



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse mathématique et numérique

## Thème

---

*Problèmes potentiels*

---

**Présentée par :**  
*Ben el geumar Mina*

**Soutenu publiquement le :** 00/00/2020.

**Devant le jury composé de :**

**Président :** *M<sup>r</sup>* — —

M.C.B, Université de M'sila

**Encadreur :** *Pr Gasmi Abdelkader*

M.C.B, Université de M'sila

**Examineur :** *M<sup>r</sup>* — —

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2019/2020

---

# Remerciements

---

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce  
mode

Je tiens à remercier mon promoteur le prof  
Pr. Abdelkader Gasmi  
pour la confiance qu'il m'a témoignée en me pro  
encouragement

Le

m'ont permis de finaliser ce mode  
reconnaissance et ma plus profonde gratitude .  
qui m'a bien aider .

Je dé

Dr. ????????

pour avoir acce

je tiendrai également à remercier le prof  
Dr. ??????????

pour l'intérêt qu'il

Enfin, je adre

mathématique et informatique .

Merci à tout ceux qui on contribué, de pré ou de loin, à l'aboutissement de ce  
travail.

Merci pour tout

---

# Dédicaces

---

Je tiens à dédier ce mode

ma chère mère Ben D

et mon cher père Khador

À mon prof

À ma frère et me

À me

La famille : Ben El Geumar et Ben D

À tous me

À tous ceux qui m'ont aidé de pré

Mina

---

# Résumé

---

Une méthode approximative est présentée pour résoudre le problème de l'écoulement régulier en surface libre d'un fluide idéal sur une rampe semi-infinie dans le fond. La transformation de Schwartz-Christoffel est utilisée pour cartographier la région d'écoulement, dans le plan de potentiel complexe, sur le demi-plan supérieur. La transformation de Hilbert ainsi que la technique de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative du problème pour un grand nombre de Froude et un petit angle d'inclinaison de la rampe. Des équations générales, sous forme intégrale, pour tout ordre d'approximation sont obtenues. La solution jusqu'à l'approximation du premier ordre est discutée et illustrée.

**Mots-Clés :** problèmes d'écoulement à surface libre, transformation de Schwartz-Christoffel, transformation de Hilbert, technique de perturbation, équations intégrales non linéaires.

---

An approximate method is presented to solve the problem of steady free-surface flow of an ideal fluid over a semi-infinite ramp in the bottom. Schwartz-Christoffel transformation is used to map the region of flow, in the complex potential-plane, onto the upper half-plane. The Hilbert transformation as well as the perturbation technique are used as a basis for the approximate solution of the problem for large Froude number and small inclination angle of the ramp. General equations, in integral form, for any order of approximation are obtained. Solution up to first-order approximation is discussed and illustrated. .

**Keywords :** free-surface flow problems, Schwartz-Christoffel transformation, Hilbert transformation, perturbation technique, nonlinear integral equations. .

---

تم تقديم طريقة تقريبية لحل مشكل التدفق الثابت للسطح الحر لسائل مثالي على منحدر شبه لانهازي في القاع. يستخدم تحويل شوارتز-كريستوفل لرسم خريطة لمنطقة التدفق ، في المستوى المعقد المحتمل ، على نصف المستوى العلوي. يتم استخدام تحويل هيلبرت وكذلك تقنية الاضطراب كأساس للحل التقريبي للمشكلة من اجل عدد فرود كبير وزاوية ميل صغيرة للمنحدر، يتم الحصول على معادلات عامة ، في شكل متكامل لأي ترتيب تقريبي . تمت مناقشة وتوضيح النتائج حتى التقريب من الدرجة الأولى .

الكلمات المفتاحية : مشاكل التدفق على السطح الحر ، تحويل شوارتز - كريستوفيل ، تحويل هيلبرت ، تقنية الاضطراب ، المعادلات التكاملية غير الخطية.

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Notions préliminaires sur les écoulement potentiel</b>	<b>7</b>
1.1	Descriptions du mouvement . . . . .	8
1.1.1	Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires) . . . . .	8
1.1.2	Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses) . . . . .	8
1.2	Définitions . . . . .	8
1.2.1	Fluide incompressible . . . . .	8
1.2.2	Lignes de courant . . . . .	9
1.3	Quelques propriétés de l'écoulement . . . . .	9
1.3.1	Définitions . . . . .	9
1.3.2	Potentiel de vitesse . . . . .	9
1.3.3	Fonction de courant . . . . .	9
1.4	Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe . . . . .	10
1.5	Équation de Bernoulli . . . . .	11
1.6	Équation de conservation de la masse . . . . .	11
1.7	Transformation de Hilbert . . . . .	12
1.8	Transformation de Schawarz-Christoffel . . . . .	12
1.9	Analyse dimensionnelle . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel</b>	<b>14</b>
2.1	Formulation du problème . . . . .	15
2.2	Les équations approximatives . . . . .	20
2.3	Technique de perturbation . . . . .	21
2.4	Solution du problème . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>24</b>

---

---

# Table des figures

---

1.1	Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation . . . . .	10
2.1	$z$ -plane . . . . .	15
2.2	$f$ -plane . . . . .	17
2.3	$t$ -plane . . . . .	17
3.1	Effet de l'angle d'inclinaison $\alpha$ sur le profil de surface libre pour $\varepsilon = 0,005012$ et $F^2 = 10,0$ . . . . .	26
3.2	Effet de la hauteur de rampe $\varepsilon$ sur le profil de surface libre pour $\alpha = \pi/6$ et $F^2 = 100$ . . . . .	27
3.3	Effet du nombre de Froude sur le profil de surface libre pour $\alpha = \pi/6$ et $\varepsilon = 0,005012$ . . . . .	28
3.4	Hauteur de surface libre maximale normalisée par rapport à la hauteur de rampe $\varepsilon$ pour $\alpha = \pi/6$ et $F^2 = 100$ . . . . .	29
3.5	Hauteur de surface libre maximale normalisée par rapport à l'angle d'inclinaison $\alpha$ de la rampe pour $\varepsilon = 0,005012$ et $F^2 = 100$ . . . . .	29

---

# Notation

---

$\vec{S}$  le vecteur position d'une particule donnée  
 $\vec{s}_0$  position initiale  
 $t$  le temp  
 $(X, Y, Z)$  les coordonées cartésiennes  
 $\vec{U}$  le vecteur de vitesse  
 $(u_x, u_y, u_z)$  champ de vitesse  
 $\varphi$  le potentiel de vitesse  
 $\psi$  la fonction de courant  
 $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  la fonction de potentiel complexe  
 $z = x + iy$  la variable complexe associée à la foction  
 $p$  pression du fluide  
 $\rho$  densité du fluide  
 $g$  gravité  
 $m(t)$  la masse  
 $S$  la surface  
 $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire à un element de surface de  $S$   
 $H$  la transformation de Hilbert  
 $F$  le nombre de Froude  
 $rot$  Rotationnel  
 $\vec{grad}$  gradient  
 $\frac{d}{dt}, \frac{D}{Dt}$  dérivée matérielle  
 $\frac{\partial}{\partial x}$  dérivée par raport a x  
 $\Delta$  la placien  
 $w$  la variable de hodographe logarithmique  
 $f'(t)$  la fonction de cartographie  
 $L'$  la longueur de la rampe  
 $\alpha$  angle d'inclinaison

---

# Introduction générale

---

Dans ce mémoire on s'intéresse à un problème d'écoulement à surface libre stationnaire, d'un courant bidimensionnel, irrotationnel, invisible et incompressible dans un canal ouvert à un fond de forme escalier. Ce problème a de nombreuses applications dans des différents domaines de l'ingénierie, surtout en hydraulique. C'est pourquoi ce type de problèmes a reçu une attention considérable tout au long de l'histoire de la mécanique des fluides, au cours des 30 dernières années, et la littérature sur le sujet est riche.

