



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Sciences des particules à haute énergie**

Par

Zaoui Ahlem

THEME

**Traitement de l'équation de Schrödinger au présence d'une
longueur minimale pour le potentiel delta de Dirac**

Soutenu le : 25/06/2013

Devant le jury composé de :

S.Nehaoua	MAA	Université de M'sila	Président
N.Guesmia	MAB	Université de M'sila	Rapporteur
S.Medjber	MAA	Université de M'sila	Examineur
M. Debabi	MAA	Université de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2013

TABLE DES MATIERES

Introduction	03
--------------------	----

Chapitre 1:Rappels sur la diffusion des particules en mécanique quantique ordinaire

1 .1. Rappels sur les bases de la mécanique quantique	06
1.2 .Espace des fonctions d'onde d'une particule (Espace Hilbert)	06
1.1. Structure de l'espace \mathcal{H} de la fonction d'onde	06
a- \mathcal{H} est espace vectoriel.....	06
b- produit scalaire	06
α . Définition	06
β . Propriétés	07
1.3. Opérateurs linéaires.....	07
1.3.1 Définition.....	07
1.3.2 produit de deux opérateurs.....	07
1.4 Relations d'Heisenberg	08
1.5 Equation de Schrödinger pour une particule	10
1.6 L'équation de continuité et Densité de courant.....	11
1.6 La diffusion à une dimension	12
1.6. 1. La barrière rectangulaire de potentiel	13
a) Cas ou ($E > V_0$) ; résonances	13
b) cas ($E < V_0$) ; effet tunnel	16
1.6.2. Potentiel delta de Dirac	17
A- Définition	17
B-Propriétés de la fonction Dirac	18

C- La diffusion d'une particule.....	18
C.1. cas $E > 0$	18
C.2. Conditions de raccord.....	19

Chapitre II: La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

2.1 Introduction	23
2.2 Longueur minimale.....	23
2.3 Principe d'incertitude généralisé	24
2.4. Représentation théorique	26
2.4.1. Représentation dans l'espace des impulsions.....	27
2.5. Conséquences.....	28
2.5.1 Le produit scalaire et la relation de fermeture.....	28
2.6. Relation d'incertitude généralisée à N dimensions.....	29
2.7. La réduction de brau	32
2.8. L'équation de Schrödinger	32
2.9. La densité de courant et l'équation continuité de probabilité	33

Chapitre III: Application au potentiel delta de Dirac

3.1. L'équation de Schrödinger à une dimension et la longueur minimale.....	36
3.2. Solutions dans le cas libre $v(x)=0$	37
3.3 .Application : Le potentiel delta de Dirac.....	39
Conclusion.....	47
Référence.....	48

Remerciements

Ce travail a été réalisé au département de physique de l'université de M'sila.

Je tiens à mes remerciements les plus distingués et ma profonde reconnaissance à mon Rapporteur **Mr Nadjib Guesmia** d'avoir accepté de diriger ce travail et pour ses fructueux conseils.

Enfin, je voudrais remercier mon mari, mes parents, mes frères et mes sœurs, mes copines (Houda, Monira, Samah), mes collègues pour leur soutien moral.

Dédicace

Louange à Allah, Seigneur des Mondes, et les prières et la paix soient sur le sceau des prophètes et messagers .

Je dédie ce travail à:

celle qui m'a élevé et éclairé ma route, qui m'a aidé avec ses prières, pour la personne la plus chère dans cette existence ma chère maman.

Pour celui qui a travaillé si dur pour moi et m'a appris le sens de la lutte et m'a conduit à ce que je suis devenu, il a travaillé si dur pour nous donner un moment de bonheur, mon cher père que dieu le protège a ceux qui leur amour coule dans mes veines, ceux qui leur mémoires est gravé dans mon cœur.

Pour mes frères : Samir et Abd Elnour.

Pour mes sœurs : Warda, Hannan et Nassima.

Pour celui qui a travaillé avec moi dur afin de compléter ce travail, à mon mari et compagnon : Djamel Guesmia

Pour ceux avec qui nous avons marché ensemble dans notre chemin vers le succès et la créativité, ceux avec qui nous avons mis la main dans la main pour cueillir la fleur de la connaissance.

Pour mes amis et collègues.

Pour tous mes proches :

Pour mes chers enseignants et tous mes compagnons d'étude.

Enfin, je demande à Dieu Tout-Puissant de faire ce travail utile pour que tout le monde puissent en profiter.

INTRODUCTION

Nous présentons les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, impliquant l'existence d'une longueur élémentaire qui a été introduit en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non normalisable. Parmi les scénarios qui ont été proposés pour résoudre ce problème est bien l'existence d'une longueur minimale En dessous de laquelle la physique est inaccessible. La mécanique quantique déformée est une version modifiée de l'algèbre de Heisenberg en ajoutant quelques corrections sur les commutateurs dues à cette longueur dit longueur minimale. Ce formalisme a reçu une considérable attentions depuis quelques années par les physiciens comme KEMPH et ses collaborateurs, L'existence de cette longueur est une conséquence directe de la théorie gravité et de la théorie des cordes, ces théories propose quelques corrections sur la relation d'incertitude d'HEISENBERG qui devient sous la forme $(\Delta X. \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \Delta P^2 + \dots))$, ces corrections modifiées la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient :

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2 + \dots).$$

L'introduction de cette l'algèbre en mécanique quantique non relativiste peut-être une théorie qui permet d'absorber les divergences qui apparaissent dans la théorie quantique des champs. On s'intéresse dans notre mémoire à la diffusion des particules dans en considérant un système simple, à savoir le potentiel delta de Dirac à 1 dimension, nous illustrons comment on peut résoudre l'équation de Schrödinger et extraire les Coefficients de réflexion et de transmission dans ce formalisme de la longueur minimale, nous allons étudier l'influence de cette algèbre déformée sur le phénomène de diffusion et nous prenons le potentiel delta de Dirac comme une application .

Notre mémoire est réparti sur trois chapitres:

Dans le premier chapitre on fait un rappel sur quelques éléments principaux de la mécanique quantique ordinaire tel que le principe d'incertitude d'Heisenberg, l'équation de Schrödinger celle de continuité ... ensuite on exposera le formalisme de diffusion des particules en mécanique quantique ordinaire qui se base sur la résolution l'équation de Schrödinger et on se limite au cas unidimensionnel de la diffusion qui est basé sur le calculs des probabilités de transmission de réflexion prenons la barrière de potentiel et potentiel delta de Dirac comme un exemple détaillé.

Dans le deuxième chapitre est consacrer à la mécanique quantique déformées due à l'existence d'une longueur minimale et nous avons exposé le principe d'incertitude généralisé, qui se fonde sur cette longueur, nous allons voir les conséquences de cette algèbre déformée en effet produit scalaire, relation d' fermeture, et bien sûr la nouvelle équation de Schrödinger et la nouvelle forme de l'équation de continuité avec un courant déformé.

Dans le troisième chapitre on exposera un calcul détaillé concernant la résolution de l'équation de Schrödinger déformée avec un potentiel delta de Dirac on utilisera la version déformée du courant pour calculer le coefficient de réflexion R et de transmission T et on vérifiera la loi de conservation $R+T=1$ dans cette nouvelle algèbre, et on terminera par une conclusion.

Chapitre I:

Rappels sur la diffusion des particules en mécanique quantique ordinaire

1-Rappels sur la mécanique quantique ordinaire :

Ce paragraphe résume de façon très succincte les concepts de base de la mécanique quantique et leurs principales conséquences qui seront utiles pour la suite de ce mémoire [1].

1-1 Espace des fonctions d'onde d'une particule (Espace Hilbert) :

1-1-1 Structure de l'espace \mathcal{H} de la fonction d'onde :

A- \mathcal{H} est espace vectoriel :

Il est facile de montrer que \mathcal{H} satisfait toutes les propriétés d'un espace vectoriel [1].

Si : $\psi_1(r) \in \mathcal{H}$ et $\psi_2(r) \in \mathcal{H}$, alors :

$$\psi(r) = \lambda_1 \psi_1(r) + \lambda_2 \psi_2(r) \in \mathcal{H} \quad (1.1)$$

λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes quelconques.

Pour le montrer que $\psi(r)$ est de carré sommable développons $|\psi(r)|^2$:

$$|\psi(r)|^2 = |\lambda_1|^2 |\psi_1(r)|^2 + |\lambda_2|^2 |\psi_2(r)|^2 + \lambda_1^* \lambda_2 \psi_1^*(r) \psi_2(r) + \lambda_1 \lambda_2^* \psi_1(r) \psi_2^*(r) \quad (1.2)$$

Les deux derniers termes de (1.2) ont même module, qu'on peut majorer par

$$|\lambda_1 \lambda_2| \left[|\psi_1(r)|^2 + |\psi_2(r)|^2 \right] \quad (1.3)$$

$|\psi(r)|^2$ Est donc inférieure à une fonction dont l'intégrale converge, puisque $\psi_1(r)$ et $\psi_2(r)$ sont de carrés sommables.

B/ Le produit scalaire :

α - Définition :

A toute couple de deux éléments de \mathcal{H} , $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ pris dans ordre, on associe un nombre complexe, noté (φ, ψ) , qui vaut par définition [1]:

$$(\varphi, \psi) = \int d^3r \varphi^*(r) \psi(r) \quad (1.4)$$

(φ, ψ) Est le produit scalaire de $\psi(r)$ par $\varphi(r)$, cette intégrale converge toujours si ψ et φ appartiennent à \mathcal{H} .

β . Propriétés :

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^* \quad (1.5)$$

$$(\varphi, \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) = \lambda_1 (\varphi, \psi_1) + \lambda_2 (\varphi, \psi_2) \quad (1.6)$$

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \psi) = \lambda_1^* (\varphi_1, \psi) + \lambda_2^* (\varphi_2, \psi) \quad (1.7)$$

Le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième fonction du couple, anti linéaire par rapport à la première. Si $(\varphi, \psi) = 0$, on dit que $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ sont orthogonales.

$$(\psi, \psi) = \int d^3 |\psi(r)|^2 \quad (1.8)$$

Est un nombre réel, positif, qui est nul si et seulement si $\psi(r) = 0$.

