

Remerciements

Louange à notre SEIGNEUR « ALLAH » qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre CREATEUR qui nous a incités à acquérir le savoir. C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.

Je tiens à remercier mon promoteur monsieur le Professeur **Mostefa NADIR** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions m'a permis de finaliser ce travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger mon travail.

KHIRANI Amina, MCB à l'université de M'SILA.

DILMI Mostapha, MCB à l'université de M'SILA.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes enseignants et tous mes amis et collègues pour leur soutien moral tout au long de la préparation de ce mémoire.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui a eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Dédicaces

C'est avec l'aide et la grâce de DIEU que j'ai finalisé ce modeste travail, que je dédie aux personnes à qui j'en suis vraiment reconnaissant pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté dans ma vie:

A la mémoire de ma mère OUEENASSA, qui rêvait pouvoir voir la fille que je suis, que DIEU l'accueille dans ses vastes paradis.

A mon père TAHAR, qui a veillé, tout au long de ma vie, à ce que je ne manque de rien, pour son amour et sa confiance pour que je puisse réussir, que DIEU le protège.

A ma belle mère DJAMILA qui n'a jamais cessé de m'encourager et de me soutenir, que DIEU la protège.

A mes très chers frères et très chères Sœurs que j'adore tant : BadrEddine, AbdElouaHed, SeiF et les adorables Mohamed, FerieL et Rimasse.

A ma deuxième âme et ma chère sœur Safa, son mari et ses deux adorables anges TedjEddine et RaiF.

A tous les membres de ma famille.

A ma chère amie et sœur BELIL Nadjat et toute sa famille.

A l'ensemble des enseignants ayant contribué à notre formation.

A mes très chers amis, particulièrement: NiHad , NouR , MouChiRa.

A tous les mathématiciens de notre promotion.

A tous ceux qui ont cru en moi.

A tous qui sont proches de mon cœur.

Merci du fond de mon cœur.

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Théorie des opérateurs	3
1.1 Opérateurs linéaires bornés	3
1.1.1 Opérateur linéaire	3
1.1.2 Opérateur continu	3
1.2 Opérateurs compacts	4
1.2.1 Ensemble compacte	4
1.2.2 Ensemble relativement compacte	5
1.2.3 Opérateur compact	6
1.3 Opérateurs adjoints, opérateurs auto-adjoints	9
1.4 Opérateurs normaux	14
1.5 Opérateurs fermés	16
1.5.1 Opérateurs non-bornés	16
1.5.2 Opérateurs fermés	16
2 Théorie spectrale des opérateurs	18
2.1 Spectre d'un opérateur borné	18
2.2 Spectre d'un opérateur compact	23
2.3 Spectre d'un opérateur adjoint, auto adjoint	27
2.4 Spectre d'un opérateur normal	30

2.5 Spectre d'un opérateur fermé	31
Conclusion	34
Bibliographie	34

Introduction

La théorie spectrale est une théorie qui étend à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice. Ces idées venaient au départ du développement de l'algèbre linéaire, mais elles sont aussi liées à l'étude des fonctions analytiques car les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles de fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre, cette théorie se développa pour inclure celle des algèbres de Banach, et des constructions plus abstraites.

La théorie spectrale est très utile en physique, en particulier pour les phénomènes vibratoires. Les bases théoriques de l'idée d'espace de Hilbert ont été développées, à partir des idées de Hilbert, par Schmidt et Riesz. Des années plus tard, lorsque la mécanique quantique fut formulée à partir de l'équation de Schrödinger, le lien fut fait avec les raies spectrales.

Ce mémoire vise plutôt une étude qualitative des opérateurs et cherche en particulier à en déterminer des propriétés spectrales spécifiques .

Il se décline en deux chapitres :

Le premier chapitre contient des généralités sur les opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach, ainsi que les opérateurs compacts avec quelques propriétés fondamentales, et aussi présente les opérateurs linéaires sur un espace d'Hilbert, ce qui est le bon cadre à introduire la notion de l'adjoint, autoadjoint et normal, finalement l'opérateur non borné et plus précisément à l'opérateur fermé.

Le deuxième chapitre présente la notion de spectre des opérateurs bornés et non bornés d'un espace E (Banach ou Hilbert) dans lui-même.

Notations

$L(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires de E dans F .
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .
$C(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} .
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A .
A^*	L'adjoint de l'opérateur A .
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de A .
$\mathcal{R}(A)$	L'image de l'opérateur A .
$\ker(A)$	Le noyau de l'opérateur A .
$G(A)$	Le graphe de l'opérateur A .
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de l'opérateur A .
$\mathcal{R}_\lambda(A)$	La résolvante de l'opérateur A .
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur A .
$\sigma_p(A)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur A .
$\sigma_r(A)$	Le spectre résiduel de l'opérateur A .
$\sigma_c(A)$	Le spectre continu de l'opérateur A .
$r(A)$	Le rayon spectral de l'opérateur A .
\mathbb{k}	Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
$\mathcal{K}(E)$	L'ensemble des opérateurs compacts.

Chapitre 1

Théorie des opérateurs

L'étude des opérateurs linéaires continus occupe une partie importante en analyse fonctionnelle. Dans ce chapitre on donne les propriétés générales des opérateurs linéaires bornés et non bornés.

1.1 Opérateurs linéaires bornés

1.1.1 Opérateur linéaire

Définition 1.1.1 Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} , et $A : E \rightarrow F$. On dit que l'opérateur A est linéaire si : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

- 1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$.
- 2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

1.1.2 Opérateur continu

Définition 1.1.2 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de S si on a la propriété suivante :

Pour toute suite x_n de S converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

Théorème 1.1.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous-ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu partout sur S s'il est continu en point x_0 de S .

Preuve. voir [10] ■

Opérateur borné

Définition 1.1.3 Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A est noté $\|A\|$, on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Théorème 1.1.2 Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement s'il est borné.

Preuve. voir [10] ■

Remarque 1.1.1 - Soit E et F deux espaces normés, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$.

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$, de plus $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

1.2 Opérateurs compacts

1.2.1 Ensemble compacte

Définition 1.2.1 Soit E un espace topologique, un sous-ensemble G est dit compact si pour tout recouvrement ouvert de G , on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, toute famille $\{\Omega_j\}, j \in \mathbb{N}$, d'ensembles ouverts tels que $G \subset \bigcup_j \Omega_j$ il existe sous-famille finie $\{\Omega_{j(k)}\}, j(k) = 1, 2, \dots, n$, dont la réunion contient G , i.e

$$G \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_{j(k)}.$$

Théorème 1.2.1 Soit E un espace normé, toute sous-ensemble finie $G = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ de E est compact.