Nous tenons compte de l'effet de la gravité, le problème ne peut être résolu que par une approche numérique à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord de la surface libre. La solution est obtenue en utilisant une méthode de Hilbert et la technique de la perturbation introduite par S.N. Hanna et M.N. Abdel-Malek [7]

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : contient quelques notions préliminaires sur les écoulements potentiels et des définitions on mentionne spécialement les propriétés des (fluides incompressibles, lignes de courant) et quelques propriétés de l'écoulement et deux méthodes de description (Lagrangienne et Eulérienne) et les équations qui gouvernent les écoulements des fluides, on cite l'équation de (conservation de la masse et de l'équation de Bernoulli) Finalement on se termine chapitre par un petit rappel sur les transformations de Hilbert et de Schwarz-Christoffel.

Dans le deuxième chapitre : on étudiera un problème d'un mouvement irrotationnel bidimensionnel, c'est-à-dire possédant un potentiel de vitesse (formulation du problème) d'un écoulement sur un fond escalier

Dans le troisième chapitre : on traite la solution approximative du problème. Telle que les techniques de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative du problème et on termine ce chapitre par la présentation de quelques résultats numériques trouvés et discussion.

Dans ce mémoire, la méthode Hilbert ainsi que la technique de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative des problèmes bidimensionnels. Tout d'abord, comme d'habitude, le plan du potentiel complexe de la vitesse est transformé en un demi-plan supérieur auxiliaire. Alors une équation intégrale non linéaire présentée par la valeur principale de Cauchy est trouvée. Enfin, plusieurs approximations sont faites sur la base d'un grand nombre de Froude et la technique de perturbation est appliquée sur la base des petites valeurs de l'angle d'inclinaison de la rampe.

# NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ÉCOULMENT POTENTIEL

---

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux

## 1.1 Descriptions du mouvement

Les descriptions des mouvements du fluide peuvent se faire à l'aide de deux méthodes distinctes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (méthode de Lagrange) ou on peut fixer un point dans l'espace et observe à un instant donné le champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler)

### 1.1.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées

Soit  $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$  le vecteur position actuelle d'une particule donnée où  $\vec{S}_0$  est le vecteur de position initiale au temps initial  $t_0$ . En coordonnées cartésiennes :  $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t), \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t), \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x_0, y_0, z_0$  sont les coordonnées du vecteur de position initial du vecteur de position actuelle es au temps  $t$  de la particule. Le vecteur vitesse noté par  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  en  $\vec{S}_0$  peut être calculé par :

$$u_x = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_y = \left( \frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_z = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} . \quad (1.2)$$

Les avantages de la description lagrangienne sont :

- ◆ La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- ◆ La conservation de la masse est satisfaite.

### 1.1.2 Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant  $t$  donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne

s'écrit pour la vitesse :  $\vec{u}(\vec{S}, t)$  où  $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$  Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t), \\ u_y = u_y(x, y, z, t), \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

## 1.2 Définitions

### 1.2.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa volume ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des

fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

### 1.2.2 Lignes de courant

Ce sont les lignes qui en chaque point de l'écoulement sont tangentes au vecteur vitesse en ce point. On déduit de cette définition l'équation différentielle qui modélise les lignes de courant

$$\frac{dx_1}{u_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1, x_2, x_3, t)}. \quad (1.4)$$

Où  $t$  a une valeur de temps fixée.

## 1.3 Quelques propriétés de l'écoulement

### 1.3.1 Définitions

Un écoulement est dit :

1) Irrrotationnelle si le rotationnel de vecteurs vitesse est nul c'est à dire  $\text{rot } \vec{u} = 0$  où  $u$  represent la vitesse de l'écoulement .

2) Incompressible si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  où  $\text{div}(\vec{u}) = 0$ .

### 1.3.2 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse  $\vec{u}$  est irrotational, on peut définir une fonction  $\varphi$  scalaire telle que

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Le symbole  $\varphi$  représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.5)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \implies \Delta \varphi = 0.$$

### 1.3.3 Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifier pour tout point de ce domaine, à l'instant  $t$  on a :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

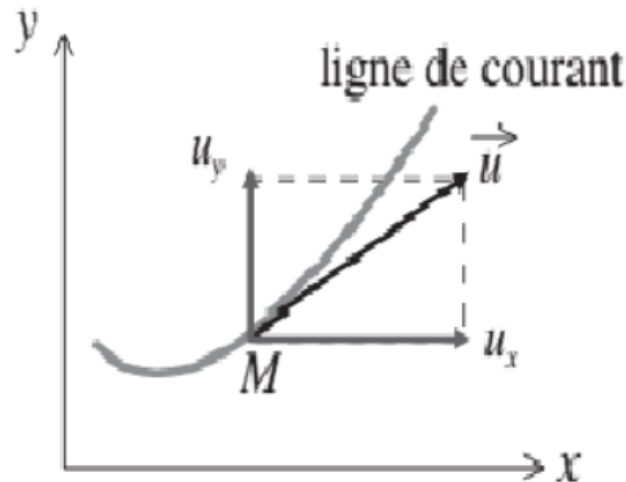


FIGURE 1.1 – Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation

Cela implique que la forme différentielle  $u_x dx + u_y dy$  est, à  $t$  fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction  $\psi$  :

$$\exists \psi, d(\psi) = u_x dx + u_y dy.$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.6)$$

Où  $\psi$  s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \implies \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \wedge \left| \begin{matrix} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{matrix} \right| = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

$\implies \Delta \psi = 0, \psi$  vérifie aussi l'équation de Laplace.

## 1.4 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  où  $z = x + iy$  est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe  $f(z)$  ( $\varphi$  et  $\psi$  et représentent respectivement les fonctions potentielle et de courant).

La fonction  $f$  a les propriétés suivantes :

1-  $f(z)$  est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de  $z$  correspond une seule valeur de  $f$

2-  $f(z)$  est analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \implies &\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_x. \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_y. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système d'équations constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

Pour que  $f(z)$  soit analytique, il faut que  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction  $f(z)$  est appelée potentiel complexe des vitesses.