$\sqrt{(\psi, \psi)}$ S'appelle la norme de $\psi(r)$ [on peut vérifier aisément que ce nombre a toutes les propriétés d'une norme]. le produit scalaire choisi plus haut permet donc de définir une norme dans \mathcal{H} .

$$|(\psi_1, \psi_2)| \leq \sqrt{(\psi_1, \psi_1)} \sqrt{(\psi_2, \psi_2)} \quad (1.9)$$

L'égalité étant réalisée si et seulement si les deux fonctions ψ_1 et ψ_2 sont proportionnelles.

1.2 Opérateurs linéaires

1.2.1 définition :

Un opérateur linéaire A fait correspondre à tout ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un autre ket $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}$, la correspondance étant linéaire [1]:

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle \quad (1.10)$$

$$A(\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1 A|\psi_1\rangle + \lambda_2 A|\psi_2\rangle \quad (1.11)$$

1.2.2 produit de deux opérateurs

Le produit de deux opérateurs linéaires A et B , Noté AB , est défini de la façon suivante :

$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle) \quad (1.12)$$

B agit d'abord sur $|\psi\rangle$ pour donner le $B|\psi\rangle$; A agit ensuite sur le ket $B|\psi\rangle$.

En général le commutateur $[A, B]$ de A et B est par définition :

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.13)$$

Si $[A, B] = 0$, on dit que les deux opérateurs commutent

$$[A, B] = 0 \quad (1.14)$$

Soient deux kets $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$. On appelle élément de matrice de A entre $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$, le produit scalaire : $\langle\varphi|(A|\psi\rangle)$

C'est, par suite, un nombre qui dépend linéairement de $|\psi\rangle$ et anti linéairement de $|\varphi\rangle$.

1.3 Relations d'incertitude de Heisenberg :

En mécanique classique la mesure de la position ou de la vitesse d'une Particule peut être très précise et parfaite. Elle n'est en fait limitée que par la performance de l'instrument et la dextérité de l'opérateur. Un opérateur appliqué utilisant un instrument de qualité peut rendre la mesure aussi précise que possible. On peut donc atteindre aisément la trajectoire du mouvement qui est définie par la connaissance en tout point de la vectrice position $\vec{r}(t)$ et de sa dérivée, la vitesse $\vec{V}(t)$.

En mécanique quantique, nous avons vu que la particule est d'écrite par une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ qui représente l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point \vec{r} à l'instant t . Il est donc exclu de connaître avec certitude la position ou la vitesse et de définir une trajectoire du mouvement[2].

La mécanique quantique impose donc une "limite fondamentale" à la précision avec laquelle on peut spécifier et mesurer des variables de ce type. Cette limite fut établie en 1927 par Heisenberg et est traduite par le principe d'incertitude dont l'expression spécifique et quantitative dans chaque cas particulier s'appelle une relation d'incertitude.

Considérons un système physique dans l'état $|\psi\rangle$ et deux observables A et B qui ne commutent pas ($[A, B] \neq 0$).

On la variance du système

$$\begin{cases} (\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\ (\Delta B)^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

Introduisons les opérateurs A' et B' définis par :

$$A' = A - \langle A \rangle \text{ et } B' = B - \langle B \rangle \quad (1.19)$$

A' Et B' représentent l'écart des opérateurs A et B par rapport à leur valeur Moyenne.

Comme $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$ sont des scalaires on a : $[A', B'] = [A, B]$

Considérons le vecteur $|\psi'\rangle$ transformé de $|\psi\rangle$ par l'application de L'opération $\lambda A' + iB'$ ou λ est un paramètre réel quelconque :

$$|\psi'\rangle = (\lambda A' + iB')|\psi\rangle \quad (1.20)$$

On a:

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | (\lambda A' - iB')(\lambda A' + iB') | \psi \rangle \quad (1.21)$$

On a: $\lambda A' iB' - iB' \lambda A' = i\lambda(A'B' - B'A') = i[A', B']$

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle A'^2 \rangle \lambda^2 + i[A', B'] \lambda + \langle B'^2 \rangle \quad (1.22)$$

$\langle \psi' | \psi' \rangle$ Étant une quantité positive, le polynôme du second degré en λ Doit être toujours positif ou nul. Pourqu'il soit toujours ainsi quel que Soit λ il faut que le discriminant soit négatif, c'est-à-dire :

$$(i\langle [A', B'] \rangle)^2 - 4\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \leq 0 \quad (1.23)$$

Soit :

$$\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \geq \frac{1}{4} (i\langle [A', B'] \rangle)^2 \quad (1.24)$$

Ou encore :

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A', B'] \rangle| \quad (1.25)$$

On appliquant cette inégalité aux composantes des observables \vec{r} et \vec{p} qui sont telles que :

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar \quad (1.26)$$

On obtient :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.27)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.28)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.29)$$

C'est ce qu'on appelle les inégalités d'Heisenberg.

1.4 Equation de Schrödinger pour une particule :

A toute particule d'énergie E et de quantité de mouvement P est associée une onde pulsation $\omega = E/\hbar$ est de vecteur d'onde $k=P/\hbar$. La longueur d'onde correspondante La longueur d'onde correspondante, dite *longueur d'onde de Broglie*, est donc [3]:

$$\lambda = 2\pi /k$$

A toute particule est associée une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ qui caractérise entièrement son état (c'est-à-dire qu'elle contient toute l'information qu'il est possible de connaître sur la particule) et qui représente physiquement son amplitude de probabilité de présence. Ainsi,

$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^* \psi d^3 \vec{r}$ est la probabilité de trouver la particule entre \vec{r} et $\vec{r} + d\vec{r}$ à l'instant t . La

Particule devant nécessairement se trouver quelque part, sa fonction d'onde doit être normalisée de telle sorte que :

La particule devant nécessairement se trouver quelque part, sa fonction d'onde doit être normalisée de telle sorte que :

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3 \vec{r} = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (1.30)$$

Soit m la masse de la particule ; la fonction d'onde est alors solution de *l'équation de Schrödinger* :

$$H\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (1.31)$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.32)$$

H est l'opérateur Hamiltonien du système dans le cas unidimensionnel donné par

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \text{ avec } : p = i\hbar\vec{\nabla} \Leftrightarrow p^2 = -\hbar^2\vec{\nabla}^2$$

Donc :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x) + V(x)\psi(x) \quad (1.33)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x) + V(x)\psi(x) \quad (1.34)$$

Où $V(x)$ est le potentiel ressenti par la particule il s'agit en fait d'une énergie potentielle.

Et $\vec{\nabla}^2$ est l'opérateur de laplace à une dimension $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial^2 / \partial x^2$ (1.35)

1.5 L'équation de continuité et la densité de courant :

Considérons une particule dont l'état est décrit par $|\psi(t)\rangle$.

D'après la relation $\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1$

Avec

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.36)$$

$\rho(\vec{r}, t)$ est une densité de probabilité et la probabilité $dP(\vec{r}, t)$ de trouver la particule à l'instant t dans le volume élémentaire d^3r situé au point \vec{r} est [3]:

$$dP(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)d^3r$$

Considérons toujours le cas unidimensionnel et pour la particule libre $V(x)=0$, l'équation (1.34) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) \quad (1.37)$$

Et son conjugué est

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) \right)^* \quad (1.38)$$

L'équation (1.37) $\times \psi^*(x)$ donne

$$\begin{aligned} \psi^*(x) \times \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) \right] \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^*(x) \vec{\nabla}^2 \psi(x) = i\hbar \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) \end{aligned} \quad (1.39)$$

L'équation (1.38) $\times \psi(x)$ donne

$$\begin{aligned} \psi(x) \times \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi^*(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x) \right) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \vec{\nabla}^2 \psi^*(x) = -i\hbar \psi(x) \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Faisons la différence

$$\begin{aligned} (1.39) - (1.40) \Leftrightarrow i\hbar \left(\psi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) + \psi(x) \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x) \right) = \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\psi^*(x) \vec{\nabla}^2 \psi(x) - \psi(x) \vec{\nabla}^2 \psi^*(x) \right] \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^*(x)\psi(x)) = -\frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \left[\psi^*(x) \vec{\nabla} \psi(x) - \psi(x) \vec{\nabla} \psi^*(x) \right] \quad (1.41)$$

De la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{J} \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \left[\psi^*(x) \vec{\nabla} \psi(x) - \psi(x) \vec{\nabla} \psi^*(x) \right] \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \left[\psi^*(x) \vec{\nabla} \psi(x) - \psi(x) \vec{\nabla} \psi^*(x) \right]$$

Et la formule de la densité du courant est donc

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x) \vec{\nabla} \psi(x) - \psi(x) \vec{\nabla} \psi^*(x) \right] \quad (1.45)$$

1.6. La diffusion à une dimension :

L'étude de la diffusion à une dimension a son importance. En effet, si on physique les cas réalistes sont en général à trois dimensions, le cas à une dimension s'insère dans le cadre de

modèle ou d'approximation représentant cette réalité. Considérons alors le cas d'une particule de masse m dans un potentiel à une dimension $V(x)$, nous examinons par la suite le problème de réflexion et de transmission des ondes avec le potentiel, nous considérons deux cas simples et fondamentaux, la Barrière rectangulaire et le potentiel delta de Dirac.

1.6. 1. La barrière rectangulaire de potentiel :

On considère le cas d'une barrière carrée de largeur a et de hauteur V_0 , comme indiqué sur la figure (1.1)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (1.46)$$

Nous allons étudier la propagation d'une onde incidente venant de la droite dans les deux cas où l'énergie E est supérieure ou inférieure à V_0 . Ces deux cas permettent d'illustrer deux phénomènes ondulatoires importants : la résonance et l'effet tunnel.