Ensemble séquentiellement compact

Définition 1.2.2 Soit E un espace topologie. un sous-ensemble G de E est dit séquentiellement compact si seulement si toute suite d'élément de G contient une sous-suite convergente vers un élément de G .

Théorème 1.2.2 Soit E un espace normé et G un sous-ensemble de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a- G est compact .
- b- G est séquentiellement compact .

1.2.2 Ensemble relativement compacte

Définition 1.2.3 Un sous-ensemble G d'un espace normé E est dit relativement compact si la fermeture \overline{G} est compacte .

Proposition 1.2.1 Soit E un espace normé. Un sous-ensemble G de E est relativement compact si seulement si toute suite $\{\varphi_n\}$ de G contient une sous-suite convergente .

Théorème 1.2.3 Un sous-ensemble G borné et de dimension fini d'un espace normé E est relativement compact .

Compacité dans $C(\Omega)$

L'ensemble $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues de valeur réelle ou complexe définies dans un ensemble compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, muni de la norme maximale

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)| .$$

Théorème 1.2.4 (Arzela-Ascoli)

Un ensemble $G \in C(\Omega)$ est relativement compact si seulement s'il est borné et équicontinu, i.e

- 1- G borné : il existe une constante M tel que $|\varphi(x)| \leq M$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall \varphi \in G$.
- 2- G équicontinu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \varphi \in G, \forall x, y \in \Omega$, on a :

$$|x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall \varphi \in G.$$

1.2.3 Opérateur compact

Définition 1.2.4 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Théorème 1.2.5 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de E , la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous-suite convergente de F .

Théorème 1.2.6 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateur compact.

Théorème 1.2.7 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Démonstration. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné, la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous-suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part, si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous-suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné, la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Théorème 1.2.8 Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Démonstration. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , l'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous-suite convergente, soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous-suite de $\{\varphi_n\}$ telle que $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^1\}$ une sous-suite convergente, car A_2 est compact, soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous-suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.

Remarquons que la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous-suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs compacts $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$, il existe des sous- suites imbriquées

$$\varphi_n^p \subset \dots \varphi_n^2 \subset \varphi_n^1 \subset \varphi_n$$

tel que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour tout $k = 1, 2, \dots, p$.

Comme l'espace F est complet, pour la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite Cauchy .

Alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$, choisissons n de sorte que l'on a $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons N tel que, pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a la relation $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{A_n\varphi_n^p\}$ est convergente .

Dans ces conditions, on aura pour tout p et q suffisamment grands .

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon$$

■

Théorème 1.2.9 Soit A un opérateur borné de E dans F , à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact .

Démonstration. En effet, pour tout ensemble borné Ω de E , l'image $A(\Omega)$ est un ensemble borné dans un espace de dimension finie $A(E)$, par conséquent $A(\Omega)$ est relativement compact, donc A est un opérateur compact . ■

Lemme 1.2.1 Soit G un sous-espace fermé d'un espace normé E tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que pour tout $\phi \in G$, on a

$$\|\varphi - \phi\| = \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

Démonstration. voir [10] ■

Théorème 1.2.10 *L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit φ_1 un élément de E tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = \text{span}\{\varphi_1\}$ est un sous-espace fermé de E car G_1 est de dimension finie, alors il existe un élément $\varphi_2 \in E$ tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$. Prenons une deuxième fois le sous-espace fermé $G_2 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $\|\varphi_3\| = 1$, $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous-suite convergente. Ce qui implique que l'opérateur $I\varphi_n = \varphi_n$ n'est pas compact . ■

Corollaire 1.2.1 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème précédent car la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace de dimension infinie par l'opérateur identique .

Théorème 1.2.11 *Un opérateur compact est un opérateur borné . La réciproque est fausse.*

Théorème 1.2.12 *L'opérateur intégral A de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ définie par*

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy \quad x, y \in \Omega$$

où $k(x, y)$ la fonction noyau est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$ est un opérateur compact.

Démonstration. Soit G un ensemble borné dans $C(\Omega)$, pour tout $\varphi \in G$, il existe $M > 0$ tel que $\|\varphi\| \leq M$ et pour tout $x \in \Omega$ et $\varphi \in G$:

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy \right| \\ &\leq \sup_{y \in G} |\varphi(y)| \int_{\Omega} |k(x, y)| dy \\ &\leq M \max_{x, y} |k(x, y)| |\Omega| \end{aligned}$$

cela veut dire que $A(G)$ est borné.

Par hypothèse, le noyau $k(x, y)$ est continu sur le compact $\Omega \times \Omega$, il est donc uniformément continu alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in \Omega, |x - y| < \delta \implies |k(x, z) - k(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M |\Omega|}$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in G$ et $x, y \in \Omega$, avec $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\varphi(y)| &= \left| \int_{\Omega} (k(x, z) - k(y, z))\varphi(z) dz \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{M |\Omega|} M |\Omega| = \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci exprime que $A(G)$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli $A(G)$ est relativement compact, alors A est compact.

■

1.3 Opérateurs adjoints, opérateurs auto-adjoints

Opérateur adjoint

Théorème 1.3.1 (*Théorème de représentation de Riesz*)

Soit F une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H . Alors il existe un (unique) vecteur $f \in H$ tel que, pour tout $x \in H$

$$F(x) = \langle x, f \rangle.$$

Proposition 1.3.1 Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors :

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Définition 1.3.1 (*Existence de l'opérateur adjoint*)

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2 . Alors il existe un unique opérateur linéaire borné noté A^* défini de H_2 dans H_1 tel que l'on a pour tout $x \in H_1$ et $y \in H_2$:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

De plus, on a :

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Démonstration. • Existence :

En effet, pour tout $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on définit une fonctionnelle linéaire bornée U de H_1 dans $\mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suite :

$$\begin{aligned} H_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow U(x) = \langle Ax, y \rangle. \end{aligned}$$

La fonctionnelle U est linéaire et bornée, en vertu du théorème de Riesz, il existe un élément unique $f \in H_1$, tel que

$$A^*y = f,$$

ou encore

$$U(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

• Unicité :

Soient A_1^* et A_2^* deux opérateurs adjoints de l'opérateur A alors, pour tout $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on écrit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A_1^*y \rangle = \langle x, A_2^*y \rangle.$$