On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant  $\psi$  et d'un potentiel des vitesses  $\varphi$ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

## 1.5 Équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de Bernoulli est :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + yg = cont.$$

Telle que  $q = \sqrt{u_x^2 + v_x^2}$ ,  $p$  la pression du fluide,  $\rho$  la densité du fluide,  $g$  la gravité.

## 1.6 Équation de conservation de la masse

Considérons un fluide occupant un volume  $v_0$  de densité  $\rho(x, t)$  et de frontière une surface fermé  $s$ . La quantité de masse  $m$  de fluide contenue dans ce volume est égale à

$$m(t) = \int_{v_0} \rho(x, t) dv,$$

La variation de la masse  $m$  contenue dans le volume  $v_0$  est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = \int_{v_0} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x, t) dv. \quad (1.7)$$

D'autre part, la variation de la masse est égale au flux massique qui passe à travers la surface  $S$  Soit  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire à un élément de surface de  $S$ ,  $\vec{V}$  e vecteur vitesse alors le flux massique est donné par :

$$\int_s \rho V \cdot \vec{n} ds. \quad (1.8)$$

En identifiant les deux expressions 1.7 et 1.8 on obtient :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = - \int_s \rho V \cdot \vec{n} ds.$$

D'après le théorème de divergence ( Green-Ostogradsky ) :

$$\int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{v_0} \text{div} \rho \vec{V} dv.$$

On obtient ainsi

$$\int_{v_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \right) dv = 0.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0.$$

Cette équation est connue sous le nom " équation de continuité".

## 1.7 Transformation de Hilbert

**Définition 1.1.** Soit  $s$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , on appelle transformée de Hilbert la fonction  $\hat{s}$  définie par :

$$\hat{s}(t) = H \{s\} (t) = vp \{ (h \star s) (t) \} = vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\} = \frac{1}{\pi} vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \right\}.$$

Où  $H$  est la transformation de Hilbert et où

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

et

$$vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\epsilon} s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{t+\epsilon}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\}.$$

$vp$  étant l'abréviation de valeur principale de Cauchy on peut montrer que pour tout réel  $p > 1$ ,  $H$  est un opérateur borné de l'espace  $L^p(\mathbb{R})$  dans lui-même.

## 1.8 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements, cette transformation réalise une transformation l'intérieur d'un polygone du plan complexe en demi-plan supérieur de la variable complexe  $\lambda$

soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les points correspondants respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de l'axe réel du plan  $\lambda$ . on définit la transformation de Schwarz -Christoffel qui représente l'intérieur du polygone à demi plan supérieur par la formule :

$$\Omega = K \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + K.$$

où  $K$  et  $M$  sont des constantes complexes ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont des nombres réels et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les angles intérieurs au polygone .

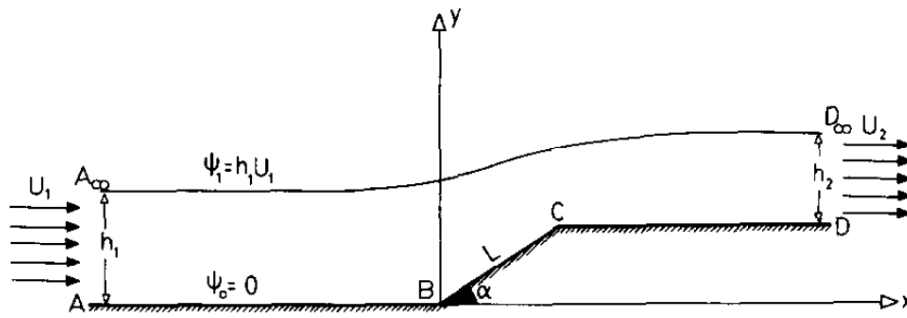
## 1.9 Analyse dimensionnelle

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physiques. Nous utilisons le théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham, qui montre comment on rend sans dimension une équation physique. L'emploi des variables non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de  $n$  variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimensions en les réduisant à  $n - k$ , avec ( $k = 1, \dots, 4$ ). Les quatre variables universellement connues sont la longueur  $L$ , la masse  $m$ , la température  $T$  et le temps  $t$ .

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME D'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL

---

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel considéré, en tenant compte des forces de la gravité et nous négligeons la tension de surface, en utilisant la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation .

FIGURE 2.1 –  $z$ -plane

## 2.1 Formulation du problème

On considère dans cette étude un problème d'un mouvement irrotationnel bidimensionnel, c'est-à-dire que la vitesse de cet écoulement est dérivée d'un potentiel  $\varphi(x, y)$  satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Le fluide est considéré comme non visqueux et incompressible, soumis à l'action de la force gravitationnelle et ayant une surface supérieure libre.

A l'origine on considère que l'écoulement est uniforme avec une vitesse  $U_1$  c'est-à-dire dans la direction positive de l'axe des abscisses  $x$  et de profondeur  $h_1$  le fond de l'écoulement se compose d'un paroi horizontal  $AB$ , paroi incliné  $BC$  avec un angle d'inclinaison  $\alpha$  et longueur  $L$ , et un paroi horizontal  $CD$ . Où le fond s'étend de  $-\infty$  (point  $A$ ) à  $+\infty$  (point  $D$ ). Le domaine est illustré dans la figure 1. Pour plus de commodité, nous choisissons le point  $B$  comme origine dans le plan  $z$ , l'axe des abscisses  $x$  est confondu sur la paroi  $AB$  et l'axe des  $y$  est perpendiculaire passant par le point  $B$ . On introduit la fonction potentiel  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$

est une fonction analytique de  $z$  dans la région d'écoulement, avec une vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) = qe^{-i\theta}. \quad (2.2)$$

Si on prendre comme unité de longueur  $h_1$  et unité de vitesse  $U_1$  on peut écrire les variables adimensionnelles

$$z' = \frac{z}{h_1}, q' = \frac{q}{u_1}, f' = \frac{f}{\psi_1}. \quad (2.3)$$

Où

$$\psi_1 = u_1 h_1.$$

La condition sur la surface libre où la pression est uniforme est donnée par l'équation de Bernoulli :

on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}q^2 + yg &= \frac{1}{2}u^2 + hg, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}q^2 + g(y - h) &= \frac{1}{2}u^2, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{q}{u}\right)^2 + \frac{g}{u^2}(y'h - h) &= \frac{1}{2}, \\ \Rightarrow q'^2 + \frac{2gh}{u^2}(y' - 1) &= 1,\end{aligned}$$

alors

$$q'^2 + \frac{2}{F^2}(y' - 2) = 1 \quad (2.4)$$

Telle que

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y}{h}, \\ q' &= \frac{q}{u},\end{aligned}$$

où  $q = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  et  $F$  le nombre de Froude définit par :

$$F = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}}. \quad (2.5)$$

La hauteur de la rampe est notée par  $\epsilon$ , où

$$\epsilon = \frac{L \sin \alpha}{h_1} = L' \sin \alpha. \quad (2.6)$$

En utilisant les variables unitaires (2.3) l'équation (2.2) en forme adimensionnelle de vient :

$$\xi = \frac{df'}{dz'} = q' e^{-i\theta}. \quad (2.7)$$

On a

$$\omega = \ln \xi = \ln q' - i\theta. \quad (2.8)$$

$$\xi = e^\omega,$$

comme

$$\xi = \frac{df'}{dz'} = q' e^{-i\theta},$$

alors

$$\begin{aligned}dz' &= \frac{1}{\xi} df', \\ z' &= \int \frac{1}{e^f} df',\end{aligned}$$

