



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Toufik BELIL

Sujet

Sur les produits et les quotients des espaces normés

Devant le jury :

Mr. Dilmi.M	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr. Mostefa NADIR	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Bachir GAGUI	MCA. Univ de M'sila	Examineur
M. Amina KHIRANI	MCB. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

Au nom de Dieu le Clément, le Miséricordieux. Et que la paix et le salut soient sur notre prophète Mohamed.

En tout premier lieu, nous remercions le bon Dieu, tout puissant, de la vertu de sa grâce et de nous avoir donné la force pour achever ce modeste travail.

*Nous adressons un très grand remerciement au professeur **Mostefa NADIR** pour ses orientations et ses précieux conseils.*

Nous souhaitons aussi remercier les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de participer à la soutenance.

Nous tenons à remercier chaleureusement toutes les personnes, enseignants et collègues qui nous ont soutenus soit par leurs orientations, conseils ou bien prières.

Nous avons également une pensée affectueuse et nostalgique pour tous nos enseignants durant les trois cycles (primaire, moyen et secondaire), qui ont contribué à notre éducation et enseignement dès notre plus jeune âge, que le bon Dieu leur accorde son vaste paradis.



DÉDICACE



J'exprime ma profonde gratitude à mes chers parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon bien être et le soutien qu'ils m'ont prodigués tout le long de mon éducation.

A tous les membres de ma famille. A tous mes chers amis.

Et à toutes les personnes qui, par leur amour et leurs encouragements, m'ont ouvert la voie vers les cimes du savoir, Je dédie ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Espaces Normes , Espaces Banach	2
1.1 Rappels	2
1.2 Espaces Normes	5
1.3 Applications linéaires continues	9
1.4 Suites de Cauchy	10
1.5 Espaces complets	11
1.6 Espaces de Banach	12
1.7 Espaces produits	12
1.8 Opérateurs continus	13
1.9 Opérateurs bornés	13
1.10 Propriétés Générales	14
2 Espaces produits , Espaces quotients	20
2.1 Espaces produits	20
2.2 Espaces quotients	24
2.3 Propriété universelle de l'espace quotient.	31
Table des notations	34

Bibliographie	36
Conclusion	37

INTRODUCTION

L'analyse fonctionnelle est une discipline dans la science mathématiques destinée à l'étude sur les espaces fonctionnels, structures (espaces normés, Hilbert, Banach,...etc), et propriétés de la théorie des opérateurs (opérateur borné, compact, fermé,...etc)

L'objectif de ce mémoire est de faire une étude sur les espaces produits et quotients et leurs propriétés topologiques (normé, Banach, compact, ...etc), ce mémoire est divisé en deux chapitres.

Dans le premier, on aborde les définitions classiques sur les espaces normés et de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous essayons d'appliquer les propriétés qui ont déjà été vues sur les espaces produits et quotients de sorte que on présente la difficulté de cette étude particulièrement sur les espaces quotients.

CHAPITRE 1

ESPACES NORMES , ESPACES BANACH

Dans ce chapitre on donne quelques définitions et théorèmes d'analyse fonctionnelle .

1.1 Rappels

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur \mathbb{R} de la distance usuelle

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|$$

Définition 1.1.1.

On rappelle qu'un espace métrique est un couple (X, d) ou X est un ensemble et d une distance sur X , c'est-à-dire une application

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que :

- a) $\forall x \in X, \forall y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
 b) $\forall x \in X, \forall y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
 c) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

L'ensemble X muni d'une distance d est appelé un espace métrique, ses éléments sont habituellement appelés des points.

Exemple 1 : Distance usuelle sur \mathbb{R} ou $\mathbb{C} : d(x, y) = |x - y|$.

Exemple 2 : Étant donné un espace métrique (X, d) : distance produit sur $X \times X$, définie par : $\delta((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y'))$.

Exemple 3 : La distance induite sur un sous-ensemble.

Exemple 4 : La distance triviale (ou discrète) : $\forall x \neq y, d(x, y) = 1$.

Proposition 1.1.1.

(seconde inégalité triangulaire)

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Définition 1.1.2.

Dans un espace métrique (X, d) , on appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in X, d(a, x) < r\}$$

$$(resp. B_f(a, r) = \{x \in X, d(a, x) \leq r\}).$$

Définition 1.1.3.

Un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) est borné si et seulement s'il est contenu dans une boule :

$$\exists \alpha \in X, \exists r > 0 / A \subset B_f(\alpha, r)$$

Une application à valeur dans un espace métrique est bornée si et seulement si son image est bornée.

1.1.2 Produit d'espaces métriques

Soit $(X_k, d_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'espaces métriques.

Proposition 1.1.2.

Sur le produit $Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, l'application δ qui à (x, y) associe $\delta(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$, définit une distance, qu'on appelle distance produit.

Remarque 1.1.1.

Les projections p_i sur les facteurs X_i .

pour $f : Z \longrightarrow Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, on appelle composantes de f les applications $f_i = p_i \circ f$.

Proposition 1.1.3. Lorsque Z est un espace métrique, et Y est muni de la métrique produit : f est continue si et seulement si ses composantes le sont.

Remarque 1.1.2.

énoncé analogue pour la convergence des suites dans le produit Y .

Proposition 1.1.4.

Un produit fini d'espaces métriques complets est complet.

1.1.3 Distances équivalentes

Définition 1.1.4.

Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont équivalentes si et seulement s'il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que :

$$\forall (x, y) \in X \times X, k_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq k_2 d(x, y).$$

Cette définition exprime que l'application Id_X est lipschitzienne de (X, d) vers (X, δ) , et de (X, δ) vers (X, d) . L'équivalence des distances est une relation d'équivalence.

Définition 1.1.5.

Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont uniformément équivalentes si et seulement l'application identique Id_X est uniformément continue de (X, d) vers (X, δ) , et de (X, δ) vers (X, d) . Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application Id_X est continue de (X, d) vers (X, δ) , et de (X, δ) vers (X, d) .

Proposition 1.1.5.

Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.

1.2 Espaces Normes

Définition 1.2.1. Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que :

- a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| , \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Définition 1.2.2. Espaces Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ,on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Exemple 1.2.1.

normes $N_1, N_2, N_{+\infty}$

Les applications définies par $:\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$

- a) $N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- b) $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$
- c) $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

sont des normes dans E^n .

