$\begin{aligned} L_A^g(x, y) &= A(R_{\Gamma_1}^g(x, y), \dots, R_{\Gamma_n}^g(x, y)) \\ &= A(\inf_{z \in X} \Gamma_1(R(z_1, x), R(z_1, y)), \dots, \inf_{z_n \in X} \Gamma_n(R(z_n, x), R(z_n, y))). \\ L_A^d(x, y) &= A(R_{\Gamma_1}^d(x, y), \dots, R_{\Gamma_n}^d(x, y)) \\ &= A(\inf_{z_1 \in X} \Gamma_1(R(y, z_1), R(x, z_1)), \dots, \inf_{z_n \in X} \Gamma_n(R(y, z_n), R(x, z_n))). \end{aligned}$$

La proposition suivante établit la relation entre R, L_A^g, L_A^d pour une relation donnée R et une agrégation A .

Proposition 2.3.1 .

Soient R est une relation floue sur un domaine X , $\{\Gamma_i/i \in I\}$ une famille d'implication floue et A est une agrégation sur $[0, 1]$.les trois énoncés suivants sont équivalents.

- 1 R est reflexive;
2. $L_A^g \subset R$;
3. $L_A^d \subset R$.

Démonstration. .

(1) implique (2), on suppose que R est reflexive, pour tout $i \in I, R_i^g \subset R$. Alors, pour tout $x, y \in X, A(R_{\Gamma_1}^g(x, y), \dots, R_{\Gamma_n}^g(x, y)) \leq A(R(x, y), \dots, R(x, y)) = R(x, y)$. donc $L_A^g \subset R$.

(1) implique (3) est obtenu de le meme manière.

(2) implique (1) pour tout $x, y \in X$, on a $L_A^g(x, y) \leq R(x, y)$, on suppose que $x = y$. Alors $R(x, x) \geq L_A^g(x, x) = A(R_A^g(x, x), \dots, R_A^g(x, x)) = A(1, \dots, 1) = 1$. Donc, R est reflexive.

(3) implique (1) est obtenu de le meme manière. ■

Proposition 2.3.2 .

Soient R est une relation floue sur un domaine X , $\{T_i/i \in I\}$ une famille de t -norme continue à gauche, $\{\Gamma_i/i \in I\}$ une famille d'implication résiduelles floues correspondante et A une agrégation idepotent sur $[0, 1]$, telle que:

1. Si pour tout $i \in I$, R est T-transitive, alors $R \subset L_A^g$.

2. Si pour tout $i \in I$, R est T-transitive, alors $R \subset L_A^d$.

Démonstration. .

(1) Pour la première assertion, on suppose que R est T_i -transitive alors pour tout $i \in I$, on obtient $R \subset R_i^g$. Alors $R(x, y) \leq R_i^g(x, y)$, donc

$$\begin{aligned} R(x, y) &= A(R(x, y), \dots, R(x, y)) \\ &\leq A(R_1^g(x, y), \dots, R_n^g(x, y)) = L_A^g(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X. \end{aligned}$$

(2) La deuxième assertion peut être prouvée de la même manière. ■

Chapitre 3

Agrégation d'une famille finie des treillis flous et filters flous

3.1 Agrégation d'une famille finie des treillis flous

Proposition 3.1.1 .

[11] Soient $(X_i, R_i)_{i \in I}$ une famille fini de treillis complets flous, A une fonction d'agrivation défini par $A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ et B_i un sous-ensemble de X_i . Si u_i est le plus grand élément, borne supérieur (respectivement l_i le plus petit élément, borne inférieure) de B_i . pour tout $i \in I$, alors (u_1, \dots, u_n) est le plus grand élément, borne supérieur (respectivement (l_1, \dots, l_n) le plus petit élément, borne inférieure) de $\prod_{i=1}^n B_i$. On outre, $\left(\prod_{i=1}^n X_i, R_A\right)$ est un treillis complets flou.

Démonstration.

