UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Par

YAHI RACHID

Sujet

Remarques sur les Opérateurs Lipschitz p-Sommants

Soutenu publiquement le 17/06/2012 devant le jury :

D. ACHOUR	**M.C.A U. de M'sila**	**Examinateur**
L. MEZRAG	**Pr U. de M'sila**	**Dir. de mémoire**
D. DRIHEM	**M.C.A. U. de M'sila**	**Examinateur**

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur L. Mezrag pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur D. Achour, Docteur à université de M'sila. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury .

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et Mr A.Mazouz pour leur soutient tout au long de mes études.

Table des matières

Introduction

La version non linéaire d'opérateurs p-sommants a été introduite par J.D. Farmer et W.B. Johnson dans [FJ]. Il sont appelés alors opérateurs Lipschitz p-sommants. Et le théorème de domination de Pietsch, a été aussi démontré par (J.D. Farmer et W.B. Johnson) pour les opérateurs Lipschitz p-sommants. En 2011 B.ZHENG et D.CHEN ont démontré les deux théorèmes suivants: théorème de Kwapień et le théorème d'extrapolation de Maurey dans le cas non linéaire. Pour se faire on a opté pour le plan suivant

En premier chapitre, nous avons donner quelques propriétés et théorèmes sur les opérateurs p-sommants.

En deusième chapitre, nous avons présenter la version non linéaire d'un opérateur p-sommant à savoir la propriété d'idéal, le théorème de dominatin de Pietsch.

En troisième chapitre nous donnons le théorème d'extrapolation de Maurey et le théroème de Kwapień.

Chapitre 1

Opérateurs p-sommants

1.1 L'espace des suites p-sommables

On désignera par X et Y deux espaces de Banach, et X^*, Y^* leurs espaces duaux. On note par $\mathcal{L}(X;Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de X dans Y. La boule unité de X^* sera désignée par B_{X^*}.

Soit $n \in \mathbb{N}$, X un espace de Banach et $1 \leq p < +\infty$, p^* est appelé le conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).On note par $\ell_p(X)$ (resp $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument $p-$sommables muni de la norme:

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell_p(X)} = \begin{cases} (\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \ 1 \leq \ p < +\infty \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| < +\infty, \quad p = +\infty \end{cases}$$

(resp

$$\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\|_{\ell_p(X)} = \begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ pour } \ 1 \leq p < +\infty \\ \sup\limits_{1\leq i\leq n} \|x_i\| < +\infty, \text{ pour } p = +\infty \end{cases}).$$

On note par $\ell_p^w(X)$ (resp $\ell_p^{n,w}(X)$) l'espace des suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement $p-$sommables muni de la norme:

$$\|(x_i)\|_{\ell_{p,w}(X)} = \begin{cases} \sup\limits_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \text{ pour } \ 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| < +\infty. \text{ pour } p = +\infty \end{cases}$$

(resp

$$\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\|_{\ell_{p,w}(X)} = \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum\limits_{i=1}^{n} \mid \langle \zeta, x_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty.\text{pour } \ 1\leq p < +\infty \\ \sup\limits_{1\leq i\leq n} \|x_i\| < +\infty.\text{pour } p = +\infty \end{array} \right.)$$

1.2 Opérateurs p-sommants

Définition 1.2.1 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On dit que T est p-sommant pour $1 \leq p < +\infty$ si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 \ \textit{telle que} \ , \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup\limits_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum\limits_{i=1}^{n} \mid \langle \zeta, x_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right. . \tag{1.2.1}$$

La plus petite constante C possible est noté $\pi_p(T)$ et on note par $\pi_p(X,Y)$ l'espace des opérateurs $p-$sommants.

Le Théorème du graphe fermé montre que $T : X \longrightarrow Y$, est $p-$sommants si et seulement si T transforme les suites faiblements $p-$sommables en des suites absolument p-sommables. En d'autres termes

$$T \text{ est } p-\text{sommants} \Leftrightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mid \langle \zeta, x_i\rangle \mid^p < \infty, \forall \zeta \in B_{X^*} \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^p < \infty \right].$$

Il est facile de vérifier que π_p est une norme, appellée norme $p-$sommante, sur l'espace $\pi_p(X,Y)$ de tous les opérateurs $p-$sommants de X dans Y et qu'elle en fait un espace de Banach. D'autre part, il est claire (prendre $n = 1$ dans la définition (1.2.1) que la norme $p-$sommante domine la norme d'opérateur

$$\pi_p(T) \geq \|T\|.$$

Donc tous les opérateurs $p-$sommants sont continues.

Proposition 1.2.1 *(Proprieté d'idéal) Soients $T \in \pi_p(X,Y)$, $v \in \mathcal{L}(E,X)$, $w \in \mathcal{L}(Y,F)$, alors*

$$w \circ T \circ v \in \pi_p(E,F), \ \textit{ et } \pi_p(w \circ T \circ v) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|.$$

Preuve. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n} \subset E$.on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|W\circ T\circ V(x_i)\|)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|W(T(V(x_i)))\|)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|W\|(\sum_{i=1}^{n} \|T(V(x_i))\|)^{\frac{1}{p}} \text{ (car } W\in\mathcal{L}(Y,F)) \\
&\leq \|W\|\pi_p(T) \sup_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle V(x_i),\zeta\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} \text{(car } T\in\pi_p(X,Y)) \\
&= \|W\|\pi_p(T) \sup_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle x_i, V^*(\zeta)\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|W\|\pi_p(T)\|V\| \sup_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle x_i \,, \frac{V^*(\zeta)}{\|V^*\|}\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|W\|\pi_p(T)\|V\| \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle x_i \,, \eta\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

avec V^* ladjoint de V donc, $\|V^*\| = \|V\|$, de plus $\|V^*\| = \sup_{\zeta\in X^*} \|V^*(\zeta)\|$ alors $\frac{\|V^*(\zeta)\|}{\|V^*\|} \leq 1$ et par concequence $\frac{\|V^*(\zeta)\|}{\|V^*\|} \in B_{E^*}$, on prend $\eta = \frac{\|V^*(\zeta)\|}{\|V^*\|}$, donc $W\circ T\circ V \in \pi_p(E,F)$ et $\pi_p(W\circ T\circ V) \leq \|W\|\pi_p(T)\|V\|$. ■