Les applications définies par $:\forall f \in C^0([a, b], E)$,

- a) $N_1(f) = \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$

$$b) N_2(f) = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$c) N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} (|f(t)|)$$

sont des normes sur $C^0([a, b], E)$.

Les normes N_2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant dans le cas d'espaces vectoriels réels.

1.2.1 Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β telles que

$$\alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

Théorème 1.2.1.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 1.2.2. Équivalence des normes dans \mathbb{K}^n

Toutes les normes de l'espace vectoriel \mathbb{K}^n sont équivalentes. Elles définissent donc toutes la même topologie, qui est la topologie produit sur \mathbb{K}^n des topologies usuelles sur \mathbb{K} .

Définition 1.2.3. (Semi-normé)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Une semi-normé sur E est une application p de E dans \mathbb{R}_+ qui vérifie, pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Si p est une semi-normé sur E , on dit que le couple (E, p) est un espace vectoriel semi-normé, ou simplement un espace semi-normé.

Exemple 1.2.2.

1. L'application p définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ par $p(x, y) = |x^2 - y^2|$ est une semi-normé sur \mathbb{K}^2 .

2. Soit ε l'espace des fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} La fonction p définie sur ε par :

$$p(\phi) = \int_a^b |\phi(t)| dt \quad \text{est une semi-normé sur } \varepsilon.$$

On a pour les semi-normés une proposition analogue a la précédente pour les écarts, de démonstration immédiate.

Proposition 1.2.1.

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable.

Preuve.

Pour tout $x, y \in E$; on définit la fonction ρ par

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $(x; y)$ est symétrique

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| \\ &= \rho(y, x) \end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}
 \rho(x, y) &= \|x - y\| \\
 &= \|(x - z) + (z - y)\| \\
 &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\
 &= \rho(x, z) + \rho(z, y)
 \end{aligned}$$

1.2.2 Sous-espaces, produits et quotients

Soient $(E_i, \|\cdot\|_i)_{1 \leq i \leq n}$ des espaces normés et $E = \prod_{i=1}^n E_i$ l'espace vectoriel produit des E_i . On vérifie facilement que l'application $\|\cdot\|_\infty$ de E dans \mathbb{R} définie pour tout $x = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ par

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i.$$

est une norme sur E . La topologie associée à $\|\cdot\|_\infty$ est la topologie produit sur E . On dit que $\|\cdot\|_\infty$ est la norme produit des normés $\|\cdot\|_i$. Dans la suite, on supposera toujours un espace produit muni de la norme produit.

Proposition 1.2.2.

Soit (E, N_E) un espace normé, on a

1. L'application Φ de $E \times E$ dans E , définie par $\Phi(x, y) = x + y$, est 2-lipschitzienne.
2. L'application Ψ de $\mathbb{K} \times E$ dans E , définie par $\Psi(A, x) = Ax$, est continue.

Corollaire 1.2.1.

Soit (E, N_E) un espace vectoriel normé. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1.2.3.

Soit (E, \mathbf{p}) un espace vectoriel semi-normé. Le noyau de la semi-normé \mathbf{p} est la partie $K = \{x \in E ; \mathbf{p}(x) = 0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de E . L'application \mathbf{p} induit sur l'espace vectoriel quotient E/K une application N bien définie par $N(x) = \mathbf{p}(x)$, et N est une norme sur E/K . La distance sur E/K associée à la norme N est la distance quotient de l'écart associée à \mathbf{p} .

1.3 Applications linéaires continues

Ce paragraphe est essentiel, les propriétés de la continuité des applications linéaires s'utilisent en particulier constamment en analyse fonctionnelle. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Les applications linéaires sont aussi appelées morphismes d'espaces vectoriels. Un automorphisme est une application linéaire bijective de E dans E .

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E .

Un isomorphisme est une application linéaire bijective de E dans E .

1.3.1 Espaces d'applications linéaires continues

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux \mathbb{K} -espaces normés. On adopte les notations suivantes :

$L(E, F) = \{f : E \longrightarrow F, f \text{ linéaire}\}$ et $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \longrightarrow F, f \text{ linéaire continue}\}$.

Lorsque $E = F$, on note simplement $L(E) = L(E, E)$ et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Donnons tout d'abord diverses conditions équivalentes de continuité pour une application linéaire.

Proposition 1.3.1.

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F . Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. f est continue au point 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée de E .
4. Il existe un réel $a \geq 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq a\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.
5. f est lipschitzienne.

Proposition 1.3.2.

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. L'application $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ de $\mathcal{L}(E, F)$ dans

\mathbb{R}_+ , définie par

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F.$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ appelée norme associée à $\|\cdot\|_E$ et à $\|\cdot\|_F$.

Remarque 1.3.1.

On vérifie facilement les égalités suivantes valables pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|_E=1}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

De plus, en pratique, on utilisera très souvent la caractérisation suivante : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \{ \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \alpha \|x\|_E \}$$

Proposition 1.3.3.

Soient (E, N_E) et (F, N_F) , (G, N_G) trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors,

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G) \text{ et } \|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

1.4 Suites de Cauchy

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite x_n est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall \epsilon > 0 , \exists N_\epsilon , \forall p , q > N_\epsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

Lemme 1.4.1.

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite x_{nk} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x

Preuve.

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q > N_\epsilon \text{ on a ; } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\epsilon$ on a

$$\forall p, n_k \geq N_\epsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \epsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\epsilon, \|x_{n_k} - x\| < \epsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\epsilon, \|x_p - x_{n_k}\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \epsilon. \end{aligned}$$

1.5 Espaces complets

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E :

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\epsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$, tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Exemple 1.5.1.

1. Tout espace métrique discret est complet. En effet, dans un espace métrique discret. $d(u, v) = 1$ si $u \neq v$. Donc toute suite de Cauchy est stationnaire et donc convergente.
2. Les espaces vectoriels normés complets .Donc appelés espaces de Banach.

1.6 Espaces de Banach

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

Exemple 1.6.1.

1. tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.
2. Si E est un espace de Banach et $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\mathcal{L}^p(E)$, muni la norme $\|\cdot\|_p$, est un espace de Banach.
3. Soit X un ensemble et E est un espace de Banach. L'espace vectoriel $B(X, E)$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, est un espace de Banach.