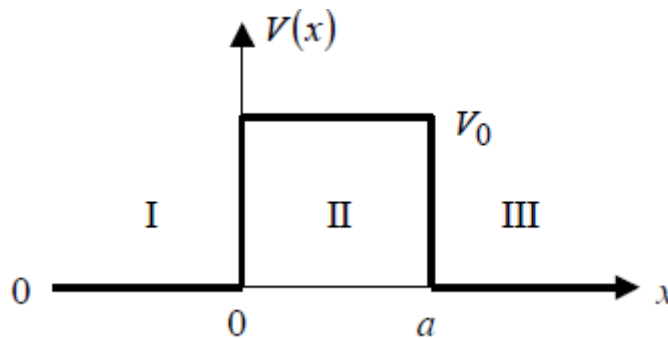


Figure 1.1 Barrière rectangulaire de potentiel

L'équation de Schrödinger à une dimension dans le cas stationnaire est

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.47)$$

Dans le cas libre (région(I) et région (III)) on a

$$(d^2 + k_0^2)\psi(x) = 0 \quad (1.48)$$

Avec $k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$

Dans la région (II) on a

$$(d^2 + k^2)\psi(x) = 0 \quad (1.49)$$

Avec $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

a) Cas ou ($E > V_0$) ; résonances :

Dans les trois régions (I, II et III) l'énergie est supérieure au potentiel. Les solutions de l'équation de Schrödinger sont donc de la forme [1] :

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \\ \psi_{II}(x) = De^{ikx} + Ce^{-ikx} \\ \psi_{III}(x) = A'e^{ik_0x} + Fe^{-ik_0x} \end{cases} \quad (1.50)$$

Prenons $F = 0$ (particule incidente venant de $x = -\infty$)

Donc :

$$\begin{cases} \psi_I = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \\ \psi_{II} = De^{ikx} + Ce^{-ikx} \\ \psi_{III} = A'e^{ik_0x} \end{cases} \quad (1.51)$$

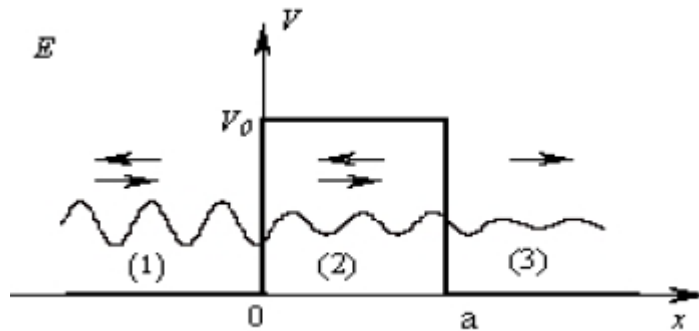


Figure 1.2 phénomène de réflexion et transmission.

Les coefficients de réflexion et de transmission R et T sont donnés par définition :

$$R = \left| \frac{J_r}{J_{in}} \right| \quad \text{et} \quad T = \left| \frac{J_t}{J_{in}} \right| \quad (1.52)$$

On a :

$$\begin{cases} \psi_{in} = Ae^{ik_0x} \\ \psi_r = Be^{-ik_0x} \\ \psi_t = Ee^{ikx} \end{cases} \quad (1.53)$$

Le courant incident se calcul comme suit

$$J_{in} = \frac{\hbar}{2m} [\psi_{in}^* \vec{\nabla} \psi_{in} - \psi_{in} \vec{\nabla} \psi_{in}^*] \quad (1.54)$$

$$J_{in} = \frac{\hbar}{2mi} [2(A)^2 iK_0]$$

On obtient

$$J_{in} = \frac{\hbar K_0}{m} (A)^2 \quad (1.55)$$

Et le courant réfléchi est

$$J_r = \frac{\hbar}{2m} [\psi_r^* \vec{\nabla} \psi_r - \psi_r \vec{\nabla} \psi_r^*] \quad (1.56)$$

$$J_r = -\frac{\hbar}{2mi} [2(B)^2 iK_0]$$

On a donc

$$J_r = -\frac{\hbar K_0}{m} (B^2) \quad (1.57)$$

Et la même chose pour le courant transmis

$$J_t = \frac{\hbar}{2m} [\psi_t^* \vec{\nabla} \psi_t - \psi_t \vec{\nabla} \psi_t^*] \quad (1.58)$$

$$J_t = \frac{\hbar}{2mi} [2(E)^2 iK_0]$$

On aura

$$\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \frac{\hbar K_0}{m} (A')^2 \quad (1.59)$$

Utilisons (1.52) on obtient

$$R = \left| \frac{J_r}{J_{in}} \right| = \left| \frac{-\frac{\hbar K_0}{m} (B^2)}{\frac{\hbar K_0}{m} (A)^2} \right| = \left| \frac{B^2}{A^2} \right| \quad (1.60)$$

Et

$$T = \left| \frac{J_t}{J_{in}} \right| = \left| \frac{\frac{\hbar K_0}{m} (E^2)}{\frac{\hbar K_0}{m} (A)^2} \right| = \left| \frac{A'^2}{A^2} \right| \quad (1.61)$$

Les conditions de continuité en $x = 0$ et $x = a$ donnent, après un calcul non difficile à déterminer les expressions des amplitudes A, A' et B

On a Les conditions de continuité suivantes :

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \\ \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \\ \psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) \end{cases} \quad (1.62)$$

Donc :

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ ik_0 A + (-ik_0 B) = Dik - Cik \\ De^{ika} + Ce^{-ika} = A'e^{ik_0 a} \\ iDke^{ika} - ikCe^{-ika} = ikA'e^{ik_0 a} \end{cases} \quad (1.63)$$

$$A = \left[\cos ka - i \frac{k_0^2 + k^2}{2k_0 k} \sin ka \right] e^{ik_0 a} A' \quad (1.64)$$

$$B = i \frac{k^2 - k_0^2}{2k_0 k} \sin ka e^{ik_0 a} A' \quad (1.65)$$

Ce qui nous permet le calcul des coefficients de réflexion R et de transmission T :

$$T = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{4k_0^2 k^2}{4k_0^2 k^2 + (k_0^2 - k^2)^2 \sin^2(ka)} \quad (1.66)$$

$$R = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{(k_0^2 - k^2) \sin^2(ka)}{4k_0^2 k^2 + (k_0^2 - k^2)^2 \sin^2(ka)} \quad (1.67)$$

On vérifie alors facilement que

$$R + T = 1 \quad (1.68)$$

b) cas ($E < V_0$) ; effet tunnel

Les fonctions d'onde solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions sont dans ce cas [1]:

$$\begin{cases} \psi_I = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \\ \psi_{II} = D'e^{kx} + C'e^{-kx} \\ \psi_{III} = A'e^{ik_0x} \end{cases} \quad (1.69)$$

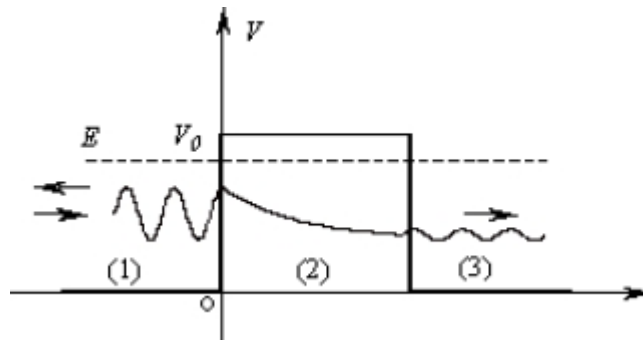


Figure 1.3 L'effet tunnel

La même procédure de calcul nous permettra de déduire les coefficients de réflexion et de transmission

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(k_0^2 + k^2)Sh^2(ka)}{4k_0^2k^2 + (k_0^2 + k^2)Sh^2(ka)} \quad (1.70)$$

$$T = \left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{4k_0^2k^2}{4k_0^2k^2 + (k_0^2 + k^2)Sh^2(ka)} \quad (1.71)$$

Et la loi de conservation de probabilités $R+T=1$ est conservée bien sûr.

1.6.2. Potentiel delta de Dirac :

A- Définition :

Ce potentiel est défini par : $V(x) = a\delta(x)$ (1.72)

Où a est constante arbitraire et $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac, cette fonction peut être imaginée comme étant nulle partout sauf en $x=0$, où elle vaut infinie [4].

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

Elle satisfait l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (1.74)$$

Où f est une fonction continue quelconque. Cette intégrale peut être évaluée par

L'argument suivant : puisque $\delta(x)$ est nulle pour $x \neq 0$, les bornes d'intégration peuvent être remplacées par $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, où ε est un nombre positif petit. De plus, puisque f est continue en $x = 0$, ses valeurs dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ ne diffèrent pas beaucoup de $f(0)$. On écrit donc approximativement [4]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)f(x)dx \approx f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx \quad (1.75)$$

L'approximation s'améliore au fur et à mesure que ε s'approche de 0. A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, compte tenu de l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (1.76)$$

On a exactement l'égalité (1.75).

La fonction delta agit en quelque sorte comme un filtre ou un tamis sélectionnant,

Parmi toutes les valeurs possibles de $f(x)$, sa valeur en $x = 0$.

B-Propriétés de la fonction Dirac :

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (1.77)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.78)$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (1.79)$$

$$\int \delta(x-y)\delta(y-a) = \delta(x-a) \quad (1.80)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (1.81)$$

C- La diffusion d'une particule:

L'équation de Schrödinger s'écrit avec cette interaction comme suit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + a\delta(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.82)$$

Comme dans le cas de la barrière de potentiel, il faut résoudre l'équation séparément à gauche et à droite de $x = 0$, et puis raccorder les solutions en $x = 0$ en utilisant des conditions supplémentaires [4]

C.1. cas $E > 0$:

Solution dans la région (I) ($x < 0$) :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \right] \psi(x) = E(x)\psi(x) \quad (1.83)$$

Ou

$$\psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (1.84)$$

Posons $k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ on a donc :

$$\psi''(x) + k_0^2 \psi(x) = 0 \quad (1.85)$$

La solution dans les deux régions est

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} \quad (1.86)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_0x} + Ge^{-ik_0x} \quad (1.87)$$

Aucune onde n'est réfléchiée dans la deuxième région donc $G=0$ donc

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_0x} \quad (1.88)$$

C.2. Conditions de raccord

On garde la condition de continuité de la fonction d'onde :

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (1.89)$$

L'existence de la fonction $\delta(x)$ dans (1.82) craie un saut pour la dérivée de la fonction d'onde (la dérivée de la fonction d'onde n'est pas continue). Ce qui nous oblige de chercher une condition supplémentaire [5].