Théorème 1.2.1 *(théorème d'inclusion) Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire et $1 \leq p < q < +\infty$ alors $\pi_p(X,Y) \subset \pi_q(X,Y)$ et $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X$, on pose $\lambda_i = \|T(x_i)\|^{\frac{q}{p}-1}$

on aurra

$\|T(\lambda_i x_i)\|^p = \mid \lambda_i \mid^p \|T(x_i)\|^p = \|T(x_i)\|^{p(\frac{q}{p}-1)} \|T(x_i)\|^p = \|T(x_i)\|^{q-p+p} = \|T(x_i)\|^q$

si $T \in \pi_p(X,Y)$ alors

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|T(\lambda_i x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(T) \sup_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle \zeta, \lambda_i x_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(T) \sup_{\zeta\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^p \mid \langle \zeta, x_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

puisque $p < q$ et $\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{q}{q-p}} = 1$, donc d'aprés l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^p \mid \langle \zeta, \lambda_i x_i \rangle \mid^p &\leq (\sum_{i=1}^{n} (\mid \lambda_i \mid^p)^{\frac{q}{q-p}})^{\frac{q-p}{q}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^p)^{\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} (\mid \lambda_i \mid)^{\frac{pq}{q-p}})^{\frac{q-p}{q}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_{i=1}^{n} (\mid \lambda_i \mid)^{\frac{pq}{q-p}})^{\frac{q-p}{pq}} \pi_p(T) \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{1}{q}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} (\|T(x_i)\|^{(\frac{q}{p}-1)})^{\frac{pq}{q-p}})^{\frac{q-p}{pq}} \pi_p(T) \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{1}{q}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} (\|T(x_i)\|^q))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \pi_p(T) \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

d'où

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} (\|T(x_i)\|^q))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{1}{q}}$$

et donc

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(T) \sup_{\zeta \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} (\mid \langle \zeta, x_i \rangle \mid^q))^{\frac{1}{q}}$$

alors $T \in \pi_q(X, Y)$ et $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$. ■

Définition 1.2.2 *Soit X un espace métrique et μ une mesure borélienne sur X alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}_X$ on a*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \ : F \text{ compact}, \ F \subset A\}$$

et

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \ : \ O \text{ ouvert } \ A \subset O\}.$$

Si (X, d) est compact et μ est une mesure borélienne finie alors la forme linéaire T_μ définie par

$$T_\mu(f) := \int_X f d_\mu, \ \forall f \in C(X)$$

est continue ($|T_\mu(f)| \leq \|f\|\mu(X)$) et positive au sens où $T_\mu(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$. Comme on a $T_\mu(1) = \mu(X)$ on a

$$\|T\|_{C(X)'} = \mu(X)$$

Théorème 1.2.2 *(Théorème de représentation de Riesz, cas compact et positif) Soit X un espace métrique compact et T une forme linéaire continue et positive sur $C(X)$. Il existe une unique mesure borélienne finie et régulièr μ sur X telle que $T = T_\mu$.*

Définition 1.2.3 *Soit (X, d) un espace métrique compact, on appelle mesure de Radon sur X toute forme linéaire continue sur $C(X)$. On note $M(X) := (C(X))^*$ l'espace des mesures de Radon sur X .*

Le théorème de Riesz nous a permis d'identifier les mesures de Radon positives sur X aux mesures boréliennes finies.

L'exemple fondamentale des opérateurs p-sommants est donné par

Proposition 1.2.2 *Soient K un compact, μ une mesure positive régulière finie sur K et $1 \leq p < +\infty$.*

1) Pour chaque $\varphi \in L_p(K)$, on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{array}{rcl} T_\varphi : C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ f & \longmapsto & T_\varphi(f) = f.\varphi \end{array}$$

cet opérateur est $p-$sommant de plus $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_{L_p}$.

2) L'opérateur canonique

$$\begin{array}{rcl} J_p : C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ f & \longmapsto & J_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant de plus $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Preuve. Soit$\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset C(K)$. Achaque point $\omega \in K$ correspond un point de masse $\delta_\omega \in (C(K))^*$, donné par $\langle \delta_\omega, f_i \rangle = f_i(\omega)$ (δ_ω la mesur de Dirac).D'ou

1)

$$\sup_{\zeta\in B_{(C(K))^*}}(\sum_{i=1}^{n} \mid \langle\zeta, f_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\omega\in K}(\sum_{i=1}^{n} \mid \langle\delta_\omega, f_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sup_{\omega\in K}(\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(\omega) \mid^p)^{\frac{1}{p}} = \| \sum_{i=1}^{n} \mid f_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}\|_\infty. \tag{1.2.2}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|T_\varphi(f_i))\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|f_i.\varphi\|^p_{L_P})^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \int_K \mid f_i(\omega).\varphi(\omega) \mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \int_K \mid f_i(\omega) \mid^p \mid \varphi(\omega) \mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_K \sum_{i=1}^{n} \mid f_i(\omega) \mid^p \mid \varphi(\omega) \mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\omega\in K}(\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(\omega) \mid^p)^{\frac{1}{p}}(\int_K \mid \varphi(\omega) \mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\varphi\|_{L_P} \sup_{\zeta\in B_{(C(K))^*}}(\sum_{i=1}^{n} \mid \langle\zeta, f_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'ou $\pi_p(T_\varphi) \in \pi_p(C(K), L_P(\mu))$, et $\pi_p(T_\varphi) \leq \|\varphi\|_{L_P}$ d'autr part on a

$$\pi_p^L(T_\varphi) \geq \|T_\varphi\| \geq \|T_\varphi(1)\| = \|\varphi\|_{L_p}.$$

D'ou $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_{L_P}$

2) Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n}\|J_P(f_i))\|_{L_P}^{p}) &= (\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{K} \mid J_P(f_n(t)) \mid^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{K} \mid f_n(t) \mid^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int\limits_{K}\sum_{i=1}^{n} \mid f_n(t) \mid^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\omega\in K}(\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(\omega) \mid^p)^{\frac{1}{p}}(\int\limits_{K} d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(K)^{\frac{1}{p}} \sup_{\zeta\in B_{(C(K))^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \langle\zeta, f_i\rangle \mid^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'ou $\pi_p(J_P) \in \pi_p(C(K), L_P(\mu))$, et $\pi_p(J_P) \leq \mu(K)^{\frac{1}{p}}$ d'autr part on a

$$\pi_p(J_P) \geq \|J_P\| \geq \|J_P(1))\|_{L_P} = \|J_P(1))\|_{L_P} = \mu(K)^{\frac{1}{p}},$$

donc $\pi_p(J_P) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$. ∎

Remarque 1.2.1 *D'aprés la propriété d'idéal si F est un sous espace fermé de $C(K)$ et F_p l'adhérence de $J_p(F)$ dans $L_p(\mu, K)$ alors la réstriction $J_p : F \to F_p$ est $p-$sommant.*