Si de plus X est un espace topologique, alors $C_b(X, E)$ muni de la norme induite par $\|\cdot\|_1$ (que l'on notera encore $\|\cdot\|_1$) est aussi un espace de Banach.

4. Soit $1 \leq p \leq +\infty$; l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ continues telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty$ peut être muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace normé alors est Banach noté $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

1.7 Espaces produits

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y); \text{ telsque } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

est un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} par l'une des normes produits suivantes

- 1) $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \quad \forall x \in E, y \in F.$
- 2) $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{1/p} \quad \forall x \in E, y \in F; 1 < p < +\infty.$

$$3) \|(x, y)\|_{\infty} = \max\{\|x\|_E + \|y\|_F\} \quad \forall x \in E, y \in F.$$

1.8 Opérateurs continus

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 ; la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$; c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.8.1.

L'opérateur A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.8.1.

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en un point x_0 de G .

1.9 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E \quad (1).$$

Proposition 1.9.1.

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|_E=1}} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Proposition 1.9.2.

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.

Théorème 1.9.1.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Espaces isomorphes

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F , c'est à dire

- 1) A est bijectif sur E dans F
- 2) A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Espaces isométriques

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E$$

Remarque 1.9.1.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Lemme 1.9.1.

Tout espace Banach $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.

Théorème 1.9.2.

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs A linéaires continus sur E dans F muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

Théorème 1.9.3.

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

1.10 Propriétés Générales

Nous généralisons ces résultats à tout espace normé de dimension finie. On rappelle que la généralisation à un espace normé quelconque n'est pas vraie.

Proposition 1.10.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} . Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve.

On sait que E est (algébriquement) isomorphe à \mathbb{K}^n : il existe donc un isomorphisme Φ de \mathbb{K}^n sur E . Si N_1 et N_2 sont deux normes sur E , on vérifie que les composées $N_1 \circ \Phi$ et $N_2 \circ \Phi$ sont deux normes sur \mathbb{K}^n , elles sont donc équivalentes, et il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que

$$aN_1 \circ \Phi(x) \leq N_2 \circ \Phi(x) \leq bN_1 \circ \Phi(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{K}^n$. On en déduit l'équivalence de N_1 et N_2 par surjectivité de Φ .

Corollaire 1.10.1.

Si $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, et si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace normé quelconque, alors toute application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est continue.

Proposition 1.10.2.

Soit (E, N) un espace normé. Tout sous-espace A de dimension finie de E est complet, donc en particulier fermé.

Preuve.

En effet, si n est la dimension de A , il existe un isomorphisme linéaire Φ de \mathbb{R}^n sur A . Comme Φ est continu, Φ est uniformément continu et, comme \mathbb{R}^n est complet, $\Phi(\mathbb{R}^n) = A$ est complet.

Proposition 1.10.3.

Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Alors, E ne possède pas de base algébrique dénombrable.

Preuve.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une base dénombrable $\mathcal{B} = \{e_n / n \in \mathbb{N}\}$ de E . Pour $n \in \mathbb{N}$, notons F_n le sous-espace de E engendré par $\{e_0, \dots, e_n\}$. Comme F_n est de dimension finie, on a vu que F_n est fermé et on sait que F_n est d'intérieur vide. Comme \mathcal{B} est une base algébrique de E , $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Mais E est complet, c'est donc un espace de Baire, donc E est aussi d'intérieur vide dans E , c'est une contradiction.

Inégalité de Holder

Soit p, q, r des nombres de $[1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$). si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ le produit fg appartient à L^r , et on a

$$\| fg \|_{L^r} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} \tag{1.1}$$

Inégalité de Young

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1; +\infty[$ t.q $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.2}$$

Inégalité de Minkowski

Soit $p \in [1, +\infty]$ et f et g dans L^p on a

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p \tag{1.3}$$

Théorème 1.10.1 (Ascoli-Arzelà).

Soit A un sous ensemble de $C(J,E)$, A est relativement compact dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) L'ensemble A est borné, i.e, il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\| \varphi(x) \| \leq K \text{ pour tout } x \in J, \text{ et tout } \varphi \in A$$

- ii) L'ensemble A est équi-continue, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que :

$$| x_1 - x_2 | < \delta \implies \| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| < \varepsilon \text{ pour tout } x_1, x_2 \in J \text{ et tout } \varphi \in A$$

l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 1.10.2.

Tout espace normé E de dimension finie est un espace de Banach.

Théorème 1.10.3. (Somme vectorielle de sous-espaces fermés)

M, N sous-espaces d'un espace de Banach E ,

M sous-espace fermé, N de dimension finie $\Rightarrow M + N$ fermé

Si $M \cap N = \{0\}$, et $M + N = E$ alors $\exists M \oplus N$.

Théorème 1.10.4. (Complétude des espaces de Lebesgue)

l'espaces L^p sont des espaces de Banach.

Théorème 1.10.5. (Complétude de la somme directe de deux espaces de Banach)

E, F espaces de Banach alors $E \oplus F$ espace de Banach

Théorème 1.10.6.

Si E est un espace normé de dimension finie et F sous espace normé. toute application linéaire de E dans F et continue.

Théorème 1.10.7. (Norme d'une application)

Soient E, F deux espaces normés et T une application linéaire continue de E dans F .

$$T \text{ continue} \Leftrightarrow \exists h > 0, \forall x \in E, \|Tx\| \leq h\|x\|,$$

$$\|T\| = \inf\{h \text{ verifiant l'inegalité}\}.$$

Théorème 1.10.8.

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace Banach.

Théorème 1.10.9. (Complétude automatique d'un dual)

$\forall E$ espace normé, E^* est un espace de Banach.