Considérons que la fonction d'onde est constante toute l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$:

$$\forall x \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \Rightarrow \psi(x) = c^{te} = \psi(0) \quad (1.90)$$

On 'intègre l'équation (1.82) sur intervalle $[\varepsilon, -\varepsilon]$ on aura :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a \delta(x) \psi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E \psi(x) dx \quad (1.91)$$

Utilisons les propriétés de $\delta(x)$ on aura :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + a \psi(0) = E \psi(0) \cdot 2\varepsilon \\ \Rightarrow & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} \psi(+\varepsilon) - \frac{d}{dx} \psi(-\varepsilon) \right] + a \psi(0) = E \psi(0) \cdot 2\varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left[\frac{d}{dx} \psi(0^+) - \frac{d}{dx} \psi(0^-) \right] - \frac{2ma}{\hbar^2} \psi(0) = \frac{4mE}{\hbar^2} \psi(0) \times 0$$

$$\begin{aligned} [\psi'(0^+) - \psi'(0^-)] &= \frac{2ma}{\hbar^2} \psi(0) \\ [\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0)] &= \frac{2ma}{\hbar^2} \psi(0) \end{aligned} \quad (1.92)$$

C'est la deuxième condition de raccordement qu'on cherche.

L'utilisation des conditions (1.89) et (1.92) donne :

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(C) - ik(A - B) = -\frac{2ma}{\hbar^2}(A + B) \end{cases} \quad (1.93)$$

La solution de ces équation est simple elle est comme suit

Posons $B/A=x$ et $C/A=y$ on aura

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \left(-ik_0 + \frac{2ma}{\hbar^2}\right)x - ik_0y + \left(ik_0 + \frac{2ma}{\hbar^2}\right) = 0 \end{cases} \quad (1.94)$$

Dont la solution est

$$x = \frac{B}{A} = \frac{ma}{ma - ik_0\hbar^2} \quad (1.95)$$

Et

$$y = \frac{ik_0\hbar^2}{-ma + ik_0\hbar^2} \quad (1.96)$$

Rappelons les définitions des coefficients de réflexion et de transmission R et T :

$$R = \left| \frac{J_r}{J_{in}} \right| \quad \text{et} \quad T = \left| \frac{J_t}{J_{in}} \right|$$

On a

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] \\ \begin{cases} \psi_{in} = Ae^{ik_0x} \\ \psi_r = Be^{-ik_0x} \\ \psi_t = Ce^{ik_0x} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Calculons les différents courants

Le courant incident

$$J_{in} = -\frac{\hbar}{2mi} [\psi_{in}^* \bar{\nabla} \psi_{in} - \psi_{in} \bar{\nabla} \psi_{in}^*] = -\frac{\hbar}{2mi} [2A^2 iK] \quad (1.98)$$

On obtient

$$J_{in} = \frac{\hbar k}{m} A^2 \quad (1.99)$$

Le courant réfléchi est

$$J_r = \frac{\hbar}{2mi} [\psi_r^* \bar{\nabla} \psi_r - \psi_r \bar{\nabla} \psi_r^*] = -\frac{\hbar}{2mi} [-2B^2 i k_0] \quad (1.100)$$

On obtient

$$J_r = \frac{-\hbar k_0}{m} B^2 \quad (1.101)$$

Courant transmis

$$J_t = \frac{\hbar}{2mi} [\psi_t^* \bar{\nabla} \psi_t - \psi_t \bar{\nabla} \psi_t^*] = -\frac{\hbar}{2mi} [2C^2 i k_0] \quad (1.102)$$

On obtient

$$J_t = \frac{\hbar k}{m} C^2 \quad (1.103)$$

On déduit les coefficients de réflexion et de transmission R et T

$$R = \left| \frac{J_r}{J_{in}} \right| = \frac{\frac{\hbar k}{m} B^2}{\frac{\hbar k}{m} A^2} = \frac{m^2 a^2}{m^2 a^2 + k_0^2 \hbar^4} \quad (1.104)$$

Et

$$T = \left| \frac{J_t}{J_{in}} \right| = \frac{\frac{\hbar k}{m} C^2}{\frac{\hbar k}{m} A^2} = \frac{C^2}{A^2} = \frac{k_0^2 \hbar^4}{m^2 a^2 + k_0^2 \hbar^4} \quad (1.105)$$

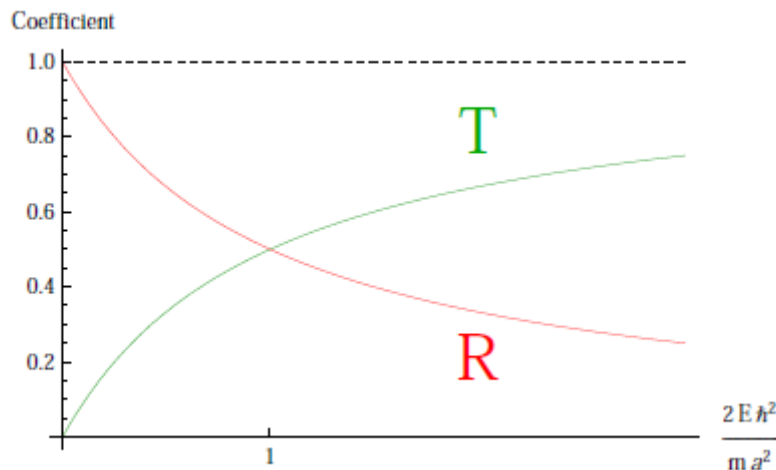


Figure 1.4 : Coefficients de transmission et réflexion pour le potentiel delta.

Remarquons bien que les coefficients ne dépendent que de a^2 , donc ils sont les mêmes pour un potentiel attractif ou répulsif.

Encore une fois, $j_{in} = j_t + j_r$ ou bien $T + R = 1$.

Chapitre II:

La longueur minimale et le formalisme de la diffusion:

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

2.1. Introduction :

L'introduction de la longueur minimale est en relation avec le problème de l'unification des interactions, en effet la gravitation devrait mener à une coupure à la limite de l'ultraviolet étant donné que la résolution de l'espace jusqu'aux très petites distances nécessite une très haute énergie. Par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée par les effets gravitationnels, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable[6].

Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ($l_p \approx 10^{-35} m$). Le concept de longueur élémentaire est aussi apparu dans le contexte de la théorie des cordes, candidate à l'unification des interactions fondamentales. Dans cette théorie, une échelle minimale est naturelle puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes, ne peuvent pas résoudre des distances plus petites que la dimension de la corde. Si l'énergie de la corde atteint une certaine échelle M_s , des excitations de la corde peuvent survenir et auront comme effet l'élargissement de l'extension spatiale de la corde. En particulier, la théorie de diffusion des cordes à haute énergie montre que l'extension de la corde s'accroît proportionnellement à son énergie à chaque ordre de la théorie des perturbations. De ce fait, une longueur élémentaire, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace est impossible, est nécessaire dans cette théorie. L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle.

2.2. Longueur minimale :

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'hypothèse de l'existence d'une longueur élémentaire a été faite, depuis longtemps en physique, Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{min}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du Caractère de l'espace-temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $l_p = 10^{-35} m$, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires. En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ; l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisable des particules à des énergies

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle. En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s'intéresser à cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempff et ses collaborateurs

2.3 .Principe d'incertitude généralisé :

Dans la littérature, il existe plusieurs théories introduisant le concept de longueur minimale, notamment les théories avec un principe d'incertitude généralisé, avec une relativité restreinte déformée et Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale) l_m en mécanique quantique Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $1/l_m$, En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, $(\vec{p}=\hbar\vec{k})$ lorsque p approche l'échelle (\hbar/l_m) .

Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde $(2\pi/k)$ arbitrairement petites, et que des échelles des distances arbitrairement petites Dans un but de simplicité, raisonnons à une seule dimension. Pour tenir compte de ce postulat, on suppose une relation $p=f(k)$ entre k et p . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre $(1/l_m)$ lorsque p tend vers l'infini. On suppose aussi que $f(k)$ est bien définie, Plusieurs formes de la fonction f peuvent être trouvées : par exemple[10] le choix de Hossenfelder

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k) \quad (2.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan(n) = \left(n + \frac{n^3}{3} + \dots \right)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

Au deuxième ordre en l_m , p s'écrit :

$$p = \hbar \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right) \quad (2.2)$$

Supposant que le commutateur entre X et P garde la forme standard, c'est-à-dire $[X, P] = i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale :

$$[X, A(k)] = i \frac{\partial A}{\partial k} \quad (2.3)$$

On obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée

$$\begin{aligned} [X, P(k)] &= i \frac{\partial P}{\partial k} \\ &= i \frac{\partial}{\partial k} \hbar \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right) = i \hbar \frac{\partial}{\partial k} \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$i \frac{\partial P}{\partial k} = i \hbar (1 + l_m^2 k^2 + \dots)$$

On a :

$$l_m^2 k^2 \sim \frac{l_m^2 P^2}{\partial k} + O(l_m^4)$$

On trouve :

$$[X, P(k)] = i \hbar \left(1 + \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2 P^2 + \dots \right)$$

En introduisant un paramètre β , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2 \quad \text{Soit} \quad l_m = \hbar \sqrt{\beta}$$

On aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[X, P] = i \hbar (1 + \beta P^2 + \dots) \quad (2.4)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude [5] :

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2} |\langle [X, P] \rangle|$$

Au premier ordre du paramètre β , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \langle P^2 \rangle)$$

Et on a la relation de quadratique moyen set : $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$

Donc la relation d'incertitude écrit par la forme Suivante :

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2) \quad (2.5)$$

β Set une paramètres positif.

La relation d'incertitude (2.5) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs [7, 9, 8]. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence [7], pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

2.4. Représentation théorique

On a la relation d'incertitude modifiée :

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2) \quad (2.6)$$

On pose $\beta \langle P \rangle^2 = \gamma$ (γ dépend de la valeur moyenne de l'impulsion) .