1.3 Caractérisation des opérateurs p-sommants

Théorème 1.3.1 *(Théorème de domination de Pietsch)*

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire et C une constante positive. Alors les proprietés suivantes sont equivalentes

i) L'opérateur $T \in \pi_p(X, Y)$ et $\pi_p(T) \leq C$.

ii) Il existe une mesure de propabilité finie μ sur $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que

$$\|T(x)\| \leq C(\int\limits_{K} \mid \langle\zeta, x\rangle \mid^p d\mu(\zeta))^{\frac{1}{p}}. \quad \forall x \in X.$$

Preuve. (voir [DJT]). ∎

1.4 Théorèmes sur les opérateurs p-sommants

Définition 1.4.1 *Une suite de Rademacher est une suite de fonction* $(r_n)_{n\in N^*}$ *definie comme suit*

$$\begin{array}{rcl} r_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & sign(\sin(2^n \pi t)). \end{array}$$

Remarque 1.4.1 $(r_n)_{n\in N^*} \subset L_2$ *forme un système orthonormale et pour tout* $(a_n)_n \in l_2$ *on a* $\int\limits_0^1 \mid \sum\limits_{n\geq 1} a_n r_n(t) \mid^2 dt = \sum\limits_{n\geq 1} \mid a_n \mid^2$.

Inégalité de Khinchin

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de Rademacher. Pour tout $0 < p < +\infty$ il existe deux constantes positives A_p, B_p telle que pour toute suite de scalaires $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$, on a

$$A_p.(\sum_{n\geq 1} \mid a_n \mid^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int\limits_0^1 \mid \sum_{n\geq 1} a_n r_n(t) \mid^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq B_p.(\sum_{n\geq 1} \mid a_n \mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.4.1 *(Kwapień) Soit* X *un espace de Banach et* H *un espace de Hilbert. Si* $v \in \mathcal{L}(X, H)$ *telle que* v^* *est* $q-$*sommant pour tout* $1 \leq q < +\infty$, *alors* v *est* $1-$*sommant et* $\pi_1(v) \leq A_1^{-1}.B_q.\pi_q(v^*)$, *où* A_1 *et* B_q *sont les constantes de Khinchin.*

Preuve. On divise la preuve en deux étapes.

Première étape. On considère $v \in \mathcal{L}(X, \ell_2^n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Soient $x_1, x_2, ..., x_m \in X$

on a $v(x_i) = \sum\limits_{k\leq n} \langle v(x_i), e_k\rangle e_k$ et $\|v(x_i)\| = (\sum\limits_{k\leq n} \mid \langle v(x_i), e_k\rangle \mid^2)^{\frac{1}{2}}$ $((e_n)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de $\ell_2^n)$.

Par l'inégalité de khinchin on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leq m}\|v(x_i)\| &= \sum_{i\leq m}(\sum_{k\leq n} \mid \langle v(x_i), e_k\rangle \mid^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq A_1^{-1}\sum_{i\leq m}(\int_0^1 \mid \sum_{k\leq n}\langle v(x_i), e_k\rangle r_k(t) \mid dt) \\
&= A_1^{-1}\sum_{i\leq m}(\int_0^1 \mid \langle x_i, \sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\rangle \mid dt) \\
&= A_1^{-1}\int_0^1(\sum_{i\leq m} \mid \langle x_i, \sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\rangle \mid dt) \\
&\leq A_1^{-1}\int_0^1\|\sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\|dt \sup_{\zeta\in B_{X^*}}\sum_{i\leq m} \mid \langle x_i, \zeta\rangle \mid \\
&= A_1^{-1}(\int_0^1\|\sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\|dt).\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\|_{\ell_{1,w}}.
\end{aligned}$$

On a $v^* \in \pi_q(\ell_2^n, X^*)$ donc par le théoréme de domination de Pietsch il existe une mesure de propabilité régulière μ sur $K = B_{\ell_2^n}$ telle que pour tout $x \in \ell_2^n$, on a

$$\|v^*(x)\| \leq \pi_q(v^*)(\int_K \mid \langle \zeta, x\rangle \mid^q \, d\mu(\zeta))^{\frac{1}{q}}.$$

Par le théorème de Fubini et l'inégalité de Khinchin on trouve

$$\begin{aligned}
(\int_0^1\|\sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\|^q dt\ )^{\frac{1}{q}} &= (\int_0^1\|v^*(\sum_{k\leq n} r_k(t)e_k)\|^q dt\ )^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_q(v^*)(\int_0^1\int_K \mid \langle \zeta, \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k\rangle \mid^q \, d\mu(\zeta)dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= \pi_q(v^*)(\int_K\int_0^1 \mid \langle \zeta, \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k\rangle \mid^q \, dtd\mu(\zeta))^{\frac{1}{q}} \\
&\leq B_q.\pi_q(v^*)(\int_K(\sum_{k\leq n} \mid \langle \zeta, e_k\rangle \mid^2\ )^{\frac{q}{2}}d\mu(\zeta))^{\frac{1}{q}} \\
&\leq B_q.\pi_q(v^*).
\end{aligned}$$

Deuxième étape. Fixons $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ dans X. On identifier le span de $v(x_i)$ à ℓ_2^n. Soit $P \in \mathcal{L}(H; span\,\{v(x_i),\ 1\leq i\leq m\})$, le projection orthogonal sur le span, alors

$$\begin{aligned} A_1\pi_1(pv) &\leq (\int_0^1 \|\sum_{k\leq n} r_k(t)\,(pv)^*\,(e_k)\|dt) \\ &\leq (\int_0^1 \|\sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(p(e_k))\|^q dt)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\int_0^1 \|\sum_{k\leq n} r_k(t)v^*(e_k)\|^q dt)^{\frac{1}{q}} \leq B_q.\pi_q(v^*). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i\leq m}\|v(x_i)\| &= \sum_{i\leq m}\|p(v(x_i))\| \leq \pi_1(pv)\|(x_i)_{1\leq i\leq m}\|_{\ell_{1,w}} \\ &\leq A_1^{-1}B_q.\pi_q(v^*)\|(x_i)_{1\leq i\leq m}\|_{\ell_{1,w}}. \end{aligned}$$

