

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Mathématiques et de L'Informatique

Département de Mathématiques



Numéro d'ordre :

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Numérique

Par

Bendjabri Ammar

Thème

La régularisation de Tikhonov pour Les Problèmes Mal Posés

Soutenue publiquement le : 28/10/2021, devant le jury composé de :

BRAHIM BOUDRAH	Prof.	Université de M'sila	Président
MOSTEFA NADIR	Prof.	Université de M'sila	Rapporteur
BACHIR GAGUI	M.C.A.	Université de M'sila	Examineur
SALAH ALLAOUI	Prof.	Université de Laghouat	Examineur
AMAR BELACEL	M.C.A.	Université de Laghouat	Examineur
MESSAOUD GUESBA	M.C.A.	Université de L'oued souf	Examineur

Année Universitaire : 2020 / 2021

Dédicace

*Je dédie ce travail à ma femme kheira mes
chers filles meriem,*

*fatima et hadjer et mes chers fils mohamed,
taher, aissa, majid, et abdessalam*

*Je dédie se travail à monsieur l'encadreur le
professeur mostefa nadir et monsieur le
professeur gagui bachir enseignant à
l'université de Msila et mes chers amies le
docteur aissa yousfi, sahel djamel et bellacel
amar*

enseignants à l'université de laghouat ammar teldji

Remerciements

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de ma thèse Monsieur le professeur **Mostefa Nadir**, Qui a fait un grand effort pour réaliser et compléter cette thèse, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement.

Je tiens également à le remercier pour sa gentillesse, sa patience, sa grande disponibilité et ses encouragements tout longs de ce travail, et je le prie de croire en ma profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ma thèse.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur le professeur **Boudrah Brahim** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens à remercier aussi Monsieur le docteur **Gagui Bachir** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le professeur **Allaoui Salah-eddine** et à Monsieur le docteur **Belacel Amar** de l'Université laghouat, qui m'ont Honoré en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Guesba Messaoud**, docteur de l'université de l'oued, pour sa participation au jury de soutenance.

J'adresse aussi mes remerciements les plus vifs à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à élaborer ce travail dans les meilleures conditions.

Enfin, j'aurai une pensée particulière pour ma famille pour son soutien et les encouragements dont elle m'a fait bénéficier pendant cette période.

Sommaire

	Introduction générale	1
	Chapitre I : Généralités et théories sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert	
1.1	Notion d'opérateur adjoint	4
	introduction	4
1.2	Généralités sur les opérateurs	5
1.2.1	Définitions	5
1.2.2	Composé de plusieurs opérateurs	6
1.2.3	Inverse d'un Opérateur	6
1.2.4	Adjoint d'un Opérateur	8
1.2.5	Exemple d'opérateurs adjoints	9
1.3	Les Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert	11
1.3.1	Applications linéaires continues entre espaces de Hilbert	12
1.4	Les Opérateurs Compacts	13
1.4.1	Introduction	13
1.4.2	définitions	13
1.4.3	Opérateurs linéaires compacts	14
1.4.4	Ensembles relativement compacts	14
1.5	Opérateurs Projections Orthogonales	21
	Chapitre II : Problèmes de moindres carrés	
2.1	Introduction	23
2.2	Histoire	23
2.3	Définition des problèmes mal posés	24
2.4	Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés	24
2.5	Illustration géométrique des moindres carrés	28
2.6	Compléments : projections et pseudo-inverse	32
2.6.1	Décomposition en valeurs singulières de matrices	32
2.7	Applications de la SVD aux problèmes de moindres carrés	38
	Chapitre III : la Régularisation de Tikhonov	
3.1	Introduction	40
3.2	Problème	40
3.3	Régularisation	40
3.4	Définition des problèmes mal posés	41
3.4.5	Le problème de moindres carrées	41
3.5	La régularisation de Tikhonov pour les problèmes mal posés	43
3.5.1	La méthode de Tikhonov	43
3.6	Dixième méthode	47
3.7	Etude spécifique de l'équation mal posée	56
	Chapitre VI : La solution numérique de l'équation intégrale de Fredholm du premier type	
4.1	Introduction	59
4.2	Méthode de Lavrentiev	60
4.3	Méthode de régularisation de Tikhonov	60
4.4	Méthode Nyström	61
4.5	Exemples explicatifs	63
4.6	conclusion	66
	Conclusion générale	68
	Références bibliographiques	69

Introduction générale

De nombreux problèmes en science et en ingénierie nécessitent la détermination de l'entrée inconnue d'un système linéaire à partir d'une sortie connue, généralement corrompue. Ces problèmes, appelés problèmes inverses, sont souvent modélisés par des équations intégrales de **Fredholm** du premier type à noyau lisse. La discrétisation de telles équations intégrales donne lieu à des systèmes linéaires d'équations

$$A\varphi = f \dots \dots (1)$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \varphi \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^m$$

Avec la matrice A de position mal déterminée. Ces matrices sont gravement mal conditionnées et peuvent être singulières. Le vecteur de droite f dans (1) représente la sortie disponible du système linéaire. La donnée que nous notons $f \in \mathbb{R}^m$, peut par exemple provenir des erreurs de mesure. Les systèmes des équations linéaires avec une matrice de position mal déterminée, comme (1), sont souvent appelés problèmes linéaires discrets mal posés.

De nombreuses méthodes de résolution de problèmes linéaires discrets mal posés de petite à moyenne taille calculent la décomposition en valeur singulière de A ; voir, par exemple, Hansen [18] pour des plusieurs discussions de ces méthodes. Dans la présente étude, nous ne supposons que la matrice A est si grande qu'elle rend le calcul de sa décomposition en valeur singulière indésirable ou irréalisable.

Soit $f \in \mathbb{R}^m$ la sortie sans erreur inconnue du système linéaire. Nous aimerions calculer la solution des moindres carrés de la norme Euclidienne $\|\varphi\|$ minimale du système linéaire cohérent des équations sans erreur.

Ainsi, notre tâche de calcul est conçue de déterminer une approximation de la solution du système linéaire indisponible (1) en calculant une solution approximative du système linéaire disponible.

Une solution simple de (1) généralement ne donne pas une approximation significative de φ en raison de l'erreur

$$e = f - f_\delta \dots \dots (2)$$

Avec f_δ partie approximative de f appartient à \mathbb{R}^m

Dans la partie droite de f et le mauvais conditionnement sévère de la matrice A . Pour éviter cette difficulté, on remplace typiquement le système linéaire (1) par un système voisin moins sensible à l'erreur e dans f et considère de calculer la solution de ce dernier système une approximation de φ . Ce remplacement est connu sous le nom de régularisation.

L'une des régularisations les plus populaires est due à Tikhonov, dans sa forme la plus simple. La régularisation de Tikhonov remplace (1) par le système linéaire d'équations.

$$(A^T A + \alpha I)\varphi_\alpha = A^T f \dots\dots\dots (3)$$

Où, nous exigeons que le paramètre de régularisation α soit positif et fini. La valeur de α détermine la sensibilité de la solution

$$\varphi_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T f \dots\dots\dots (4)$$

Dans ce travail, nous présentons les équations de **Fredholm** du premier type et les problèmes particulières associés à leur solution. Cela conduit à une discussion générale des problèmes mal posés pour les équations des opérateurs du premier type. Enfin, le fondement théorique des opérateurs pour la suite est posé par une discussion des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert, la théorie spectrale, le théorème de Picard et les inverses généralisés.

Par une équation intégrale de **Fredholm** du premier type, on entend une équation de la forme:

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)\dots\dots\dots (5)$$

Où, f est une fonction donnée (généralement appelée les « données »), $k(x, t)$ est une fonction donnée (le noyau de l'équation) et la solution φ est une fonction inconnue à laquelle on cherche. Plusieurs observations concernant cette équation viennent immédiatement à l'esprit. La première est que la fonction f hérite d'une partie de la régularité du noyau k et qu'une solution peut donc ne pas exister si f se comporte trop grossièrement. Par exemple, si le noyau k est continu et φ est intégrable, alors il est facile de voir que la fonction f définie par l'équation (1.5) est également continue et si la fonction donnée f n'est pas continue, et puisque que le noyau est continu, alors l'équation (1.5) ne peut pas avoir aucune solution intégrable.

Un autre point à considérer est le caractère unique des solutions. Par exemple, si

$k(x, t) = x \sin t$, alors la fonction $\varphi(x) = 1/2$ est une solution de :

$$\int_0^\pi k(x, t)\varphi(t)dt = x \dots\dots\dots (6)$$

L'objectif de ce travail est de présenter des nouveaux résultats liés entre les résultats et les solutions de l'équation originale $A\varphi = f$ et l'équation régularisée avec la méthode de **Tikhonov** $(A + \alpha I)\varphi_\alpha = f$

Le contenu de cette thèse composé de quatre chapitres :
 Dans Le premier chapitre on donne des rappels sur les outils mathématiques nécessaires pour l'élaboration de ce travail, on commence par les propriétés des opérateurs bornés et les opérateurs compacts dans l'espace de **Hilbert**

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse au travail classique à savoir la décomposition en valeurs singulières qui est un outil numérique qui nous montre comment on pouvait effectués des calculs de façon stable, et aussi comment on introduit dans le travail principal de cette

thèse, la méthode des moindres carrées qui permet de minimiser les erreurs expérimentales en ajoutant de l'information f dans le processus de mesure.

Dans le troisième chapitre on donne une solution par la méthode de Tikhonov pour les problèmes mal posés et on montre la nouvelle relation $\|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\varphi - f\| + o(\alpha)$ et on étudie spécifiquement l'équation $A\varphi = f$ avec $\|f\| \leq \|A\|$

Dans le quatrième chapitre on donne une solution numérique de l'équation intégrale de **Fredholm** de première espèce où on ajoute le terme $\alpha\varphi_\alpha$ au vecteur $A\varphi_\alpha$ avec α positif et petite et la dernière équation admet une solution stable et converge vers la solution exacte de l'équation originale $A\varphi = f$ lorsque α tend vers zéro.

Chapitre I : généralités et théories sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert

1.1 Notions d'opérateur adjoint

Introduction

Le concept mathématique de l'espace de Hilbert réel ou complexe, nommé d'après David Hilbert, étend les méthodes de l'algèbre linéaire en généralisant les notions d'espace euclidien (comme le plan euclidien ou l'espace usuel de dimension 3) et d'espace hermitien à des espaces de dimension quelconque (finie ou infinie) [01].

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien ou hermitien, qui permet de mesurer des longueurs et des angles et de définir une orthogonalité. De plus, un espace de Hilbert est complet, ce qui permet d'y appliquer les techniques de l'analyse mathématique.

Des espaces de Hilbert apparaissent fréquemment en mathématiques et en physique, essentiellement en tant qu'espaces fonctionnels de dimension infinie. Les premiers espaces de Hilbert ont été étudiés sous cet aspect pendant la première décennie du XX^e siècle par David Hilbert, Erhard Schmidt et Frigyes Riesz. Ils sont des outils indispensables dans les théories des équations aux dérivées partielles, mécanique quantique, analyse de Fourier (ce qui inclut des applications au traitement du signal et le transfert thermique) et la théorie ergodique qui forme le fondement mathématique de la thermodynamique. John von Neumann forgea l'expression espace de Hilbert pour désigner le concept abstrait qui sous-tend nombre de ces applications. Les succès des méthodes apportées par les espaces de Hilbert menèrent à une époque très prolifique pour l'analyse fonctionnelle [02]. En plus des espaces euclidiens classiques, les exemples les plus courants d'espaces de Hilbert sont les espaces de fonctions de carré intégrable, les espaces de Sobolev qui sont constitués de fonctions généralisées, et les espaces de Hardy de fonctions holomorphes.

L'intuition géométrique intervient dans de nombreux aspects de la théorie des espaces de Hilbert. Ces espaces possèdent des théorèmes analogues au théorème de Pythagore et à la règle du parallélogramme. En mathématiques appliquées,

les projections orthogonales sur un sous-espace (ce qui correspond à aplatir l'espace de quelques dimensions) jouent un rôle important dans des problèmes d'optimisation entre autres aspects de la théorie. Un élément d'un espace de Hilbert peut être défini de manière unique par ses coordonnées relativement à une base de Hilbert [03], de façon analogue aux coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée du plan. Quand cet ensemble d'axes est dénombrable, l'espace de Hilbert peut être vu comme un ensemble de suites de carré sommable. Les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert sont semblables à des objets concrets : dans les « bons » cas, ce sont simplement des transformations qui étirent l'espace suivant différents coefficients dans des directions deux à deux perpendiculaires [04], en un sens qui est précisé par l'étude de leur spectre.

1.2 Généralités sur les opérateurs

1.2.1 Définitions

Soient X et Y deux espaces de Hilbert sur \mathbb{C}

Définition 1.1 : Toute application linéaire $A : X \rightarrow Y$ s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $L(X, Y)$ des applications linéaires de X dans Y est l'espace des opérateurs de X dans Y [05]

Notations : 1) Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $\varphi \in X$ par l'opérateur continu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sera généralement notée $A\varphi$ mais la notation traditionnelle $A(\varphi)$ sera parfois utilisée également.

2) La norme de A est le nombre

$$\|A\| = \sup_{\varphi \in X} \|A\varphi\| \dots\dots(1.1)$$

C'est la norme usuelle assujettie aux normes de X et Y

3) On notera $\text{Ker}A$ le noyau de l'opérateur A i.e. $\text{Ker}A = \{\varphi \in X; A\varphi = 0\}$.

4) $\text{Im}A$ désignera le sous-espace de Y image de X par A . On le notera aussi $A(X)$

Remarque : $\text{Ker}A$ (resp. $\text{Im}A$) sont des sous-espace vectoriel de X (resp. de Y). On notera que $\text{Ker}A$ est toujours un sous-espace fermé de X mais $\text{Im}A$ n'est pas forcément fermé dans Y .

1.2.2 Composé de plusieurs opérateurs

Soient X, Y et G des espaces de Hilbert et $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(Y, G)$ des opérateurs. Considérons l'opérateur composé $A_2 \circ A_1 \in \mathcal{L}(X, G)$.

Proposition : On a $\|A_2 \circ A_1\| \leq \|A_2\| \cdot \|A_1\|$

Remarque : Dans le résultat précédent les normes d'opérateur sont toujours celles définies en (1) c'est-à-dire les normes assujetties aux normes des espaces de Hilbert concernés par les opérateurs.