Théorème 1.10.10. (Sous-espaces compléments et projections)

E espace de Banach, M et N sous-espaces fermés de E ;

$$E = M \oplus N \Leftrightarrow \exists p = p^2 \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } p(M) = M \text{ et } \ker(p) = N.$$

Théorème 1.10.11. (Plongement isométrique dans le bidual)

E est plongé dans son bidual E^{**} selon l'identification isométrique

$$J: \{E \rightarrow E^{**} x \rightarrow x^{**}\}, \forall y^* \in E^*, \langle y^*, x^{**} \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

Théorème 1.10.12. (Dual de L^p)

$1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (L^p)^* = L^q$, par l'identification isométrique

$$\langle x, f \rangle = \sum_n f_n x_n \text{ avec } f = (f_n) \in L^p.$$

Théorème 1.10.13. (Théorème de Baire)

Tout espace métrique (E, d) complet est « non maigre » ou (E, d) complet, $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$, ouverts denses dans $E \Rightarrow (\cap \Omega_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E ou (E, d) espace métrique complet non vide, $E = \cup E_n, E_n$ fermé $\Rightarrow \exists n_0$ tel que l'intérieur de E_{n_0} est non vide.

Théorème 1.10.14. (Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus)

E espace de Banach, F espace normé, $(T_\alpha)_{\alpha \in J} \subset \mathcal{L}(E, F)$, J ensemble d'indices. Alors :

$$[\forall x \in E, \sup\{\|T_\alpha x\|; \alpha \in J\} < +\infty] \Rightarrow [\sup\{\|T_\alpha\|; \alpha \in J\} < +\infty].$$

Théorème 1.10.15. (Théorème de Banach-Steinhaus - Mostefa NADIR)

soit $\{A_n(x)\}$ une suite d'opérateur défini sur un espace de Banach E dans un espace normé F si la suite $A_n(x)$ est bornée en chaque point x de E , alors les normé de ces opérateur $\|A_n\|$ sont aussi bornée. Autrement dit, on a

$$\forall x \in E, \sup \|A_n(x)\| < +\infty \Rightarrow \sup \|A_n\| < +\infty.$$

Théorème 1.10.16. (Application ouverte)

E, F espaces normés, T linéaire $E \rightarrow F$ T est ouverte \Leftrightarrow L'image de tout ouvert de E est un ouvert de F .

Théorème 1.10.17. (Théorème de l'application ouverte)

E, F espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T surjective $\Rightarrow T$ est une application ouverte.

Théorème 1.10.18. (Théorème de l'application ouverte 2 - Mostefa NADIR)

Soit A un opérateur linéaire continu et surjectif. défini sur un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F , alors il existe une constant positive $\alpha > 0$ telle que

$$B_F(0, \alpha) \subset A(B_E(0, 1)).$$

Théorème 1.10.19. (Théorème d'isomorphisme de Banach)

E, F espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T bijective $\Rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.10.20. (Théorème du graphe fermé 1)

E, F espaces de Banach, T application linéaire de E dans F . $G(T)$ fermé dans $E \times F \Leftrightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.10.21. (Théorème du graphe fermé 2 - Mostefa NADIR)

soit A un opérateur linéaire, défini sur un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F , si le graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$, alors A est continu.

CHAPITRE 2

ESPACES PRODUITS , ESPACES QUOTIENTS

2.1 Espaces produits

Problème de la topologie initiale : soient E un ensemble, (F_i, τ_i) une famille d'espaces topologiques et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications, avec, pour tout $i \in I$, f_i de E dans F_i . On s'intéresse aux topologies τ sur E telles que chaque f_i soit continue de (E, τ) dans (F_i, τ_i) , on notera \mathcal{A} l'ensemble de ces topologies. Il est clair que la topologie discrète sur E est dans \mathcal{A} et c'est la topologie la plus fine ayant cette propriété. On voit aussi que, si τ est dans \mathcal{A} , toute topologie τ' sur E plus fine que τ est aussi dans \mathcal{A} . Il est donc naturel de s'intéresser à la topologie la moins fine appartenant à \mathcal{A} . On a vu que l'intersection d'une famille quelconque de topologies sur E est une topologie sur E . L'intersection des éléments de \mathcal{A} est donc pavoisement la topologie la moins fine cherchée. Cette topologie est dite topologie initiale sur E pour les données $(F_i, \tau_i)_{i \in I}$ et $(f_i)_{i \in I}$.

Soient E_i une famille d'ensembles non vides et $E = \prod_{i \in I} E_i$ son produit. Il existe alors naturellement une famille $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$ de surjections canoniques de E sur les E_i les projections canoniques. La projection canonique \mathcal{P}_i de $E = \prod_{j \in I} E_j$ dans E_i est l'application qui à $x \in E$ associe $x_i \in E_i$, OU x_i est la i -ième composante de x , Ceci conduit, lorsque les E_i sont des espaces

topologiques. a la définition suivante.

Définition 2.1.1. (Topologie produit)

Soient (E_i, τ_i) une famille d'espaces topologiques, $E = \prod_{i \in I} E_i$ leur ensemble produit et, pour tout $i \in I$, \mathcal{P}_i la projection canonique de E sur (E_i) . La topologie produit sur E est la topologie initiale sur E pour les données $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$. C'est donc la topologie la moins fine de E pour laquelle toutes les projections (\mathcal{P}_i) sont continues. On notera $\otimes_{i \in I} \tau_i$ la topologie produit des topologies τ_i .

Dans toute la suite de ce paragraphe, on conserve les notations de la définition, La topologie produit est facile a décrire elle possédé une base particulièrement simple.

Définition 2.1.2. (Rectangle élémentaire)

On appelle rectangle élémentaire de E toute partie \mathcal{R} de E de la forme

$$\mathcal{R} = \bigcap_{j=1}^J \mathcal{P}_j^{-1} \mathcal{O}_j$$

ou les parties \mathcal{O}_j sont des ouverts de E_j , et ou J est une partie finie de I.

Remarque 2.1.1.

Une manière équivalente de définir un rectangle élémentaire est la suivante un rectangle élémentaire est une partie \mathcal{R} de E de la forme

$$\mathcal{R} = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

avec $\mathcal{O}_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$. Cette dernière description est plus maniable en pratique et justifie d'ailleurs la dénomination rectangle, la description de la définition précédente est utile dans les démonstrations théoriques.

La proposition suivante explique en particulier pourquoi, dans la définition des rectangles, on se limite a des parties J finies.

Proposition 2.1.1.

L' ensemble \mathcal{R} des rectangles élémentaires de E est une base de topologie sur E. La topologie engendrée par \mathcal{R} est la topologie produit, Un ouvert pour La topologie produit est donc une réunion de rectangles élémentaires.