Le paramètre β est relié à la longueur élémentaire à travers la relation $l_m = \hbar \sqrt{\beta}$, Donc la relation d'incertitude modifiée (2-5) s'écrit par forme suivante :

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma) \quad (2.7)$$

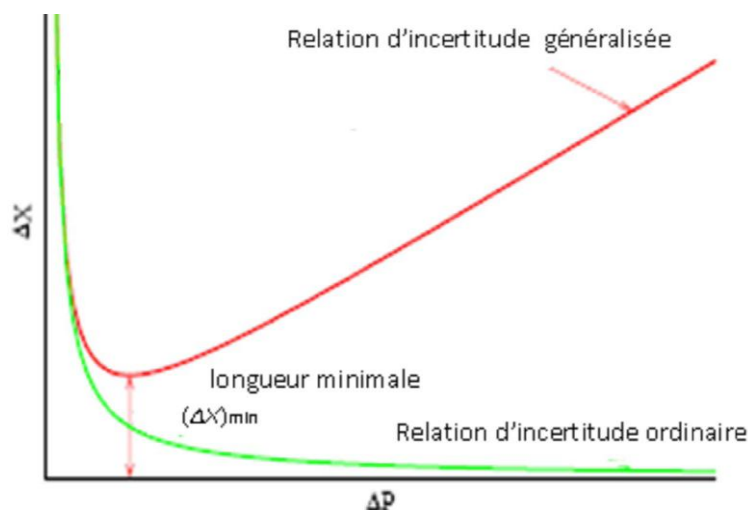


Figure 2.1 : La relation d'incertitude généralisée, impliquant une 'longueur minimale' $(\Delta X)_{\min} > 0$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

Dans la mécanique quantique ordinaire ($\beta = \gamma = 0$), donc la relation d'incertitude set une : $\Delta X . \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$

ΔX Peut-être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des échelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation (2.7) du fait de la présence du terme $\beta(\Delta P)^2$ dans le membre droit de l'inégalité ; même pour de grandes valeurs de ΔX , ΔP est toujours supérieur à une valeur minimale ΔX_{\min} non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée sur la **figure (2.1)**. On observe que pour les petites valeurs de ΔP , la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques ; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand ΔP [6]

2.4.1. Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs X et P , satisfaisant à la relation de commutation :

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2) \quad \beta > 0 \quad (2.10)$$

La relation d'incertitude correspondante est :

$$\Delta X . \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2) \quad (2.11)$$

Pour un (ΔX) fixe, l'inégalité (2.11) est satisfaite dans l'intervalle : $[\Delta P -, \Delta P +]$ [9], tel que :

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta \langle P \rangle^2 + 1}{\beta}}$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P - = \Delta P +$, soit :

$$\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta \langle P \rangle^2 + 1}{\beta} = 0$$

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta(\beta \langle P \rangle^2 + 1)^{1/2}}$$

La valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$, correspond à $(\langle P \rangle = 0)$

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

Dans l'espace des impulsions, où X et P agissent sur les fonctions $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs x et p , satisfaisant la relation de commutation canonique : $[x, p] = i\hbar$. Alors on peut trouver une représentation de X et P qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.10). La réalisation la plus simple s'écrit [7]:

$$X = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}, \quad P = p \quad (2.12)$$

Où l'on a :

$$p\psi(p) = p\psi(p)$$

$$x\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p)$$

Alors, X et P s'écrivent explicitement :

$$X = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}, \quad P = p$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.10).

2.5. Conséquences :

2.5.1. Le produit scalaire et la relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2-12), est préservation de la Symétrie des opérateurs X et P pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que P n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente ; il n'en est pas le cas pour l'opérateur X . En effet, la condition de symétrie s'écrit [7] :

$$(\langle \psi | X | \varphi \rangle) = \langle \psi | (X | \varphi \rangle) \quad (2.13)$$

$$(\langle \psi | P | \varphi \rangle) = \langle \psi | (P | \varphi \rangle) \quad (2.14)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} dp \psi^*(p) \varphi(p).$$

Pour que l'opérateur X soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.15)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

Le facteur $\frac{1}{1+\beta p^2}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur X en effet :

$$\langle \psi | (X | \varphi \rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p) \left[i\hbar(1+\beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p)$$

En intégrant par parties et en tenant compte que $\psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles à l'infini, on obtient:

$$\langle \psi | (X | \varphi \rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

Et on a :

$$(\langle \psi | X | \varphi \rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \left[i\hbar(1+\beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \right]^* \varphi(p) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

Ceci montre bien que X est symétrique par rapport au produit scalaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p)$$

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture ; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p | p \rangle = 1 \quad (2.16)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'ortho normalisation :

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p') \quad (2.17)$$

2.6. Relation d'incertitude généralisée à N dimensions :

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (2-10) préservant la symétrie rotationnelle s'écrit [7]

$$[X_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta P^2) \quad (2.18)$$

Avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.19)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

$$P^2 = \sum_{i=1}^N P_i^2$$

Si on impose [6] :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (2.20)$$

L'identité de Jacobi [10] donne

$$[X_i, X_j] = \frac{2\beta i \hbar}{1 + \beta P^2} (P_i X_j - P_j X_i) \quad (2.23)$$

Ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative. La relation d'incertitude impliquée par (2-11) s'écrit :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} (1 + \beta \sum_{k=1}^N [(\Delta X_k)^2 + \langle P_k \rangle^2]) \quad (2.24)$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{N\beta} \quad \forall_i \quad (2.25)$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation :

$$X_i = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} P_i = p_i \quad (2.26)$$

Les opérateurs X_i et P_j sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N p}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.27)$$

Comme dans le cas à une dimension, contrairement aux opérateurs d'impulsion qui sont toujours essentiellement auto-adjoints, les opérateurs de position sont simplement symétriques, et ne possèdent pas d'états propres physiques.

Quoi que les états à localisation maximale puissent toujours être utilisés pour définir une "quasi-représentation de configuration est important de noter, que la relation de commutation a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs X_i et P_j adjoints La relation de commutation la plus générale s'écrit :

$$[X_i, P_j] = i\hbar [\delta_{ij} (1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j] (\beta, \beta') > 0 \quad (2.28)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

En supposant :

$$[P_i, P_i] = 0 \quad (2.29)$$

Alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante [15] :

$$[X_i, X_j] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + \beta(2\beta + \beta')P^2}{1 + \beta P^2} (P_i X_j - P_j X_i). \quad (2.30)$$

En supposant que ΔP_i ne dépend pas de j , on peut déduire facilement la Relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (2.28) :

$$(\Delta X_i) (\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} [1 + (N\beta + \beta')(\Delta P_j)^2 + \gamma] \quad (2.31)$$

Avec
$$\gamma = \beta \sum_{k=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_j donne :

$$(\Delta X_i)_{min} = \hbar \sqrt{(N\beta + \beta')} , \quad \forall i \quad (2.32)$$

Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs X_i et P_j ont été utilisées. Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que X_i et P_j comme des fonctions des opérateurs x_i et p_j satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

La première représentation de Kempff [11] est :

$$X_i = x_i + \beta \frac{p^2 x_i + x_i p^2}{2} + \beta' \frac{p_i p_j x_j + x_j p_i p_j}{2}, \quad P_i = p_i \quad (2.33)$$

Où dans l'espace des impulsions :

$$x_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \quad p_i = p_i$$

La forme de (2.33) en s'écrit par :

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \left(\beta + \frac{N+1}{2} \beta' \right) p_i \right] , \quad P_i = p_i \quad (2.34)$$

En introduisant un paramètre arbitraire γ [16] :

$$\gamma = \left(\beta + \frac{N+1}{2} \beta' \right)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

Donc

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right] \quad (2.35)$$

Soit :

$$X_i = [(1 + \beta p^2)x_i + \beta' p_i p_j x_j + \gamma p_i] \quad (2.36)$$

Le paramètre positif γ n'affecte ni les relations de commutation ni les observables Physiques

2.7. La réduction de brau :

Dans la référence [13], l'auteur considère le cas $\beta' = 2\beta$ dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (2.30) s'annulent au premier ordre de β . Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotation nulle, Pour ce cas particulier, les opérateurs X_i et P_i satisfaisant au premier ordre en β à l'algèbre de Heisenberg déformée (2.28) sont représentés par :

$$X_i = x_i \quad P_i = p_i(1 + \beta p^2) \quad (2.37)$$

Avec :

$$x_i = x_i \quad p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations.

Dans la référence [14], Une représentation généralisant (2.37) au cas $\beta' \neq 2\beta$ a été donnée, elle a la forme suivante :

$$X_i = x_i + \frac{2\beta - \beta'}{4} (p^2 x_i + x_i p^2), P_i = p_i(1 + \frac{\beta'}{2} p^2) \quad (2.38)$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de β et β' .

2.8. L'équation de Schrödinger :

Dans la mécanique quantique ordinaire l'équation de Schrödinger écrit par la forme :

$$H\Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t)$$

Avec : $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ et $E = i\hbar \frac{d}{dt}$

Utilisons la réduction de brau où l'on a :

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

$$P = p(1 + \beta p^2) \text{ et } X = x \text{ avec } p = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

On aura

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{(p(1 + \beta p^2))^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) + \frac{\beta}{m} p^4 + O(\beta^2)$$

$$\text{Donc} \quad H = H_0 + H_1 + O(\beta^2) \quad (2.39)$$

$$\text{Ou} \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \text{et} \quad H_1 = \frac{\beta}{m} p^4 \quad (2.40)$$

Donc, nous voyons que tout système avec un Hamilton quantique (ou même classique) défini bien H_0 , est perturbé par H_1 , Il reste à calculer les corrections dû au Hamilton H_1 . Avant que nous fassions, nous écrivons aussi l'équation Schrödinger dépendante du temps :

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{d\psi}{dt} \quad (2.41)$$

Donc :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m} p^4 + V(x) \right) \psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt} \quad (2.42)$$

Comme est vu clairement, l'effet de la longueur minimale est décrit par la présence d'un terme de la perturbation $(\frac{\beta}{m} p^4)$ dans l'équation Schrödinger ordinaire.