Application : Soit $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un opérateur de l'espace de Hilbert X dans lui-même. On définit les puissances de l'opérateur A comme étant les opérateurs de X dans X définis de la manière suivante :

$$A^0 = I \text{ (l'opérateur identité)}, A^1 = A, A^2 = A \circ A, \dots, A^n = A \circ A^{n-1} = A^{n-1} \circ A \text{ (} n \geq 1 \text{)}.$$

Première corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \|A^n\| \leq \|A\|^n$

Deuxième corollaire : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge dans $\mathcal{L}(X, X)$. Sa somme est un opérateur de X dans X appelé exponentielle de l'opérateur A et noté e^A ou $\exp A$. Sa norme vérifie.

$$\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|) \dots \dots (1.2)$$

1.2.3 Inverse d'un opérateur

Soient X et Y des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur.

Définition: On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que

$$BA = I_Y, \quad \text{et} \quad AB = I_X, \dots \dots (1.3)$$

Où I_X (resp. I_Y) est l'opérateur identité de X (resp. de Y). Un tel opérateur

B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Cas particulier où $X = Y$, Soit $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Dans le cas où X est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de A à plusieurs aspects équivalents. Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant :

Théorème: Si $\dim X < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible
- 2) A est injectif
- 3) A est surjectif
- 4) A admet un inverse à droite (i.e. il existe $B_1 \in \mathcal{L}(X, X)$ tel que $A B_1 = I_X$)
- 5) A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $B_2 \in \mathcal{L}(X, X)$ tel que $B_2 A = I_Y$)

Remarque: si $\dim X = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies :

Exemple

Soit $X = \ell^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme $\|\varphi\|_2 = (\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi_n|^2)^{1/2}$ tel que $\varphi = (\varphi_n)_{n \geq 1}$. Considérons l'application

$A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$

Définie pour tout $\varphi = (\varphi_n)_{n \geq 1}$ par $A\varphi = \psi = (\psi_n)_{n \geq 1}$ où

$$\psi_1 = 0, \psi_2 = \varphi_1, \dots, \psi_n = \varphi_{n-1}, \dots (n \geq 2).$$

Autrement dit $A\varphi$ est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite φ mais décalés d'un rang. L'application A est linéaire de ℓ^2 dans lui-même et c'est une isométrie puisque $\|A\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$.

Donc $A \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$. On appelle A l'opérateur de décalage ℓ^2 dans ℓ^2 . On voit alors facilement que

- 1) A est injective (car isométrique)
- 2) A n'est pas surjective

3) A admet un inverse à gauche $B : \varphi = (\varphi_n)_{n \geq 1} \rightarrow B\varphi = (\varphi_{n+1})_{n \geq 1}$ (c'est l'opérateur qui «efface» la première coordonnée donc on a clairement $BA = I_{\ell^2}$).

4) L'opérateur B n'est pas inverse à droite de l'opérateur A .

Le résultat simple valable quelle que soit la dimension de X est le suivant :

Théorème : Si $A \in \mathcal{L}(X, X)$ est tel que $\|A\| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(X, X)$ l'opérateur $I - A$ est inversible et

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \dots\dots(1.4)$$

Première remarque : Le résultat précédent est vrai aussi si X est remplacé par un espace de Banach quelconque.

Deuxième remarque: Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante : Si $A \in \mathcal{L}(X, X)$ est tel que $\|I - A\| < 1$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - A)^n$

1.2.4 l'adjoint d'un opérateur :

Soient X et Y des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire.

Théorème : Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors il existe un unique opérateur

$A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que

$$\forall \varphi \in X, \forall \psi \in Y, \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle \dots\dots(1.5)$$

L'opérateur A^* s'appelle l'adjoint de A .

Définition: Si $A \in \mathcal{L}(X, X)$ est tel que $A = A^*$, on dit que l'opérateur A est auto adjoint (ou hermitien).

Théorème (Propriétés de l'adjoint) :

1) Pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on a

$$(A^*)^* = A \quad \text{et} \quad \|A^*\| = \|A\| \dots\dots\dots(1.6)$$

2) Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors

$$(BA)^* = A^* B^* \dots\dots\dots(1.7)$$

4) Pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^* \dots \dots \dots (1.8)$$

1.2.5 Exemples d'opérateurs adjoints

Exemple 1 : Soit $X = \mathcal{L}^2([a, b])$ ($a < b$) l'espace des classes de fonctions

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt$$

et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue fixée. L'application A qui à la fonction $\varphi \in X$ fait correspondre la fonction $A\varphi$ définie sur $[a, b]$ par

$$(A\varphi)(t) = f(t) \varphi(t)$$

est un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, X)$ appelé opérateur de multiplication par f . L'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(X, X)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction \bar{f} .

Exemple 2 : Soit $k : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($c < d, a < b$) une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'application $K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([c, d])$ telle que pour tout $\varphi \in L^2([a, b])$, $K\varphi$ est la fonction définie par :

$$\forall t \in [c, d], (k\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \dots \dots \dots (1.9)$$

k est un opérateur de $L^2([a, b])$ dans $L^2([c, d])$ qu'on appelle opérateur intégral de noyau $k(x, t)$. On abrège souvent en disant que k est un opérateur à noyau (égal à k).

L'opérateur adjoint k^* est aussi un opérateur à noyau. C'est l'opérateur intégral de $L^2([c, d])$ dans $L^2([a, b])$ dont le noyau est la fonction $(t, x) \rightarrow \overline{k(t, x)}$ de $[a, b] \times [c, d]$ dans \mathbb{C} (attention les intervalles sont maintenant dans l'ordre inverse !)

i.e. pour tout $\psi \in L^2([c, d])$, $K^*\psi \in L^2([a, b])$ est la fonction définie par

$$\forall t \in [a, b], (k^*\psi)(t) = \int_a^b \overline{k(x, t)} \psi(x) dx \dots \dots \dots (1.10)$$

Dans le cas particulier où $[a, b] = [c, d]$, l'opérateur $K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ est auto adjoint si le noyau k satisfait la condition de symétrie hermitienne

$$\forall (t, x) \in [a, b]^2, k(t, x) = \overline{k(x, t)} \dots \dots \dots (1.11)$$

Les opérateurs autoadjoints ont des propriétés particulièrement importantes que nous allons maintenant examiner. Soit X un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un opérateur.

Théorème (Norme d'un opérateur autoadjoint) : Si A est autoadjoint (i.e. $A = A^*$), alors.

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} | \langle A\varphi, \varphi \rangle | \dots\dots\dots(1.12)$$

Lemme: Soit $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un opérateur et soit V un sous-espace vectoriel fermé de X invariant par A (i.e. $\forall \varphi \in V, A\varphi \in V$). Alors le sous-espace V^\perp est invariant par l'adjoint A^* .

Matrice d'un opérateur dans une base hilbertienne

Soit X un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de X . Soit A un opérateur de X dans lui-même. Pour tout $j \geq 1$, on peut écrire.

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Ae_j, e_i \rangle e_i \dots\dots\dots(1.13)$$

Nous allons voir que les coefficients $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$ ($(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$) déterminent entièrement l'opérateur A :

Pour tout $x \in X$, posons $x_j = \langle x, e_j \rangle$. on a alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j e_j$ et

$$Ax = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Ae_j \dots\dots\dots(1.14)$$

car l'opérateur A est continu. D'autre part, la décomposition de Ax sur la base hilbertienne (e_n) donne

$$Ax = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Ax, e_i \rangle e_i \dots\dots\dots(1.15)$$

Mais d'après (1.15) et grâce à la continuité du produit scalaire, on a

$$\langle Ax, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j a_{ij} \dots\dots\dots(1.16)$$

D'après (1.16), on a

$$Ax = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} x_j a_{ij} \right) e_i \dots\dots\dots(1.17)$$

La formule (1.17) montre alors que le i -ième coefficient (de Fourier) de Ax sur la base hilbertienne (e_n) , s'obtient comme en dimension finie en faisant le « produit

» de la i -ième ligne de la matrice (a_{ij}) par la colonne des coefficients de Fourier de φ .

Définition : La matrice $B = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ à une infinité de lignes et de colonnes, est appelée matrice de l'opérateur A dans la base hilbertienne (e_n) .

On notera que puisque $a_{ij} = \langle A e_j, e_i \rangle$, la j -ième colonne de la matrice B est constituée des coefficients du vecteur $A e_j$ comme en dimension finie.

Remarque : Nous ne développerons pas le calcul matriciel en dimension infinie car il présente certaines difficultés techniques liées essentiellement à des problèmes de convergence de séries.

La question qui se pose est Si $B = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est la matrice d'un opérateur A dans une base hilbertienne de X , quelle est la matrice de l'opérateur adjoint A^* ?

La matrice de l'opérateur A^* est la matrice transposée A^t .

1.3 Les Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

On a vu dans d'autres travaux au cours de notre recherche bibliographique l'essentiel des propriétés des espaces de Hilbert, en particulier l'existence de base orthonormée pour tout espace de Hilbert séparable. Dans ce chapitre, on va généraliser la notion de base hilbertienne au cas non séparable. On introduira aussi dans ce chapitre les principales classes d'opérateurs bornés entre espaces de Hilbert.

1.3.1 Applications linéaires continues entre des espaces de Hilbert

On commence avec la notion essentielle d'application linéaire adjointe associée à une application linéaire continue A entre deux espaces de Hilbert ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert seront ensuite définies au moyen de cette notion.

1.3.2 Proposition

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$; il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que pour tout $\varphi \in X$ et tout $\psi \in Y$ on a :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle.$$

On a de plus $\|A^*\| = \|A\|$.

Démonstration : Pour tout $\psi \in Y$, l'application $\varphi \rightarrow \langle A\varphi, \psi \rangle$ est linéaire et continue.

Il existe donc un unique élément $A^*(\psi) \in X$ tel que pour tout $\varphi \in X$ on ait $\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$. On vérifie facilement que $A^*(\psi) + \lambda A^*(z)$ vérifie la propriété caractéristique de $A^*(\psi + \lambda z)$, pour tous $\psi, z \in Y$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, d'où on déduit que A^* est linéaire. On a, par définition de $\|A\|$

$$\begin{aligned} \|A^*\| &= \sup\{\|A^*(\psi)\| : \psi \in B_Y\} = \sup\{\langle \varphi, A^*(\psi) \rangle : \varphi \in B_X, \psi \in B_Y\} \\ &= \sup\{\langle A(\varphi), \psi \rangle : \varphi \in B_X, \psi \in B_X\} = \|A\|. \end{aligned}$$

1.3.3 Définition

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$; l'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que pour tout $\varphi \in X$ et tout $\psi \in Y$ on ait $\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$ est appelée *adjointe* de A .

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

1.3.4 Proposition

Soient X et Y deux espaces de Hilbert; l'application $A \rightarrow A^*$ est anti-linéaire et isométrique de $\mathcal{L}(X, Y)$ sur $\mathcal{L}(Y, X)$; pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on a $(A^*)^* = A$ et $\|A^*A\| = \|A\|^2$ pour tout espace de Hilbert, pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ et pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on a $(A + B)^* = B^* + A^*$.

Démonstration : Montrons que $\|A^*A\| = \|A\|^2$. On a $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$. de plus, pour tout $\varphi \in X$ tel que $\|\varphi\| \leq 1$ on a.

$$\|A\varphi\|^2 = \langle A\varphi, A\varphi \rangle = \langle \varphi, (A^*A)\varphi \rangle \leq \|A^*A\| \|\varphi\|^2$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$

1.4 Les Opérateurs Compacts

1.4.1 Introduction

En mathématiques, et plus précisément en analyse fonctionnelle, un opérateur compact est une application continue entre deux espaces vectoriels topologiques X et Y envoyant les parties bornées de X sur les

parties relativement compactes de Y . Les applications linéaires compactes généralisent les applications linéaires continues de rang fini.

La théorie est particulièrement intéressante pour les espaces vectoriels normés ou les espaces de Banach. En particulier, dans un espace de Banach, l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la topologie forte. Mieux, dans un espace de Hilbert, un opérateur compact est limite d'opérateurs bornés de rangs finis.

Les premiers opérateurs compacts sont apparus avec les équations intégrales et l'étude des espaces fonctionnels. La résolution formelle d'équations intégrales simples fait apparaître un opérateur à noyau dont la compacité tient à des propriétés d'équi-continuité. À travers ce problème est apparue une autre classe importante d'opérateurs, les opérateurs de Fredholm. La perturbation par des opérateurs compacts préserve la propriété d'être de Fredholm et l'indice de Fredholm : c'est le théorème de stabilité de l'indice.

1.4.2 Définition

Un opérateur A de X dans Y est dit compact lorsque A est continu et que toute partie bornée de X est envoyée sur une partie relativement compacte de Y . (Lorsque A est linéaire, la seconde condition suffit pour qu'il soit borné, donc continu si de plus X est un espace vectoriel normé.)

L'ensemble $K(X, Y)$ des opérateurs compacts de X dans Y forme donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$. En outre, le composé d'un opérateur continu et d'un opérateur compact est un opérateur compact.

Si la topologie de X est définie par une norme, les parties bornées de X sont exactement celles incluses dans une boule. Sous cette condition, un opérateur A est compact si et seulement s'il envoie la boule unité de X sur une partie relativement compacte de Y . De manière équivalente, on demande que pour toute suite bornée (φ_n) de X , la suite $(A\varphi_n)$ admette une valeur d'adhérence.

1.4.3 Opérateurs linéaires compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie toute ensemble borné G dans X à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans Y , Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

1.4.4 Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset X$ est relativement compact si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{\varphi_{n(k)}\}$ qui converge dans Y .

Théorème (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de X , la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans Y .

1.4.5 Démonstration

Il suffit d'appliquer les définitions appropriées d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.

1.4.6 Théorème

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

1.4.7 Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de X et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de Y , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x), \text{ avec } \varphi_n \in X, n \in \mathbb{N}.$$

A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $A_1\varphi_n$ et de $A_2\varphi_n$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc A est compact.

1.4.8 Théorème

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

1.4.9 Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de X , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact. D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact.

1.4.10 Théorème

Soit X un espace normé et Y un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors A est compact

1.4.11 Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de X , l'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente ; soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que, $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente, car A_2 est compact, soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.

Remarquons que, la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour converge.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$, on détermine les suites $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}, \dots$. Il est à remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour $(k = 1, 2, \dots, p)$.