Exemple 2.1.1.

Soit \mathbb{R}^n un rectangle élémentaire est de La forme $\prod_{i=1}^n \cup_{k \in K,]a_i^k; b_i^k[$, ou, pour tout $i \in [1, n]$ et tout $k \in K$. $a_i^k \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_i^k \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_i^k < b_i^k$. Un ouvert pour cette topologie est une réunion quelconque de ces rectangles élémentaires.

Proposition 2.1.2.

Soit f une application d'un espace topologique (F, τ_F) dans un espace topologique produit $(\prod_{i \in I} E, \prod_{i \in I} \tau_i)$.

Alors, f est continue si et seulement si, pour tout $i \in I$,

$$f = p_i \circ f$$

$p_i \circ f$ est continue.

Attention

Il n'existe pas de résultat analogue pour les applications définies sur un espace produit la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . définie par

$$g(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } g(0, 0) = 0$$

n'est pas continue en $(0, 0)$, mais ses applications partielles $x \rightarrow g(x, 0)$ et $y \rightarrow g(0, y)$ sont nulles. donc en particulier continues en 0.

On s'intéresse maintenant aux liens qui existent entre topologie produit et séparation.

Proposition 2.1.3.

Soient I un ensemble quelconque et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Alors, l'espace

$$E = \prod_{i \in I} E_i$$

muni de la topologie produit est séparé.

Proposition 2.1.4.

Soit (E, τ) un espace topologique. Alors, (E, τ) est séparé si et seulement si la diagonale

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$$

est un fermé de l'espace produit $E \times E$.

Remarque 2.1.2.

Si $n \geq 3$, il y a plusieurs manières de munir un produit de n espaces topologiques d'une structure topologique. Par exemple, si on donne trois espaces $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, il est possible de munir d'abord $E_1 \times E_2$ de la structure produit, puis $(E_1 \times E_2) \times E_3$ de la structure produit. ou directement $E_1 \times E_2 \times E_3 \cdots$. On admet que tous ces procédés sont équivalents, dans le sens où ils donnent la même topologie.

2.2 Espaces quotients

commençons par rappeler la définition algébrique d'un quotient d'espaces vectoriels.

Définition 2.2.1.

Soit V un F -espace vectoriel et W un sous-espace de V . alors le quotient de groupes abéliens V/W , dont l'ensemble sous-jacent est $\{v + W | v \in V\}$, est un \mathbb{K} -espace vectoriel, appelé espace quotient, muni de la loi interne :

$$+ : V/W \times V/W \rightarrow V/W$$

$$(v + W, v' + W) \mapsto (v + W) + (v' + W) := (v + v') + W$$

et de la loi externe .

$$\cdot : \mathbb{K} \times V/W \rightarrow V/W$$

$$(\lambda, v + W) \mapsto \lambda.(v + W) := (\lambda v) + W.$$

le \mathbb{K} -homomorphisme.

$$\pi_W : V \rightarrow V/W$$

$$: v \mapsto v + W$$

est appelé application quotient ou projection canonique.

Nous rappelons que si W est un sous groupe d'un groupe V , on peut définir une relation d'équivalence \sim en posant $v \sim w$ si et seulement si $u - v \in W$. les classes d'équivalence sont les $v+W$ tels que $v \in V$ et l'on note V/W l'ensemble de ces classes d'équivalence. C'est un groupe si $W < V$.

Considérons maintenant un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ et $M \subseteq X$ un sous-espace. Nous cherchons à savoir si la norme $\|\cdot\|_X$ induit une norme sur le quotient X/M . Une façon naturelle

de définir une distance entre deux classes (à gauche)consiste à utiliser la distance entre sous-ensembles d'un espace métrique :

$$d(x + M, y + M) = \inf \{ \|v - w\|_X \mid v \in x + M \mid w \in y + M \}.$$

Remarquons que

$$d(x + M, y + M) = d(x, y + M) = \inf \{ \|v - w\|_X \mid w \in y + M \}$$

(ou le deuxième d représente la distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique),étant donné que :

$$\begin{aligned} \{v - w \mid v \in x + M, w \in y + M\} &= \{(x + m_1) - (y + m_2) \mid m_1, m_2 \in M\} \\ &= \{x - (y + m_1 - m_2) \mid m_1, m_2 \in M\} \\ &= \{x - (y + m) \mid m \in M\} = \{x - w \mid w \in y + M\} \end{aligned}$$

$$\forall x \in X.$$

En outre,si l'on veut que l'application d ci-dessus définisse une métrique ,il est nécessaire que le sous-espace M soit fermé car si $x \in \widetilde{M}/M$, on obtient que

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) = 0$$

Or $x \in \widetilde{M}/M$ implique que $x \notin M$ et donc $x + M \neq 0 + M$. Ainsi M doit être fermé si d veut avoir une chance de satisfaire les axiomes de métrique. Maintenant ,si nous voulons que d soit la métrique engendrée par une norme, cette dernière norme doit nécessairement mesurer la distance entre une classe et le point zéro de X/M . Nous pouvons donc poser la définition suivante :

Définition 2.2.2.

Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\cdot\|)_X$.La norme quotient de l'espace X/M est l'application

$$\|\cdot\|_{X/M} : X/M \rightarrow \mathbb{F}$$

$$x + M \mapsto \|x + M\|_{X/M} = d(x + M, 0 + M).$$

Remarque 2.2.1.

Pour tout $x \in X$ nous avons :

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) \text{ et } d(x + M, 0 + M) = d(0, x + M)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|x + M\|_{X/M} &= \inf\{\|x - m\|_X, m \in M\} \\ &= \inf\{\|x + m\|_X, m \in M\}. \end{aligned}$$

Vérifions que $\|\cdot\|_{X/M}$ est bien une norme au sens de **la définition 1.2.1** .

Théorème 2.2.1.

Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$. Alors la norme quotient $\|\cdot\|_{X/M}$ est une norme.