D'ou $v\in\pi_1(X,H)$ et $\pi_1(v)\leq A_1^{-1}.B_q.\pi_q(v^*)$. ■

Théorème 1.4.2 *(théorème d'extrapolation)*

Soit $1<r<p<\infty$, *et soit* X *est un espace de Banach tel que*

$$\pi_p(X,\ell_p)=\pi_r(X,\ell_p).$$

alors pour tout espace de Banach Y,

$$\pi_p(X,Y)=\pi_1(X,Y).$$

Preuve. Voir([DJT]) ■

Chapitre 2

Opérateurs Lipschitz p-sommants

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1 *Un espace métrique (X, d_X) est dit discret s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall x_1, x_2 \in X \; d_X(x_1, x_2) \geq \delta$. Un espace métrique discret X est dit localement fini si pour tout $a \in X$ et pour tout $r > 0$ l'ensemble $\{x \in X : d_X(x, a) \leq r\}$ est fini.*

Notation: Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé i.e., (X admet un élément distingué, on prend 0 si X est normé).

On note par

$\mathcal{M}_0$ l'ensemble des espaces métriques complets pointés,

$\mathcal{M}_2$ l'ensemble des espaces métriques complets de diamètre au plus 2 i.e., ($diam(X) = \sup\limits_{x,y} d_X(x, y) \leq 2$).

Définition 2.1.2 *L' appliction $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ est dite Lipschitzienne, s'il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\forall x; y \in X : d_X(f(x), f(y)) \leq c \; d_X(x, y). \tag{1.2}$$

On note par $\mathrm{Lip}(X, Y)$ l'ensemble des applications Lipschitziennes définies de X dans Y, c'est un espace semi normé

$$\|f\|_{Lip(X,Y)} = Lip\,(f) := \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} = \inf\{C : C \text{ verifie } (1.2)\}$$

Soient (X, d_X, e), (Y, d_Y, e') deux espaces métriques pointés, on dit que l'application:

$$f : (X, d_X, e) \longrightarrow (Y, d_Y, e')$$

preserve l'élément neutre si $f(e) = e'$.

Définition 2.1.3 *Soit l' application $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$, f est dite bi-Lipschitzienne si*

1- f est bijective,

2- f et f^{-1}sont Lipschitziennes.

Dans ce cas on dit que X et Y sont Lipschitz isomorphes.

Remarque 2.1.1 *Le morphisme naturel entre les espaces métriques est la fonction Lipschitzienne comme les opérateurs linéaires entre les espaces normés.*

2.2 L' espace $\mathbf{Lip}_0(X)$

Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour un espace de Banach Y, on note par

$$\mathrm{Lip}_0(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \text{ Lipschitzienne et } f(e) = 0.\} .$$

menu de la norme

$$\|f\|_{Lip_0(X,Y)} := \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x, y)}. \tag{2.2.1}$$

L'espace $Lip_0(X, Y)$ menu de la norme (2.2.1) est un espace de Banach. Si $Y = \mathbb{R}$ on pose $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ =$\mathrm{Lip}_0(X) = X^\sharp$.

2.3 Opérateurs Lipschitz p-sommants

La version non linéaire d'opérateurs p-sommants a été introduite par J.D. Farmer et W.B. Johnson dans [FJ]. Il sont appelés alors opérateurs Lipschitz p-sommants. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques tels que (X, d_X) est un espace métrique pointé. La boule unité $B_{X^\#}$ de $X^\#$ est compact pour la topologie de convergence simple de X.

Définition 2.3.1 *On dit que l'opérateur $T : X \to Y$ est Lipschitz p-sommant* $(1 \leq p < \infty)$, *si*

$$\begin{cases} \exists C > 0 \text{ telle que }, \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \forall (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X \\ \sum_{i=1}^{n} d_Y \left(T(x_i), T(y_i)\right)^p \leq C^p \sup\limits_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|^p. \end{cases}$$

La plus petite constante C possible est notée par $\pi_p^L(T)$, et on note par $\pi_p^L(X, Y)$ l'espace des opérateurs Lipschitz p-sommants.

Si Y est un espace de Banach, alors l'espace $\pi_p^L(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi_p^L(.)$. Si T est linéaire alors $\pi_p^L(T) \leq \pi_p(T)$.

Proposition 2.3.1 *(Proprieté idéal) Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $v : E \longrightarrow X$, $w : Y \longrightarrow F$ des fonctions Lipschitziennes et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur Lipschitz p-sommant.. Alors l'opérateur wTv est Lipschitz p-sommant et $\pi_p^L(wTv) \leq Lip(w)\pi_p^L(T)\, Lip(v)$.*

Preuve. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_F \left(wTv(x_i), wTv(y_i)\right)^p &\leq Lip(w)^p \sum_{i=1}^{n} d_Y \left(Tv(x_i), Tv(y_i)\right)^p \\ &\leq Lip(w)^p \pi_p^L(T)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} |f(v(x_i)) - f(v(y_i))|^p \\ &\leq Lip(w)^p \pi_p^L(T)^p\, Lip(v)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} |\tfrac{f \circ v}{Lip(v)}(x_i) - \tfrac{f \circ v}{Lip(v)}(y_i)|^p \\ &\leq Lip(w)^p \pi_p^L(T)^p\, Lip(v)^p \sup_{g \in B_{E^\#}} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(y_i)|^p. \end{aligned}$$

D'où $wTv \in \pi_p^L(E, F)$ et $\pi_p^L(wTv) \leq Lip(w)\pi_p^L(T)\, Lip(v)$. ∎

Proposition 2.3.2 *Soit K un compact, μ une mesure positive régulière sur K et soit* $1 \leq p < +\infty$.

1) Pour chaque $\varphi \in L_p(K)$, on définit l'opérateur de multiplication:

$$\begin{array}{rcl} T_\varphi : C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ f & \longmapsto & T_\varphi(f) = f.\varphi \end{array}$$

cet opérateur est Lipschitz p-sommant de plus $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_{L_p}$.