2.9. La densité de courant et l'équation continuité de probabilité :

Dans l'équation Schrödinger (2-42), $V(x)$ Doit être réel pour que H soit hermétique. L'équation complexe conjuguée est :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m} p^4 + V(x) \right) \psi^* = -i\hbar \frac{d\psi^*}{dt} \quad (2.43)$$

Multiplions les deux équations de (2-42) par ψ^* , ceux de (2-43) par ψ son trouver :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \Delta \psi + \frac{\beta}{m} \hbar^4 \psi^* \Delta^2 \psi + \psi^* V(x) \psi = i\hbar \psi^* \frac{d\psi}{dt} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \Delta \psi^* + \frac{\beta}{m} \hbar^4 \psi \Delta^2 \psi^* + \psi V(x) \psi^* = -i\hbar \psi \frac{d\psi^*}{dt} \end{cases} \quad (2.44)$$

On faisant la différence entre deux équations il vient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) + \frac{\beta}{m} \hbar^4 (\psi^* \Delta^2 \psi - \psi \Delta^2 \psi^*) = i\hbar \left(\psi^* \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d\psi^*}{dt} \right) \quad (2.45)$$

Chapitre 2 : La longueur minimale et le formalisme de la diffusion

$$-\frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) + \frac{\beta}{mi} \hbar^3 (\psi^* \Delta^2 \psi - \psi \Delta^2 \psi^*) = \left(\psi^* \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d\psi^*}{dt} \right) \quad (2.46)$$

Et on l'équation de continuité est : $(\vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = 0)$, comparons cette équation avec (2-46), en trouve :

$$\vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 (\psi^* \Delta^2 \psi - \psi \Delta^2 \psi^*) \quad (2.47)$$

Avec :

$$\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* = \vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (2.48)$$

$$(\psi^* \Delta^2 \psi - \psi \Delta^2 \psi^*) = \vec{\nabla}[(\psi^* \vec{\nabla} \Delta \psi - \psi \vec{\nabla} \Delta \psi^*) + (\Delta \psi^* \vec{\nabla} \psi - \Delta \psi \vec{\nabla} \psi^*)] \quad (2.49)$$

En remplace (2-48) et (2-49) dans (2-47) en trouvé :

$$\vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 \vec{\nabla}[(\psi^* \vec{\nabla} \Delta \psi - \psi \vec{\nabla} \Delta \psi^*) + (\Delta \psi^* \vec{\nabla} \psi - \Delta \psi \vec{\nabla} \psi^*)]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar}{2mi} ((\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 [(\psi^* \vec{\nabla} \Delta \psi - \psi \vec{\nabla} \Delta \psi^*) + (\Delta \psi^* \vec{\nabla} \psi - \Delta \psi \vec{\nabla} \psi^*)] \\ &= \vec{J} + \vec{J}_1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Où \vec{J} est l'expression courante dans la mécanique quantique ordinaire et \vec{J}_1 est le terme supplémentaire due à la déformation.

Chapitre III:
Application au potentiel delta de Dirac

3.1. L'équation de Schrödinger à une dimension et la longueur minimale:

Pour voir comment on peut incorporer une longueur élémentaire dans le traitement des problèmes physique, il est intéressant d'étudier un potentiel simple à une dimension et d'illustrer comment l'équation de Schrödinger peut être écrite et résolue[6].

L'équation stationnaire de Schrödinger $H\Psi=E\Psi$ s'écrit à une dimension:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right) \psi = E\psi \quad (3.1)$$

Utilisons la réduction de Brau : $X = x_i$ et $P = p(1 + \beta p^2)$ (3.2)

Ou p et x sont les opérateurs impulsion et position ordinaire satisfait le commutateur canonique

$$[x, p] = i\hbar \quad (3.3)$$

On a :

$$P^2 = p^2(1 + \beta p^2)^2 = p^2(1 + 2\beta p^2 + 0(\beta^2)) \quad (3.4)$$

Donc
$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2(1 + 2\beta p^2)}{2m} + V(x) \quad (3.5)$$

Ou

$$H = \frac{1}{2m}(2\beta p^4 + p^2) + V(x) \quad (3.6)$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{1}{2m}(2\beta p_i^4 + p_i^2) + V(x) \right] \psi(\vec{r}, x) = E\psi(\vec{r}, x) \quad (3.7)$$

Donc

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta p^4}{m} + V(x) \right] \psi(\vec{r}, x) = E\psi(\vec{r}, x)$$

$$\left[\left(p^4 + \frac{1}{2\beta} p^2 \right) + \frac{m}{\beta} V(x) \right] \psi(\vec{r}, x) = \frac{m}{\beta} E\psi(\vec{r}, x)$$

On a :

$$p_i = -i\hbar \frac{d}{dx} \rightarrow p^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \rightarrow p^4 = \hbar^4 \frac{d^4}{dx^4}$$

L'équation (3.7) devient

$$\left[\hbar^4 \frac{d^4}{dx^4} - \frac{\hbar^2}{2\beta} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{\beta} (V(x) - E) \right] \psi(x) = 0 \quad (3.8)$$

Ou encore

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} - \frac{1}{2\hbar^2\beta} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{\hbar^4\beta} (V(x) - E) \right] \psi(x) = 0 \quad (3.9)$$

3.2. Solutions dans le cas libre $v(x)=0$:

On a

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} - \frac{1}{2\hbar^2\beta} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{m}{\hbar^4\beta} E \right] \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.10)$$

C'est une équation différentielle de ordre quatre, pour solutionner cette équation

Posons

$$\psi = C^{te} e^{rx} \quad (3.11)$$

On aura l'équation

$$r^4 - \frac{1}{2\beta\hbar^2} r^2 - \frac{mE}{\beta\hbar^4} = 0 \quad (3.12)$$

Posons : $t=r^2$ on aura

$$t^2 - \frac{1}{2\beta\hbar^2} t - \frac{mE}{\beta\hbar^4} = 0 \quad (3.13)$$

Ou encore

$$t^2 - \frac{1}{l^2} t - \frac{mE}{\beta\hbar^4} = 0 \quad (3.14)$$

Telque

$$\frac{1}{2\beta\hbar^2} = \frac{1}{l^2} \Leftrightarrow l^2 = 2\beta\hbar^2 \quad (3.15)$$

L'équation (3.14) admise deux solution t_1 et t_2

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\beta m E}}{4\hbar^2\beta} \quad (3.16)$$

et

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}{4\hbar^2 \beta} \quad (3.17)$$

Dou

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{t_1} \quad \text{et} \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{t_2} \quad \text{donc}$$

$$\begin{cases} r_1 = +i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}{4\hbar^2 \beta}} = +ik' \\ r_2 = -i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}{4\hbar^2 \beta}} = -ik' \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} r_3 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}{4\hbar^2 \beta}} = k_l \\ r_4 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}{4\hbar^2 \beta}} = -k_l \end{cases} \quad (3.19)$$

A l'ordre dominant en β on a

$$\sqrt{1 + 16\beta mE} = (1 + 16\beta mE)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(16\beta mE) + \frac{1}{4}(16\beta mE)^2 + \dots$$

Donc

$$\begin{aligned} k' &= \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{-1 + (1 + 8\beta mE - 32(\beta mE)^2)} = \frac{\sqrt{8\beta mE}}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{1 - 4\beta mE} \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} (1 - 2\beta mE) = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(1 - \beta \hbar^2 \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\right) \end{aligned}$$

On obtient

$$k' = k_0 (1 - \beta \hbar^2 k_0^2)$$

Et

$$k_l = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16\beta mE}}$$

$$\sqrt{1 + 16\beta mE} = (1 + 16\beta mE)^{\frac{1}{2}} = (1 + 1 + 8\beta mE) = (2 + 8\beta mE) = 2(1 + 4\beta mE)$$

Donc on a

$$\begin{aligned} k_l &= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} \sqrt{(1 + 4\beta mE)} = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} (1 + 2\beta mE) \\ k_l &= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} + \frac{2\beta mE}{\hbar\sqrt{2\beta}} \approx \frac{1}{\hbar\sqrt{2\beta}} = \frac{1}{l} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

3.3 .Application : Le potentiel delta de Dirac

Considérons le potentiel delta de Dirac :

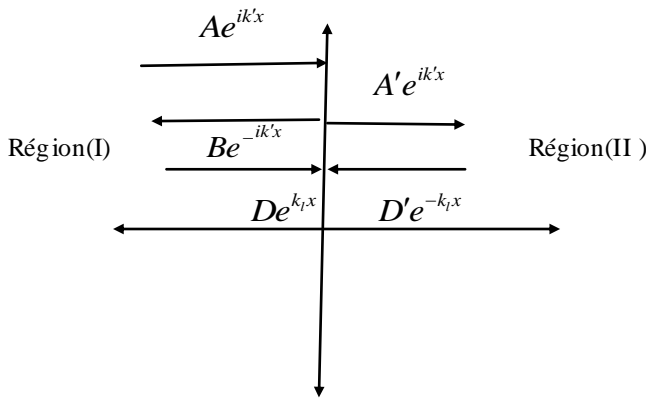
$$V(x) = a\delta(x) \quad (3.21)$$

Où a constante négative et $\delta(x)$ est la fonction usuelle delta de Dirac.

Remplaçons dans (3.9) on obtient :

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} - \frac{1}{2\hbar^2 \beta} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{\hbar^4 \beta} (a\delta(x) - E) \right] \psi(x) = 0 \quad (3.22)$$

Donc on a deux régions séparées par un saut de potentiel t'envers l'infinie à L'origine



La solution formelle de l'équation de Schrödinger est donc :

Région(I) :

$$\psi_1(x) = Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x} + Ce^{-k_l x} + De^{k_l x} \quad (3.23)$$

Et pour des raisons physiques on prend $C=0$ donc on a

$$\psi_1(x) = A e^{\frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} + B e^{-\frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} + D e^{\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} \quad (3.24)$$

Où $Ae^{ik'x}$, $Be^{-ik'x}$ représentent respectivement les ondes incidente et réfléchiée et $De^{k_l x}$ est une évanescente ne se propage pas et elle ne contribue pas au courant.