Selon le **corollaire 2.2.1**, le couple $\left(\prod_{i=1}^n X_i, R_A\right)$ est un ensemble ordone. Supposons que l_i est le plus petit élément borne inférieure de B_i pour tout $i \in I$. Montrons que (l_1, \dots, l_n) est le plus petit élément (borne inférieure) de $\prod_{i=1}^n B_i$ en effet,

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n B_i$, puisque $R(l_i, x_i) > 0$ pour tout $i \in I$, donc

$R_A((l_1, \dots, l_n), (x_1, \dots, x_n)) = A(R_1(l_1, x_1), \dots, R_n(l_n, x_n)) > 0$. Par conséquent, (l_1, \dots, l_n) est une borne inférieure de $\prod_{i=1}^n B_i$. Supposons qu'il existe une autre borne inférieure $(l'_1, \dots, l'_n) \in$

$\prod_{i=1}^n B_i$ plus grand que (l_1, \dots, l_n) . On a donc $R_A((l_1, \dots, l_n), (l'_1, \dots, l'_n)) > 0$, ce qui implique que $A(R_1(l_1, l'_1), \dots, R_n(l_n, l'_n)) > 0$, ce qui équivaut à $R_i(l_i, l'_i) > 0$ pour tout $i \in I$. Mais ce qui contredit le fait que l_i est le plus petit élément, (borne inférieure) de B_i . Donc (l_1, \dots, l_n) est la plus borne inférieure de $\prod_{i=1}^n B_i$. De même manière, nous prouvons que (u_1, \dots, u_n) est le plus petit élément (borne supérieure) de $\prod_{i=1}^n B_i$. Soit B un sous-ensemble arbitraire de $\prod_{i=1}^n X_i$. Alors il existe une famille de sous-ensembles $(B_i)_{i \in I}$ dans $(X_i)_{i \in I}$ tel que $B = \prod_{i=1}^n B_i$. Puisque (X_i, R_i) est un treillis complet pour tout $i \in I$, alors pour tout sous-ensemble B_i dans X_i , il existe une borne inférieure l_i et une borne supérieure u_i dans B_i . Donc le sous-ensembles B a une borne inférieure (l_1, \dots, l_n) et une borne supérieure (u_1, \dots, u_n) . Par conséquent, $(\prod_{i=1}^n X_i, R_A)$ est un treillis flou complet. ■

3.2 Agrégation d'une famille finie des filters flous

Définition 3.2.1 .

[24] Soit (X, R) un treillis flous, $F = \{F_i : X \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ une famille de sous-ensembles flous de X , et $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation sur $[0, 1]$. Le (A, F) défini sur X par $F_A : X \rightarrow [0, 1]$, est obtenu comme la composition donnée par:

$$F_A(x) = A(F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Si $F = \{F_i : X \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ une famille filter floue, F_A n'est par necessairement un filtre.

Exemple 3.2.1 .

Soit (X, R) un treillis flous avec $X = \{0, a, b, c, d, 1\}$ et R est une relation flou donné le tableau suivant:

R	0	a	b	c	d	1
0	1.0	0.3	1.4	0.6	0.7	0.8
a	0.0	1.0	0.0	0.5	0.0	0.7
b	0.0	0.0	1.0	0.0	0.9	0.9
c	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.3
d	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.4
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

tableau 3.1

Définir trois filtres flous F_1, F_2 et F_3 comme dans le tableau suivant:

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
0	0.0	0.0	0.0
a	0.2	0.0	0.0
b	0.0	0.0	0.3
c	0.4	0.7	0.0
d	0.0	0.0	0.6
1	0.5	0.9	0.8

tableau 3.2

Et $A(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$. Alors F_A est donné par le tableau suivant:

x	$F_A(x)$
0	0.0
a	$\frac{0.2}{3}$
b	0.1
c	$\frac{1.1}{3}$
d	0.2
1	$\frac{2.2}{3}$

tableau 3.3

Il est facile de vérifier que F_A n'est pas un filtre flou. En effet, $F_A(a) = \frac{0.2}{3} > 0$ et $F_A(b) = 0.1 > 0$ mais $F_A(a \wedge b) = F_A(0) = 0$ (la seconde condition n'est pas satisfaite). Inversement, on peut définir F_A comme un filtre flou sur X comme dans le tableau suivant:

x	$F_A(x)$
0	0.0
a	$\frac{0.4}{3}$
b	0.0
c	0.2
d	0.0
1	$\frac{2.7}{3}$

tableau 3.4

Choisissez sons F_1, F_2 et F_3 par exemple comme dans le tableau suivantes:

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
0	0.0	0.0	0.0
a	0.2	0.1	0.1
b	0.0	0.0	0.0
c	0.4	0.2	0.0
d	0.0	0.0	0.0
1	0.5	0.0	0.2

tableau 3.5

Clairement, F_2 et F_3 ne sont pas des filtres flous .

Maintenant, nous donnons une condition suffisante sous laquelle une agrégation d'une famille de filtres flous est un filtre flou.

Proposition 3.2.1 .

[11] Soit (X, R) un treillis flous, $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ une agrégation telle que A n'a par de diviseur nul autre que 0 et soit $F = \{F_i : X \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ une famille de sous-ensemble flou de X . Si F une famille de filtres flous de (X, R) .

Alors $F_A(x) = A(F_1(x), \dots, F_n(x))$ est un filtre flous de (X, R) .

Démonstration. .

(a) Supposons que $F = \{F_i : X \rightarrow [0, 1], i \in I\}$ est une famille de filtre flou de (X, R) et A une agrégation sur $[0, 1]$ n'a par de diviseur nul autre que 0, i.e.,

$$A(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } x_n = 0.$$

Soient $x, y \in X$ tel que $F_A(x) > 0$ et $R(x, y) > 0$ cesi équivalent à

$$A(F_1(x), \dots, F_n(x)) > 0 \text{ et } R(x, y) > 0, \text{ ce qui implique que}$$

$F_i(x) > 0$ et $R(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Par conséquent

$F_i(y) > 0$ pour tout $i \in I$, ce qui implique que

$$A(F_1(y), \dots, F_n(y)) > 0. \text{ Donc, } F_A(y) > 0.$$

(b) Soient $x, y \in X$ tel que $F_A(x) > 0$ et

$$F_A(y) > 0, \text{ ça signifie que } A(F_1(x), \dots, F_n(x)) > 0$$

et $A(F_1(y), \dots, F_n(y)) > 0$, par conséquent

$$F_i(x) > 0 \text{ et } F_i(y) > 0 \text{ pour tout } i \in I,$$

ce qui résulte que $F_i(x \wedge y) > 0$ pour tout $i \in I$

$$\text{ce qui implique que } A(F_1(x \wedge y), \dots, F_n(x \wedge y)) > 0.$$

Donc $F_A(x \wedge y) > 0$. Par conséquent F_A est un filtre flou de (X, R) . ■

Remarque 3.2.1 .

L'inverse de la proposition 3.2.1 n'est pas vrai. En effet, prenons R comme dans Tableau 3.6.

R	0	a	b	c	d	1
0	1.0	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8
a	0.0	1.0	0.4	0.3	0.5	0.7
b	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	0.9
c	0.0	0.0	0.0	1.0	0.2	0.3
d	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.8
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

tableau 3.6

Et $A(x, y, z) = x \wedge y \wedge z$, prenons F_A comme dans le tableau 3.7.

x	$F_A(x)$
0	0.0
a	0.0
b	0.0
c	0.0
d	0.3
1	0.5

tableau 3.7

Et choisissons F_1 , F_2 , et F_3 , par exemple comme dans tableau 3.8.

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
0	0.0	0.0	0.0
a	0.0	0.0	0.0
b	0.2	0.0	0.3
c	0.2	0.3	0.0
d	0.3	0.4	0.3
1	0.5	0.6	0.7

tableau 3.8

Il est facile de voir que F_A est un filtre, mais F_1, F_2 et F_3 ne sont pas tous des filtres (F_1 n'est pas un filtre).