Comme l'espace Y est complet, par la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite Cauchy, alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$; $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$

Ensuite choisissons N tel que, pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a

$$\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3M} \text{ car la suite } \{A_n\varphi_n^p\} \text{ est convergente.}$$

Dans ces conditions, on aura pour tout p et q suffisamment grands

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon$$

1.4.12 Théorème

Soit A un opérateur borné de X dans Y , à image $A(X)$ de dimension finie. Alors A est compact.

1.4.13 Démonstration

En effet, car l'opérateur A transformé tous ensemble borné G de X à un ensemble borné $A(G)$ dans un espace de dimension finie $A(X)$ ce qui implique que $A(G)$ est pré-compact.

1.4.14 Lemme

Soit G un sous espace fermé d'un espace normé X tel que, $G \neq X$, alors s'il existe un élément $\varphi \in X$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\emptyset \in G$, on a

$$\|\varphi - \emptyset\| \geq \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

1.4.16 Démonstration

En effet, soit f un élément de X tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\emptyset \in G} \|f - \emptyset\| = \beta > 0$$

Choisissons un élément $\psi \in G$ tel que

$$\beta \leq \|f - \psi\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

Soit φ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \psi}{\|f - \psi\|},$$

Alors le vecteur φ est de norme égale à l'unité ($\|\varphi\| = 1$).

De plus, on a

$$\|\varphi - \emptyset\| = \frac{1}{\|f - \psi\|} f - \{\psi + (\|f - \psi\|\emptyset)\} \|\geq \frac{\beta}{\|f - \psi\|} \geq \alpha$$

1.4.17 Théorème

L'opérateur identique : I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

1.4.18 Démonstration

Soit φ_1 un élément de X , tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = \text{span} \{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de X car G_1 est de dimension finie. D'après le lemme 1.4.14, il existe un élément $\varphi_2 \in E$, tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$. Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in X$ avec $\|\varphi_3\| = 1$, $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente, Ce qui termine la démonstration.

1.4.20 Corollaire

la boule d'unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 1.4.17, car la boule d'unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace X de dimension infinie par l'opérateur identique.

1.4.21 Théorème

Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.

1.4.22 Démonstration

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{ \varphi \in X, \|\varphi\| \leq 1 \}$$

La boule fermée de rayon l'unité, alors l'ensemble $\overline{A(B(0,1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|A\varphi\| < \infty \text{ et par conséquent } \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\| < \infty$$

ce qui signifie que l'opérateur A est borné.

Réciproquement, l'opérateur identique I de X dans X est borné mais il n'est pas compact.

1.2.23 Théorème

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

1.2.24 Démonstration

Soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E$$

De plus :

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)|, \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E$$

Cela veut dire que $A(E)$ est borné.

L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G \mid x - y \mid < \delta \Rightarrow |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

D'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \mid \text{pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } \mid x - y \mid < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équi-continu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors A est compact.

1.2.25 Noyau faiblement singulier

On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut-être aux points $x = y$ et telle que,

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}, 0 < \alpha \leq n$$

1.2.26 Théorème

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

1.2.27 Démonstration

Il est à remarquer que l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int k(x, y)\varphi(y)dy, x, y \in G$$

Existe comme une intégrale impropre, car

$$|K(x, y)\varphi(x)| \leq M \|\varphi\| |x - y|^{\alpha-n}$$

De plus, on a

$$\int |x - y|^{\alpha-n} dy \leq \omega_n \int_0^d \rho^{\alpha-n} \rho^{\alpha-1} d\rho = \frac{\omega_n}{\alpha} d^\alpha$$

Où ω_n désigne la surface de la sphère unité dans \mathbb{R}^n , et d le diamètre de l'ensemble G .

Construisons maintenant une suite d'opérateurs compacts A_p , convergente vers l'opérateur A et telle que, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_p\| = 0$$

Soit h une fonction continue par morceau, définie sur $[0, \infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} , par :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

le noyau K_p défini sur $G \times G$ à valeurs dans \mathbb{C} , par

$$k_p(x, y) = \begin{cases} h(p|x - y|) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Est un noyau continu pour tout $p \in \mathbb{N}$ et par conséquent, les opérateurs intégraux sont compacts. De plus

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A_p\varphi(x)| &= \left| \int \{1 - h(p|x - y|)\} k(x, y)\varphi(y)dy \right| \\ &\leq M \|\varphi\| \omega_n \int_0^{\frac{1}{p}} p^{\alpha-n} p^{\alpha-1} dp \\ &\leq M \|\varphi\| \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha}, x \in G \end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs $A_p\varphi$ converge uniformément vers l'opérateur $A\varphi$ quand $p \rightarrow \infty$, d'où $A\varphi$ est un élément de $C(G)$, de plus

$$\|A - A_p\| \leq M \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha} \rightarrow 0, \text{ lorsque } p \rightarrow \infty$$

Cela implique que l'opérateur A est compact.

1.2.28 Théorème

L'opérateur intégral A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$ si ∂G est de classe C^l .

1.2.29 Preuve

T est fermé alors $G(T) = \{(x, Tx), x \in D(T)\}$ est fermé.

$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) / y \in R(T)\}$ est fermé aussi car

$$\begin{aligned} B : X \times Y &\rightarrow Y \times X \\ (x, y) &\rightarrow (y, x) \end{aligned}$$

donc $B(G(T^{-1})) = G(T^{-1}) = B(x, Tx) = (Tx, x) = (y, T^{-1}y)$

B est un homéomorphisme donc $G(T^{-1})$ est fermé comme image d'un fermé

$G(T)$ par un homéomorphisme donc T^{-1} est fermé.

Conséquence : Si $T \in L(X, Y)$, $D(T) = X$, et T^{-1} existe alors T^{-1} est fermé

1.5 Opérateurs Projections Orthogonales

Les opérateurs projection dans les espaces de Hilbert et de Banach sont largement utilisés dans différents domaines des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et numérique, théorie de l'optimisation et de contrôle optimal, la programmation non linéaire et stochastique et la théorie des jeux. On utilise l'opérateur de projection prochainement pour définir l'inverse généralisé et l'inverse de *Drazin*.

1.5.1 Opérateur de projection

Une projection sur un sous-espace quelconque F de X est un opérateur linéaire borné P de X dans F tel que $P^2 = P$.

Soient F un sous-espace vectoriel de X et G un supplémentaire de F dans X

N'importe quel vecteur φ de X peut s'écrire d'une façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , $\varphi = \varphi' + \varphi''$, $(\varphi', \varphi'') \in F \times G$.

La projection sur F parallèlement à G est alors l'application P qui associe à tout φ de X le vecteur φ' de F tel que $R(P) = F$ et $N(P) = G$.

La projection sur G parallèlement à F est l'application $Q = Id_X - P$, appelé aussi projecteur associé à P .

L'image de Q n'est autre que le noyau de P , l'image de P est le noyau de Q .

Dans ce qui suit, nous supposons que X est décomposé en la somme directe :

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$$

1.3.2 Propriété

La famille (P_i) des projections associées à la décomposition précédente vérifie les assertions suivantes :

- 1) $\sum_{i=1}^n P_i = Id_X$;
- 2) $P_i^2 = P_i$ Pour tout i ;
- 3) $P_i P_j = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

1.3.3 Définition

Une projection orthogonale sur un espace de Hilbert X est une application linéaire $P : X \rightarrow X$ qui satisfait

- $P^2 = P$;
- $\langle P\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, P\psi \rangle$ pour tout $\varphi, \psi \in X$ (c.à.d $P = P^*$).

Une projection orthogonale est nécessairement bornée

1.3.4 Exemple

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est la somme directe orthogonale de l'espace \mathcal{M} des fonctions paires et \mathcal{N} l'espace des fonctions impaires. Les projections orthogonales P et Q de $L^2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{M} et \mathcal{N} , respectivement, sont donnés par :

$$Pf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}; \quad Qf(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2};$$

On note que $I - P = Q$

1.3.5 Définition

Soit G un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert X et soit

$$X = G \oplus F$$

Alors tout vecteur $h \in X$ est représentable uniquement sous la forme

$$h = g + f$$

Où $g \in G$ et $f \in F$ et $\langle g, f \rangle = 0$. Le vecteur g est appelé la projection orthogonale de h sur G . L'opérateur qui à tout $h \in X$ associe $g \in G$ est appelé l'opérateur de projection orthogonale sur G . Il est noté par P_G ou parfois par P et

$$g = Ph = P_G(h)$$

Chapitre 2: Problèmes de moindres carrés linéaires – Décomposition en valeurs singulières

2.1 Introduction

La **méthode des moindres carrés**, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données.

Ce modèle peut prendre diverses formes. Il peut s'agir de loi de conservation que les quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure [06].

2.2 Histoire

Le jour du Nouvel An de 1801, l'astronome italien Giuseppe Piazzi a découvert l'astéroïde Cérès. Il a alors pu suivre sa trajectoire jusqu'au 14 février 1812. Durant cette année, plusieurs scientifiques ont tenté de prédire sa trajectoire sur la base des observations de Piazzi (à cette époque, la résolution des équations non linéaires de Kepler de la cinématique est un problème très difficile). La plupart des prédictions furent erronées ; et le seul calcul suffisamment précis pour permettre à Zach, un astronome allemand, de localiser à nouveau Cérès à la fin de l'année, fut celui de Carl Friedrich Gauss, alors âgé de 24 ans (il avait déjà réalisé l'élaboration des concepts fondamentaux en 1795, lorsqu'il était alors âgé de 18 ans). Mais sa méthode des moindres carrés ne fut publiée qu'en 1809, lorsqu'elle parut dans le tome 2 de ses travaux sur la Mécanique céleste, *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Le mathématicien français Adrien-Marie Legendre a développé indépendamment la même méthode en 1805. Le mathématicien américain Robert Adrain a publié en 1808 une formulation de la méthode [07].

En 1829, Gauss a pu donner les raisons de l'efficacité de cette méthode ; en effet, la méthode des moindres carrés est justement optimale à l'égard de bien

des critères. Cet argument est maintenant connu sous le nom de théorème de Gauss-Markov[08].

Ce chapitre est consacré à étudier les propriétés principales des problèmes inverses linéaires et les problèmes mal posés. On utilise les espaces d'Hilbert de départ X et d'arrivée Y et on présente un problème d'une équation mal posée équivalente à l'équation originale qui s'appelle l'équation normale du problème mal posé, et nous présumons l'opérateur linéaire A continu de l'espace X dans l'espace Y [09], pour donner une définition mathématique du problème mal posé on commence préalablement par le contexte qui se suit:

2.3 Définition des problèmes mal posés

Dire que le problème :

$$A\varphi = f \dots (1)$$

est mal posé avec f est donnée dans Y et φ est inconnu dans X . si ce problème n'admet pas une solution ou dans le cas d'existence d'une solution elle doit être non unique ou qu'elle soit indépendante avec les données.

Dans ce chapitre nous étudions les principales propriétés des problèmes inverses linéaires. Nous nous placerons dans le cadre des espaces de Hilbert, pour que les résultats s'appliquent (par exemple) aux équations intégrales de première espèce, mais nous indiquerons les simplifications qui interviennent en dimension finie. Nous introduisons ensuite l'outil fondamental que constitue la décomposition en valeurs singulières. Cette fois, pour des raisons de simplicité d'exposition, nous traiterons d'abord le cas des matrices, avant de présenter les opérateurs, bien que le premier soit un cas particulier du second. Enfin, nous montrerons comment la décomposition en valeurs singulières permet d'analyser les problèmes de moindres carrés.

Dans tout ce chapitre nous désignerons par A un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert X dans un espace de Hilbert Y : $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

2.4 Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés

Étant donné $f \in Y$, nous cherchons $\varphi \in X$ solution de :

$$A\varphi = f \dots (2.1)$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion concernant les problèmes bien et mal posés

Le problème (1) est mal posé si :

- l'opérateur A peut ne pas être surjectif ;
- il peut ne pas être injectif ;
- si A a un inverse existe, il peut ne pas être continu.

Comme nous l'avons déjà dit, la première difficulté n'est pas sérieuse : il ne suffit que f se restreindre à $\text{Im } A$. La seconde est plus gênante : il faut pouvoir sélectionner, parmi plusieurs solutions, celle qui est appropriée au problème. La dernière, fondamentale pour les applications, est liée au caractère fermé ou non de $\text{Im } A$

2.4.1 Théorème

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X et Y deux espaces de Hilbert. Supposons que A soit injectif, et notons $A^{-1} : \text{Im } A \rightarrow X$ l'inverse de A . On a :

$$\text{Im } A \text{ est fermé} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ est continu}$$

Preuve

Dans ce cas $W = \text{Im } A$ est un espace de Hilbert (il est immédiat que W est un espace préhilbertien, et il est complet parce qu'il est fermé). L'opérateur

$\tilde{A} : X \rightarrow W$, $\tilde{A}\varphi = A\varphi$ pour $\varphi \in X$ est un opérateur linéaire continu et bijectif.

Une conséquence classique du théorème de l'application ouverte est que \tilde{A}^{-1} est continu. Il en est donc de même pour A^{-1} .

Et Puisque A^{-1} est continu, et que $X = \text{Im } A^{-1}$ est fermé, $\text{Im } A = (A^{-1})^{-1}(X)$ est fermé dans Y .

Pour les situations que nous considérons dans ce travail, l'opérateur pourra ou non être injectif, mais la situation générale sera que $\text{Im } A$ n'est pas fermée, on

montre que si A est compact, A n'a pas d'inverse continu, et dans ce cas ImA ne sera pas fermé).

Le problème (1) n'a pas de solution que pour les seconds membres dans l'image de A . Comme nous venons de le voir, cette condition peut-être trop restrictive. Nous reviendrons sur ce point après introduit la décomposition en valeurs singulières, avec la condition de Picard (théorème). Nous cherchons donc une autre formulation du problème original, qui permette d'étendre la notion de solution à un sous-espace plus grand.

Nous proposons une formulation comme un problème de moindres carrés : nous remplaçons donc $A\varphi = f$ par

$$\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|_Y \dots (2.2)$$

Nous allons voir que ce problème est équivalent à une équation linéaire, mais pour un opérateur différent de A .

2.4.2 Théorème

($\check{\varphi}$ est une solution du problème (2)) $\Leftrightarrow (A^*A\check{\varphi} = A^*f)$

i.e., $\|A\check{\varphi} - f\|$ soit minimum.