Région(II) : de même manière on a la solution mathématique est

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = & A' e^{\frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} + B' e^{-\frac{i}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{-1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} + C' e^{\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} \\ & + D' e^{\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \sqrt{1+\sqrt{1+16\beta m E}} x} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Et pour des raisons physique on prend $B'=0$ et $C'=0$, donc on a

$$\psi_2 = A'e^{ik'x} + D'e^{-k_l x} \quad (3.26)$$

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$A'e^{ik'x}$ représente l'onde transmise et $D'e^{-k'x}$ est une onde locale évanescence ne propage pas et n'a aucune contribution au courant.

Finalement on a

$$\begin{cases} \psi_1 = Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x} + De^{k'x} \\ \psi_2 = A'e^{ik'x} + D'e^{-k'x} \end{cases} \quad (3.27)$$

Rappelons la formule du courant dans le formalisme de la longueur d'onde

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[(\psi^* \bar{\nabla} \psi - \psi \bar{\nabla} \psi^*) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\psi^* \bar{\nabla} \nabla^2 \psi - \psi \bar{\nabla} \nabla^2 \psi^*) + (\nabla^2 \psi^* \bar{\nabla} \psi - \nabla^2 \psi \bar{\nabla} \psi^*) \right] \\ \bar{J} &= \bar{J}_0 + \bar{J}_1 \\ \bar{J}_0 &= \frac{\hbar}{2mi} \left[(\psi^* \bar{\nabla} \psi - \psi \bar{\nabla} \psi^*) \right] \\ \bar{J}_1 &= -\frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\psi^* \bar{\nabla} \nabla^2 \psi - \psi \bar{\nabla} \nabla^2 \psi^*) + (\nabla^2 \psi^* \bar{\nabla} \psi - \nabla^2 \psi \bar{\nabla} \psi^*) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Et étisons les définitions suivantes

$$\begin{cases} \psi_{in} = Ae^{ik'x} \\ \psi_r = Be^{-ik'x} \\ \psi_t = A'e^{ik'x} \end{cases} \quad (3.29)$$

Alors calculons le courant incident

$$\begin{aligned} \bar{J}_{in} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[(\psi_{in}^* \bar{\nabla} \psi_{in} - \psi_{in} \bar{\nabla} \psi_{in}^*) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\psi_{in}^* \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_{in} - \psi_{in} \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_{in}^*) + (\nabla^2 \psi_{in}^* \bar{\nabla} \psi_{in} - \nabla^2 \psi_{in} \bar{\nabla} \psi_{in}^*) \right] \\ \bar{J}_{in} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[(Ae^{-ik'x} \bar{\nabla} Ae^{ik'x} - Ae^{ik'x} \bar{\nabla} Ae^{-ik'x}) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(Ae^{-ik'x} \bar{\nabla} \nabla^2 Ae^{ik'x} - Ae^{ik'x} \bar{\nabla} \nabla^2 Ae^{-ik'x}) + \right. \\ &\quad \left. (\nabla^2 Ae^{-ik'x} \bar{\nabla} Ae^{ik'x} - \nabla^2 Ae^{ik'x} \bar{\nabla} Ae^{-ik'x}) \right] \\ \bar{J}_{in} &= \frac{\hbar}{2mi} [2iA^2 k'] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} [(-2iA^2 k'^3) + (-2iA^2 k'^3)] \\ \bar{J}_{in} &= \frac{\hbar}{2mi} [2iA^2 k'] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} [2(-2iA^2 k'^3)] \\ \bar{J}_{in} &= \frac{\hbar}{2mi} [2iA^2 k'] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} [2(-2iA^2 k'^3)] \end{aligned}$$

Finalement on aura

$$\bar{J}_{in} = \frac{\hbar}{m} A^2 k' [1 + 4\beta \hbar^2 k'^2] \quad (3.30)$$

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

De la même façon pour le courant réfléchi on a

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{2mi} \left[(\psi_r^* \bar{\nabla} \psi_r - \psi_r \bar{\nabla} \psi_r^*) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\psi_r^* \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_r - \psi_r \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_r^*) + (\nabla^2 \psi_r^* \bar{\nabla} \psi_r - \nabla^2 \psi_r \bar{\nabla} \psi_r^*) \right]$$

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{2mi} \left[(Be^{+ik'x} \bar{\nabla} Be^{-ik'x} - Be^{-ik'x} \bar{\nabla} Be^{+ik'x}) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(Be^{+ik'x} \bar{\nabla} \nabla^2 Be^{-ik'x} - Be^{-ik'x} \bar{\nabla} \nabla^2 Be^{+ik'x}) + (\nabla^2 Be^{+ik'x} \bar{\nabla} Be^{-ik'x} - \nabla^2 Be^{-ik'x} \bar{\nabla} Be^{+ik'x}) \right]$$

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{2mi} \left[(-i2B^2k') \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(B^2ik'^3 + B^2ik'^3) + (ik'^3B^2 - ik'^3B^2) \right]$$

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{2mi} \left[(-i2B^2k') \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[2(B^2ik'^3 + B^2ik'^3) \right]$$

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{2mi} \left[(-i2B^2k') \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(4B^2ik'^3) \right]$$

$$\bar{J}_r = \frac{\hbar}{m} B^2k' \left[(-1 - 4\beta \hbar^2 k'^2) \right]$$

$$\bar{J}_r = -\frac{\hbar}{m} B^2k' \left[(1 + 4\beta \hbar^2 k'^2) \right] \quad (3.31)$$

Et le courant transmis est

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(\psi_t^* \bar{\nabla} \psi_t - \psi_t \bar{\nabla} \psi_t^*) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\psi_t^* \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_t - \psi_t \bar{\nabla} \nabla^2 \psi_t^*) + (\nabla^2 \psi_t^* \bar{\nabla} \psi_t - \nabla^2 \psi_t \bar{\nabla} \psi_t^*) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(A'e^{-ik'x} \bar{\nabla} A'e^{+ik'x} - A'e^{+ik'x} \bar{\nabla} A'e^{-ik'x}) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(\nabla^2 A'e^{-ik'x} \bar{\nabla} A'e^{+ik'x} - \nabla^2 A'e^{+ik'x} \bar{\nabla} A'e^{-ik'x}) + (\nabla^2 A'e^{-ik'x} \bar{\nabla} A'e^{+ik'x} - \nabla^2 A'e^{+ik'x} \bar{\nabla} A'e^{-ik'x}) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(2ik'A'^2) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(-ik'^3A'^2 - ik'^3A'^2) + (-ik'^3A'^2 - ik'^3A'^2) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(2ik'A'^2) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(-ik'^3A'^2 - ik'^3A'^2) + (-ik'^3A'^2 - ik'^3A'^2) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(2ik'A'^2) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[2(-ik'^3A'^2 - ik'^3A'^2) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(2ik'A'^2) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(-4ik'^3A'^2) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{2mi} \left[(2ik'A'^2) \right] - \frac{\beta \hbar^3}{mi} \left[(-4ik'^3A'^2) \right]$$

$$\bar{J}_t = \frac{\hbar}{m} k'A'^2 \left[(1 + \beta \hbar^2 k'^2) \right] \quad (3.32)$$

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

Et pour les coefficients de réflexion R et de transmission T on a par définition

$$R = \left| \frac{J_r}{J_{in}} \right| = \left| \frac{-\frac{\hbar}{m} B^2 k' [(1 + 4\beta \hbar^2 k'^2)]}{-\frac{\hbar}{m} A^2 k' [(1 + 4\beta \hbar^2 k'^2)]} \right| = \left| \frac{B^2}{A^2} \right| \quad (3.33)$$

Et

$$T = \left| \frac{J_t}{J_{in}} \right| = \left| \frac{\frac{\hbar}{m} k' A'^2 [1 + \beta \hbar^2 k'^2]}{\frac{\hbar}{m} A^2 k' [1 + 4\beta \hbar^2 k'^2]} \right| = \left| \frac{A'^2}{A^2} \right| \quad (3.34)$$

Il reste à déterminer les amplitudes A, A' et B.

On définit pour cela les conditions de continuités suivantes

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\ \psi'_I(0) &= \psi'_{II}(0) \\ \psi''_I(0) &= \psi''_{II}(0) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour la quatrième condition et par analogie au cas ordinaire on a:

$$\forall x \in [\varepsilon, -\varepsilon] \Rightarrow \psi(x) = c^{te} = \psi(0) \quad (3.36)$$

L'équation de Schrödinger est

$$\left[d^4 - \frac{1}{2\hbar^2 \beta} d^2 + \frac{m}{\hbar^4 \beta} V(x) \right] \psi(x) = E \frac{mE}{\hbar^4 \beta} \psi(x) \quad (3.37)$$

On'intègre l'équation (3.37) sur l'intervalle $[\varepsilon, -\varepsilon]$ on aura

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\hbar^4 \beta}{m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a \delta(x) \psi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E(x) \psi(x) dx \quad (3.38)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} \psi \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \left[\frac{\hbar^4 \beta}{m} \frac{d^3}{dx^3} \psi \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + a \psi(0) = E \psi(\varepsilon) \cdot 2\varepsilon \quad (3.39)$$

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} \psi(\varepsilon) - \frac{d}{dx} \psi(-\varepsilon) \right] + \frac{\hbar^4 \beta}{m} \left[\frac{d^3}{d^3 x} \psi(\varepsilon) - \frac{d^3}{d^3 x} \psi(-\varepsilon) \right] + a \psi(0) = E \psi(\varepsilon) \cdot 2\varepsilon \quad (3.40)$$

$\psi(\varepsilon) = c e^{\varepsilon}$ Toute l'intervalle donc : $\psi(\varepsilon) = \psi(0)$

On tient compte de la condition $\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0)$ on obtient :

$$\left[\frac{d^3}{d^3 x} \psi(+\varepsilon) - \frac{d^3}{d^3 x} \psi(-\varepsilon) \right] + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \psi(0) = \frac{4mE}{\hbar^2} \psi(0) \cdot \varepsilon$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ Donc :

$$\left[\frac{d^3}{d^3 x} \psi(0^+) - \frac{d^3}{d^3 x} \psi(0^-) \right] + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \psi(0) = \frac{4mE}{\hbar^2} \psi(0) \times 0$$