2) L'opérateur canonique

$$\begin{array}{rcl} J_p : C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ f & \longmapsto & J_p(f) = f \end{array}$$

est Lipschitz p-sommant de plus $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Preuve. Soit$\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset C(K)$. A chaque point $\omega \in K$ correspond un point de masse $\delta_\omega \in (C(K))^*$, donné par $\langle \delta_\omega, f_i \rangle = f_i(\omega)$ (δ_ω la mesur de Dirac). On a $B_{(C(K))^*} \subset B_{(C(K))^\sharp}$ D'ou

1)

$$\begin{aligned} \sup_{\zeta \in B_{(C(K))^\sharp}} (\sum_{i=1}^n \mid \zeta(f_i) - \zeta(g_i) \mid^p)^{\frac{1}{p}} &\geq \sup_{\zeta \in B_{(C(K))^*}} (\sum_{i=1}^n \mid \zeta(f_i) - \zeta(g_i) \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\omega \in K} (\sum_{i=1}^n \mid f_i(\omega) - g_i(\omega) \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(\sum_{i=1}^n \mid f_i(\omega) - g_i(\omega) \mid^p)^{\frac{1}{p}}\|_\infty. \qquad (*) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n}\|T_\varphi(f_i)-T_\varphi(g_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n}\|f_i.\varphi-g_i.\varphi\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}}\\
&= (\sum_{i=1}^{n}\int_K \mid f_i(\omega).\varphi(\omega)-g_i(\omega).\varphi(\omega)\mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}}\\
&= (\sum_{i=1}^{n}\int_K \mid f_i(\omega)-g_i(\omega)\mid^p\mid \varphi(\omega)\mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}}\\
&= (\int_K\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(\omega)-g_i(\omega)\mid^p\mid \varphi(\omega)\mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{\omega\in K}(\sum_{i=1}^{n}\mid f_i(\omega)-g_i(\omega)\mid^p)^{\frac{1}{p}}(\int_K\mid\varphi(\omega)\mid^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}}\\
&= \|\varphi\|_{L_p}\sup_{\zeta\in B_{(C(K))^*}}(\sum_{i=1}^{n}\mid\zeta(f_i)-\zeta(g_i)\mid^p)^{\frac{1}{p}}\ (\text{de*})\\
&\leq \|\varphi\|_{L_p}\sup_{\zeta\in B_{(C(K))^\sharp}}(\sum_{i=1}^{n}\mid\zeta(f_i)-\zeta(g_i)\mid^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où $\pi_p^L(T_\varphi)\in\pi_p^L(C(K),L_p(\mu))$, et $\pi_p^L(T_\varphi)\leq\|\varphi\|_{L_p}$ d'autr part on a

$$\pi_p^L(T_\varphi)\geq\|T_\varphi\|\geq\|T_\varphi(1)\|=\|\varphi\|_{L_p}$$

d'ou $\pi_p^L(T_\varphi)=\|\varphi\|_{L_p}$.

2) Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|J_p(f_i) - J_p(g_i)\|_{L_p}^p &= \sum_{i=1}^{n} \|f_i - g_i\|_{L_p}^p \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \int_K \mid f_i(t) - g_i(t) \mid^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_K \sum_{i=1}^{n} \mid f_i(t) - g_i(t) \mid^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\omega \in K} (\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(t) - g_i(t) \mid^p)^{\frac{1}{p}} (\int_K d\mu(t))^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(K)^{\frac{1}{p}} \sup_{\zeta \in B_{(C(K))^*}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \zeta(f_i) - \zeta(g_i) \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu(K)^{\frac{1}{p}} \sup_{\zeta \in B_{(C(K))^\sharp}} (\sum_{i=1}^{n} \mid \zeta(f_i) - \zeta(g_i) \mid^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

d'où $J_p \in \pi_p^L(C(K), L_p(\mu))$, et $\pi_p^L(J_p) \leq \mu(K)^{\frac{1}{p}}$ d'autre part on a

$$\pi_p^L(J_p) \geq \|J_p\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|J_p(f_i))\|_{L_p} \geq \|J_p(1)\|_{L_p} = \mu(K)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $\pi_p^L(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$. ■

2.4 Caractérisation des opérateurs Lipschitz p-sommants

On va donner le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs Lipschitz p-sommants.

Théorème 2.4.1 *([FJ]) Soient $1 \leq p < \infty$, $C > 0$ et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur entre les espaces métriques X et Y. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes en la constante C.*

(a) *L'opérateur T est Lipschitz p-sommants et $\pi_p^L(T) \leq C$.*

(b) *Il existe une mesure de probabilité régulière μ sur $B_{X^\#}$ telle que:*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.4.1)$$

Preuve. $a \Rightarrow b$) Soit $A \subset C(B_{X^\#})$ l'ensemble des fonctions de la forme:

$$\varphi_{(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[C^p \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p - \|T(x_i) - T(y_i)\|^p\right], \text{ et } \alpha_i > 0 \text{ pout tout } 1 \leq i \leq n.$$

A est une cône convexe en effet soient $\varphi_{(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}}$ et $\varphi_{(\acute{x}_j,\acute{y}_j)_{1\leq j\leq m}} \in A$

$$\varphi_{(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[C^p \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p - \|T(x_i) - T(y_i)\|^p\right]$$

$$\varphi_{(\acute{x}_j,\acute{y}_j)_{1\leq j\leq m}} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left[C^p \left|f(\acute{x}_j) - f(\acute{y}_j)\right|^p - \|T(\acute{x}_j) - T(\acute{y}_j)\|^p\right]$$

$$\varphi_{(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}}(f) + \varphi_{(\acute{x}_j,\acute{y}_j)_{1\leq j\leq m}}(f) = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k \left[C^p \left|f(w_k) - f(z_k)\right|^p - \|T(w_k) - T(z_k)\|\right] \in A,$$

avec

$$T(w_k) = \begin{cases} T(x_k), \text{ pour } 1 \leq k \leq n \\ T(x'_{k-n}), \text{ pour } 1+n \leq k \leq n+m \end{cases},$$

$$T(z_k) = \begin{cases} T(y_k), \text{ pour } 1 \leq k \leq n \\ T(y'_{k-n}), \text{ pour } 1+n \leq k \leq n+m \end{cases},$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \alpha_k, \text{ pour } 1 \leq k \leq n \\ \beta_{k-n}, \text{ pour } 1+n \leq k \leq n+m \end{cases}.$$

Soit $\lambda > 0$, $\lambda\varphi_{(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i \left[C^p \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p - \|T(x_i) - T(y_i)\|^p\right] \in A$.