Preuve

On démontre l'implication suivante : ($\check{\varphi}$ est une solution du problème 2) $\Rightarrow (A^*A\check{\varphi} = A^*f)$

Soit $\varphi = \check{\varphi} + \varepsilon\psi$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}, \psi \in X$

on a: $\forall \varphi \in X: \|A\check{\varphi} - f\|^2 \leq \|A\varphi - f\|^2$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\|^2 \leq \|A(\check{\varphi} + \varepsilon\psi) - f\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\|^2 \leq \|A\check{\varphi} - f\|^2 + \varepsilon^2 \|A\psi\|^2 + 2\varepsilon \langle A\check{\varphi} - f, A\psi \rangle$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 \|A\psi\|^2 + 2\varepsilon \langle A\check{\varphi} - f, A\psi \rangle \geq 0, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

On déduit que le discriminant est négatif $\Delta' = (\langle A\check{\varphi} - f, A\psi \rangle)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \langle A\check{\varphi} - f, A\psi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (A\check{\varphi} - f) \in (\text{Im} A)^\perp = \ker A^*$$

$$\Rightarrow A^*(A\check{\varphi} - f) = 0 \Rightarrow A^*A\check{\varphi} = A^*f$$

Pour l'autre sens de l'implication:

$$\text{Si } A^*(A\check{\varphi} - f) = 0 \Rightarrow (A\check{\varphi} - f) \in \ker A^* = (\text{Im} A)^\perp$$

$$\Rightarrow \langle A\check{\varphi} - f, A\psi \rangle = 0, \forall \psi \in X$$

$$\forall \varphi \in X: \|A\varphi - f\|^2 = \|A\check{\varphi} - f + A(\varphi - \check{\varphi})\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\varphi - f\|^2 = \|A\check{\varphi} - f\|^2 + \|A(\varphi - \check{\varphi})\|^2 + 2\langle A\check{\varphi} - f, A(\varphi - \check{\varphi}) \rangle$$

$$\Rightarrow \|A\varphi - f\|^2 - \|A\check{\varphi} - f\|^2 = \|A(\varphi - \check{\varphi})\|^2 \geq 0. \quad \text{Car } \langle A\check{\varphi} - f, A(\varphi - \check{\varphi}) \rangle = 0$$

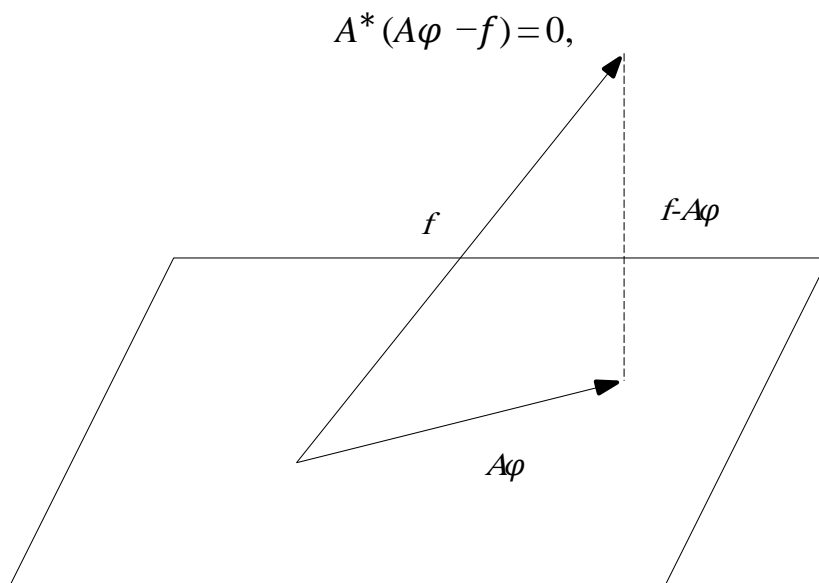
$$\Rightarrow \|A\varphi - f\|^2 - \|A\check{\varphi} - f\|^2 = \|A(\varphi - \check{\varphi})\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi - f\| \Rightarrow \check{\varphi} = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$$

Ce qui termine la démonstration

2.4.3 Définition

$A^*A\check{\varphi} = A^*f$ s'appelle l'équation normale du problème $\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$



L'illustration géométrique de problème de moindres carrés

2.5 Illustration géométrique des moindres carrés

Ce qui exprime simplement que le résidu $f - A\check{\varphi}$ est dans le noyau de A^* , c'est-à-dire orthogonal à la fermeture de l'image de A . Ceci conduit à l'illustration géométrique bien connue :

La solution du problème de moindres carrés est telle que $A\check{\varphi}$ est la projection de f sur l'image de A .

Notons que nous n'avons pour l'instant évoqué ni l'existence, ni l'unicité, pour les solutions de (2.2). Nous avons simplement montré l'équivalence des deux problèmes. L'unicité est évidemment liée à l'injectivité de A , comme le précise le résultat suivant.

2.5.1 Lemme

Nous avons : $\ker A^*A = \ker A$

Preuve

$$\forall \varphi \in \ker A^*A \Rightarrow A^*A\varphi = 0 \Rightarrow \langle A^*A\varphi, \psi \rangle = 0, \forall \psi \in X$$

$$\Rightarrow \langle A\varphi, A\psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in Y$$

$$\Rightarrow A\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in \ker A \Rightarrow \ker A^*A \subset \ker A \text{ d'une part et d'autre part.}$$

$$\forall \varphi \in \ker A \Rightarrow A\varphi = 0 \Rightarrow A^*A\varphi = A^*(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi \in \ker A^*A \Rightarrow \ker A \subset A^*A \text{ ou obtient alors que } \ker A^*A = \ker A$$

2.5.2 Proposition

Le problème de moindre carrée $\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| \dots (2.2)$ admet une solution unique si et seulement si A est injectif.

Preuve

Soient φ_1, φ_2 solution du problème (2)

$$\begin{cases} A^*A\varphi_1 = A^*f \\ \text{et} \\ A^*A\varphi_2 = A^*f \end{cases} \Leftrightarrow A^*A\varphi_1 = A^*A\varphi_2$$

$$\Leftrightarrow A^*A(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\varphi_1 - \varphi_2) \in \ker A^* A = \ker A = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \text{ d'où le résultat.}$$

et en ce qui concerne l'existence de la solution, on a le résultat suivant:

2.5.3 Proposition

Le problème de moindre carrée admet une solution si et seulement si

(1) $f \in \text{Im} A \oplus (\text{Im} A)^\perp$ et (2) l'ensemble S des solutions est un convexe fermé.

Preuve

(1) Soit $\check{\varphi} \in X$ est solution de $\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| \dots (2.2)$ on a

$$\text{donc } A^* A \check{\varphi} = A^* f \Rightarrow A^* (A \check{\varphi} - f) = 0$$

$$\Rightarrow (A \check{\varphi} - f) \in \ker A^* = (\text{Im} A)^\perp$$

$$\text{donc } f = A \check{\varphi} + (f - A \check{\varphi}) \in \text{Im} A + (\text{Im} A)^\perp .$$

$$\text{et si } f \in \text{Im} A \cap (\text{Im} A)^\perp$$

$$\Rightarrow f = A \check{\varphi} \text{ avec } \check{\varphi} \in X$$

et

$$\langle f, A \check{\varphi} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|f\|^2 = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\text{alors } f \in (\text{Im} A) \oplus (\text{Im} A)^\perp .$$

Réciproquement, soit $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \text{Im} A$ et $f_2 \in (\text{Im} A)^\perp$

de façon unique $A\varphi = f_1$ avec $\varphi \in X$

évidemment $A^* A\varphi = A^* f_1$ mais puisque $(\text{Im} A)^\perp = \ker A^*$

et $f_2 \in (\text{Im} A)^\perp \Rightarrow A^* f_2 = 0$ c'est à dire

$$A^* f = A^* (f_1 + f_2) = A^* f_1 + A^* f_2 = A^* f_1$$

on alors $A^* A\varphi = A^* f_1 = A^* f$

qui prouve que φ est bien une solution du problème (2)

Preuve

(2) l'ensemble du problème (2) est non vide et si $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ c'est à dire

$$\begin{cases} A^*A \varphi_1 = A^*f \\ \text{et} \\ A^*A \varphi_2 = A^*f \end{cases} \Rightarrow A^*A[\alpha \varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2] = \alpha A^*A \varphi_1 + (1-\alpha) A^*A \varphi_2 \text{ avec } (0 < \alpha < 1)$$

$$= \alpha A^*f + (1-\alpha) A^*f = A^*f$$

ce qui signifie que le segment $[\varphi_1, \varphi_2] \subset S$,

et d'autre part

$S = \{\varphi \in X : A^*A\varphi = A^*f\} = (A^*A)^{-1}\{A^*f\}$ est fermé car $\{A^*f\}$ est fermé dans X et A^*A est borné.

2.5.4 Lemme

Le sous-espace $\text{Im}A + \text{Im}A^\perp$ est dense dans Y .

Preuve. Si $\varphi \in (\text{Im}A + \text{Im}A^\perp)^\perp$, alors, pour tous $\varphi_1 \in \text{Im}A$ et $\varphi_2 \in \text{Im}A^\perp$, on a

$\langle \varphi, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = 0$. En choisissant d'abord $\varphi_2 = 0$, on obtient $\varphi \in \text{Im}A^\perp$, puis en choisissant $\varphi_1 = 0$, on obtient $\varphi \in \text{Im}A^{\perp\perp} = \overline{\text{Im}A}$ Autrement dit,

$(\text{Im}A + \text{Im}A^\perp)^\perp = \text{Im}A \cap \text{Im}A^\perp = \{0\}$, ce qui est équivalent à la densité cherchée.

Remarque

Notons que, dans le cas général, la condition $f \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ est *non-triviale*. En effet, le théorème de projection dit seulement $Y = \overline{\text{Im}A} \oplus \text{Im}A^\perp$, ce qui est différent si $\text{Im}A$ n'est pas fermée.

On retrouve encore ici l'importance de cette condition. Dans ce cas, le problème (2) donc admet toujours une solution.

En dimension finie, cette condition est bien entendu automatiquement vérifiée (tout sous-espace est fermé). Nous retrouverons ce résultat dans d'autre proposition.

2.5.5 Corollaire

la solution $\check{\varphi}$ du problème de moindre carrée est de norme minimale (i.e) $\|\check{\varphi}\| = \min_{\varphi \in S} \|\varphi\|$ où $S = \{\varphi \in X \text{ avec } \|A\varphi - f\| \text{ est minimale}\}$.

Preuve

Soit $\check{\varphi}$ est la projection de zéro sur S .

Alors $\|0 - \check{\varphi}\| \in S^\perp \Rightarrow \|\check{\varphi}\|$ est de norme minimale.

$\check{\varphi}$ est unique car S est un convexe fermé (d'après le théorème de la projection)

Remarque

Il est facile de voir que $\check{\varphi}$ dépend linéairement de f (par exemple à cause de l'équation normale). L'opérateur linéaire $A': \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp \mapsto X$ défini par

$A'f = \varphi$. A' s'appelle le *pseudo-inverse* de A . On peut démontrer qu'il n'est continu que si $\text{Im}A$ est fermé.

Cas de la dimension finie

Si X et Y sont deux espaces de dimension finie, on peut supposer que $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^m$.

Dans ce cas, A s'identifie à une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Nous supposons en général que $m > n$, c'est-à-dire que le problème est *sur-déterminé*.

On peut préciser, dans ce cas, les résultats du paragraphe précédent.

2.5.6 Proposition

Quand X et Y sont deux espaces de dimension finie, le problème de moindres carrés admet toujours au moins une solution.

Cette solution est unique si, et seulement si, A est de rang maximal (de rang n si le problème est surdéterminé).

Preuve

On rappelle que la matrice de l'opérateur adjoint A^* est la matrice transposée A^t .

On peut également donner une preuve directe,

Nous montrons que les équations normales ont toujours au moins une solution, c'est-à-dire que $A^*f \in \text{Im}(A^*)$. Pour cela, commençons par remarquer que :

$\text{Im}A^* = \text{Im}(A^*A)$. En effet, $\text{Im}(A^*A) = (\text{Ker}A^*A)^\perp = (\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}(A^*)$. Il suffit donc de vérifier que $A^*f \in (\text{Ker}A)^\perp$, or c'est immédiat, puisque, si $\varphi \in (\text{Ker}A)^\perp$,

$$\langle A^* f, \varphi \rangle = \langle f, A\varphi \rangle = 0$$

2.5.7 Proposition

Sous l’hypothèse que A est de rang n , la matrice des équations normales $A^t A$ est définie positive.

Preuve

Il est facile de voir que : $A^t A$ est semi-définie positive (c’est en fait toujours vrai)

$$\langle A^* A\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, A\varphi \rangle = \|A\varphi\|^2 \geq 0$$

De plus, quand A est de rang n , nous savons que la matrice carrée $A^t A$ est injective, donc elle devient inversible. Elle est donc définie positive.

2.6 Compléments : projections et pseudo-inverse

2.6.1 Décomposition en valeurs singulières de matrices

La décomposition en valeurs singulières (singular value decomposition en anglais, souvent abrégée SVD) est devenue depuis quelques dizaines d’années un outil fondamental pour étudier un nombre croissant de problèmes linéaires. La décomposition a été découverte il y a plus de cent ans par **Bel-trami**, mais n’est devenu un outil numérique que depuis la fin des années 1960, quand **G. Golub** a montré comment on pouvait la calculer de façon stable et efficace.

Cette décomposition est une sorte de diagonalisation qui donne une carte d’identité complète de l’opérateur. Nous verrons en particulier qu’elle donne une solution simple (en théorie) du problème de moindres carrés.

Nous énonçons le théorème principal dans le cas des matrices réelles.

2.6.2 Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang r . Il existe deux matrices orthogonales

$U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, ($U^t U = U U^t = I_m$) et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($V^t V = V V^t = I_n$) telles que

$$A = U \Sigma V^t \text{ avec } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3)$$

où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$,

et

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Composante par composante, l'identité matricielle (5) devient

$$Av_j = \sigma_j u_j, \quad A^t u_j = \sigma_j v_j, \dots\dots(2.4) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n,$$

$$A^t u_j = 0, \quad \dots\dots\dots(2.5) \quad \text{pour } j = n + 1, \dots, m$$

Si l'on note $U = (u_1, \dots, u_m)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V , les vecteurs u_j , et v_j sont, respectivement, les vecteurs singuliers droits et gauches associés à la valeur singulière σ_j .

Illustration de la SVD



Preuve

La preuve se fait par récurrence sur n .

Par définition de ce qu'est une norme matricielle subordonnée, il existe un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$\|v_1\|_2 = 1, \quad \|Av_1\|_2 = \|A\|_2 = \sigma,$$

Où σ est strictement positif (si $\sigma = 0$, alors $A = 0$, et il n'y a rien à démontrer).