Preuve.

soit $x, y \in X$, et $\lambda \in \mathbb{F}$

(1) Le sous-espace M étant fermé, on a que $0 = \|x + M\|_{X/M} = d(x + M, 0 + M) = d(x, M)$ si et seulement si $x \in M$ et seulement si $x + M = 0 + M$

(2) Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda(x + M)\|_{X/M} &= \|(\lambda x) + M\|_{X/M} = d(\lambda x, M) \\ &= d(\lambda x, \lambda M) \text{ puisque } M \text{ est stable par loi externe} \\ &= |\lambda| d(x, M) = |\lambda| \|x + M\|_{X/M} \end{aligned}$$

et

$$\|0(x + M)\|_{X/M} = \|0 + M\|_{X/M} = 0 = |0| \|x + M\|_{X/M}$$

Ainsi,

$$\|\lambda(x + M)\|_{X/M} = |\lambda| \|x + M\|_{X/M}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \text{et } \forall x \in X.$$

(3) Par définition de la norme quotient et en appliquant l'inégalité triangulaire à $\|\cdot\|_X$ obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|(x + M) + (y + M)\|_{X/M} &= \|(x + y) + M\|_{X/M} \\ &\leq \|x + y + m_1 + m_2\|_X \quad \forall m_1, m_2 \in M \\ &\leq \|x + m_1\|_X + \|y + m_2\|_X \end{aligned}$$

Ainsi en prenant l'infimum sur les $m_1, m_2 \in M$ de ces deux dernières normes, on obtient que

$$\|(x + M) + (y + M)\|_{X/M} \leq \|x + M\|_{X/M} + \|y + M\|_{X/M}.$$

De ce fait $\|\cdot\|_{X/M}$ satisfait l'inégalité triangulaire et il s'agit donc bien d'une norme.

Proposition 2.2.1.

Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$. Alors,

(1)

$$\|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X \quad \text{pour tout } x \in X,$$

(2) pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{x} \in X$ tel que $\tilde{x} + M = x + M$ et $\|\tilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \epsilon$.

Preuve.

(1) Nous avons

$$\|x + M\|_{X/M} = d(x, M) = \inf\{\|x - m\|_X; m \in M\} \leq \|x - 0\|_X = \|x\|_X$$

(2) soit $x \in X$ et $\epsilon > 0$ Par définition de l'infimum, il existe $m \in M$ tel que $\|x - m\|_X < \inf\{\|x - v\|_X \mid v \in M\} + \epsilon = d(x, M) + \epsilon = \|x + M\|_{X/M} + \epsilon$. Posons $\tilde{x} := x - m$, Alors $\|\tilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \epsilon$

De plus , $m \in M$ entraine que $m + M = 0 + M$ et $\tilde{x} + M = (x - m) + M = (x - 0) + M = x + M$

Nous pouvons maintenant montrer que les quotients par des sous-espaces fermés des espaces de Banach ont le bon goût d'être complets eux aussi.

Théorème 2.2.2.

soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ Alors, $(X/M, \|\cdot\|_{X/M})$ est aussi un espace de Banach.

Preuve.

Soit $\{x_n + M\}$ une suite de Cauchy dans X/M . Il suffit de prouver que $\{x_n + M\}$ admet une sous-suite convergente, ce qui implique que la suite elle-même converge vers la même limite. Essayons donc d'extraire une sous-suite convergente. Remarquons d'abord que si $x, y \in X$ sont tels que $\|(x - y) + M\|_{X/M} < \delta > 0$, alors le point (2) de **la proposition 2.2.1** il existe $y \in X$ tel que $(x - y) + M = (x - y) + M$ et $\|(x - y)\|_X < \delta$. Par définition d'une suite de Cauchy, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $n \geq n_1$, $\|(x_{n_1} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-2}$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$ tel que quelque soit $n \geq n_2$, $\|(x_{n_2} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-2}$. Et ainsi de suite, il existe pour tout $m > 0$ un $n_m \in \mathbb{N}$, $n_m \geq n_{m-1}$ tel que quelque soit $n \geq n_m$, $\|(x_{n_m} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-m}$.

Autrement dit, la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n + M\}$ définie ci-dessus est telle que $\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + M\|_{X/M} < 2^{-k}$ pour tout $k > 0$.

Ainsi par la remarque susmentionnée, il existe $\tilde{x}_{n_2} \in X$ tel que $(x_{n_1} - \tilde{x}_{n_2}) + M = (x_{n_1} - x_{n_2}) + M$ et $\|(x_{n_1} - \tilde{x}_{n_2})\|_X < 2^{-1}$. Alors comme $x_{n_2} + M = x_{n_2} + M$ on peut poser, sans perte de généralité, $\tilde{x}_{n_2} := x_{n_2}$.

De même, il existe $\tilde{x}_{n_3} \in X$ tel que $(x_{n_2} - \tilde{x}_{n_3}) + M = (x_{n_2} - x_{n_3}) + M$ et $\|(x_{n_2} - \tilde{x}_{n_3}) + M\|_X < 2^{-2}$.

Alors comme $\tilde{x}_{n_3} + M = x_{n_3} + M$ on peut poser, sans perte de généralité, $\tilde{x}_{n_3} := x_{n_3}$. Ainsi par une induction sur k , on obtient que $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_X < 2^{-k}$. Il en découle que $\{x_{n_k}\}$ est une suite de

Cauchy dans X . En effet, soit $\epsilon > 0$, alors pour $p > 1 - \log_2 \epsilon$ et pour tout $m > p \geq q$ on a :

$$\begin{aligned} \|x_{n_m} - x_{n_q}\|_X &\leq \|x_{n_m} - x_{n_{m-1}}\|_X + \dots + \|x_{n_{q+1}} - x_{n_q}\|_X \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \dots + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^{q-1}} < \frac{1}{2^{(1-\log_2 \epsilon)}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi par complétude de X , la suite x_{n_k} converge vers un certain $x \in X$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ Par conséquent,

$$\|(x_{n_k} + M) - (x + M)\|_{X/M} = \|(x_{n_k} - x) + M\|_{X/M} \leq \|x_{n_k} - x\|_X \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Donc la sous-suite $\{x_{n_k} + M\}$ converge vers $x + M$ et de ce fait la suite totale $\{x_n + M\}$ converge vers la même limite.

Proposition 2.2.2.

Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, si X et M sont complets, alors l'espace X/M est aussi complet.

Preuve.