Alors

$$\langle x, A_1^*y \rangle = \langle x, A_2^*y \rangle.$$

D'où, on obtient

$$A_1^*y = A_2^*y$$

ou encore

$$A_1^* = A_2^*.$$

• Linéarité de l'opérateur adjoint A^* :

Pour tout $x \in H_1$, $y_1, y_2 \in H_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \rangle &= \langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle \\ &= \langle Ax, \alpha_1 y_1 \rangle + \langle Ax, \alpha_2 y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle Ax, y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle x, A^*y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, A^*y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha_1 A^*y_1 \rangle + \langle x, \alpha_2 A^*y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha_1 A^*y_1 + \alpha_2 A^*y_2 \rangle \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2.$$

- Egalité des normes $\|A\|$ et $\|A^*\|$:

Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned} \|A^* y\|^2 &= \langle A^* y, A^* y \rangle \\ &= \langle A A^* y, y \rangle \\ &\leq \|A A^* y\| \|y\| \\ &\leq \|A\| \|A^* y\| \|y\|. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \|y\|,$$

ou encore

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \langle A^* Ax, x \rangle \\ &\leq \|A^* Ax\| \|x\| \\ &\leq \|A^*\| \|Ax\| \|x\|. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|,$$

ou encore

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

D'où, l'égalité des normes $\|A\| = \|A^*\|$. ■

Définition 1.3.2 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que pour tout $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on ait

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle,$$

est appelée l'adjoint de A .

Proposition 1.3.2 Soient $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, on a les relations suivantes :

- 1) $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- 2) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.
- 3) $(A^*)^* = A$.
- 4) $(AB)^* = B^* A^*$.
- 5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Preuve. voir [10]. ■

Théorème 1.3.2 Soit A un opérateur linéaire compact, défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 , alors l'opérateur adjoint A^* défini de H_2 dans H_1 est aussi un opérateur linéaire compact.

Opérateur auto-adjoint

Définition 1.3.3 Soit H un espace de Hilbert, on dit que $A \in \mathcal{L}(H, H) = \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$

c'est-à-dire :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Lemme 1.3.1 Soient A et B sont deux opérateurs auto-adjoints définis sur un espace de Hilbert H dans lui-même, alors AB est auto-adjoint si et seulement si $AB = BA$.

Démonstration. En effet, pour tout $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle ABx, y \rangle &= \langle x, (AB)^* y \rangle \\ &= \langle x, B^* A^* y \rangle \\ &= \langle x, B Ay \rangle \\ &= \langle x, AB y \rangle. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\langle ABx, y \rangle = \langle x, AB y \rangle,$$

ou encore

$$AB = (AB)^*.$$

■

Théorème 1.3.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors l'opérateur puissance A^n est un opérateur auto adjoint pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En effet, pour tout $x, y \in H$, on suppose que la relation est vraie pour tout $n \geq 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\langle A^{n+1}x, y \rangle &= \langle A^n Ax, y \rangle \\ &= \langle Ax, A^n y \rangle \\ &= \langle x, AA^n y \rangle \\ &= \langle x, A^{n+1}y \rangle.\end{aligned}$$

■

Théorème 1.3.4 Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$A \text{ auto-adjoint} \iff \forall x \in H \quad \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. • Première cas : supposons que $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$

En effet, pour tout $x, y \in H$, posons

$$X = (\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle)$$

$$Y = (\langle A(x+iy), x+iy \rangle - \langle A(x-iy), x-iy \rangle).$$

En vertu de la relation $\langle Ax, x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$, les valeurs de X et Y sont aussi réelles. De plus, il est simple de vérifier que l'on a

$$\langle Ax, y \rangle = \frac{X}{4} + i\frac{Y}{4}.$$

De même, on a aussi l'égalité

$$\begin{aligned}\langle Ay, x \rangle &= (\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle) + i(\langle A(x+iy), x+iy \rangle - \langle A(x-iy), x-iy \rangle) \\ &= \frac{X}{4} - i\frac{Y}{4}\end{aligned}$$

Autrement dit, il vient

$$\langle Ax, y \rangle = \frac{X}{4} + i\frac{Y}{4} = \overline{\frac{X}{4} - i\frac{Y}{4}} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle,$$

ou encore

$$A = A^*.$$

D'où A est un opérateur auto-adjoint .

- Deuxième cas : supposons que A auto-adjoint

Pour tout $x \in H$, on a

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}.$$

D'où l'expression $\langle Ax, x \rangle$ est un réel. ■

1.4 Opérateurs normaux

Définition 1.4.1 *Un opérateur normal sur un espace de Hilbert H est un opérateur linéaire continu $A : H \rightarrow H$ qui commute avec son adjoint A^* , c'est-à-dire :*

$$AA^* = A^*A.$$

Les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont normaux.

Proposition 1.4.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors A est normal si et seulement si*

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \text{ pour tout } x \in H$$

Preuve.

$$\begin{aligned} A \text{ est normal} &\iff A^*A - AA^* = 0 \\ &\iff \langle (A^*A - AA^*)x, x \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in H \\ &\iff \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \text{ pour tout } x \in H \\ &\iff \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 \text{ pour tout } x \in H. \end{aligned}$$

■

Rappelons que $\|A^*\| = \|A\|$ pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $A^{**} = A$ et $(BA)^* = A^*B^*$

Proposition 1.4.2 *Soit E et F deux espace de Hilbert. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$$

Preuve. Pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*A\| \|x\|^2 \\ \|A\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2.\end{aligned}$$

Donc $\|A\|^2 = \|A^*A\|$.

De même on obtient $\|A\|^2 = \|A^*\|^2 = \|AA^*\|$. ■

Lemme 1.4.1 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est normal on a $\ker A^* = \ker A$.*

Preuve. Si $x \in \ker A$. Alors

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle = 0,$$

en utilisant pour la troisième égalité le fait que A est normal donc $AA^* = A^*A$.

Ceci prouve donc que $\ker A \subset \ker A^*$. Maintenant remarquons que si A est normal, alors A^* est normal et on appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à A^* , on obtient $\ker A^* \subset \ker A^{**} = \ker A$, car $A^{**} = A$. Finalement $\ker A = \ker A^*$. ■

Proposition 1.4.3 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a $H = \ker(A) \oplus \overline{\text{Im}(A)}$, et la somme est une somme orthogonale.*

Proposition 1.4.4 *Si $Ax = \lambda x$, alors on a $A^*x = \bar{\lambda}x$.*

Preuve. Il est clair que $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$.