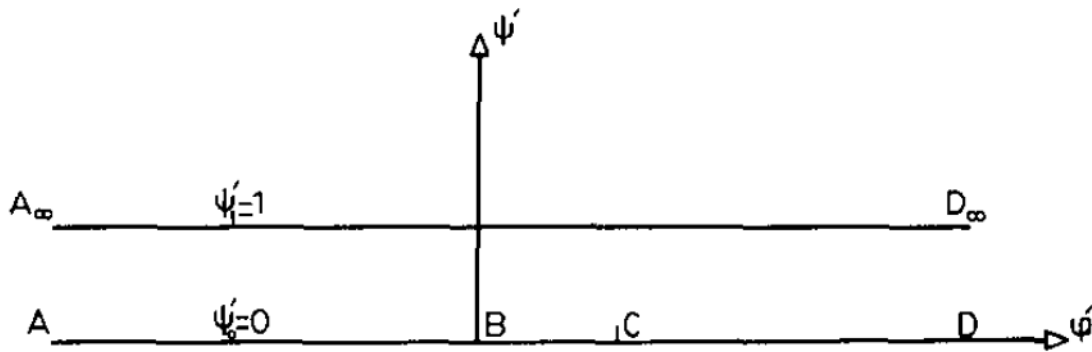


FIGURE 2.2 –  $f$ -plane

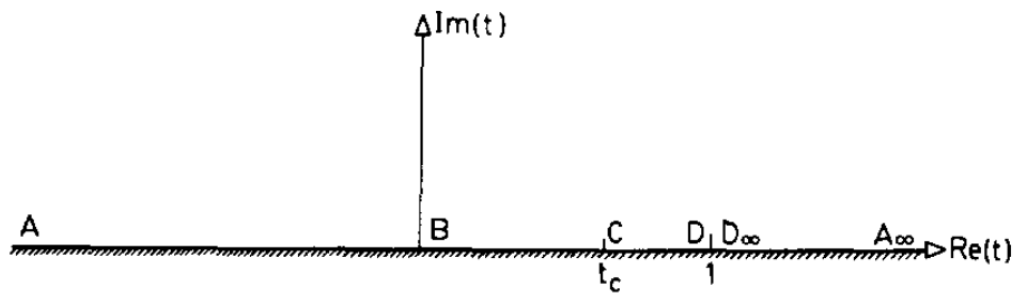


FIGURE 2.3 –  $t$ -plane

donc

$$z' = \int e^{-f} df'. \tag{2.9}$$

Où  $\omega$  est appelé la variable de hodographe logarithmique.

En utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel, nous transformons la région de l'écoulement du plan  $f'$  sur la moitié supérieure d'un plan  $t$  auxiliaire, de sorte que les points suivants correspondent. (voir les figures 2.2 et 2.3)

point	$f'$	$t$
$B$	$0$	$0$
$D, D'$	$+\infty$	$1$
$A, A'$	$-\infty$	$+\infty$

La transformatiuon utilisé est donnée par :

$$f'(t) = -\frac{1}{\pi} \ln(1-t); 0 \leq \arg(1-t) \leq \pi. \tag{2.10}$$

Pour exprimer  $\omega$  en fonction de la variable unique  $t$ , nous introduisons la méthode de Hilbert pour un problème de valeur de frontière mixte dans le demi plan supérieur,  $Q(t)$  est une fonction analytique définie dans le demi plan supérieur du plan  $t$ , et supposons que  $Im(Q(t))$  satisfait la condition Hölder à la limite,  $Im(t) = 0$ , du plan  $t$ .

Si  $Im(Q(t))$  est connu sur la limite,  $Q(t)$  est donné par la formule intégrale de Poisson

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(q(v))}{v-t} dv + \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j. \quad (2.11)$$

Où  $A_j$  sont des reèls constants, et  $f$  dénote une intégrale singulière dans la sérénité de cauchy . Maintenant,nous essayons de relier la fonction  $\omega(t)$  à la fonction  $Q(t)$  . De (2.11), nous trouvons que  $Q(t)$  est exprimé en termes de ses parties imaginaires le long de l'axe réel,la limite du plan t.

Ainsi,nous devons examiner la valeur de  $\omega(t)$  le long de la limite du plan t, et nous trouvons que on a  $\omega = \ln q' e^{-i\theta}$  alors

$$Im(\omega(t)) = -\theta(t), \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} q'^2 + \frac{2}{F^2} (y' - 1) &= 1, \\ \Rightarrow q'^2 &= 1 - \frac{2}{F^2} (y' - 1), \\ \Rightarrow q' &= \sqrt{1 - \frac{2}{F^2} (y' - 1)}, \\ \Rightarrow \ln q' &= \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t)). \end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\begin{aligned} Im(\omega(t)) &= -\theta(t). \\ Re(\omega(t)) &= \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Oú

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \alpha, & 0 < t < t_c, \\ 0, & t_c < t < 1, \\ \theta(t), & t > 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\eta'(t) = y'(t) - 1.$$

Cela signifie que nous connaissons la partie réelle où Imaginaire de  $\omega(t)$  le long de la limite du plan t .alors nous devons construire une fonction auxilliare  $H(t)$  qui fait connaitre la partie Imaginaire du quotient  $Q(t) = \omega(t) / H(t)$  à la limite du plan t.la forme générale de  $H(t)$  est :

$$H(t) = \begin{cases} -\sqrt{(1-t)}, & t < 1, \\ -i\sqrt{t-1}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

chanson [20]a montré que la solution finale est indépendante du choix particulier de  $H(t)$ .  
on a

$$Q(t) = \frac{\omega(t)}{H(t)} = \begin{cases} \frac{\ln q' - i\theta}{-\sqrt{1-t}}, & t < 1, \\ \frac{\ln q' - i\theta}{-i\sqrt{t-1}}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

en utilisant (2.12) et (2.15), nous obtenons

$$\text{Im}(Q(t)) = \begin{cases} \frac{\theta(t)}{\sqrt{1-t}}, & t < 1, \\ \frac{\ln(1 - \frac{2}{F^2}\eta'(t))}{2\sqrt{t-1}}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

ensuite, nous examinons la condition en amont, À l'approche du point  $A_\infty$ , c'est-à-dire, comme  $t \rightarrow +\infty$ ,  $H(t) \simeq -i\sqrt{t}$  et  $\omega(t) \simeq \ln q'(t) = 0$ .

donc,  $Q(t) \simeq \omega(t) / (-i\sqrt{t}) = 0$ , et de,  $A_j = 0$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ainsi, (2.11) prend la forme

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}(q(v))}{v-t} dv. \quad (2.18)$$