Remarque 3.2.2 .

Soit R une relation floue définie sur l'ensemble $X = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ par le tableau 3.9.

R	0	b	c	d	1
0	1.0	0.4	0.6	0.7	0.8
b	0.0	1.0	0.0	0.4	0.7
c	0.0	0.0	1.0	0.2	0.7
d	0.0	0.0	0.0	1.0	0.8
1	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

tableau 3.9

Aussi, soit F_1 et F_2 deux filtres et F_A leur agrégation comme dans le tableau 3.10.

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_A(x)$
0	0.0	0.0	0.0
b	0.3	0.0	0.0
c	0.0	0.2	0.0
d	0.6	0.4	0.4
1	0.8	0.7	0.7

tableau 3.10

Mettre $F_A(x) = \inf(F_1(x), F_2(x))$.

Proposition 3.2.2 .

[9] Soit $(X_i, R_i)_{i \in I}$ une famille de treillis flous, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de filter flou telle que $F_i : X_i \rightarrow [0, 1]$ et $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ est une agrégation défini par :

$$A(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}, \text{ et } \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*.$$

Soit R_A et F_A deux ensembles flous défini sur $(\prod_{i=1}^n X_i)^2$ et $\prod_{i=1}^n X_i$ par:

$$R_A((x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)) = A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)) \text{ et}$$

$$F_A(x) = A(F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

respectivement. Si F_i est un filter flou sur (X_i, R_i) pour tout $i \in I$, alors F_A est un filter flou sur $(\prod_{i=1}^n X_i, R_A)$.

Démonstration. .

(a) Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\prod_{i=1}^n X_i)$, telle que $F_A(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $R_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) > 0$.

Cela équivaut à $A(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) > 0$ et

$A(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n)) > 0$

c'est-à-dire, $F_i(x_i) > 0$ et $R_i(x_i, y_i) > 0$

pour tout $i \in I$, donc $F_i(y_i) > 0$ pour tout

$i \in I$.

Par conséquent $A(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)) > 0$,

i.e., $F_A(y_1, \dots, y_n) > 0$.

(b) Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\prod_{i=1}^n X_i)$ telle que $F_A(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $F_A(y_1, \dots, y_n) > 0$.

C'est équivalent à $A(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) > 0$ et $A(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)) > 0$.

Par conséquent $F_i(x_i) > 0$ et $F_i(y_i) > 0$ pour tout $i \in I$, cela implique que

$F_i(x_i \wedge y_i) > 0$ pour tout $i \in I$,

et cela implique que $A(F_1(x_1 \wedge y_1), \dots, F_n(x_n \wedge y_n)) > 0$,

ça signifie $F_A(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n) > 0$.

Par conséquent, $F_A((x_1, \dots, x_n), \dots, (y_n, \dots, y_n))$, ce qui complète la preuve de cette proposition. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a fait étudier l'agregation des famille finie et discuter à cet égard des classes particulières, relation floue, filtre flou et treillis flou, et donner le lien entre les famille et leurs image par l'agregation. Enfin, nous donnons des exemples d'agregation de quelques familles.