Supposons que si A est normal, alors $A - \lambda I$ est aussi normal, on a donc

$$\begin{aligned}\ker(A - \lambda I) &= \ker(A - \lambda I)^* \\ &= \ker(A^* - \bar{\lambda}I).\end{aligned}$$

Si x vérifie $Ax = \lambda x$, alors

$$x \in \ker(A - \lambda I) \iff x \in \ker(A^* - \bar{\lambda}I) \iff A^*x = \bar{\lambda}x.$$

■

Proposition 1.4.5 *Si A est normal alors $\|A^n\| = \|A\|^n$*

Preuve. voir [6]. ■

1.5 Opérateurs fermés

Les opérateurs fermés forment des classes importantes d'opérateurs linéaires non bornés sur les espaces vectoriels normés, ils sont plus vastes que celle des opérateurs bornés, ils ne sont donc nécessairement continus. Beaucoup d'opérateurs linéaires importants qui ne sont pas bornés sont fermés, comme l'opérateur de dérivation.

1.5.1 Opérateurs non-bornés

Définition 1.5.1 *Un opérateur non borné sur un espace normé E est un couple $(\mathcal{D}(A), A)$ ou $\mathcal{D}(A)$ est un sous espace vectoriel de E et A est un opérateur linéaire définie de $\mathcal{D}(A)$ dans E . On dit que A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$.*

Le graphe d'un opérateur

Définition 1.5.2 *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace normé E , le graphe de A est le sous-espace vectoriel noté : $G(A)$ de $E \times E$ défini par :*

$$G(A) = \{(x, Ax), x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

1.5.2 Opérateurs fermés

Définition 1.5.3 *Soient E et F deux espaces normés. On dit que A est un opérateur fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

$G(A)$ est fermé $\iff z = (x, y) \in \overline{G(A)}$ implique $z \in G(A)$.

• $z \in (x, y) \in \overline{G(A)}$ cela signifie qu'il existe $z_n = (x_n, Ax_n) \in G(A)$ tel que $z_n \rightarrow z$, par conséquent

$$x_n \rightarrow x \text{ et } y = A(x).$$

Cela permet d'écrire cette proposition :

Proposition 1.5.1 *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé si et seulement si pour toute suite x_n de $\mathcal{D}(A)$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n Ax_n = y$, on a alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.*

Théorème 1.5.1 (*Théorème du graphe fermé*)

Soient E et F deux espaces normés et A un opérateur fermé de E dans F . Alors A est borné (i.e. $\|Ax\| \leq c\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$), si et seulement si $\mathcal{D}(A)$ est fermé dans E .

En particulier, si A est fermé et $\mathcal{D}(A) = E$, alors A est borné.

Preuve. voir [12]. ■

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs

Etant donné un opérateur linéaire A défini dans un espace normé E , nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. L'inverse de $A - \lambda I$ quand il existe est appelé opérateur résolvant ou résolvante de A , on le note $R_\lambda(A)$. L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de $R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans \mathbb{C} et a valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans E .

2.1 Spectre d'un opérateur borné

Soit E un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire de E (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(E)$)

Définition 2.1.1 *On appelle ensemble résolvant de A et on note $\rho(A)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $A - \lambda I$ soit inversible. i.e*

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et continu sur } E \}.$$

L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est appelé la résolvante de A en λ et noté $\mathcal{R}_\lambda(A)$.

Définition 2.1.2 *On appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$, le complémentaire de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} .*

i.e

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible} \}.$$

Théorème 2.1.1 *Le spectre de tout opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est un compact non vide de \mathbb{C} .*

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser deux lemmes importants par ailleurs.

Lemme 2.1.1 *(Identité de la résolvante)*

Pour $\lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$, on a

$$\mathcal{R}_\lambda(A) - \mathcal{R}_{\lambda_0}(A) = (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_{\lambda_0}(A).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\lambda(A) - \mathcal{R}_{\lambda_0}(A))(A - \lambda_0 I)(A - \lambda I) &= \mathcal{R}_\lambda(A)(A - \lambda I)(A - \lambda_0 I) - \mathcal{R}_{\lambda_0}(A)(A - \lambda_0 I)(A - \lambda I) \\ &= A - \lambda I - (A - \lambda_0 I) \\ &= (\lambda - \lambda_0) I \end{aligned}$$

En composant à droite par $\mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_{\lambda_0}(A)$, on obtient le résultat. ■

Lemme 2.1.2 *Notons $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.*

(a) *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\| < 1$, alors on a $I - A \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ et*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

(b) *$\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

(c) *L'application $\mathcal{J} : \text{Inv}(\mathcal{L}(E)) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{J} = A^{-1}$, est continue.*

Preuve. (a) Comme $\|A\| < 1$, la série $\sum_n A^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un espace de Banach donc elle converge dans $\mathcal{L}(E)$. De plus, on vérifie facilement que

$$(I - A) \left(\sum_{n=0}^N A^n \right) = \left(\sum_{n=0}^N A^n \right) (I - A) = I - A^{N+1}$$

et donc par passage à la limite (comme $\|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty$), on en déduit que

$$(I - A) \left(\sum_{n \geq 0} A^n \right) = \left(\sum_{n \geq 0} A^n \right) (I - A) = I$$

ce qui achève de prouver (a).

Pour démontrer (b), il suffit de remarquer que si $A \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$, alors la boule ouverte centrée en A et de rayon $1/\|A^{-1}\|$ est contenue dans $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$. En effet, si $T \in B(A, 1/\|A^{-1}\|)$, on a

$$T = A + (T - A) = A(I + A^{-1}(T - A)).$$

Remarquons alors que $\|A^{-1}(T - A)\| \leq \|A^{-1}\| \|T - A\| < 1$. Donc d'après (a), on a $I + A^{-1}(T - A)$ inversible, on en déduit que T est inversible.

Pour montrer (c), fixons $A \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \|A^{-1}\|$.

Nous allons montrer que si $B \in \mathcal{L}(E)$ et tel que $\|B\| \leq \varepsilon / (2\|A^{-1}\|^2)$, alors on a $\|\mathcal{J}(A) - \mathcal{J}(A + B)\| \leq \varepsilon$, ce qui assurera que \mathcal{J} est continue. Tout d'abord remarquons que $A + B = (I + BA^{-1})A$ et $\|BA^{-1}\| \leq \|B\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|} \leq 1/2 < 1$. Donc en utilisant (a), on obtient que $A + B \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ et

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} (I + BA^{-1})^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (BA^{-1})^n.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}(A) - \mathcal{J}(A + B)\| &= \|A^{-1} - (A + B)^{-1}\| = \|A^{-1}(I - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (BA^{-1})^n)\| \\ &= \|A^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (BA^{-1})^n\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|BA^{-1}\|^n = \|A^{-1}\| \frac{\|BA^{-1}\|}{1 - \|BA^{-1}\|} \\ &\leq \|A^{-1}\| \frac{\frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}}{1 - \frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

■

Démonstration de théorème

Le spectre de A est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|A\|$, alors $A - \lambda I$ est inversible. D'où $\sigma(A) \subset \overline{D(0, \|A\|)}$.