En utilisant (2.6), nous obtenons

$$Q(t) = \frac{\omega(t)}{H(t)} = \begin{cases} \frac{-\ln q'(t)}{\sqrt{1-t}} + i \frac{\theta(t)}{\sqrt{1-t}} & t < 1 \\ \frac{i \ln q'(t)}{\sqrt{t-1}} + \frac{\theta(t)}{\sqrt{t-1}} & t > 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$= R(t) + iS(t)$$

une forme équivalente de (2.18) est :

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(v)}{v-t} dv \\ S(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(v)}{v-t} dv \end{aligned} \quad (2.20)$$

en utilisant (2.20), nous obtenons un ensemble d'équations intégrales, et pour notre travail nous avons seulement besoin des équations suivantes

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\pi} \int_1^\infty \frac{\ln q'(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad t > 1. \quad (2.21)$$

$$\ln q'_B = -\frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^\infty \frac{\ln q'(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv - \frac{2\alpha}{\pi} \tanh^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad 0 < t < t_c \quad (2.22)$$

où

$$r = 1 - \sqrt{1-t_c}.$$

Les coordonnées  $(x', y')$  d'un point sur la surface libre peuvent être obtenir en utilisant (2.8) et (2.9) comme suit :

on a

$$z' = \int e^{-\omega} dw',$$

telle que

$$\omega = \ln q' - i\theta,$$

alors

$$z' = \int e^{-\ln q' + i\theta} dw',$$

en utilisant (2.10), nous obtenons

$$z'(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{i\theta(v)}}{q'(v)} \times \frac{1}{1-v} dv + const.$$

Donc

$$z'(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{e^{i\theta(v)}}{q'(v)(1-v)} dv + (x'_{\infty} + i)$$

séparant la partie réelle et imaginaire

$$x'(t) = x'_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{\cos \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv. \quad (2.23)$$

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{\sin \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv \quad (2.24)$$

à partir de (2.24) nous pouvons trouver la longueur de la rampe  $L'$

$$L' = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{1}{(1-v)q'_B(v)} dv. \quad (2.25)$$

Où  $q'_B(t)$  est donné par (2.22)

par conséquent, le système d'équations (2.4) (2.21),(2.22),(2.23)et(2.24) décrit complètement notre problème

## 2.2 Les équations approximatives

Pour un nombre de Froud  $F$  plus élevé et pour une petite valeur de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , dans ce cas le changement dans  $\theta(t)$  sera très petit, nous pouvons rapprocher le  $\sin \theta(t)$  par  $\theta(t)$  et le  $\cos \theta(t)$  par 1. Après cela, nous procédons à la chute des nombres premiers et le système d'équation prend la forme

$$q(t) \simeq 1 - \frac{1}{F^2}\eta(t), \quad t \succ 1. \quad (2.26)$$

$$\eta(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2}\eta(v)\right) dv, \quad t \succ 1. \quad (2.27)$$

$$\theta(t) \simeq -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad t \succ 1. \quad (2.28)$$

$$x(t) \simeq x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2}\eta(v)\right) dv, \quad t \succ 1. \quad (2.29)$$

## 2.3 Technique de perturbation

Développer  $q(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $x(t)$  en termes de petit paramètre  $\alpha$ ,

$$q(t) = q_0(t) + \alpha q_1(t) + \alpha^2 q_2(t) + \dots \quad (2.30)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \alpha \eta_1(t) + \alpha^2 \eta_2(t) + \dots \quad (2.31)$$

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \alpha \theta_1(t) + \alpha^2 \theta_2(t) + \dots \quad (2.32)$$

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots \quad (2.33)$$

en employant les expansions (2.30) – (2.33) dans les équations (2.22) – (2.26) et en assimilant des termes de puissance similaire de  $\alpha$ , nous obtenons le :

(i) approximation de l'ordre zéro

$$q_0(t) = 1 - \frac{1}{F^2}\eta_0(t), \quad (2.34)$$

$$\eta_0(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_0(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2}\eta_0(v)\right) dv, \quad t \succ 1, \quad (2.35)$$

$$\theta_0(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_0(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv, \quad t \succ 1, \quad (2.36)$$

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2}\eta_0(v)\right) dv, \quad t \succ 1. \quad (2.37)$$

Cette approximation de l'ordre zéro correspond au cas d'écoulement sur fond plat. solution de approximation de l'ordre zéro est : les variables sans dimension  $x' = \frac{x}{h_1}$ ,  $y' = \frac{y}{h_1}$ ,  $z' = \frac{z}{h_1}$

on a

$$q_0(t) = 1 - \frac{1}{F^2}\eta_0(t),$$

telle que

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_0(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2}\eta_0(v)\right) dv, \\ &= y' - 1, \\ &= \frac{y}{h_1} - 1. \end{aligned}$$

L'écoulement est sur fond plat, alors  $y = h_1$ . Donc

$$\eta_0(t) = 0; \implies q_0(t) = 1. \quad (2.38)$$

Et comme

$$\eta_0(t) = 0 \quad (2.39)$$

alors

$$\theta_0(t) = 0 \quad (2.40)$$

et

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{dv}{1-v}.$$

écrire

$$x_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv}{1-v}.$$

Par conséquent

$$x_0 = -\frac{1}{\pi} \ln(t-1). \quad (2.41)$$

(ii) approximation de premier ordre

$$q_1(t) = -\frac{1}{F^2} \eta_1(t), \quad (2.42)$$

$$\eta_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_1(v)}{1-v} dv, \quad (2.43)$$

$$\theta_1(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_1(v)}{(v-t)\sqrt{v-t}} dv + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad (2.44)$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{\pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_1(v)}{1-v} dv \quad (2.45)$$

(iii) en général, le nième rapprochement d'ordre

$$q_n(t) = -\frac{1}{F^2} \eta_n(t),$$

$$\eta_n(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left( \theta_n(v) + \frac{1}{F^2} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j(v) \eta_{n-j}(v) \right) dv$$

$$\theta_n(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_n(v)}{(v-t)\sqrt{v-t}} dv$$

$$x_n(t) = -\frac{1}{\pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_n(v)}{1-v} dv$$

où  $n = 2, 3, 4, \dots$

## 2.4 Solution du problème

Solution des approximations du premier ordre : à partir de (2.44), pour le très grand nombre de Froud  $F$ , on peut négliger le premier terme par rapport au second et on obtient

$$\theta_1(t) \simeq \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), t \gg 1. \quad (2.46)$$

En remplaçant en (2.43) et en accomplissant l'intégration, on trouve

$$\eta_1(t) \simeq \frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-r}{t-r}} \right), t \gg 1. \quad (2.47)$$

$q_1(t)$  prend donc la forme de (2.42)

$$q_1(t) \simeq -\frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r} F^2} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right), t \gg 1.$$

et

$$x_1(t) \simeq \frac{8r}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}}, \quad t \gg 1. \quad (2.48)$$

pour un petit angle d'inclinaison  $\alpha$ , nous considérerons seulement une solution approximative à un ordre de  $\alpha$ , et nous avons

$$q(t) \simeq 1 - \alpha \frac{4r}{\pi^2 F^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right) + O(\alpha), t \gg 1. \quad (2.49)$$

$$y(t) \simeq 1 + \alpha \frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right) + O(\alpha), t \gg 1. \quad (2.50)$$

$$\theta(t) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right) + O(\alpha), t \gg 1. \quad (2.51)$$