Posons $u_1 = 1/\sigma Av_1 \in \mathbb{R}^m$. Complétons le vecteur v_1 en une base orthogonale de \mathbb{R}^n , et notons $V = (v_1, V_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice formée par les vecteurs de base.

Faisons de même pour u_1 et \mathbb{R}^m , notant $U = (u_1, U_1) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Remarquons que les matrices U et V sont orthogonales par construction.

D'après notre choix de U_1 , $U_1^t Av_1 = \sigma U_1^t u_1 = 0$, et donc le produit $U^t AV$ a la structure par blocs suivante :

$$A_1 = U^t AV = \begin{pmatrix} \sigma & w^t \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Avec $w^t = u_1^t AV_1$ et $B = U_1^t AV_1 \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-1)}$.

Comme U et V sont orthogonales, $\|A_1\|_2 = \|A\|_2 = \sigma$. Mais la double inégalité

$$\|A_1\|_2 (\sigma^2 + w^t w)^{1/2} \geq \|A_1 \begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma^2 + w^t w \\ Bw \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma^2 + w^t w,$$

Montre que $\|A_1\|_2 \geq (\sigma^2 + w^t w)^{1/2}$ On doit donc avoir $w = 0$. On peut alors terminer la démonstration en appliquant l’hypothèse de récurrence à B .

Du point de vue géométrique, ce théorème exprime que toute application linéaire peut être vue, après un changement de bases orthogonales dans chacun des espaces, comme agissant comme une dilatation dans chaque direction. Insistons sur l’importance du fait que les bases considérées sont orthonormées. Ceci constitue la principale différence avec la diagonalisation. En effet, si toute matrice possède une DVS, seules les matrices normales (ce sont celles qui commutent avec leur adjoint) sont diagonalisables dans une base orthonormée.

2.6.3 Exemple

Illustrons cet aspect géométrique sur la figure 4.3, avec l’exemple de la matrice

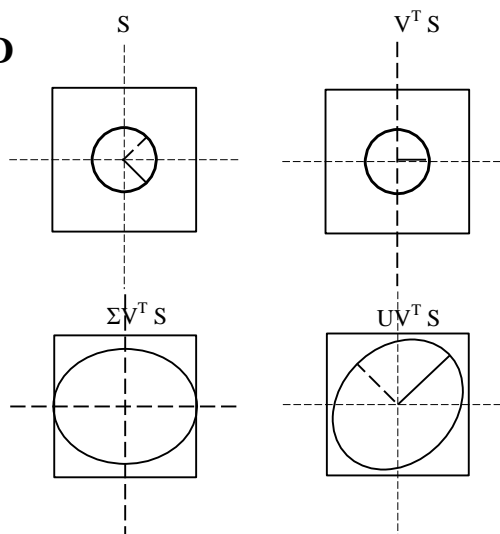
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dont la décomposition en valeurs singulières est (exercice !) :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t$$

Nous calculons l’image du cercle unité. On commence par l’action de V^t , qui est une rotation (d’angle -45°), puis par Σ , dont l’action dilate l’axe des x dans un rapport 4, et l’axe des y dans un rapport 2, enfin par U qui est une rotation d’angle 45° .

Signification géométrique de la SVD



Les valeurs singulières sont reliées aux valeurs propres de la matrice $A^t A$.

La proposition suivante s’obtient facilement à partir de la SVD de A .

2.6.3 Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice. Notons $A = U\Sigma V^t$

sa décomposition en valeurs singulières. Les valeurs propres de la matrice $A^t A$ sont les nombres $\sigma_j^2, j = 1, \dots, n$, et ses vecteurs propres sont les vecteurs singuliers à gauche de $A, v_j, j = 1, \dots, n$;

Les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}$ sont les nombres $\pm\sigma_j, j = 1, \dots, n$, et ses vecteurs propres sont $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_j \\ \pm u_j \end{bmatrix}$

Cette proposition nous permet de préciser en quel sens la SVD d’une matrice A est unique. Puisque les valeurs singulières sont les valeurs propres de $A^t A$, elles sont déterminées par A , donc uniques. Les vecteurs singuliers à droite appartenant à une valeur singulière simple sont également uniques (à un facteur ± 1 près), par contre pour une valeur singulière multiple, seul le sous-espace est unique. Enfin, les vecteurs singuliers à gauche correspondant à une valeur singulière simple sont également uniques. Par contre, les $(m - n)$ derniers vecteurs singuliers à droite ne sont pas déterminés uniquement par A , seul le sous-espace engendré par u_{n+1}, \dots, u_m est unique.

Il peut être intéressant d’écrire la SVD de A sous une forme légèrement différente de la formule (3) : - Tout d’abord, en posant $U_n = (u_1, \dots, u_n)$, on a

$$A = U_n \Sigma V^t \dots \dots \dots (2.6)$$

que l’on appelle parfois la n ’ factorisation en valeurs singulières de A

De même si A n’est pas de rang n , notons $U_r = (u_1, \dots, u_r), V_r = (v_1, \dots, v_r)$ les matrices formées par les r premiers vecteurs singuliers, et $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Alors :

$$A = U_r \Sigma_r V_r^t = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i^t v_i \dots (2.7)$$

Notons que les matrices U_r et V_r sont orthogonales, puisque c'est le cas des vecteurs u_1, \dots, u_r et v_1, \dots, v_r . La décomposition (9) correspond à une somme de matrices de rang 1.

Cette dernière forme est celle qui se prête le mieux à la généralisation aux opérateurs dans les espaces de Hilbert, que nous verrons au paragraphe 3.

Elle exprime que les colonnes de V_r forment une base de $(\text{Ker } A)^\perp$, que celles de U_r forment une base de $\text{Im}A$, et qu'en développant les vecteurs dans cette base, on a

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^r \langle \varphi, v_i \rangle v_i \Rightarrow A\varphi = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \varphi, v_i \rangle u_i,$$

où $\varphi_0 \in \text{Ker } A \dots(10)$

Car

$$A\varphi = A(\varphi_0 + \sum_{i=1}^r \langle \varphi, v_i \rangle v_i) = A\varphi_0 + A(\sum_{i=1}^r \langle \varphi, v_i \rangle v_i) = \sum_{i=1}^r \langle \varphi, v_i \rangle Av_i$$

Car A est linéaire et $\varphi_0 \in \text{ker}A$

Et comme on a $Av_i = \sigma_i u_i$ alors :

$$A\varphi = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \varphi, v_i \rangle u_i$$

Comme nous l'avons annoncé, on peut lire les principales propriétés de la matrice A sur sa DVS.

2.6.4 Proposition

On a les relations suivantes :

- i.** *Le rang de A est égal au nombre de valeurs singulières non-nulles ;*
- ii.** $\text{Ker } A = \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n), \quad \text{Im}A = \text{vect}(u_1, \dots, u_r) ;$
- iii.** $\text{Ker } A^t = \text{vect}(v_1, \dots, v_r), \quad \text{Im } A^t = \text{vect}(u_{r+1}, \dots, u_m) ;$
- iv.** $\|A\|_2 = \sigma_1.$

Preuve

Les matrices U et V sont des isométries, par ce que :

$$\|U\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2 \text{ et } \|V\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$$

Donc elles sont des bijections. Les différentes propriétés sont donc des conséquences de ce qu'elles sont vraies pour Σ .

- i. Il est clair que le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre d'éléments diagonaux non-nuls. Le résultat général est une conséquence de la remarque ci-dessus.
- ii. Soit $v \in \text{Ker } A \Rightarrow Av = 0$
 $\Rightarrow U\Sigma V^t v = 0 \Rightarrow V^t v \in \text{ker } U\Sigma$
 $\Rightarrow V^t v \in \text{ker}(U\Sigma)^t U\Sigma = \text{ker } \Sigma U^t U\Sigma = \text{ker } \Sigma I_m \Sigma = \text{ker } \Sigma^2 = \text{ker } \Sigma$

Car $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$

et réciproquement. Encore une fois, il est clair que le noyau de Σ est engendré par les colonnes $r + 1$ à n de l'identité, et donc le noyau de A est engendré par le produit de V par ces colonnes, c'est-à-dire les vecteurs

$$(v_{r+1}, \dots, v_n)$$

Un raisonnement analogue donne le résultat pour l'image de A .

$\text{Im } A = \text{vect}(u_1, \dots, u_r)$ parce que les éléments diagonaux de la matrice Σ_1 sont nuls pour $(r+1, \dots, n)$

- iii. Le raisonnement est identique à celui du point précédent
- iv. Puisque U et V sont des isométries, on a pour $\varphi \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_2} = \frac{\|U\Sigma V^t \varphi\|_2}{\|\varphi\|_2} = \frac{\|\Sigma\psi\|_2}{\|\psi\|_2}$$

avec $\psi = V^t \varphi$ (et donc $\|\psi\|_2 = \|\varphi\|_2$) donc :

$$\frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_2} = \frac{(\sum_{j=1}^r \sigma_j^2 \psi_j^2)^{1/2}}{(\sum_{j=1}^r \psi_j^2)^{1/2}} \leq \sigma_1$$

$$\text{Car } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Avec égalité pour $\psi = (1, 0, \dots, 0)^t$

Alors et :

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_2} = \sigma_1 = \|A\| \text{ car } A \text{ linéaire borné (dimension fini)}$$

2.7 Applications de la SVD aux problèmes de moindres carrés

La décomposition en valeurs singulières fournit la solution la plus claire du problème de moindres carrés. Nous allons l'utiliser dans ce paragraphe pour obtenir une meilleure compréhension théorique, en particulier des questions des perturbations.

Dans ce paragraphe, nous abandonnons l'hypothèse dont A est de rang n , puisqu'un des points forts de la SVD est justement de permettre de traiter ce cas.

Quand A est de rang $r < n$, nous chercherons la solution de norme minimale.

Introduisons la décomposition en valeur singulière de A .

L'équation dans le problème de moindres carrés :

$$\|A\varphi - f\|_2^2 = \|U\Sigma V^t \varphi - f\|_2^2 = \|\Sigma V^t \varphi - U^t f\|_2^2 \dots \dots$$

Puisque U est orthogonale (i.e) $U^{-1} = U^t$, notons $W = U^t f$

Avec $\|W\|_2 = \|f\|_2$ et on prend

$$\psi = V^t \varphi \text{ avec } (V^t = V^{-1}) \text{ et } \|\psi\|_2 = \|\varphi\|_2$$

Comme Σ est diagonale, ce problème est découpé, et se ressort composante par composante dans les bases.

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) \text{ et } (v_1, v_2, \dots, v_m)$$

Nous avons :

$$\|A\varphi - f\|_2^2 = \|\Sigma \psi - w\|_2^2 = \sum_{i=1}^r |\sigma_i \psi_i - w_i|^2$$

Car $w = (w_1, \dots, w_r, \dots, 0, \dots, 0)^t$ m composante

Et $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r, \dots, 0, \dots, 0)^t$ n composante

$$\text{Et } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_r & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

On obtient donc toutes les solutions du problème (3.2)

$$\|A\varphi - f\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r |\sigma_i \psi_i - w_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |\sigma_i \psi_i - w_i| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \psi_i = \frac{w_i}{\sigma_i} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \\ \text{quelconque pour } i = r + 1; \dots; n \end{cases}$$

Et dans le cas ou A est de rang plein, il Ya une solution unique, et dans le cas contraire, la solution est définie à l'addition d'un élément du noyau de A prés.

Dans ce dernier cas la norme d'une solution est :

$$\|\varphi_0\|_2 + \left(\sum_{i=1}^r \left| \frac{w_i}{\sigma_i} \right|^2 \right)^{1/2} \quad \text{avec } \varphi_0 \in \ker A.$$

La solution de norme minimale est donc celle qui n'a pas de composante dans $\ker A$.

Chapitre III : La méthode de la régularisation de Tikhonov

3.1 Introduction

La régularisation de Tikhonov est la méthode de régularisation la plus utilisée pour la résolution de problèmes qui ne sont pas bien posés ainsi que pour les problèmes inverses. Elle a été imaginée par le mathématicien russe Andreï Nikolaïevitch Tikhonov. En statistique, la méthode est également connue sous le nom de régression d'arête (*ridge regression*). Elle est connexe à l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour la résolution de problèmes non-linéaires de moindres carrés [10].

3.2 Problème

L'approche classique pour résoudre un système d'équations linéaires surdéterminées exprimées par $A\varphi = f$ [11] est connue comme la méthode des moindres carrés et consiste à minimiser le résidu $\|A\varphi - f\|^2$.

Où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne. Cependant, la matrice A peut-être mal conditionnée ou non inversible, conduisant à un grand nombre de solutions.

3.3 Régularisation

Dans le but de privilégier une solution particulière dotée de propriétés qui semblent pertinentes, un terme de régularisation est introduit dans la minimisation :

$$\|A\varphi - f\|^2 + \|\Gamma\varphi\|^2$$

Γ , la « *matrice de Tikhonov* » doit être judicieusement choisie pour le problème considéré. φ est le vecteur que l'on cherche à exprimer est souvent une approximation discrétisée d'une fonction continue. Dans de nombreux cas, la matrice Γ est la Matrice identité $\Gamma = I$, ce qui favorise les solutions dont les normes sont petites. Dans d'autres cas des opérateurs passe-haut, par exemple un opérateur de différence ou un opérateur de Fourier pondéré peut être utilisé pour éliminer les variations rapides de la fonction lorsque l'on a de bonnes

raisons de croire que le vecteur φ est l'approximation d'une fonction continue[12].

Cette régularisation améliore le conditionnement du problème, permettant ainsi de trouver une solution numérique [13].

3.4 Définition des problèmes mal posés

Dire que le problème $A\varphi=f\dots(1)$ est mal posé avec f est donnée dans Y et φ est inconnu dans X . si ce problème n'admet pas une solution ou dans le cas d'existence d'une solution elle doit être non unique ou qu'elle soit indépendante avec les données[14,15].

3.4.1 Théorème

A^{-1} est continu \Leftrightarrow $\text{Im}A$ est fermé [16].