On aura finalement

$$[\psi''_{II}(0) - \psi''_I(0)] + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \psi(0) = 0 \quad (3.41)$$

L'application des conditions de raccordement (3.35) et (3.41) donne le système d'équations suivant

$$A + B + D = A' + D' \quad (3.42)$$

$$ik'A - ik'B + k_l D = ik'A' - k_l D' \quad (3.43)$$

$$-k'^2 A - k'^2 B + k_l^2 D = -k'^2 A' + k_l^2 D' \quad (3.44)$$

$$-ik'^3 A' - k_l^3 D' - [-ik'^3 A + ik'^3 B + k_l^3 D] + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} (A + B + D) = 0 \quad (3.45)$$

Divisons ces quatre équations sur A on obtient

$$\begin{cases} \frac{B}{A} - \frac{A'}{A} + \frac{D}{A} - \frac{D'}{A} + 1 = 0 \\ ik' \frac{B}{A} + ik' \frac{A'}{A} - k_l \frac{D}{A} - k_l \frac{D'}{A} - ik' = 0 \\ k'^2 \frac{B}{A} + k'^2 \frac{A'}{A} - k_l^2 \frac{D}{A} + k_l^2 \frac{D'}{A} + k'^2 = 0 \\ \frac{B}{A} \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - ik'^3 \right) - ik'^3 \frac{A'}{A} + \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - k_l^3 \right) \frac{D}{A} - k_l^3 \frac{D'}{A} + \left(k_l^3 + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \right) = 0 \end{cases}$$

Posons

$$x = B/A, \quad y = A'/A, \quad z = D/A \quad \text{et} \quad t = D'/A$$

Donc on aura le système d'équations

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z - t + 1 = 0 \\ ik'x + ik'y - k_l z - k_l t - ik' = 0 \\ k'^2 x - k'^2 y - k_l^2 z + k_l^2 t + k'^2 = 0 \\ \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - ik'^3 \right) x - ik'^3 y + \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - k_l^3 \right) z - k_l^3 t + \left(ik'^3 + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.46) \\ (3.47) \\ (3.48) \\ (3.49) \end{array}$$

$$\text{On multiplier (3.46)} \times k_l^2 \Leftrightarrow k_l^2 x - k_l^2 y + k_l^2 z - k_l^2 t + k_l^2 = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{La somme (3.48) et (3.50) donne } x - y + 1 = 0 \quad (3.51)$$

$$\text{On a aussi } (3.46) \Rightarrow t = x - y + z + 1 \quad (3.52)$$

Remplaçons (3.52) dans (3.47) et (3.49) on obtient

$$(ik' - k_l)x + (ik' + k_l)y - 2k_l z - (ik' + k_l) = 0 \quad (3.53)$$

Et

$$\left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - ik'^3 - k_l^3 \right) x + (k_l^3 - ik'^3)y + \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - 2k_l^3 \right) z + \left(ik'^3 - k_l^3 + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} \right) = 0 \quad (3.54)$$

$$(3.53) \times \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) \text{ donne :}$$

$$\left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' - k_l)x + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l)y - \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) 2k_l z - \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l) = 0 \quad (3.55)$$

On fait la somme l'équation (3.54) et (3.55) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - (ik'^3 + k_l^3) + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' - k_l) \right) x + \left((k_l^3 - ik'^3) + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l) \right) y \\ & + \left(ik'^3 - k_l^3 + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} - \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilisons (3.51) on aura

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - (ik'^3 + k_l^3) + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' - k_l) \right) x + \left((k_l^3 - ik'^3) + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l) \right) (x + 1) \\ & + \left(ik'^3 - k_l^3 + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} - \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) (ik' + k_l) \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$$\left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - 2ik'^3 + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) 2ik'^3 \right) x + \frac{ma}{\hbar^4 \beta} = 0$$

$$\left(\frac{ma}{\hbar^4 \beta} - 2ik'^3 + \left(\frac{ma}{2k_l \beta \hbar^4} - k_l^2 \right) 2ik'^3 \right) x = -\frac{ma}{\hbar^4 \beta} \Leftrightarrow x = \frac{ma}{-ma - 2ik' \left(\frac{ma}{2k_l} - (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)} \quad (3.57)$$

On a : $y = x + 1$

$$y = \frac{+ 2ik' \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)}{-ma + 2ik' \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)} \quad (3.58)$$

Le coefficient de réflexion s'obtient :

$$R = |x|^2 = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = R = \frac{|ma|^2}{\left| -ma + 2ik' \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right) \right|^2}$$

$$R = \frac{m^2 a^2}{(ma)^2 + 4k'^2 \left(\left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right) \right)^2} \quad (3.59)$$

Sachant que pour β petit on a :

$$k_l^2 + k'^2 \approx \frac{1}{\hbar^2 2\beta} \quad (3.60)$$

On Obtient le résultat final pour R

$$R = \frac{m^2 a^2}{(ma)^2 + k'^2 \hbar^4 \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2\beta ma}}{\hbar} \right) \right)^2} \quad (3.61)$$

De la même manière on a

$$T = |y|^2 = \left| \frac{A'}{A} \right|^2 \quad (3.62)$$

Donc

Chapitre 3 : application au potentiel delta de Dirac

$$T = \left| \frac{+2ik' \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)}{-ma + 2ik' \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)} \right|^2 \quad (3.63)$$

Ou

$$T = \frac{4k'^2 \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)^2}{(ma)^2 + 4k'^2 \left(-\frac{ma}{2k_l} + (k_l^2 + k'^2) \hbar^4 \beta \right)^2} \quad (3.64)$$

On a finalement

$$T = \frac{k'^2 \hbar^4 \left(1 - \frac{ma\sqrt{2\beta}}{\hbar} \right)^2}{(ma)^2 + k'^2 \hbar^4 \left(1 - \frac{ma\sqrt{2\beta}}{\hbar} \right)^2} \quad (3.65)$$

Remarquons qu' il est facile de s'assurer que $R+T=1$, et que pour $\beta=0$ on tombe sur les résultats de la mécanique quantique ordinaire.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique déformée : en présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme : $[X_i, P_j] = i\hbar [\delta_{ij} (1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j]$ ce qui conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de position $[X_i, X_j] \neq 0$.

Les nouveaux opérateurs de position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des Anciens opérateurs x_i et p_j satisfaisant aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

Pour montrer comment Incorporer la longueur minimale dans l'équation de Schrödinger,

La partie principale de notre mémoire est l'application du formalisme de cette Version déformée de la mécanique quantique au formalisme de la diffusion des particules en calculons les probabilités de transmission et de réflexion, en prenons comme Application le potentiel delta de Dirac. On a constaté que l'équation de probabilités $R+T=1$ reste conservée avec des corrections dans les quantités R et T en β due à la longueur minimale.

REFERENCES:

- [1] Claud cohen-Tannoudje, Bernard Diu, Franard Laloe .Mécanique quantique I, Edition Hermann(1973)
- [2] Habib Bouchriha . Introdiction à la physique quantique .cours et application. Edition (2002)
- [3] Introduction à la Nano-électronique Généralités – Rappels
- [4] Davide Mancusi, Marches de potentiel et potentiels delta ,5 octobre 2009
- [5] Bochou.A , Mècanique quantique .Problemes corriges, Edition(1991)
- [6] Thèse Djamil Bouaziz en vue de l'obtention du grad de docteur en sciences- Spécialité :physique théorique-Promoteur :Michel Bawin-Juin2009
- [7] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).
- [8] Achim. Kempf ,J. Math .Phys. 35,4483(1994).
- [9] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121-2137.
- [10] Sabine. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. 23, 1815 (2006).
- [11] Achim. Kempf ,J.Phys.A: Math.Gen. 30,2093(1997).
- [12] K.Gotfried, quantum Mechanics , Vol.1 :Fundamentals, (Academic Press Inc , New York,1966),P.213.
- [13] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. 32, 7691 (1999).
- [14] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A 74, 062105 (2006).
- [15] S.Benczik,L.N.Chang,D.Minic,and T.Takeuchi,Phys.Rev.A72,012104(2005).
- [16] L.N.Chang,D.Minic,N.Okamura,and T.Takeuchi,Phys.Rev.D65 ,125027(2002).

ملخص:

في هذه المذكرة عالجتنا معادلة شرودنجر في وجود الطول الأدنى من أجل كمون دلتا ديراك .
لقد درسنا في هذا السياق ظاهرة الانتشار وحددنا معاملات الانعكاس والنفوذ، واستخلصنا أن قانون الإنحفاظ
 $R + T = 1$ بقي محققا مع تصحيحات بدلالة β في الصيغ ل R و T ، و من أجل $\beta = 0$ نجد نتائج ميكانيكا الكم العادي.
الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنجر، مبدأ الشك، والحد الأدنى الطول، ميكانيكا الكم المشوه، كمون دلتا
ديراك، الانتشار.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons procédé au traitement de l'équation de Schrödinger à la présence d'une longueur minimal pour le potentiel delta de Dirac.

Nous avons étudié le phénomène de la diffusion dans ce contexte en effet nous avons déterminer les coefficient de réflexion et transmission, nous constatons que la balance $R+T=1$ reste conservée avec des corrections en β dans les formules de R et T , et que pour $\beta=0$ on se retrouve aux résultats de la mécanique quantique ordinaire.

Mots-clés : l'équation de Schrödinger, Principe D'incertitude, longueur minimal, mécanique quantique déformée, potentiel delta de Dirac, La diffusion

Abstract:

In this paper, we proceed to the treatment of the Schrödinger equation in the presence of a minimum length for the Dirac delta potential.

We have studied the phenomenon of scattering in this context effect we determine the coefficients of reflection and transmission, we find that the scale $R + T = 1$ is retained with corrections β in the formulas for R and T , and for $\beta = 0$ we find the results of ordinary quantum mechanics.

Keywords: Schrödinger equation, Principe D'uncertainty, minimum length, deformed quantum mechanics, Dirac delta potential, the scattering