$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \ln(t-1) + \alpha \frac{8r}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}} + O(\alpha), t \gg 1. \quad (2.52)$$

une quantité d'intérêt physique est la force de traînée sur la rampe causée par le débit de fluide, qui la composante horizontale de la force agissant sur la largeur unitaire de la rampe. En fait cette force de traînée représente le changement dû au chagement dans le flux produit par la rampe. La force de traînée  $D$  rendue sans dimension par référence à la quantité  $\rho g h_1^2$ , où  $\rho$  est la densité du fluide, est donnée par

$$D = \frac{1}{2} F^2 \int_{y=0}^{\epsilon} (1 - q^2) dy. \quad (2.53)$$

où  $\epsilon$  est donnée par (2.6). L'équation (2.53) peut être intégrée plus facilement en utilisant (2.49) et (2.50), donnée par

$$D = \frac{8\alpha \tan \alpha}{\pi^3} \left( e^{\pi \cot \frac{1}{2} \alpha} - 1 \right) (1 - e^{-\pi \epsilon / 2 \sin \alpha}). \quad (2.54)$$

## RÉSULTATS NUMÉRIQUES

---

Dans ce chapitre, nous donnons les résultats en courbes montrant l'effet de l'angle  $\alpha$ , de la hauteur  $\varepsilon$  et du nombre de froude  $F$ .

Les solutions approchées pour des écoulements à un grand nombre de Froude se trouvent sur une large gamme de hauteur de rampe. Résultats montrant l'élévation de la surface libre sur le fond de hauteur de rampe  $\varepsilon$ , 0,002567 à 0,035513, pour fixe  $\alpha = \pi/6$ ,  $F^2 = 100$  et sur une fond d'angles d'inclinaison  $\alpha = \pi/12$  à  $\pi/6$ , pour fixe  $\varepsilon = 0,005012$ ,  $F^2 = 100$  sont donnés dans les figures 3.2 et 3.1 Effet du nombre de Froude  $F$  sur l'élévation de la surface libre pour fixe  $\alpha = \pi/6$  et  $\varepsilon = 0,005012$  est donnée à la Fig 3.3.

Ces résultats démontrent l'élévation monotone de l'élévation de la surface libre avec l'augmentation de la hauteur de la rampe, de l'angle d'inclinaison et du nombre de Froude. À partir des Figs.3.2 et 3.1, nous sommes en mesure de donner une formule approximative pour l'élévation maximale en termes de hauteur de la rampe et angle d'inclinaison, à savoir

$$\frac{y_{max}}{h_1} \simeq 1.0 + 0.045807\varepsilon, \text{ for } F^2 = 100, \alpha = \pi/6. \quad (3.1)$$

et

$$\frac{y_{max}}{h_1} \simeq 1.0 + 0.04936\alpha, \text{ for } F^2 = 100, \varepsilon = 0.005012. \quad (3.2)$$

ils sont représentés sur les Fig.3.4 et 3.5, respectivement

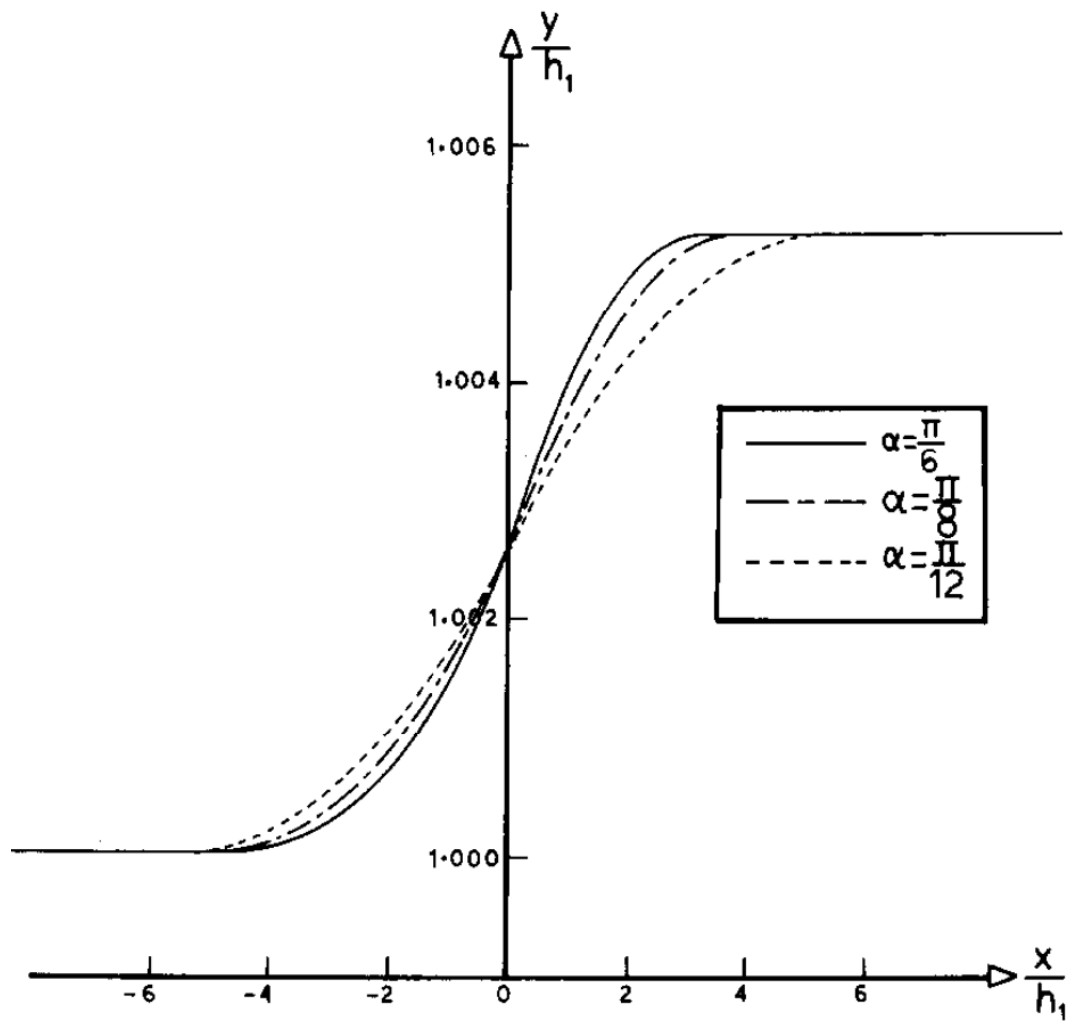


FIGURE 3.1 – Effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  sur le profil de surface libre pour  $\varepsilon = 0,005012$  et  $F^2 = 10,0$