Pour montrer que $\sigma(A)$ est fermé, considérons l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $f(\lambda) = \lambda I - T$. Alors f est continu et $\rho(A) = f^{-1}(\text{Inv}(\mathcal{L}(E)))$.

Ainsi $\rho(A)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(A)$ est un compact de \mathbb{C} .

Vérifions que $\sigma(A)$ est non vide. Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions analytiques à valeurs vectorielles. Considérons $g : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $g(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. Remarquons tout d'abord que

(c), la fonction g est continue sur $\rho(A)$. De plus, pour $\lambda_0 \in \rho(A)$ et proche de λ_0 , on a

$$\frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = g(\lambda)g(\lambda_0),$$

Donc par continuité de g , on obtient que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = g(\lambda_0)^2.$$

Ainsi g est holomorphe sur $\mathcal{R}(A)$ et on a $g'(\lambda_0) = g(\lambda_0)^2$. Supposons maintenant que $\sigma(A) = \emptyset$. Autrement dit, cela implique que $\mathcal{R}(A) = \mathbb{C}$. Ainsi g est une fonction entière. Montrons que g est bornée. Pour cela remarquons que pour $|\lambda| > \|A\|$, on a

$$\|g(\lambda)\| = \|(A - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

Ainsi cela prouve que $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} g(\lambda) = 0$. Par conséquent g est bornée. Le théorème de Liouville pour les fonctions analytiques à valeurs vectorielles implique que g est constante. Comme g tend vers 0 en l'infini, on en déduit que $g \equiv 0$, ce qui est absurde

Théorème 2.1.2 Soit A un élément de $\mathcal{L}(E)$ et soit p un polynôme de degré n , à coefficients complexes, $p(x) = \sum_0^n \alpha_k x^k$. alors

- (i) Le spectre de $p(A)$ est $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.
- (ii) Si A est inversible, $\sigma(A^{-1}) = [\sigma(A)]^{-1} = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Démonstration. (i) montrons que $p(\sigma(A)) \subset \sigma(p(A))$. Soit $\lambda \in \sigma(A)$, comme le polynôme $p(X) - p(\lambda)$ s'annule en λ , il existe un polynôme q tel que $p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda)q(X)$, ce qui donne

$$p(A) - p(\lambda)I = (A - \lambda I)q(A).$$

Si $p(A) - p(\lambda)I$ était inversible, $(A - \lambda I)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(A) - p(\lambda)I)^{-1}q(A)$, ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$, montrant que $p(\sigma(A)) \subset \sigma(p(A))$.

Montrons ensuite que $\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$. Si p est constant, l'inclusion est trivialement vérifiée. On suppose donc dans la suite que p n'est pas un polynôme constant. Soit $\lambda \in \sigma(p(A))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme :

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

où les α_i , $i = 1, \dots, n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, et où $\alpha \neq 0$ car p n'est pas constant. Si pour tout $i = 1, \dots, n$ l'opérateur $A - \alpha_i I$ est inversible, $p(A) - \lambda I$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A - \alpha_i I$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma(A)$. On en déduit que $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(A))$, prouvant que $\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$.

(ii) Soit $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, comme A^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$.

Comme $A^{-1} - \lambda I$ est non inversible et comme $A^{-1} - \lambda I = \lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)^{-1}$, l'opérateur $(\frac{1}{\lambda}I - A)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)$. On a donc montré que $\sigma(A^{-1}) \subset \sigma(A)^{-1} := \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. En échangeant le rôle de A et A^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(A)^{-1} \subset \sigma(A^{-1})$. ■

Définition 2.1.3 *Le spectre ponctuel de A , noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles $\mathcal{R}_\lambda(A)$ n'existe pas, i.e*

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\} \end{aligned}$$

Les éléments du spectre ponctuel sont appelés les valeurs propres de A

Tout vecteur $x \neq 0$ appartenant au noyau de $A - \lambda I$ est appelé un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ , ces vecteurs propres et 0 forment un sous-espace vectoriel fermé de E appelé sous-espace propre de A correspondant à la valeur propre λ , sa dimension est la multiplication de λ .

Définition 2.1.4 *(spectre continu)*

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{R}_\lambda(A)$ existe, et à domaine dense mais n'est pas borné est appelé le spectre continu de A , on le note $\sigma_c(A)$

C'est-à-dire

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (A - \lambda I) \text{ injectif, et } \operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq E, \text{ mais } \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} = E \right\}$$

Définition 2.1.5 (*spectre résiduel*)

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{R}_\lambda(A)$ existe, mais n'est pas à domaine dense est appelé le spectre résiduel de A , on le note $\sigma_r(A)$.

Autrement dit

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (A - \lambda I) \text{ injectif, et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq E \right\}$$

Définition 2.1.6 Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Remarque 2.1.1 1. Si E est de dimension finie n alors tout opérateur linéaire de E est continu et tout sous-espace vectoriel de E est fermé. Donc $A - \lambda I$ est inversible si et seulement si $A - \lambda I$ est injectif, si et seulement si $A - \lambda I$ est surjectif. Le spectre résiduel est donc vide. Les valeurs spectrales de A sont donc les valeurs propres de A .

2. Puisque bijectif implique injectif, toute valeur propre est une valeur spectrale :

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$$

En dimension finie, nous venons de voir que cette inclusion est une égalité. Mais cette inclusion peut être stricte en dimension infinie.

3. Si l'image de $A - \lambda I$ n'est pas dense, alors $A - \lambda I$ n'est pas surjectif. Puisque bijectif implique surjectif, le spectre résiduel est donc contenu dans le spectre :

$$\sigma_r(A) \subset \sigma(A)$$

2.2 Spectre d'un opérateur compact

Soient E un espace de Banach et A un opérateur compact dans E . On sait que si E n'est pas de dimension finie, $\lambda = 0$ est toujours dans le spectre de A sinon, l'opérateur $I = AA^{-1}$ serait compact ce qui impliquerait que E est de dimension finie. Dans la suite donc λ désignera toujours un nombre complexe non nul, soit $T = I - A$.