Preuve

Si $\text{Im}A$ est fermé et est un sous espace fermé de l'espace complet Y , alors $\text{Im}A$ est un sous espace de Hilbert, on considère l'opérateur $\tilde{A}: X \rightarrow \text{Im}A$ avec $\tilde{A}\varphi=A\varphi$ avec $\varphi \in X$

L'opérateur \tilde{A} est un opérateur linéaire continu et bijectif d'un espace de Banach X dans un espace de Banach $\text{Im}A$. (car X et $\text{Im}A$ sont des espaces normés complets)

D'après le théorème de Banach, l'opérateur \tilde{A} est inversible, (i,e)

$\tilde{A}^{-1} : \text{Im} A \rightarrow X$ est linéaire continu il en est donc de même pour A^{-1}

Puisque A^{-1} est continu, $A^{-1}: \text{Im}A \rightarrow X$ et $\text{Im}A^{-1}=X$ est fermé, (car X est complet) alors : $\text{Im}A=A(X)=(A^{-1})^{-1}(X)$ est fermé car l'image réciproque d'un fermé est fermé et A^{-1} est continu.

Ce qui termine la démonstration.

3.4.2 Corollaire

Si A est borné et $\text{Im}A$ est dense dans Y , alors le problème $A\varphi=f\dots(3.1)$ admet une solution unique[17].

Preuve

On a: $\overline{\text{Im}A} = Y$, et $f \in Y$, alors il existe une suite $\{f_n\} \subset \text{Im}A$ avec $f_n \rightarrow f$ et

$$f_n = A\hat{\varphi}_n \text{ avec } (\hat{\varphi}_n) \subset X \text{ et } \hat{\varphi}_n \rightarrow \hat{\varphi}$$

$$\lim f_n = \lim A\hat{\varphi}_n = A(\lim \hat{\varphi}_n) = A\hat{\varphi}$$

$\Rightarrow f = A\hat{\varphi}$, et par conséquent $\hat{\varphi}$ est bien une solution de l'équation originale (3.1).

3.4.3 Le problème de moindres carrés

3.4.4 Définition

Si le problème $A\varphi = f \dots (3.1)$ est mal posé nous le remplaçons par le problème [18]

$$\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| \dots (3.2)$$

le problème (3.2) s'appelle le problème de moindres carrés

Remarque

Dans toute qui se suit on prend $\check{\varphi}$ est la solution du problème mal posé : $A\varphi = f \dots (3.1)$ et φ_α la solution de l'équation régularisée.

Cas de dimension fini

Si X et Y sont des espaces de Hilbert de dimension fini, supposons que $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$

Dans ce cas, A s'identifie à une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, nous supposons que $m > n$ c'est à dire que le problème est sur déterminé, dans ce cas, $\text{Im}A$ est toujours fermé.

Exemple

Soit l'opérateur $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A\varphi = f$

$$\text{et } \varphi = (x, y) \text{ et } f = 2$$

$$\text{avec } A\varphi = A(x, y) = x + y = 2$$

$$\varphi_1 = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|A\varphi - f\| = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|x + y - 2\|$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = (x, 2-x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \check{\varphi} = \min_{\varphi_1 \in S} \|\varphi_1\| = \min_{x \in \mathbb{R}} \|(x, 2-x)\|$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{x^2 + (2-x)^2} = \min_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

On considère la fonction réelle suivante $g(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

$$\Rightarrow \check{\varphi} = (1, \sqrt{2})$$

3.5 La régularisation de Tikhonov pour les problèmes mal posés

Dans ce chapitre, Nous abordons la méthode de la régularisation de Tikhonov pour les problèmes inverses linéaires. La régularisation du problème mal posé, c'est le remplacer par un autre problème bien posé, cette partie présente une introduction aux méthodes de la régularisation la plus courante, à savoir la méthode de Tikhonov, et la régularisation va conduire à une perte de précision sur la solution, que nous essayerons de quantifier en fonction de l'erreur sur les données.

La régularisation de Tikhonov qui s'appelle la méthode de Tikhonov

3.5.1 La méthode de Tikhonov

Nous remplaçons le problème de moindres carré $\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| \dots(3.2)$

Par le problème $\min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| + \alpha \|\varphi\| \dots(3.3)$

Avec $\alpha > 0$ qui s'appelle la méthode de Tikhonov et α s'appelle le coefficient de la régularisation et nous allons montrer que ce problème admet une solution unique qui dépend continument avec la donnée f . Donc c'est un problème bien posé, et qui s'appelle l'équation régularisée de Tikhonov.

3.5.2 Lemme

Posons : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ \alpha I \end{pmatrix}$ et $\tilde{f} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, I est l'identité

Et $A \in \mathcal{L}(X, Y \times X)$ alors le problème régularisé (3.3) est équivalent

$$\text{à } \min_{\varphi \in X} \|\tilde{A}\varphi - \tilde{f}\|_{Y \times X}$$

Preuve

$$\tilde{A}\varphi - \tilde{f} = \begin{pmatrix} A\varphi - f \\ \alpha\varphi \end{pmatrix}$$

On calcule le carré de la norme de ce vecteur dans $Y \times X$:

$$\min_{\varphi \in X} \|\tilde{A}\varphi - \tilde{f}\|^2 = \min_{\varphi \in X} \{\|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2\}$$

3.5.3 Proposition

Le problème (3.3) de Tikhonov est équivalent à $(A^*A + \alpha I)\varphi = A^*f \dots$ (3.4)

Qui s'appelle l'équation normale de problème (3.3).

Preuve

On a $\tilde{A}^* = (A^*, \alpha I^*) = (A^*, \alpha I)$

$$(3) \Leftrightarrow \min_{\varphi \in X} \|\tilde{A}\varphi - \tilde{f}\|_{Y \times X} \dots\dots\dots(3.5)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{A}^* \tilde{A}\varphi - \tilde{A}^* \tilde{f} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A^*, \alpha I) \begin{pmatrix} A \\ \alpha I \end{pmatrix} \varphi = (A^*, \alpha I) \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A^*A + \alpha I)\varphi = A^*f$$

Et en ce qui concerne l'existence et l'unicité.

$$\begin{aligned} \langle (A^*A + \alpha I)\varphi, \varphi \rangle &= \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle + \alpha \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle + \alpha \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \|A\varphi\|^2 + \alpha \|\varphi\|^2 \geq \alpha \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

On applique alors le Lemme de Lax-Milgram et d'après le théorème de Banach.

L'opérateur $(A^*A + \alpha I)$ continu et bijectif, alors il admet un inverse continu, d'où l'existence et l'unicité.

3.5.4 Proposition (La relation entre les résidus)

Si $\check{\varphi} = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$

Et $\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in X} \{\|A\varphi - f\| + \alpha\|\varphi\|\}$ avec $\alpha > 0$.

Alors $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\|$

Preuve

On a $\begin{cases} \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\| \dots (3.6) \\ \text{et} \\ \|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \dots \dots \dots (3.7) \end{cases}$

(6) $\Rightarrow \|A\varphi_\alpha - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\|$
 $\Rightarrow \|A\varphi_\alpha - f\| - \alpha\|\check{\varphi}\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| \dots (3.8)$

D'après (3.6) et (3.7) on aura :

$\|A\varphi_\alpha - f\| - \alpha\|\check{\varphi}\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\|$

Et aussi :

$\|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\|$

Par le passage à la limite : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\|$

3.5.5 Lemme

La relation entre $\|\check{\varphi}\|$ et $\|\varphi_\alpha\|$

On a :

$\|\varphi_\alpha\| \leq \|\check{\varphi}\| \quad \forall \alpha > 0$

Preuve

On a $\|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\|$
 $\Rightarrow 0 \leq \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\| \leq \alpha(\|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\|)$

Car $\|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\|$

$\Rightarrow \|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\| \geq 0$. d'où le résultat

Conséquence

Soient $r = \|A\check{\varphi} - f\|$ qui s'appelle le résidu et $r_\alpha = \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\|$

Alors, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha = r$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha\|\varphi_\alpha\| = 0$

Preuve

$$\begin{aligned} r = \|A\check{\varphi} - f\| &\leq \|A\varphi_\alpha - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\| \\ &\leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\| \\ \Rightarrow r &\leq r_\alpha \leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\| \end{aligned}$$

Par passage à la limite :

$$r \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha = r$$

Et on déduit que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha\|\varphi_\alpha\| = 0$

Nous donnerons une Lemme importante que nous l'aurons besoin toujours

3.5.6 Lemme

Si $\|A\varphi\| \leq \beta$ alors $\|A\|\|\varphi\| \leq \beta$ pour $\beta > 0$

Preuve

$$\begin{aligned} \|A\varphi\| \leq \beta &\Rightarrow \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \frac{\beta}{\|\varphi\|} \\ \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} &\leq \frac{\beta}{\|\varphi\|} \Rightarrow \|A\|\|\varphi\| \leq \beta \end{aligned}$$

Et le résultat est vrais pour $\varphi = 0$

Alors : $\forall \varphi \in X: \|A\varphi\| \leq \beta \Rightarrow \|A\|\|\varphi\| \leq \beta$

3.6 Proposition

Soient le problème mal posé :

$$A\varphi = f \text{ et } \check{\varphi} = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$$

Et $\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| + \alpha\|\varphi\|$ avec $\alpha > 0$

Alors : $\|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\| \leq \frac{\alpha\|\check{\varphi}\|}{\|A\|^2}$ et

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\| = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\| = \|\check{\varphi}\|$

Preuve

$$\text{On a } \begin{cases} \alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f \\ A^*A\check{\varphi} = A^*f \end{cases} \Rightarrow A^*A\varphi_\alpha + \alpha\varphi_\alpha = A^*A\check{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^*A(\varphi_\alpha - \check{\varphi}) &= -\alpha\varphi_\alpha \Rightarrow \|A^*A(\varphi_\alpha - \check{\varphi})\| = \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \alpha\|\check{\varphi}\| \\ &\Rightarrow \|A\|^2\|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\| \leq \alpha\|\check{\varphi}\| \\ &\Rightarrow \|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\| \leq \frac{\alpha\|\check{\varphi}\|}{\|A\|^2} \end{aligned}$$

Par passage à la limite on aura : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\| = 0$

Et Puisque : $0 \leq \|\varphi_\alpha\| + \|\check{\varphi}\| \leq \|\varphi_\alpha - \check{\varphi}\|$

$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\| = \|\check{\varphi}\|$

Exemple. Soit l'opérateur

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi = (x, y) \rightarrow A\varphi = 2x + y$$

et soit le problème $A\varphi = f = 2 \Leftrightarrow 2x + y = 2$

Première Méthode : Par La régularisation de Tikhonov

$$\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \{\|A\varphi - f\| + \alpha\|\varphi\|\} \text{ avec } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow (A^*A + \alpha I) \varphi_\alpha = A^*f$$

On a : $(A^tA + \alpha I)^{-1}A^t f = \varphi_\alpha$, car la matrice de l'opérateur A^* et A^t

$$\text{on a: } (A^tA + \alpha I)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha + 4 & 2 \\ 2 & 1 + \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{\alpha^2+5\alpha} & \frac{-2}{\alpha^2+5\alpha} \\ \frac{-2}{\alpha^2+5\alpha} & \frac{4+\alpha}{\alpha^2+5\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_\alpha = (A^t A + \alpha I) A^t f = \begin{pmatrix} \frac{4}{5+\alpha} \\ \frac{2}{5+\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \check{\varphi} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode

$\check{\varphi} = \min_{\varphi \in S} \{\|\varphi\| \text{ où } \varphi \in S \text{ l'ensemble des solutions } A\varphi = f\}$

$$A\varphi = f \Leftrightarrow 2x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$$

$$S = \{(x, 2 - 2x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$$

Posons : la fonction

$$g(x) = \|\varphi\| = \|(x, 2 - 2x)\| = \sqrt{5x^2 - 8x + 4} \Rightarrow g'(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{5x^2 - 8x + 4}}$$

$$= 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\text{Puisque : } \check{\varphi} = \min_{\varphi \in S} \|\varphi\| \Rightarrow \check{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6.1 Lemme

Si $\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in X} \{\|A\varphi - f\| + \alpha\|\varphi\|\}$ tel que $\alpha > 0$

La solution de l'équation régularisée de l'équation mal posée $A\varphi=f$, Alors :

$$\|\varphi_\alpha\| = \frac{\|A\| \|f\|}{\alpha + \|A\|^2}$$

Preuve

D'après l'équation normale on a :

$$AA^* \varphi_\alpha - A^* f + \alpha \varphi_\alpha = 0$$

$$\langle AA^* \varphi_\alpha - A^* f + \alpha \varphi_\alpha, \varphi_\alpha \rangle = 0 \Rightarrow \langle A\varphi_\alpha, A\varphi_\alpha \rangle + \alpha \|\varphi_\alpha\|^2 = \langle A^* f, \varphi_\alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|A\|^2 \|\varphi_\alpha\|^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|^2 \leq \|A\| \|\varphi_\alpha\| \|f\| \\ \text{et} \\ \|A\| \|\varphi_\alpha\| \|f\| \leq \|A\|^2 \|\varphi_\alpha\|^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|^2 \end{cases} \Rightarrow \|\varphi_\alpha\| = \frac{\|A\| \|f\|}{\alpha + \|A\|^2}$$

3.6.2 Proposition

La fonction $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$

1) Continue et décroissante

2) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\varphi_\alpha\| = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\| = \|\check{\varphi}\|$

et $\|\varphi_\alpha\| \leq \|\check{\varphi}\|, \forall \alpha > 0$

où : $\check{\varphi} = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$

Preuve

Soit $\alpha < \beta$

$$\|\varphi_\alpha\| - \|\varphi_\beta\| = \frac{(\beta - \alpha) \|A\| \|f\|}{(\alpha + \|A\|^2)(\beta + \|A\|^2)} > 0$$

\Rightarrow la fonction $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ est décroissante et aussi:

$$|\alpha - \beta| < \gamma \Rightarrow \left| \|\varphi_\alpha\| - \|\varphi_\beta\| \right| = \frac{(\beta - \alpha) \|A\| \|f\|}{(\alpha + \|A\|^2)(\beta + \|A\|^2)} \leq \frac{|\beta - \alpha| \|A\| \|f\|}{\|A\|^4} \leq \frac{(\beta - \alpha) \|f\|}{\|A\|^3} \leq \varepsilon$$

Il suffit de prendre $\gamma = \frac{\|A\|^3 \varepsilon}{\|f\|}$

d'où la continuité de la fonction $\alpha \mapsto \|\varphi_\alpha\|$

et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\varphi_\alpha\| = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\|A\| \|f\|}{\alpha + \|A\|^2} = 0$

et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\| = \|\check{\varphi}\|$, (résultat connu)

car l'équation normale du problème

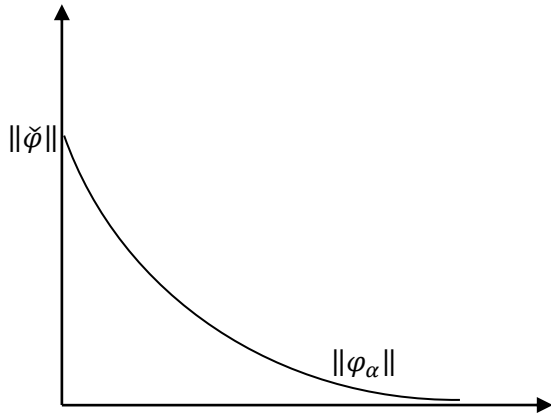
$$\check{\varphi} = \min_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\| \Leftrightarrow A^* A \check{\varphi} - A^* f = 0$$

$$\Rightarrow \langle A^* A \check{\varphi} - A^* f, \check{\varphi} \rangle = 0 \Rightarrow \langle A \check{\varphi}, A \check{\varphi} \rangle = \langle A^* f, \check{\varphi} \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|A\|^2 \|\check{\varphi}\|^2 \leq \|A\| \|f\| \|\check{\varphi}\| \\ \|A\| \|f\| \|\check{\varphi}\| \leq \|A\|^2 \|\check{\varphi}\|^2 \end{cases} \quad (\text{d'après l'inégalité Shwartz})$$

$$\Rightarrow \|\check{\varphi}\| = \frac{\|f\|}{\|A\|} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\|$$

L'illustration de $\|\varphi_\alpha\|$



La relation entre $\|A\varphi_\alpha - f\|$ et $\|A\check{\varphi} - f\|$

Dans les paragraphes précédents nous avons démontré que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\|$$

Mais la question que se pose qu'elle est la relation entre $\|A\varphi_\alpha - f\|$ et $\|A\check{\varphi} - f\|$?