On a $A \cap B = \phi$, où B est le cône ouvert convexe des fonction continues < 0 sur $B_{X^\#}$, donc d'apré le théorème de H. Banach forme géométrique il existe une foreme lnéaire $\mu \in (C(B_{X^\#}))^*$, (mesure de Radon sur $B_{X^\#}$) qui séparé A et B i.e.,

$$\begin{cases} \langle \mu, \varphi \rangle \geq 0, \ \forall \varphi \in A \\ \langle \mu, \psi \rangle < 0, \ \forall \psi \in B. \end{cases}$$

On remarque que μ est positive ($\langle \mu, \varphi \rangle \geq 0$, pour tout $\varphi \geq 0$). Et par le Théorème de représentation de Riesz en trouve

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{B_{X^\#}} \varphi d\mu \geq 0, \ \forall \varphi \in A.$$

On suppose que $\mu(B_{X^\#}) = 1$ sinon on dévise sur $\mu(B_{X^\#})$.

Soient $x, y \in X$ et $\varphi_{(x,y)} \in A$ avec $\alpha = 1$, donc on a

$$\int\limits_{B_{X^\#}} \varphi_{(x,y)}(f)d\mu(f) \geq 0, \ \forall x, y \in X.$$

Alors

$$\int\limits_{B_{X^\#}} \left[C^p \left|f(x) - f(y)\right|^p - \left\|T(x) - T(y)\right\|^p\right] d\mu(f) \geq 0$$

$$\left\|T(x) - T(y)\right\|^p \leq \int\limits_{B_{X^\#}} C^p \left|f(x) - f(y)\right|^p d\mu(f).$$

$b \Rightarrow a)$ Soient $n \in N$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$. D'apré b on a

$$\left\|T(x_i) - T(y_i)\right\| \leq C \left(\int\limits_{B_{X^\#}} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p d\mu\left(f\right) \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x_i, y_i \in X.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\|T(x_i) - T(y_i)\right\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{B_{X^\#}} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p d\mu\left(f\right) \right) \\ &\leq C^p \left(\int\limits_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p d\mu\left(f\right) \right) \\ &\leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p . \int\limits_{B_{X^\#}} d\mu\left(f\right) \\ &= C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p . \end{aligned}$$

Donc T est Lipschitz p-sommant et $\pi_p^L\left(T\right) \leq C$. ■

Théorème 2.4.2 *(théorème d'inclusion) Soient X, Y deux espaces métriques et $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitz et $1 \leq p < q < +\infty$, alors $\pi_p^L(X, Y) \subset \pi_q^L(X, Y)$ et $\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T)$.*

Preuve. Soit $T \in \pi_p^L(X, Y)$. $p \leq q$, d'ou $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$, donc il existe $r \geq 1$ tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$ de théorème (2.4.1) on a $\left\|T(x) - T(y)\right\| \leq \pi_p^L(T) \left(\int_{B_{X^\#}} \left|f(x) - f(y)\right|^p .1^p d\mu\left(f\right) \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x, y \in X$.

On utilise l'inégalité de Hölder on trouve

$$\|T(x)-T(y)\| \leq \pi_p^L(T)\left(\int_{B_{X\#}}|f(x)-f(y)|^q .1^q d\mu\left(f\right)\right)^{\frac{1}{q}}.\left(\int_{B_{X\#}}1^r d\mu\left(f\right)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

D'ou $T \in \pi_q^L(X,Y)$ et $\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T)$. donc le preuve de théorème. ■

Chapitre 3

Quelques théorèmes sur les opérateurs Lipschitz p-sommants

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Soit* (X, d_X, e) *un espace métrique pointé et* Y *un espace de Banach. Soit* f *un élément de* $Lip_0(X, Y)$. *Sawashima définit l'adjoint de* f *par*

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp : Lip_0(Y) & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ g & \mapsto & f^\sharp(g) = g \circ f \end{array}$$

Définition 3.1.2 *(**L'espace** L_p)*

Soit $1 \leq p < +\infty$ *et* $\lambda > 1$, *l'espace de Banach* X *est un espace de* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *si pour tout sous espace* E *de* X *de dimention fini contient un espace de dimention fini* F *de* X *il existe un isomorphisme* $v : F \longrightarrow \ell_p^{\dim F}$ *qui verifie* $\|v\|.\|v^{-1}\| < \lambda$. *On dit que* X *est un espace de* $\mathcal{L}_p$ *si* X *est un espace de* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *pour tout* $\lambda > 1$.

Ce qui suit se base totalement sur l'article de B.ZHENG et D.CHEN (voir [ZC]).

3.2 Théorèmes sur les opérateurs Lipschitz p-sommants

Le but principal de ce section est de présenter le théorème d'extrapolation et le théorème de Kwapień dans le cas non linéaire.

Théorème 3.2.1 *(La version non linéaire du théorème d'extrapolation)*

Soit $1 < r < p < \infty$, *et* X *est un espace métrique tel que*

$$\pi_p^L(X, \ell_p) = \pi_r^L(X, \ell_p).$$

Alors pour tout espace de Banach Y,

$$\pi_p^L(X, Y) = \pi_1^L(X, Y).$$

Preuve. Nous avons preuvé que, quel que soit Y, il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in \pi_p^L(X, Y)$, on obtient $\pi_1^L(u) \leq C.\pi_p^L(u)$. Soit $K = B_{X\#}$ et $P(K)$ la collecte de toutes les mesures réguliéres de probabilité de Borel sur K. En prend $\mu \in P(K)$, soit j_μ la restriction de l'application canonique $C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ à X, définie par $j_\mu(x)(x^\sharp) = x^\sharp(x)$, $\forall x \in X$. En concequence $j_\mu \in \pi_p^L(X, L_p(\mu))$, et $\pi_p^L(j_\mu) \leq 1$. Puisque $\pi_p^L(X, \ell_p) = \pi_r^L(X, \ell_p)$, donc il existe $c > 0$ telle que $\pi_r^L(v) \leq c.\pi_p^L(v)$, pour tout $v \in \pi_p^L(X, \ell_p)$. Comme $L_p(\mu)$ est un espace de $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour tout $\lambda > 1$, donc pour chaque $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X, le sous espace de $L_p(\mu)$ généré par $\{j_\mu(x_1), j_\mu(x_2), ..., j_\mu(x_n)\}$ et$\{j_\mu(y_1), j_\mu(y_2), ..., j_\mu(y_n)\}$ contient un sous espace F de $L_p(\mu)$ et il existe un isomorphisme $T : F \longrightarrow \ell_p^{\dim F}$ telle que $\|T\|.\|T^{-1}\| < \lambda$.