Corollaire 2.2.1 *Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact. La suite croissante des noyaux $(\ker(A^n))_{n \geq 0}$ est stationnaire.*

La suite décroissante des images $(\operatorname{Im}(A^n))_{n \geq 0}$ est stationnaire.

Lemme 2.2.1 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Si l'opérateur $A - I$ est injectif, alors il est surjectif.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que T est injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que nécessairement $\operatorname{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \operatorname{Im}(T^n)$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a

$$\operatorname{Im}(T) \subsetneq E = \operatorname{Im}(I) = \operatorname{Im}(T^0).$$

Supposons que $\operatorname{Im}(T^{k+1}) \subsetneq \operatorname{Im}(T^k)$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $y \in \operatorname{Im}(T^k) \setminus \operatorname{Im}(T^{k+1})$. Posons $z := Ty$. Comme $y \in \operatorname{Im}(T^k)$, il existe $x \in E$ tel que, $y = T^k x$. D'où $z = Ty = T^{k+1}x \in \operatorname{Im}(T^{k+1})$. D'autre part, $z \notin \operatorname{Im}(T^{k+2})$; en effet, sinon il existerait $x_1 \in E$ tel que, $z = T^{k+2}x_1 = Ty$ et en utilisant l'injectivité de T , on aurait $y = T^{k+1}x_1 \in \operatorname{Im}(T^{k+1})$, ce qui est absurde. D'où $z \in \operatorname{Im}(T^{k+1}) \setminus \operatorname{Im}(T^{k+2})$. En particulier, on obtient que $\operatorname{Im}(T^{k+2}) \subsetneq \operatorname{Im}(T^{k+1})$. Par conséquent, par récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $\operatorname{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \operatorname{Im}(T^n)$, ce qui contredit le corollaire précédent . ■

Lemme 2.2.2 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Si l'opérateur $A - I$ est surjectif, alors il est injectif.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'opérateur T est surjectif et non injectif. Montrons alors par récurrence que $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, la propriété découle de la non injectivité de T . Supposons alors que $\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1})$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $x \in \ker(T^{k+1}) \setminus \ker(T^k)$. Comme T est surjectif, il existe $x_1 \in E$ tel que $x = Tx_1$. Alors $T^{k+2}x_1 = T^{k+1}x = 0$ et $T^{k+1}x_1 = T^k x \neq 0$. Ainsi $x_1 \in \ker(T^{k+2}) \setminus \ker(T^{k+1})$. On a donc par récurrence $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$ et ceci contredit une nouvelle fois le corollaire précédent . ■

Lemme 2.2.3 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, si $A - I$ est injectif alors son image est fermée dans E .*

Démonstration. Soient $y \in \overline{\operatorname{Im}(A - I)}$ et (y_n) une suite de $\operatorname{Im}(A - I)$ qui converge vers y . On pose

$$y_n = Ax_n - x_n$$

• Si (x_n) contient une sous-suite bornée, alors A étant compact, (x_n) contient aussi une sous-suite (x_{n_k}) telle que (Ax_{n_k}) converge. Comme

$$x_{n_k} = Ax_{n_k} - y_{n_k}$$

la suite (x_{n_k}) converge vers un élément x qui vérifié $Ax - x = y$.

• Si (x_n) ne contient aucune sous-suite bornée, la suite $\|x_n\|$ tend vers l'infini avec n . Posons $z_n = \|x_n\|^{-1} x_n$, il vient

$$\|z_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (A - I)z_n = 0$$

Comme A est compact, (z_n) contient une sous-suite (z_{n_k}) telle que (Az_{n_k}) converge. On en déduit que la suite (z_{n_k}) est convergente et si z est sa limite, on aura $\|z\| = 1$ et $Az - z = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse $A - I$ est injectif. ■

Lemme 2.2.4 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, soit $T = I - A$. Supposons qu'il existe un sous-espace fermé F de E tel que T soit injectif de F dans E .*

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. En particulier, l'image $T(F)$ est fermée.

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$. On peut alors trouver une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs de F , de norme 1, telle que $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Puisque A est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $A(x_{n_k})$ converge, mais $T(x_{n_k}) = x_{n_k} - A(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in E$. Comme F est fermé, nécessairement $x \in F$ et de plus $\|x\| = 1$. Donc en particulier $x \neq 0$. Il reste alors à remarquer que par continuité de T , on a

$$Tx = \lim_{k \rightarrow +\infty} Tx_{n_k} = 0,$$

ce qui contredit l'injectivité de T sur F . Ainsi il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. ■

Théorème 2.2.1 *Si A un opérateur compact alors, pour tout complexe λ non nul, le noyau de $A - \lambda I$ est de dimension finie.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la boule unité du sous-espace $\ker(A - I)$ est relativement compacte.

Soit (x_n) une suite dans $\ker(A - I)$, de norme inférieure ou égale à 1. On a

$$x_n = Ax_n$$

L'opérateur A étant compact, (Ax_n) contient une sous suite convergente, et la relation précédente montre que la suite (x_n) elle-même contient une sous suite convergente. ■

Corollaire 2.2.2 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\ker((A - \lambda I)^n)$ est de dimension finie.*

Théorème 2.2.2 *Soit A un opérateur compact. Si (λ_n) est une suite de valeurs propres de A . Alors ou bien cette suite est finie, ou bien elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. Supposons que la suite (λ_n) ne tend pas vers 0. Il existe alors $\epsilon > 0$ et une sous suite (λ_{n_k}) satisfaisant $|\lambda_{n_k}| \geq \epsilon$. Pour simplifier les notations, on peut supposer que $|\lambda_n| \geq \epsilon$. Soit pour tout $k \geq 1$, x_k un vecteur propre associé à λ_k , et soit N_k le sous-espace engendré par $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

La suite (N_k) est strictement croissante. Pour le voir, il suffit de montrer que pour tout k , $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est une famille libre. Supposons donc que $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ soit libre et que $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$. Il vient

$$0 = (A - \lambda_k I)x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (A - \lambda_k I)x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k)x_i.$$

Comme $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ pour tout $i \leq k-1$, on a nécessairement $\alpha_i = 0$, $\forall i \leq k-1$ et donc $x_k = 0$, ce qui est absurde. On peut donc choisir pour tout $k \geq 1$, un élément e_k de N_k de norme 1 et orthogonal à N_{k-1} . Les vecteurs e_k et $(A - \lambda_k I)e_k$ sont alors orthogonaux, car $(A - \lambda_k I)N_k \subset N_{k-1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \|Ae_k\|^2 &= \|(A - \lambda_k I)e_k + \lambda_k e_k\|^2 \\ &= \|(A - \lambda_k I)e_k\|^2 + |\lambda_k|^2 \geq |\lambda_k|^2 \end{aligned}$$

Mais cela contredit le fait que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ae_k\| = 0$. ■

Théorème 2.2.3 (Théorème spectral des opérateurs compacts). Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, alors

- i) Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(A)$.
- ii) $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$.
- iii) En dehors de 0 le spectre est un ensemble de points isolés.