Bibliographie

- [1] A. Amroune, Cours, Logique algébrique et Mathématique floue, Master 2, Université de M'sila, Septembre 2020.
- [2] A. Amroune, Cours, Ordre et treillis, Master 1, Université de M'sila, Mars 2021.
- [3] A. Amroune, Cours, Théorie des relations, Master 1, Université de M'sila, Septembre 2020.
- [4] A. Amroune, A. Bouad, Aggregating fuzzy binary relations and Fuzzy filters, *Discussions Mathematicae Genral Algebra and Applications*, 38 (2) (2018) 273-296.
- [5] A. Amroune, and B. Dawaz. "Fuzzy ordered sets and duality for finite fuzzy distributive lattices." *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 8.5 (2011): 1-12.
DOI:10.7151/dmgaa.1293
- [6] A. Amroune, A. Oumhani, and B. Dawaz. "Kinds of t-fuzzy Filters of Fuzzy Lattices." *Fuzzy Information and Engineering* 9.3 (2017): 325-343.
- [7] A. Amroune, and B. Ziane "More on Intuitionistic Fuzzy sublattices and their ideals." *Facta Universitatis, Series: Mathematics and informatics* 5 (2019): 871-888.
- [8] W. Bandler, L. Kohout, Fuzzy power sets and fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 4 (1) (1980) 13-30.
[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(80\)90060-3](https://doi.org/10.1016/0165-0114(80)90060-3)
- [9] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvourcier, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Volume 221, Springer-Berlin, (2007).

<https://doi.org/10.1007/978-3-540-73721-6>

- [10] U. Bodenhofer, Representation and constructions of similarity based fuzzy ordering, *Fuzzy Sets and Systems*, 137 (2003) 113–136.
DOI:10.1016/S0165-0114(02)00436-0
- [11] A. Bouad, Fuzzy Ordered Sets and Aggregation, Thèse de Doctorat, Université Mohamed Boudiaf, M'sila, 2018/2019.
- [12] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Volume 7, Physica-Verlag Heidelberg, (2002).
DOI:10.1007/978-3-7908-1787-4
- [13] N. Casprd, B. Leclec et B. Monjardert, Ensembles Ordonnes finis: concepts, résultat et usage, Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [14] I. Chon, Fuzzy Partial Order Relations and Fuzzy lattices, *Korean J. Math*, 17 (5) (2009) 361-374.
- [15] P. Christopher, A. Chambers, D. Miller, Rules for aggregating information, *Soc Choice Welf*, 36 (2011) 75-82.
DOI:10.1007/s00355-010-0466-5
- [16] B. A. Davey et H. A. Priestley, Introduction to Lattice and order, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
<https://doi.org/10.1017/cbo9780511809088.003>
- [17] M. Demirci, A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations -I: general representation results, *Fuzzy Sets and Systems*, 151 (3) (2005) 437-472.
<https://doi.org/10.1016/j.fss2004.06.017>
- [18] J. Drewniak, U. Dudziak, Preservation of properties of fuzzy relations during aggregation processes, *Kybernetika*, 43 (2) (2007) 115-132.

- [19] J. C. Fodor, Traces of fuzzy binary relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 50 (1992) 331–341.
[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90229-W](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90229-W)
- [20] I. Mezzomo, B. C. Bedregal and R. H. N. Santiago, Kinds of ideals of fuzzy lattice, *Second Brazilian Congress on Fuzzy Systems* (2012) 657–671.
- [21] I. Mezzomo, B. C. Bedregal and R. H. N. Santiago, On fuzzy ideals of fuzzy lattice, *International Conference on Fuzzy Systems*, (2012) 1–5.
 DOI:10.1109/FUZZ-IEEE.2012.6251307
- [22] A. Oumhani, A. Amroune. "More on fuzzy lattices and their filters." *An. Univ. Oradea Fasc. Mat* 25 (2018): 143-155.
- [23] S. V. Ovchinnikou, Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings, *Fuzzy Sets and Systems*, 40 (1991) 107-126.
[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(91\)90048-U](https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90048-U)
- [24] R. H. S. Reiser, B. Bedregal and M. Baczynski, Aggregating fuzzy implications, *Information Sciences*, 253 (2013) 126–146.
 DOI:10.1016/j.ins.2013.08.026
- [25] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Information Sciences*, 3 (2) (1971) 177–200.
- [26] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8 (1965) 338–353.
- [27] B. Ziane, and A. Amroune. "REPRESENTATION AND CONSTRUCTION OF 4 INTUITIONISTIC FUZZY T-PREORDERS AND FUZZY 5 WEAK T-ORDERS 6." *Discussiones Mathematicae: General Algebra & Applications* 41.1 (2021).