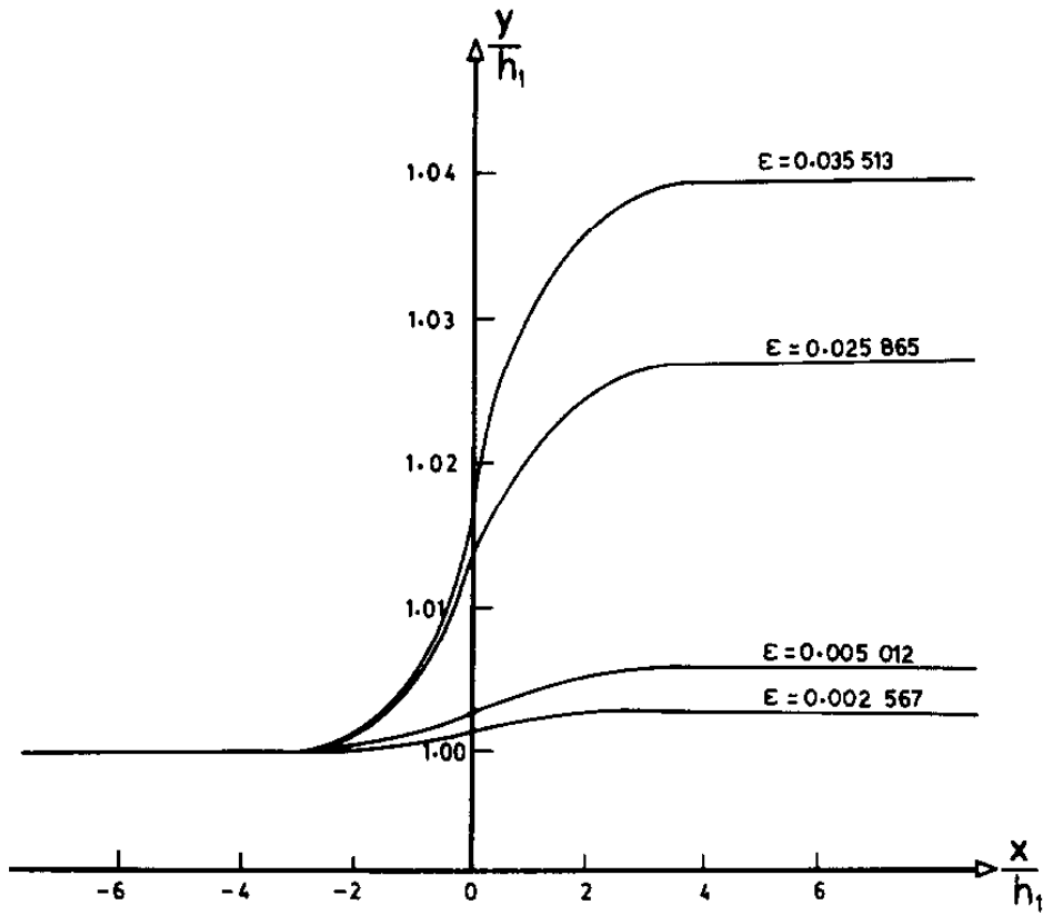


FIGURE 3.2 – Effet de la hauteur de rampe  $\epsilon$  sur le profil de surface libre pour  $\alpha = \pi/6$  et  $F^2 = 100$ .

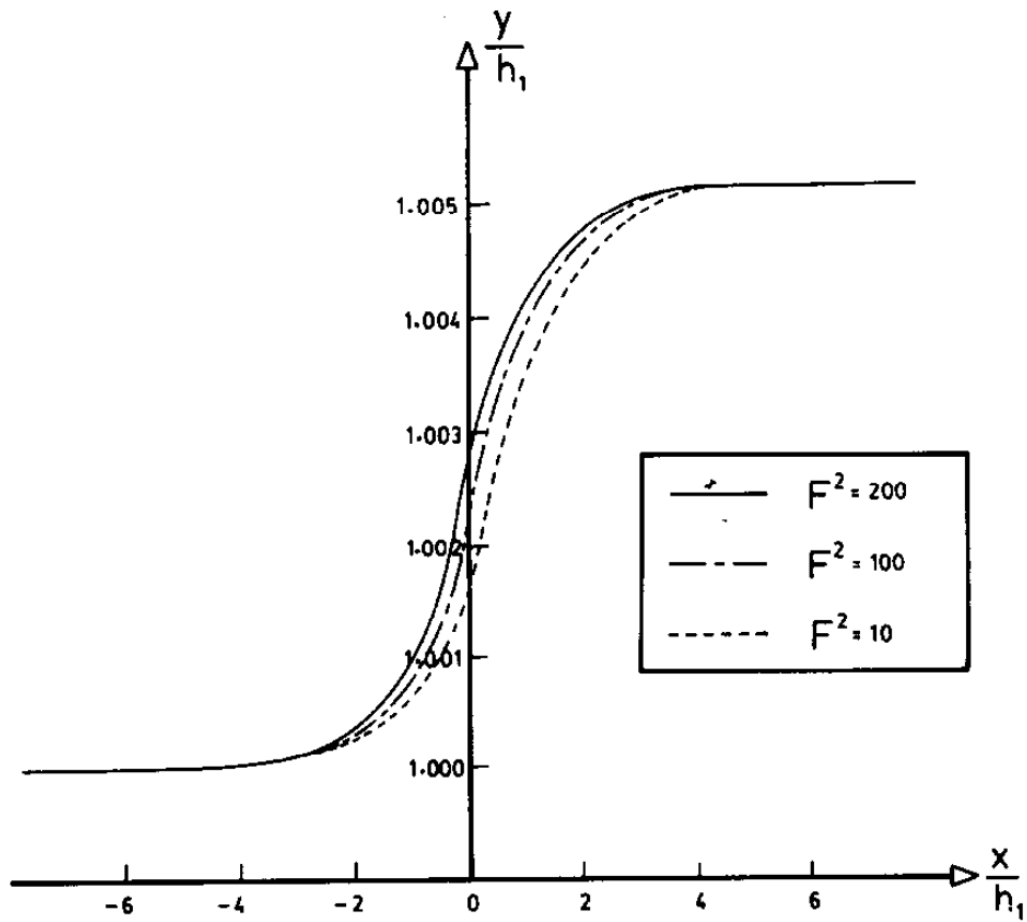


FIGURE 3.3 – Effet du nombre de Froude sur le profil de surface libre pour  $\alpha = \pi/6$  et  $\varepsilon = 0,005012$ .