3.6.3 Théorème

La relation entre les résidus de l'équation régularisée et l'équation originale est :

$$\begin{cases} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\| + o(\alpha) \\ \text{avec } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Preuve

$$\text{On aura : } \begin{cases} \|A\check{\varphi} - f\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \\ \text{et} \\ \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha\|\check{\varphi}\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\| \leq \alpha(\|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\|)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|}{\alpha} \leq (\|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\|)$$

Et par le passage à la limite on aura :

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|}{\alpha} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\|)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\| = o(\alpha) = \alpha \varepsilon(\alpha)$$

Avec $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varepsilon(\alpha)$ est se termine la démonstration

3.6.4 Conséquence du théorème

On peut appliquer le Théorème précédent pour obtenir l'équation normale du problème mal posé : $A\varphi=f$

Preuve

Les résidus $r = \|A\check{\varphi} - f\|$ et $r_\alpha = \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\|$ avec $\alpha > 0$

on a $\|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\| + o(\alpha)$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|}{\alpha} = 0$$

Posons la fonction : $h(\alpha) = \|A\varphi_\alpha - f\|$ nous aurons

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h(\alpha) - h(0)}{\alpha} = 0 = h'(0)$$

Et la dérivée $h'(\alpha) = A^*A\varphi_\alpha - A^*f$

$$h'(0) = 0 \Rightarrow A^*A\check{\varphi} - A^*f = 0$$

Car $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_\alpha\| = \|\check{\varphi}\|$ ainsi A^*A est borné.

Remarque.

On développe la fonction $\alpha \mapsto \|A\varphi_\alpha - f\|$ en premier ordre au voisinage de "0", la partie régulière de ce développement est le résidu de l'équation originale :

$$A\varphi=f$$

Un exemple d'application révèle important pour ce résultat.

Exemple.

$$\text{Dans l'espace } \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A\varphi = f \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et $\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|A\varphi - f\| + \alpha \|\varphi\| \Rightarrow A^*A\varphi_\alpha - A^*f + \alpha\varphi_\alpha = 0$$

Avec $\varphi_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*A + \alpha I)\varphi_\alpha = A^*f$

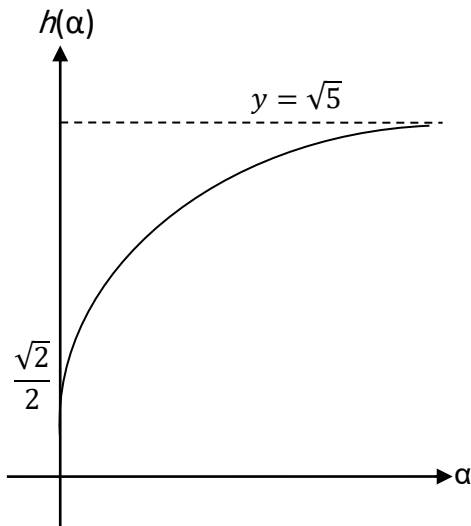
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 + \alpha & 2 \\ 2 & 2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x_\alpha \ y_\alpha) = \left(\frac{3}{\alpha+4} \quad \frac{3}{\alpha+4} \right)$$

$$\|A\varphi_\alpha - f\| = \left\| \left(\frac{6}{\alpha+4} - 2, \frac{6}{\alpha+4} - 1 \right) \right\| = \frac{\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+8}}{\alpha+4}$$

Soit la fonction $h(\alpha) = \frac{\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+8}}{\alpha+4}$

La table de variation de $h(\alpha)$ est :

α	0	$+\infty$
$h(\alpha)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{5}$



$$\|A\varphi_\alpha - f\| = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} \alpha + \alpha \varepsilon(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha \varepsilon(\alpha)$$

Calcul du reste $\alpha \varepsilon(\alpha)$

$$\alpha \varepsilon(\alpha) = \|A\varphi_\alpha - f\| - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+8}-\sqrt{2}(\alpha+4)}{2(\alpha+4)}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \varepsilon(\alpha) = 0$$

Alors le résidu $\|A\check{\varphi} - f\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ où $\check{\varphi}$ est la solution approchée du problème :

$$A\varphi = f$$

On cherche $\check{\varphi} = (x, y) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|A\varphi - f\|$

$$\|A\check{\varphi} - f\| = \|(x + y - 2, x + y - 1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (x + y - 2)^2 (x + y - 1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \check{\varphi} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2} - x \end{pmatrix} \text{ Et puisque } \check{\varphi} \text{ est minimisée :}$$

$$\min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|A\varphi - f\| \Rightarrow \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2} \text{ Est minimale.}$$

$$\text{Posons } g(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \check{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha = \check{\varphi}$$

Remarque

On applique le théorème précédent pour montrer que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\|$$

Preuve

On sait que :

$$\|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\| + o(\alpha)$$

On définit la fonction :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}_+^* &\mapsto \mathbb{R}_+ \\ \alpha &\mapsto \|A\varphi_\alpha - f\| \end{aligned}$$

Et on prolonge la fonction g à h en zéro comme suit :

$$\begin{cases} h(\alpha) = g(\alpha) & \text{I} \alpha > 0 \\ h(0) = \|A\check{\varphi} - f\| \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h(\alpha) - h(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|}{\alpha} = 0$$

$\Rightarrow h$ est dérivable en zéro et $h'(0) = 0$

Alors elle est continue en zéro \Rightarrow

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\alpha) = h(0)$ et on déduit que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A\varphi_\alpha - f\| = \|A\check{\varphi} - f\|$ et alors

La fonction $\alpha \mapsto \|A\varphi_\alpha - f\|$ prend sa minimum lorsque $\alpha \rightarrow 0$, Car

$\|A\check{\varphi} - f\|$ est minimum.

Majoration de l'erreur : $o(\alpha) = \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\|$

Proposition :

On a

$$\begin{cases} o(\alpha) \leq \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)} \\ o(\alpha) = \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\| \end{cases}$$

Démonstration

Par définition de φ_α et $\check{\varphi}$ on a :

$$\|A\check{\varphi} - f\| + \alpha \|\varphi_\alpha\| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha \|\varphi_\alpha\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha \|\check{\varphi}\|$$

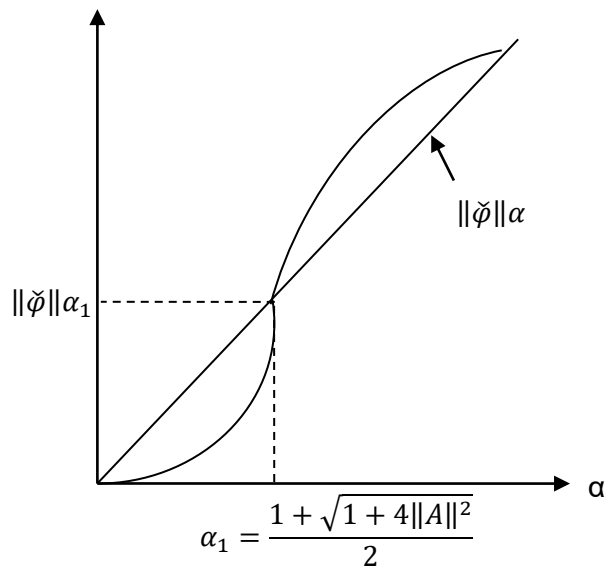
$$\Rightarrow 0 \leq \|A\varphi_\alpha - f\| - \|A\check{\varphi} - f\| \leq \alpha (\|\check{\varphi}\| - \|\varphi_\alpha\|)$$

$$\Rightarrow o(\alpha) \leq \alpha \left(\frac{\|f\|}{\|A\|} - \frac{\|A\| \|f\|}{\alpha + \|A\|^2} \right) = \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)}$$

D'où le résultat.

Étude de l'erreur

Soit l'erreur $H(\alpha) = \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)}$ avec, $\alpha > 0$



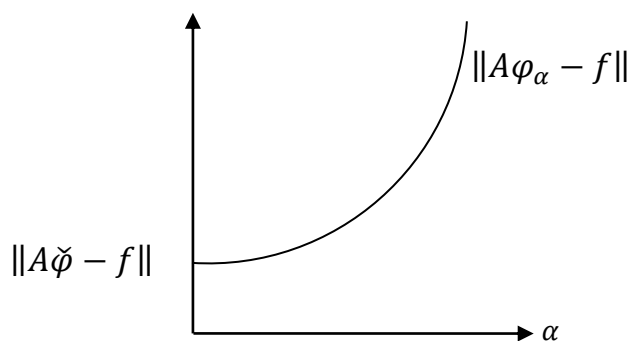
Remarque Importante : pour la fonction, $\alpha \mapsto \|A\varphi_\alpha - f\|$

On remarque que l'erreur s'annule $\alpha=0$, et à l'infinie il coïncide avec

$$\|\check{\varphi}\|_\alpha \rightarrow +\infty$$

Et pour ceci on déduit que la fonction $\alpha \mapsto \|A\varphi_\alpha - f\|$ est croissante et elle prend sa minimum $\|A\check{\varphi} - f\|$ en $\alpha=0$.

L'illustration de $\alpha \mapsto \|A\varphi_\alpha - f\|$:



3.6.5 la restriction de la valeur du résidu $\|A\check{\varphi} - f\|$

Proposition

$$\frac{\|f\|}{(2+\sqrt{2})\|A\|+1} \leq r = \|A\check{\varphi} - f\| \leq \frac{\|f\|}{(2-\sqrt{2})\|A\|+1}$$

Preuve.

D'après l'équation normale du problème (équation) régularisée :

$$A^*A\varphi_\alpha - A^*f + \alpha\varphi_\alpha = 0 \Rightarrow A^*(A\varphi_\alpha - f) = -\alpha\varphi_\alpha$$

$$\Rightarrow \langle A^*(A\varphi_\alpha - f), \varphi_\alpha \rangle = -\alpha \langle \varphi_\alpha, \varphi_\alpha \rangle = -\alpha \|\varphi_\alpha\|^2$$

$$\Rightarrow \alpha \|\varphi_\alpha\|^2 = |\langle A^*(A\varphi_\alpha - f), \varphi_\alpha \rangle| \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \|A\| \|\varphi_\alpha\|$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha \|\varphi_\alpha\|}{\|A\|} \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \text{ D'une part, et d'autre part :}$$

$$\|A\varphi_\alpha - f\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)} \quad (\text{D'après la proposition précédente})$$

$$\text{On sait que } \|\varphi_\alpha\| = \frac{\|A\| \|f\|}{\alpha + \|A\|^2}$$

$$\frac{\alpha \|f\|}{\alpha + \|A\|^2} \leq \|A\varphi_\alpha - f\| \leq \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)}$$

$$\|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)} - \frac{\alpha \|f\|}{\alpha + \|A\|^2} \geq 0, \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{(\alpha^2 - \alpha \|A\|) \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)} = \frac{\|A\|(\alpha + \|A\|^2) \|A\check{\varphi} - f\| (\alpha^2 - \alpha \|A\|) \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \|A\| \|A\check{\varphi} - f\| + \|A\|^3 \|A\check{\varphi} - f\| + \alpha^2 \|f\| - \alpha \|A\| \|f\| \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \|f\| + \alpha [\|A\| (\|A\check{\varphi} - f\| - \|f\|)] + \|A\|^3 \|A\check{\varphi} - f\| \geq 0, \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 [\|A\check{\varphi} - f\|^2 + \|f\|^2 - 2\|f\| \|A\check{\varphi} - f\|] - 4\|f\| \|A\|^3 \|A\check{\varphi} - f\| \leq 0$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\|^2 + \|f\|^2 - \|A\check{\varphi} - f\| (2\|f\| + 4\|A\| \|f\|) \leq 0; \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \Delta' > 0 \text{ et } f \in [\|f_1\|, \|f_2\|]$$

$$\Delta' = (1 + 2\|A\|)^2 \|A\check{\varphi} - f\|^2 - \|A\check{\varphi} - f\|^2 > 0 \text{ et } f \in [f_1, f_2]$$

$$\Delta' = 2\|A\|^2\|A\check{\varphi} - f\|^2$$

$$f_{1,2} = (1 + 2\|A\|)\|A\check{\varphi} - f\| \pm \sqrt{2}\|A\|\|A\check{\varphi} - f\|$$

$$\text{Et} \Rightarrow \begin{cases} \|f_1\| = [1 + (2 - \sqrt{2})\|A\|]\|A\check{\varphi} - f\| \\ \|f_2\| = [1 + (2 + \sqrt{2})\|A\|]\|A\check{\varphi} - f\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_1\| \leq \|f\| \leq \|f_2\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|f\|}{1+(2+\sqrt{2})\|A\|} \leq r = \|A\check{\varphi} - f\| \leq \frac{\|f\|}{1+(2-\sqrt{2})\|A\|}$$