Démonstration. i) Si $0 \notin \sigma(A)$ alors A est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et donc $I = A \circ A^{-1}$ est compact, et d'après le théorème de Riesz l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie, la contraposée donne le résultat.

ii) On a $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda I - A$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui équivaut encore à $\lambda \neq 0$ et $I - \lambda^{-1}A$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Or, $I - \lambda^{-1}A$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $I - \lambda^{-1}A$ n'est pas injectif. Donc $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$. De plus, $\ker(I - \lambda^{-1}A)$ est de dimension finie donc $\ker(\lambda I - A)$ est de dimension finie.

iii) Puisque $\sigma(A)$ est compact, il suffit de montrer que tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ est isolé. Or, si un tel λ n'est pas isolé, il existerait une suite (λ_k) , d'éléments dans $\sigma(A)$ non nuls et distincts deux à deux, qui convergerait vers λ . Comme $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, les λ_k sont des valeurs propres alors ils sont nécessairement (λ_k) converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$. ■

2.3 Spectre d'un opérateur adjoint, auto adjoint

Spectre d'un opérateur adjoint

Théorème 2.3.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a :

- i) $\ker(A) = (\text{Im}(A^*))^\perp, \overline{\text{Im}(A^*)} = (\ker(A))^\perp$.
- ii) $\ker(A^*) = \{0\}$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(A)} = H$.

Démonstration. i) On a

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{x \in H, Ax = 0\} = \{x \in H, \forall y \in H, \langle Ax, y \rangle = 0\} \\ &= \{x \in H, \forall y \in H, \langle x, A^*y \rangle = 0\} \\ &= (\text{Im}(A^*))^\perp. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(\ker(A^*))^\perp = \left(\operatorname{Im}(A)^\perp \right)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(A)},$$

d'où le résultat ■

Proposition 2.3.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in \mathcal{L}(H)$ et $A^* \in \mathcal{L}(H)$ l'adjoint de A . Alors*

1. $\rho(A^*) = \rho(A)^* = \{ \lambda \in \mathbb{K}, \bar{\lambda} \in \rho(A) \}$ et $\sigma(A^*) = \{ \lambda \in \mathbb{K}, \bar{\lambda} \in \sigma(A) \}$.
2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, $\mathcal{R}_\lambda(A^*) = (\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A))^*$.
3. $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.
4. $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$.

Démonstration. 1. On a l'équivalence $(A^* - \lambda I)$ est inversible si et seulement si $(A^* - \lambda I)^*$ est inversible. Or $(A^* - \lambda I)^* = (A - \bar{\lambda} I)$ donc :

$$\begin{aligned} \rho(A^*) &= \{ \lambda \in \mathbb{K}, A^* - \lambda I \text{ est inversible} \} = \{ \lambda \in \mathbb{K}, A - \bar{\lambda} I \text{ est inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{K}, \bar{\lambda} \in \rho(A) \}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \mathbb{K} \setminus \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(A^*) &= (A^* - \lambda I)^{-1} = \left((A - \bar{\lambda} I)^* \right)^{-1} \\ &= \left((A - \bar{\lambda} I)^{-1} \right)^* = (\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A))^*. \end{aligned}$$

3. Soit $\lambda \in \sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \ker(A - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq E, \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq H \right\}$, d'après le théorème précédent $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq H \iff \ker((A - \lambda I)^*) \neq \{0\}$, et $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$, implique $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. ■

Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Proposition 2.3.2 *(Valeurs propres des opérateurs auto-adjoint)*

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors :

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq H$.
3. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I)$, i.e. les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Démonstration. 1. Si $\lambda \in Vp(A)$, alors il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Donc

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. On a

$$\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = (\ker(A - \lambda I)^*)^\perp = (\ker(A - \bar{\lambda} I))^\perp.$$

Puisque $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$, ce qui est équivalent à $\ker(A - \bar{\lambda} I) \neq \{0\}$, soit encore $(\ker(A - \bar{\lambda} I))^\perp \neq H$. Donc $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H$.

3. Si $x \in \ker(A - \lambda I)$ et $y \in \ker(A - \mu I)$, alors

$$Ax = \lambda x \quad \text{et} \quad Ay = \mu y.$$

Comme $A = A^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu)(x, y) = (\lambda x, y) - (x, \mu y) = (Ax, y) - (x, Ay) = 0,$$

d'où $(x, y) = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Autrement dit, $\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I)$. ■

Corollaire 2.3.1 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Théorème 2.3.2 (propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints)

On suppose $H \neq \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, on pose :

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Alors :

1. $m, M \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $m, M \in \sigma(A)$.
3. $\sigma(A) \subset [m, M]$.
4. $\|A\| = \sup \{ |(Ax, x)|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1 \}$. En particulier, $\|A\| = \max(|m|, |M|)$.

Corollaire 2.3.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(A) = \{0\}$. Alors $A = 0$.

Démonstration. D'après la proposition précédente on sait que

$$\langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H.$$

Il en résulte que

$$2 \langle Ax, y \rangle = \langle A(x + y), (x + y) \rangle - \langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in H.$$

Donc $A = 0$. ■

Corollaire 2.3.3 *Un opérateur auto-adjoint A sur H est positif si et seulement si son spectre $\sigma(A)$ est contenu dans \mathbb{R}^+ .*

2.4 Spectre d'un opérateur normal

Proposition 2.4.1 *Soit H un espace de Hilbert, le rayon spectral de tout opérateur normal A de $\mathcal{L}(H)$ est égal à sa norme, c'est-à-dire*

$$r(A) = \|A\|.$$

Preuve. voir[9]. ■

Lemme 2.4.1 *Si un opérateur normal $A \in \mathcal{L}(H)$ est injectif, il est à image dense, si il existe une constante $c > 0$, telle que $\|Ax\| \geq c \|x\|$, pour tout $x \in H$, alors il est inversible.*

Démonstration. Si A est normal et injectif, on a $\overline{A(H)} = H$ d'après la proposition précédente, c'est-à-dire l'image est dense. S'il existe une constante $c > 0$, telle que $\|Ax\| \geq c \|x\|$, pour tout $x \in H$, et $\overline{A(H)} = H$, par conséquent A est inversible. ■

Proposition 2.4.2 *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, $A_\lambda = A - \lambda I$ est normal, si λ est dans le spectre, ou bien A_λ n'est pas injectif et $\lambda \in \sigma_p(A)$, ou bien A_λ est injectif, donc à image dense et $\lambda \in \sigma_c(A)$. ■

Définition 2.4.1 λ est une valeur approchée de A s'il existe une suite des fonctions $\psi_n \in H$, telles que $\|\psi_n\| = 1$ pour tout n , et

$$\|A\psi_n - \lambda\psi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Proposition 2.4.3 Le spectre d'un opérateur normal est l'ensemble de ses valeurs propres approchées.