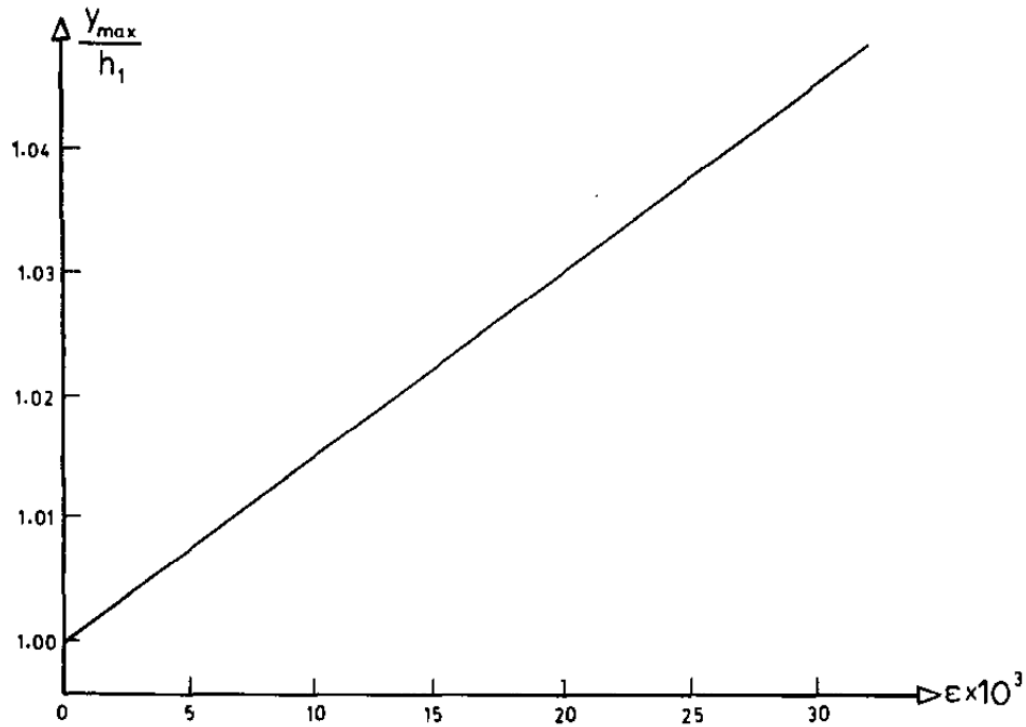


FIGURE 3.4 – Hauteur de surface libre maximale normalisée par rapport à la hauteur de rampe  $\varepsilon$  pour  $\alpha = \pi/6$  et  $F^2 = 100$ .

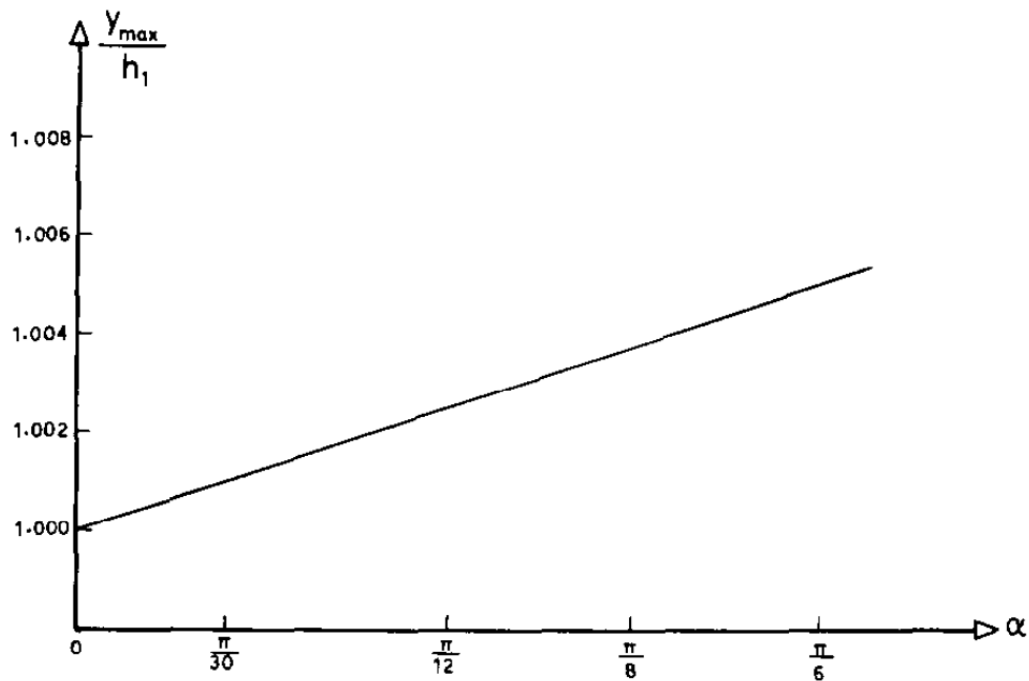


FIGURE 3.5 – Hauteur de surface libre maximale normalisée par rapport à l'angle d'inclinaison  $\alpha$  de la rampe pour  $\varepsilon = 0,005012$  et  $F^2 = 100$ .

---

# Conclusion

---

Les problèmes des écoulements à surface libre sont très difficiles et même impossible à résoudre explicitement, surtout si on inclut les effets de la force de gravité, cela est due a la non linéarité de la condition au bord de l'équation de Bernoulli, sur une surface qui est de forme inconnue. Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'écoulement bidimensionnel fluide incompressible et non visqueux, sur une rampe par la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation .

---

# Bibliographie

---

- [1] Alfio Quarteroni, Fausto Saleri et Paola Gervasio, Calcul Scientifique Cours, exercices corrigées et illustrations en MATLAB et Octave, Deuxième édition , Springer.
- [2] H.Serguine, Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite plate.,Thesis of Magister University of M'sila,(2004).
- [3] Laiadi abdelkader, effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles ,thèse magistère de universite de ouargla(2012).
- [4] Riadh , Ben Hamoduda Notions de Mécanique des fluides, cours et exercices corrigés.
- [5] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, Mécanique des fluides, Dunod,Paris,2011 ISBN 978-2-10-056922-9.
- [6] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method, Univesity of Nova Scotia Halifax, Canada.
- [7] Abd-el-Malek, Mina B and Hanna, Sarwat N. Approximate solution of a flow over a ramp for large Froude number. J. Comput.Appl.Math.28(1989) : 105117.
- [8] M.B.Abd-el-Malel,Boudray integral methods and free surface problems,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario,canada,1981.
- [9]K.M.Agrawal,Non-linear theories in two-dimensional fully and partially cavitatong flow,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario,canada,1969.
- [10]B.E.Larock and R.L.Street ,A Rieman -Hilbert problem for non-linear fully cavitating flow,J.Ship Research 9 (3) (1965) 170-178.
- [11]T.H.Lim,Integral equation methodes for the numerical solution of free surface problems in inviscid flow ,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario, canada ,1978.
- [12]N.I.Muskhelishvili,Singular Integral Equations(Noordhoff,Gronigen,The Netherlands ,1953).
- [13]A.C.Smith and M.B.Abd-el-Malk,Hilbert's methods for numerical solution of flow from a uniform channel over a shelf ,j.Engrg .Math.17(1983) 27-39.
- [14]A.C.Smith and T.H.Lim,The steady water wave :A numerical solution using the Riamann-Hilbert methods,Internat.J.Engrg.sci.18 (1980) 139-152.
- [15]S.C.Song ,A quasi-linear and linear for non-separated and separated two-dimensional flow about lifting bodies ,Univ.Minnesota,Min.SAF Lab .Tech.paper,B-43,1963.