Tout d'abord, supposons que X est complet, alors X/M est complet par le théorème précédent et M est en particulier complet en tant que sous-espace fermé de X . Il reste à voir que si M et X/M sont complets, cela implique que X est aussi complet. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X . Alors par le point (1) de **la proposition 2.2.1**

$\{x_n - x_m + M\}_{X/M} \leq \{x_n - x_m\}_X$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Ainsi $x_n + M$ est une suite de Cauchy dans X/M , qui est complet, et de ce fait converge vers un certain $y + M \in X/M$. Le point (2) de **la proposition 2.2.1** entraîne alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in X$ tel que $y_n + M = (x_n - y) + M$ (autrement dit $x_n - y - y_n \in M$) et $\{y_n\} < \{(x_n y) + M\}_{X/M} + 2^{-n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ainsi y_n converge vers 0.

Soit $\epsilon > 0$. Les suites x_n et y_n étant convergentes, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_1$ $\|x_n - x_m\|_X < \frac{\epsilon}{2}$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_2$ $\|y_n - y_m\|_X < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $m, n \geq \max\{m, n\}$

$$\|(x_n - y - y_n) - (x_m - y - y_m)\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_X < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Donc $x_n - y - y_n$ est une suite de Cauchy dans M et par complétude de M , elle admet une limite $z \in M$.

Finalement,

$$x_n = \underbrace{x_n - y - y_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{z}} + \underbrace{y_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}} + y \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z + y,$$

autrement dit X est complet.

Lemme 2.2.1.

Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, et $\pi : X \rightarrow X/M$, l'application quotient associée, Alors

$$\pi(U_X) = U_{X/M}$$

Preuve.

" \subseteq " Soit $x \in U_X$, alors d'après **la proposition 2.2.1**, $\|\pi(x)\|_{X/M} = \|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X \leq 1$, donc $\pi(x) \in U_{X/M}$ et $\pi(U_X) \subseteq U_{X/M}$.

" \supseteq " Soit $x + M \in U_{X/M}$, alors par le point (2) de **la proposition 2.2.1**, il existe $\tilde{x} \in X$ tel que $\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + M = x + M$ et $\|\tilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

En d'autres termes, il existe $\tilde{x} \in U_X$ tel que $\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + M = x + M$ Par conséquent, $U_{X/M} \subseteq \pi(U_X)$.

Proposition 2.2.3.

Soit X et M comme dans le lemme ci-dessus. Alors, l'application quotient $\pi : X \rightarrow X/M$ est un opérateur linéaire borné et ouvert. De plus, si $M \neq X$ alors $\|\pi\| = 1$

Preuve.

L'application est linéaire par définition des lois interne et externe sur X/M .

D'après le lemme précédent l'image par π de U_X est un sous-ensemble borné de X/M , ce qui implique, par linéarité, que π est borné.

Pour voir que π est ouvert, il faut voir que l'image par π de tout sous-ensemble ouvert de X est un sous-ensemble ouvert de X/M .

Soit U un ouvert de X et $x \in U$, alors il existe $r > 0$ tel que $U \supseteq x + rU_X$.

Ainsi, $\pi(U) \supseteq \pi(x + rU_X) = \pi(x) + rU_{X/M}$ d'après le **lemme 2.2.1**, Autrement dit $\pi(U)$ est ouvert dans X/M et π est une application ouverte.

Si $M \subseteq X$, alors X/M est différent de l'espace vectoriel trivial. Ainsi, π étant borné, $\|\pi\| = \sup\{\|\pi(x)\| \mid x \in S_X\} = 1$ par **lemme 2.2.1**.

Nous allons maintenant voir que sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut obtenir deux propriétés qui sont les analogues pour les espaces normés de la propriété universelle du quotient et du premier théorème d'isomorphe algébriques.

2.3 Propriété universelle de l'espace quotient.

Soit X et Y des espaces normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Soit encore $M \subseteq \ker(T)$ un sous-espace fermé de X et $\pi : X \rightarrow X/M$ l'application quotient. Alors, il existe un unique opérateur linéaire $S : X/M \rightarrow Y$ tel que $T = S \circ \pi$. Autrement dit le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 \pi \downarrow & \nearrow \exists! S & \\
 X/M & &
 \end{array}$$

De plus, $\text{im}(S) = \text{im}(T)$; S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte; S est borné si et seulement si T est borné et si T est borné, alors $\|S\| = \|T\|$.

Preuve.

- L'existence et l'unicité d'une application linéaire $S : X/M \rightarrow Y$ tel que $T = S \circ \pi$ et de même image que T constitue la propriété universelle algébrique du quotient.
- Montrons que S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte.

Supposons d'abord que S soit une application ouverte. π est aussi une application ouverte par **la proposition 2.2.3** Par conséquent, $T = S \circ \pi$ est aussi une application ouverte en tant que composition de deux applications ouvertes.

Réciproquement, supposons que T soit une application ouverte et soit U un ouvert de X/M . Alors, $S(U) = S(\pi(\pi^{-1}(U))) = T(\pi^{-1}(U)) \cdot \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X puisque π est continu et donc $S(U) = T(\pi^{-1}(U))$ est un ouvert de Y puisque T est ouverte. Par conséquent S est une application ouverte.

- Montrons que S est borné si et seulement si T est borné. Par **le lemme 2.2.1** $\pi(U_X) = U_{X/M}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup \{ \|S(x + M)\| \mid x + M \in U_{X/M} \} &= \sup \{ \|S(\pi(x))\| \mid x \in U_X \} \\ &= \sup \{ \|Tx\| \mid x \in U_X \}. \end{aligned}$$

Ainsi S est borné si et seulement si T est borné et si T est borné, alors $\|S\| = \|T\|$

Théorème 2.3.1. D'ISOMORPHE

Soit X et Y des espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Supposons de plus que $\text{im}(T)$ soit un fermé de Y . Alors :

$$X/\ker(T) \cong T(X)$$

Preuve.

Le noyau de T est fermé en tant que pré-image par une application continue du fermé $\{0_Y\}$ de Y . Nous pouvons donc considérer l'espace quotient $X/\ker(T)$ ainsi que l'unique opérateur induit $S : X/\ker(T) \rightarrow Y$ tel que $T = S \circ \pi$, fourni par la propriété universelle du quotient. Il vient,

$$\begin{aligned} \ker(S) &= \{x + \ker(T) \mid x \in X \text{ et } S \circ \pi(x) = 0\} \\ &= \{x + \ker(T) \mid x \in \ker(T)\} \\ &= \{0 + \ker(T)\} \end{aligned}$$

L'opérateur S est donc un opérateur linéaire borné et injectif de l'espace de Banach $X/\ker(T)$ dans l'espace de Banach $T(X)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme, D'où l'assertion.