D'où

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|j_\mu(x_i) - j_\mu(y_i)\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \|T^{-1}\| \left(\sum_{i=1}^n \|T(j_\mu(x_i)) - T(j_\mu(y_i))\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|T^{-1}\|.c.\pi_p^L(Tj_\mu). \sup_{x^\sharp \in B_{X\#}} \left(\sum_{i=1}^n |x^\sharp(x_i) - x^\sharp(y_i)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq c.\|T^{-1}\|.\|T\|.\pi_p^L(j_\mu). \sup_{x^\sharp \in B_{X\#}} \left(\sum_{i=1}^n |x^\sharp(x_i) - x^\sharp(y_i)|^r\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

donc $\pi_r^L(j_\mu) \leq c.\|T^{-1}\|.\|T\|.\pi_p^L(j_\mu) \leq c.\lambda$, pour tout $\lambda > 1$. Donc on obtient $\pi_r^L(j_\mu) \leq c$.

Par le Théorème (2.4.1) il existe $\hat{\mu} \in P(K)$ telle que

$$\begin{aligned}
\|j_\mu(x) - j_\mu(y)\|_{L_p(\mu)} &\leq c \left(\int_{B_{X\#}} |x^\sharp(x) - x^\sharp(y)|^r d\hat{\mu}(x^\sharp)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= c\|j_{\hat{\mu}}(x) - j_{\hat{\mu}}(y)\|_{L_r(\hat{\mu})}
\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in X$.

Fixons $u \in \pi_p^L(X,Y)$, donc par le théorème (2.4.1) il existe $\mu_0 \in P(K)$ telle que

$$\begin{aligned}
\|u(x)-u(y)\| &\leq \pi_p^L(u)\left(\int\limits_{B_{X\#}} |x^\sharp(x)-x^\sharp(y)|^p d\mu_0(x^\sharp)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p^L \|j_{\mu_0}(x)-j_{\mu_0}(y)\|_{L_p(\mu_0)}
\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in X$.

Maintenant il suffit de démontré que

$$\|j_{\mu_0}(x)-j_{\mu_0}(y)\|_{L_p(\mu_0)} \leq C\|j_\lambda(x)-j_\lambda(y)\|_{L_1(\lambda)}$$

pour tout $\lambda \in P(K)$ et pour toute constante C dépend seulement de X.

En commençant par μ_0, nous définissons $(\mu_n)_{n\geq 0}$.dans $P(K)$ sur la forme $\mu_{n+1} = \hat{\mu}_n$, $n \in \{0,1,2,...\}$. On pose $\lambda = \sum\limits_{n\geq 0} 2^{-n-1}\mu_n$. Donc $\lambda \in P(K)$ Puisque $1 < r < p$, on considère $0 < \theta < 1$ telle que $\frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{p}$, d'où $1 = r\theta + \frac{r(1-\theta)}{p}$

En utilise l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_r(\mu_n)} &= \left(\int\limits_{B_{X\#}} |j_{\mu_n}(x)(x^\sharp)-j_{\mu_n}(y)(x^\sharp)|^r d\mu_n(x^\sharp)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int\limits_{B_{X\#}} |j_{\mu_n}(x)(x^\sharp)-j_{\mu_n}(y)(x^\sharp)|^{r(1-\theta)+r\theta} d\mu_n(x^\sharp)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int\limits_{B_{X\#}} |j_{\mu_n}(x)(x^\sharp)-j_{\mu_n}(y)(x^\sharp)|^{r\theta(\frac{1}{r\theta})} d\mu_n(x^\sharp)\right)^{r\theta.\frac{1}{r}} \\
&\quad . \left(\int\limits_{B_{X\#}} |j_{\mu_n}(x)(x^\sharp)-j_{\mu_n}(y)(x^\sharp)|^{r(1-\theta)(\frac{p}{r(1-\theta)})} d\mu_n(x^\sharp)\right)^{\frac{r(1-\theta)}{p}.\frac{1}{r}} \\
&= \|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_1(\mu_n)}^{\theta} . \|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_p(\mu_n)}^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_p(\mu_n)} &\leq c\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\hat{\mu}_n}(x)-j_{\hat{\mu}_n}(y)\|_{L_r(\hat{\mu}_n)} \\
&= c\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_r(\mu_{n+1})} \\
&\leq c\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|^{\theta}_{L_1(\mu_{n+1})} \\
&\quad .\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|^{1-\theta}_{L_p(\mu_{n+1})} \\
&\leq c\left(\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \\
&\quad .\left(\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_p(\mu_{n+1})}\right)^{1-\theta} \\
&\leq c\left(\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \\
&\quad .\left(2.\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_p(\mu_{n+1})}\right)^{1-\theta}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_p(\mu_n)} &\leq c^{1/\theta}.2^{\frac{1-\theta}{\theta}}.\left(\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right) \\
&\leq c^{1/\theta}.2^{\frac{1-\theta}{\theta}}.2.\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1}}(x)-j_{\mu_{n+1}}(y)\|_{L_1(\mu_{n+1})}.
\end{aligned}$$

On a

$$\lambda=\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\mu_n, \text{ donc } d\lambda=\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}d\mu_n$$

d'où

$$\|j_\lambda(x)-j_\lambda(y)\|_{L_1(\lambda)}=\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_1(\mu_n)}.$$

Alors

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n}(x)-j_{\mu_n}(y)\|_{L_p(\mu_n)} \leq (2c)^{\frac{1}{\theta}}\|j_\lambda(x)-j_\lambda(y)\|_{L_1(\lambda)}.$$

En particuliéer,

$$2^{-1}\|j_{\mu_0}(x)-j_{\mu_0}(y)\|_{L_p(\mu_0)} \leq (2c)^{\frac{1}{\theta}}\|j_\lambda(x)-j_\lambda(y)\|_{L_1(\lambda)}.$$

D'où $u\in\pi_1^L(X,Y)$. ■

Théorème 3.2.2 *(**B.ZHENG et D.CHEN**)*

Soit X un espace métique pointé et H un espace de Hilbert. Si $T : X \to H$ est un opérateur Lipschitzien et $T(0) = 0$ telle que $T^{\#}\backslash_{H^*}$ est q-sommant pour tout $1 \leq q < +\infty$, alors T est Lipschitz 1-sommant et $\pi_1^L(T) \leq A_1^{-1}.B_q.\pi_q(T^{\#}\backslash_{H^*})$, où A_1 et B_q sont les constantes de Khinchin.