Lemme 2.4.2 Soit H un espace de Hilbert et si $A \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a

$$\|P(A)\| = \max \{|P(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

Démonstration. Soit $K = \sigma(A)$, on vu que le spectre de $P(A)$ est $P(K)$. Par ailleurs $P(A)$ est normal, donc

$$\|P(A)\| = r(P(A)) = \max \{|z| : z \in \sigma(P(A))\} = \max \{|P(\lambda)| : \lambda \in K\}.$$

■

2.5 Spectre d'un opérateur fermé

Définition 2.5.1 Soient E un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur fermé, alors

1) **L'ensemble résolvante** de A est l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est bijectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ dans } E\}.$$

2) Soit $\lambda \in \rho(A)$, on définit **la résolvante** $\mathcal{R}_\lambda(A)$ de A par

$$\mathcal{R}_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

3) **Le spectre** de A est le complémentaire du $\rho(A)$ dans \mathbb{C} , i.e

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ dans } E\}.$$

4) **Le spectre ponctuel** de A (l'ensemble des valeurs propres) est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif sur } \mathcal{D}(A) \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) \neq \{0\} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists v \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\} \text{ tel que } Av = \lambda v \}.\end{aligned}$$

5) **Le spectre résiduel** de A est l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est injectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense} \}.$$

6) **Le spectre continu** de A est l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est injectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ est dense} \}.$$

Lemme 2.5.1 *Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de \mathbb{C} .*

Démonstration. Vérifions simplement que l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé A est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\lambda - A = (\lambda_0 - A) (I + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}(\lambda_0)).$$

Si λ est tel que $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}(\lambda_0)\|^{-1}$, alors $I + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}(\lambda_0)$ est inversible (d'inverse donné par $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{R}(\lambda_0)^m$), et donc $\lambda - A$ l'est aussi :

$$\mathcal{R}(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}(\lambda_0))^{-1} \mathcal{R}(\lambda_0).$$

■

Mais contrairement à ce que l'on sait pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur fermé peut être vide, ou non borné, voire égal à \mathbb{C} tout entier. On obtient des contre-exemples en considérant par exemple l'opérateur différentiel le plus simple, $A = \partial_x$, vu comme un opérateur non borné sur $L^2([a, b])$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si l'on prend comme domaine $\mathcal{D}(A) := H^1([a, b])$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $(\lambda - A)u = f$ n'a certainement pas une solution unique puisque toutes les fonctions $t \rightarrow Ce^{\lambda t}$ sont des éléments de $\mathcal{D}(A)$ solutions de $(\lambda - A)u = 0$. Dans ce cas $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Si l'on restreint le domaine à $\mathcal{D}(A) := \{u \in H^1([a, b]) ; u(a) = 0\}$ alors $\sigma(A)$ est vide, car quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $f \in L^2([a, b])$, il existe un unique $u \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(\lambda - A)u = f$: la formule de Duhamel donne en effet $u(t) = -\int_a^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$.

Définition 2.5.2 (Fredholm)

Un opérateur non borné A dans un espace de Banach E est dit de Fredholm si

- son noyau est de dimension finie .
- son image est fermée et de codimension finie dans E (c'est-à-dire qu'elle admet un supplémentaire de dimension finie).

Proposition 2.5.1 Soit E et F deux espaces de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur fermé.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est injectif, d'inverse $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$ borné.
2. Il existe $m \geq 0$ tel que $\|Ax\|_F \geq m \|x\|_E$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.
3. $\text{Im}(A)$ est fermé dans F et $\ker(A) = \{0\}$.b

Corollaire 2.5.1 Soit A un opérateur linéaire fermé. Alors $\sigma'_r(A) = \emptyset$.

Lemme 2.5.2 Soit A un opérateur linéaire, si A n'est pas fermé, alors $\sigma(A) = \mathbb{C}$. (ou de manière équivalente, si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé).

Preuve. supposons que $\rho(A) \neq \emptyset$ et soit $\lambda \in \rho(A)$.

$(A - \lambda I)^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour $(A - \lambda I)$ et A . ■

Conclusion

Ce mémoire se situe au cadre d'analyse fonctionnelle, et plus précisément à la théorie spectrale des classes importantes d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, comme les opérateurs compacts, fermés . Cette théorie est particulièrement utile et importante dans l'étude d'un opérateur et la détermination de son spectre qu'est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs d'une matrice, ceci permet de résoudre complètement des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc...

Bibliographie

- [1] N.BOCCARA, *Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens*, Marketing, Paris, 1984.
- [2] H.BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [3] H.CHEBLI, *Analyse hilbertienne*, Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2001.
- [4] E.FRICAÏN, *Analyse Fonctionnelle et Théorie des opérateurs*, cours et exercices, Master (mathématiques pures), 2009-2010.
- [5] J.HUNTER,B.NACHTERGAEEL, *Applied Analysis*, Departement of mathematics, university of California at Davis, September12,2000.
- [6] T.KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1995.
- [7] B.MACCLUER, *Elementary Functional Analysis*, Department of Mathematics, University of Virginia.
- [8] B.MAUREY, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*, MT404, 2001-2002.
- [9] V.MILMAN, *An introduction to Functional Analysis*, World 1999.
- [10] M.NADIR, *Cours d'analyse fonctionnelle*, université de M'sila Algérie, 2004.
- [11] F.PAULIN, *Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique*, cours de deuxième année du Magistère de mathématique, Université Paris-Sud, année 2016-2017.
- [12] S.SCHNAUBELT, *Lecture notes spectral theory*, Karlsruhe, 2012.