Finalement, en application de la propriété universelle du quotient, nous obtenons un test de continuité des opérateurs linéaires de rang fini entre deux espaces normés.

Proposition 2.3.1.

Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces normés. Alors, T est continu si et seulement si $\ker(T)$ est un fermé de X .

Preuve.

Il suffit de montrer que T est borné si et seulement si $\ker(T)$ est un fermé de X .

Si T est borné, alors son noyau est fermé en tant que pré-image par T du sous-ensemble fermé $\{0_Y\}$ de Y .

Réciproquement, supposons que $\ker(T)$ est fermé. Alors nous pouvons prendre le quotient $X/\ker(T)$ et considérons l'application $S : X/\ker(T) \rightarrow Y$ fournie par la propriété universelle de $X/\ker(T)$. Alors, $S(x + \ker(T)) = 0$ si et seulement si $T(x) = 0$ si et seulement si $x \in \ker(T)$. Ainsi $\ker(S) = \{\ker(T)\} = \{0_{X/\ker(T)}\}$ et S est de ce fait injectif. Par hypothèse, $\text{im}(T)$ est de dimension finie, par conséquent, l'injectivité de l'opérateur linéaire S implique que $X/\ker(T)$ est aussi de dimension finie. Donc, S est borné, ce qui implique, toujours d'après la propriété universelle du quotient, que T est borné aussi.

TABLE DES NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

- $B(X, Y)$... Espace des opérateurs linéaires et bornés de X vers Y
- $B(X)$... Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X
- B_X ... La boule unité fermée de l'espace métrique X
- \mathbb{C} ... Les nombres complexes
- Ker ... Noyau
- dim ... Dimension
- $d(.,.)$... Application de distance
- \mathbb{F} ... Corps étant soit \mathbb{C} , soit \mathbb{R}
- $\text{hom}(X, Y)$... Ensemble des applications linéaires de l'espace X dans l'espace Y
- I_E ... Application identité de l'ensemble E
- \mathbb{K} ... Corps quelconque
- $K(X, Y)$... Ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y
- \mathbb{N} ... Les nombres naturels
- $\mathbb{N}_n \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- \mathbb{R} ... Les nombres réels
- τ_E ... Topologie sur l'ensemble E

$T_{\|\cdot\|}$... Topologie engendrée par la norme $\|\cdot\|$

$(X, \|\cdot\|_X)$... Espace normé

x_n ... Suite

\mathbb{Z} ... Les nombres entiers

$|\cdot|$... Module complexe / valeur absolue

$(\|\cdot\|_X)$... Application norme sur l'ensemble X

X/M ... Le quotient de l'espace X par le sous-espace M

\oplus ... La somme directe

Σ ... Symbole de sommation

\otimes ... Le produit directe

\times ... Le produit cartésien

\cap ... L'intersection

\cup ... L'union

\neq ... La non égalité

\forall ... Symbole universel "pour tout"

\exists ... Symbole universel "il existe"

\subset ... L'inclusion

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHARLES STUART , Opérateurs de Fredholm Anthony Arnold & Caroline Lassueur ,Projet de Semestre été 2005 .
- [2] DAVID DOS SANTOS FERREIRA . Cours (ESPACES VECTORIELS QUOTIENT | M1) Université de Lorraine
- [3] FRÉDÉRIC BOURQEOIS . Introduction à l'analyse fonctionnelle et applications .Université Libre de Bruxelles .Faculté des Sciences Appliquées
- [4] JEAN-PIERRE MACRO -Mathématiques Analyse L3 Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés -Pearson Éducation France (2009) .
- [5] JOSETTE CHARLES Professeur à l'Université de Montpellier 2 ,MOSTAFA MBEKHTA Professeur à l'Université de Lille 1 ,HERVÉ QUEFFÉLEC Professeur à l'Université de Lille 1 .
ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS.
- [6] MOSTEFA NADIR. Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.
- [7] MIHAI GRADINARU , LICENCE DE MATHÉMATIQUES 3 ème année ESPACES VECTORIELS NORMÉS 2007-2008

CONCLUSION

Le sujet des espaces normés et Banach et quotients et ... a une importance capitale. Or, il est impossible à quiconque ayant eu accès à l'analyse fonctionnelle de l'ignorer.

Afin d'enrichir les connaissances mathématiques, nous avons essayé dans ce mémoire de connaître certains des preuves, des textes et des caractéristiques des espaces, plus précisément la relation entre la norme quotient et l'espace de Banach, en tenant compte de la précision et la simplicité en conformité avec les connaissances de nos collègues étudiants.

Enfin, nous espérons que nous avons réussi, bien que dans la simple mesure de l'accomplissement de cet humble travail, et nous sommes prêts à fermer ce sujet, que peu importe combien d'efforts dans la préparation de ce travail, certaines idées sont encore bloquées et l'autre sombre.

Nous tenons à dire que nous sommes très favorables à toute critique constructive concernant ce travail car il reste qu'une goutte dans une vaste mer, et nous souhaitons aller plus loin dans l'avenir. Nous demandons à tous ceux qui lisent ce mémoire de prier pour nous et pour notre superviseur afin qu'Allah nous ouvre la porte de la réussite.

ملخص

درسنا في هذه المذكرة موضوع القسمة والجداء في الفضاء الناظمي. وهذا لما له من اهمية في الدراسات الرياضية، حيث تم تسليط الضوء على عدة مبرهنات وخصائص في فضاء القسمة، وخاصة منها التي تربط التنظيم بفضاء القسمة وفضاء بناخ.

Abstract

In this memory , we studied the subject of products and quotients of normes spaces. This study is important in mathematics domains and we show the relation ship betwin the norm quotient and Banach spaces.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié le sujet sur les produits et les quotients des espaces normes. qui est à une importance dans les études mathématiques, notamment l'étude les propriétés sur les espaces quotientes ,plus précisément la relation entre la norme quotient et l'espace de Banach.