Preuve. On divise la preuve en deux étapes.

Première étape: On considère, $T \in Lip(X, \ell_2^n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq m} \subset X$. On a $T(x_i) - T(y_i) = \sum\limits_{k\leq n}\langle T(x_i) - T(y_i), e_k\rangle e_k$ et $\|T(x_i) - T(y_i)\| = (\sum\limits_{k\leq n} \mid \langle T(x_i) - T(y_i), e_k\rangle \mid^2)^{\frac{1}{2}}$ ($(e_n)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de ℓ_2^n))

En utilisant l'inégalité de Kinchin on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leq m}\|T(x_i) - T(y_i)\| &= \sum_{i\leq m}(\sum_{k\leq n} \mid \langle T(x_i) - T(y_i), e_k\rangle \mid^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i\leq m} A_1^{-1}\int_0^1 \mid \sum_{k\leq n}\langle T(x_i) - T(y_i), e_k\rangle r_k(t) \mid dt \\
&= \sum_{i\leq m} A_1^{-1}\int_0^1 \mid \langle T(x_i), \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k\rangle - \langle T(y_i), \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k\rangle \mid dt \\
&= \sum_{i\leq m} A_1^{-1}\int_0^1 \mid \langle x_i, T^\sharp(\sum_{k\leq n} r_k(t)e_k)\rangle - \langle y_i, T^\sharp(\sum_{k\leq n} r_k(t)e_k)\rangle \mid dt \\
&= \sum_{i\leq m} A_1^{-1}\int_0^1 \mid \langle x_i, \sum_{k\leq n} r_k(t)T^\sharp(e_k)\rangle - \langle y_i, \sum_{k\leq n} r_k(t)T^\sharp(e_k)\rangle \mid dt \\
&\leq A_1^{-1}\sum_{i\leq m}(\int_0^1 \|r_k(t)T^\sharp(e_k)\|\rangle \sup_{f\in B_{X^\#}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid dt \\
&\leq A_1^{-1}\int_0^1 \|r_k(t)T^\sharp(e_k)\| dt \sup_{f\in B_{X^\#}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid .
\end{aligned}$$

On a: $T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*} :(\ell_2^n)^* \to X^\sharp$ linéaire et q-sommant, donc par le Théorème de domination de Pietsch il existe une mesure de probabilité régulière μ sur $K = B_{\ell_2^n}$ tels que pour tout

$x^* \in (\ell_2^n)^*$, on a

$$\|T^{\#}(x^*)\| \leq \pi_q(T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*})(\int\limits_{B_{\ell_2^n}} \mid \langle x, x^* \rangle \mid^{q} d\mu(x))^{\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\int\limits_0^1 \|r_k(t)T^{\sharp}(e_k)\|^q dt)^{\frac{1}{q}} &\leq \pi_q(T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*}) \left[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{B_{\ell_2^n}} \mid \langle x, \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k \rangle \mid^q d\mu(x)\right) dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \pi_q(T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*}) \left[\int\limits_{B_{\ell_2^n}} \left(\int\limits_0^1 \mid \langle x, \sum_{k\leq n} r_k(t)e_k \rangle \mid^q dt\right) d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_q(T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*}) \left[\int\limits_{B_{\ell_2^n}} B_q^q \left(\sum_{k\leq n} \mid \langle x, e_k \rangle \mid^2\right)^{\frac{q}{2}} d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_q(T^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*}) B_q.
\end{aligned}$$

Deuxième étape. Fixons $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq m}$ dans X. On identifier le span de $T(x_i)$ et $T(y_i)$ à ℓ_2^n, Soit $P \in \mathcal{L}(H; span\,\{T(x_i), T(y_i),\ 1 \leq i \leq m\})$ le pojection orthogonal sur le span. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leq m} \|T(x_i) - T(y_i)\| &= \sum_{i\leq m} \|P(T(x_i)) - P(T(y_i))\| \\
&\leq A_1^{-1} \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid \int\limits_0^1 \sum_{k\leq n} \|r_k(t)(PT)^{\sharp}(e_k)\| dt) \\
&\leq A_1^{-1} \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid (|\int\limits_0^1 \| \sum_{k\leq n} r_k(t)(PT)^{\sharp}(e_k)\|^q dt)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq A_1^{-1} \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid \pi_q((PT)^{\#}\backslash_{(\ell_2^n)^*}) B_q \\
&= A_1^{-1} \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid \pi_q((T^{\sharp}_{\backslash H^*})(P\backslash^{\#}_{(\ell_2^n)^*})) B_q \\
&\leq A_1^{-1} \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid \pi_q(T^{\sharp}_{\backslash H^*})\|P^{\#}\| B_q \\
&\leq A_1^{-1} B_q \pi_q(T^{\#}\backslash_{H^*}) \sup_{f\in B_{X^{\#}}} \sum_{i\leq m} \mid f(x_i) - f(y_i) \mid
\end{aligned}$$

Donc T est Lipschitz 1-sommant et $\pi_1^L(T) \leq A_1^{-1}.B_q.\pi_q(T^{\#}\backslash_{H^*})$. ■

Bibliographie

[DJT] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge Studies in Adv. Math., Vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[FJ] J. D. Farmer and W. B. Johnson, Lipschitz p-summing operators, Proc. Amer. Math. Soc. **137**(9) (2009), 2989–2995.

[ZC] B. Zheng and D. Chen, Remarks on Lipschitz p-summing operators, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2891–2898