Remarque

si $f = 0$ alors $\check{\varphi} \in \text{Ker}A$

$$\text{et si } \check{\varphi} \in \text{Ker}A \Rightarrow \frac{1}{1+(2+\sqrt{2})\|A\|} \leq 1 \leq \frac{1}{1+(2-\sqrt{2})\|A\|}$$

$\Rightarrow 2\|A\| \leq \sqrt{2}\|A\| \Rightarrow 2 \leq \sqrt{2}$ Et ce résultat est refusé et donc on déduit que :

Les deux Conséquences suivantes :

$$\begin{cases} \check{\varphi} \in (\text{Ker}A)^\perp \Leftrightarrow f \neq 0 \\ \text{et} \\ \check{\varphi} \in (\text{Ker}A) \Leftrightarrow f = 0 \end{cases}$$

3.7 Etude spécifique de l'équation mal posée

Notre étude spécifique repose d'une façon essentielle sur le cas où : $\|f\| \leq \|A\|$

On peut appliquer le théorème du point fixe sur la fonction g définie par

$$g(\alpha) = \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\alpha^2\|f\|}{\|A\|(\alpha+\|A\|^2)} \Rightarrow g(\alpha) = r + E(\alpha)$$

3.7.1 proposition $\exists! a > 0$ telque $g(a) = a$

Preuve

La fonction g est continue et elle vérifie : $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$

$$\begin{aligned} |g(\alpha) - g(\beta)| &= |\alpha - \beta| \frac{\|f\|[\alpha\beta + (\alpha + \beta)\|A\|^2]}{\|A\|[\alpha\beta + (\alpha + \beta)\|A\|^2 + \|A\|^4]} \\ &= k|\alpha - \beta| \end{aligned}$$

Avec $0 < k = \frac{\|f\|[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\|A\|^2]}{\|A\|[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\|A\|^2+\|A\|^4]} < 1$

Cela implique la fonction g est contractante alors : $\exists! \acute{\alpha} > g(\acute{\alpha}) = \acute{\alpha}$ et

$$\acute{\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \text{ telque } \alpha_{n+1} = g(\alpha_n) \text{ et } \alpha_0 > 0$$

$$g(\acute{\alpha}) = \acute{\alpha} \Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\acute{\alpha}^2 \|f\|}{\|A\|(\acute{\alpha} + \|A\|^2)} = \acute{\alpha}$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\| = \acute{\alpha} - \frac{\acute{\alpha}^2 \|f\|}{\|A\|(\acute{\alpha} + \|A\|^2)} = \frac{\acute{\alpha}^2 \|A\| + \acute{\alpha} \|A\|^3 - \acute{\alpha}^2 \|f\|}{\|A\|(\acute{\alpha} + \|A\|^2)}$$

$$\Rightarrow \|A\check{\varphi} - f\| = \frac{\acute{\alpha}^2 (\|A\| - \|f\|) + \acute{\alpha} \|A\|^3}{\acute{\alpha} \|A\| + \|A\|^3} \text{ Avec}$$

$$\{\acute{\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \text{ et } \alpha_{n+1} = g(\alpha_n) \text{ et } \alpha_0 > 0$$

On déduit alors la proposition suivante :

Si $\|f\| \leq \|A\|$ on a : $r = \|A\check{\varphi} - f\| = \frac{a^2(\|A\| - \|f\|) + a\|A\|^3}{a\|A\| + \|A\|^3}$, avec $a > 0$

Tel que : a est le point fixe de la fonction g définie par :

$$g(\alpha) = \|A\check{\varphi} - f\| + \frac{\alpha^2 (\|f\|)}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)}$$

La fonction E définie par $E(\alpha) = \frac{\alpha^2 \|f\|}{\|A\|(\alpha + \|A\|^2)}$ où $E(\alpha)$ est l'erreur admet un point

fixé unique : $b = \frac{b^2 \|f\|}{\|A\|(b + \|A\|^2)}$

Preuve

$$E(\alpha) - E(\beta) = \frac{\|f\|}{\|A\|} \frac{[(\alpha\beta+(\alpha+\beta)A^2)]}{[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\|A\|+\|A\|^4]} |\alpha - \beta|$$

$$|E(\alpha) - E(\beta)| = k(\alpha, \beta) |\alpha - \beta| \leq L |\alpha - \beta|, \quad 0 \leq L \leq 1$$

Car $0 \leq k(\alpha, \beta) \leq 1$

Alors k est une contraction sur $[0, +\infty[$ et elle admet une seul point fixe $b/ E(b)=b$ alors $\exists b: \|A\varphi_\alpha - f\| \leq r + b$

Comparaison entre a et b :

3.7.2 lemme $a > b$

Preuve

$$E(a) - E(b) = \frac{\|f\|}{\|A\|} \frac{[ab + (a + b)\|A\|^2]}{[ab + (a + b)\|A\|^2 + \|A\|^4]} (a - b)$$

$$\Rightarrow a - b = \frac{\|A\|}{\|f\|} \frac{[ab + (a + b)\|A\|^2 + \|A\|^4]}{[ab + (a + b)\|A\|^2]} (E(a) - E(b)) \dots \dots (3.9)$$

D'une part et d'autre part :

on a $\begin{cases} r + E(a) = a & \text{car } a \text{ est un point fixe de } g \\ E(b) = b & b \text{ est un point fixe de } E \end{cases}$

$$\Rightarrow E(a) + r - E(b) = a - b \Rightarrow E(a) - E(b) = a - b - r \dots \dots (3.10)$$

D'après (3.9) et de (3.10) on aura :

$$a - b = \frac{1}{k} (1 - b - r) \Rightarrow (1 - \frac{1}{k})(a - b) = -\frac{r}{k} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{k-1}{k} (a - b) = -\frac{r}{k} \Rightarrow r = (1 - k)(a - b)$$

$$\Rightarrow a > b$$

Conséquences et remarques :

1) $0 \leq k \leq 1$ et $r \geq 0 \Rightarrow a \geq b$

2) comme $\|A\varphi_\alpha - f\|$ est croissante alors

$$\|A\varphi_b - f\| \leq \|A\varphi_a - f\| \leq a$$

Et $\forall \alpha > a: \|A\varphi_\alpha - f\| > a$

3) $r = 0 \Leftrightarrow a = b$

4) si $\|A\varphi_a - f\| = a \Rightarrow r = 0$

Car $\|A\varphi_\alpha - f\|$ est croissante et a est l'unique point vérifie $\|A\varphi_a - f\| \leq a$

5) d'après les relations (3.9), (3.10) on peut trouver a, b et r .

Chapitre 4 : La solution numérique de l'équation intégrale de Fredholm du premier type

4.1 Introduction

Le problème inverse prend une part considérable dans le domaine des équations différentielles et différentielles partielles. Comme exemple marquant du problème mal posé, nous trouvons une équation intégrale du premier type où la plupart des problèmes d'ingénierie et de physique mathématique peuvent être modélisés dans cette équation, de nombreuses méthodes étudient sa solution d'approximation et sa stabilité. Dans [19], les auteurs ont résolu l'équation intégrale du premier type par ondelette de Chebyshev construite dans l'intervalle borné et ont utilisé la technique de Galerkin afin de réduire l'équation intégrale en un système linéaire algébrique. Par contre, dans [21, 22] la méthode de collocation avec des ondelettes de Legendre est utilisée directement pour cette équation et la convertit en un système linéaire algébrique.

L'utilisation de la méthode des fonctions de base depuis longtemps est à l'objectif de résoudre l'équation intégrale de premier type a été trouvée dans [23]. La méthode proposée par les auteurs dans [28] consiste à utiliser la méthode du polynôme Hermite avec la méthode des moindres carrés afin de résoudre l'équation intégrale du premier type avec noyau dégénéré supporté par les méthodes de Galerkin et de collocation.

Soit A un opérateur compact linéaire défini de l'espace de Hilbert H à lui-même sur le corps \mathbb{R} . Nous expliquons le problème linéaire inverse d'un premier type par:

$$A\varphi = f \dots\dots\dots(4.1)$$

Où f est la fonction de données et φ le potentiel inconnu, supposons que A soit injectif, alors l'équation (1) admet une solution unique au sens direct ou au dernier sens carré à condition que le côté droit f soit dans $Im(A)$ ou dans $Im(A) + Im(A)^\perp$ respectivement. En raison de l'ensemble $Im(A)$ non fermée, la solution n'est pas stable. De plus, si A est défini positif, nous pouvons remplacer l'équation d'origine par l'équation auxiliaire

$$\alpha\varphi_\alpha + A\varphi_\alpha = f \dots\dots\dots(4.2)$$

Où on ajoute le terme $\alpha\varphi$ à l'opérateur $A\varphi$ pour φ positif et petit, l'équation (2) admet une solution stable φ_α . Notant que la fonction φ_α converge vers la solution exacte φ de l'équation (4.1) lorsque α tend vers zéro [26].

4.2 Méthode de Lavrentiev

La méthode de Lavrentiev pour l'équation (4.1) consiste à remplacer l'équation par la suivante $A\varphi = f_\delta$ par $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, si le membre droit f_δ n'est pas dans l'ensemble $Im(A)$, Lavrentiev modifie l'équation $A\varphi = f_\delta$ par son équation auxiliaire

$$\alpha\varphi_{\alpha\delta} + A\varphi_{\alpha\delta} = f_\delta \dots\dots\dots(4.3)$$

Il est clair que, si l'opérateur A est défini positif, le problème du second type (4.3) est bien posé. **Lavrentiev** prouve que la solution $\varphi_{\alpha\delta}$ de l'équation (4.3) tend vers la solution exacte φ de l'équation (4.1) avec les conditions α et δ tendent vers zéro.

4.3 Méthode de régularisation de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov de l'équation (4.1) correspond aux opérateurs de régularisation

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*, \text{ for } \alpha > 0 \dots\dots(4.4)$$

Qui se rapproche de l'opérateur illimité, A^{-1} sur $Im(A)$. Notant que la solution

$\varphi_\alpha = R_\alpha f$ représente l'unique solution de l'équation

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f \dots\dots\dots(4.5)$$

Et dépend continument de f , pour tout $f \in X$ et $\alpha > 0$. Cette solution est également l'unique minimum de la fonctionnelle de Tikhonov

$$J_\alpha(\varphi) = \|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2, \text{ pour } \varphi \in X \text{ et } \alpha > 0$$

Dans ce travail, nous concentrons notre étude sur les équations intégrales de Fredholm du premier type.

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x.t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Où $k(x, t)$ et f sont des fonctions continues et $\varphi(x) \in X([a, b])$ est la fonction potentielle inconnue à déterminer.

Lemme

Le problème (4.2) est bien posé avec la norme $\|(\alpha I + A)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ [27].

Proposition

L'injectivité et la positivité de l'opérateur compact A conduisent à l'existence et l'unicité de la solution du problème auxiliaire (4.2)

$$\alpha\varphi_\alpha + A\varphi_\alpha = f, \quad \alpha > 0$$

De plus, la solution φ_α converge vers la solution exacte φ du problème initial (1), lorsque α va à zéro, disons

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_\alpha\| = 0$$

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_\alpha &= \varphi - (\alpha I + A)^{-1}f \\ &= \varphi - (\alpha I + A)^{-1}A\varphi \\ &= \varphi(\alpha I + A)^{-1}\varphi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_\alpha\| &\leq \alpha \|(\alpha I + A)^{-1}\| \|\varphi\| \\ \|\varphi - \varphi_\alpha\| &= O(\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

4.4 Méthode Nyström

L'utilisation de la règle de quadrature pour approximer $\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$ dire

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = \sum_{j=1}^n w_j k(x, t_j)\varphi(t_j)$$

Ainsi, l'équation (1) peut être remplacée par

$$A_n\varphi(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \dots \dots \dots (4.6)$$

Dans la méthode de collocation, les valeurs de $\varphi(t_j), j = 1, 2, \dots, n$ sont trouvées de sorte que l'équation (6) est vérifiée pour tous les points x_1, x_2, \dots, x_m , dans

$[0, 1]$. Il n'est pas nécessaire de prendre $m = n$, mais souvent m et n sont choisis égaux, et x_i est choisi comme $x_i t_i, i=1, 2, \dots, n$.

$$\sum_{j=1}^n w_j k(x_i, t_j) \varphi(t_j) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (4.7)$$

Nous avons $A = (\alpha_{ij})$ la matrice $n \times n$ telle que $\alpha_{ij} = w_j k(x_i, t_j)$ pour

$$1 \leq i, j \leq n,$$

Le vecteur inconnu

$\vec{\Phi} = (\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_n))^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ et le vecteur de droite $\vec{F} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ alors l'équation auxiliaire (2) peut être approchée par l'équation matricielle

$$(\alpha I + A) \vec{\Phi}_\alpha = \vec{F} \dots \dots \dots (4.8)$$

Le système algébrique (4.8) admet une solution unique $\vec{\Phi}_\alpha$ converge vers la solution $\vec{\Phi}$ de système $A \vec{\Phi} = \vec{F}$ quand $\alpha \rightarrow 0$

Lemme

On a l'inégalité suivante $\|(\alpha I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$ à condition que, A soit un opérateur défini positif. En effet, A est positif et injectif, il suit :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle &= I + \langle (\alpha I + A)(\alpha I + A)^{-1} \varphi, (\alpha I + A)(\alpha I + A)^{-1} \varphi \rangle \\ &= \langle \alpha(\alpha I + A)^{-1} \varphi \rangle + A(\alpha I + A)^{-1} \varphi, \langle \alpha(\alpha I + A)^{-1} \varphi + A(\alpha I + A)^{-1} \varphi \rangle \\ &= \|\varphi\|^2 = \alpha^2 \|(\alpha I + A)^{-1} \varphi\|^2 + 2\alpha \langle A(\alpha I + A)^{-1} \varphi, (\alpha I + A)^{-1} \varphi \rangle \\ &\quad + \|(\alpha I + A)^{-1} \varphi\|^2, \|\varphi\|^2 \geq \alpha^2 \|(\alpha I + A)^{-1}\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\|(\alpha I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

Lemme

L'opérateur $(\alpha I + A)$ est inversible sur l'espace de Hilbert X à lui-même si

$\|(A - A_n)A_n\| \leq \alpha^2$, Outre Si $(\alpha I + A_n)\varphi_n = f$ et $(\alpha I + A)\varphi = f$ en suite

$$\|\varphi - \varphi_n\| = o(\alpha)$$

En effet

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha} [I - (\alpha I + A)^{-1} A_n] (\alpha I + A_n) &= \\
 &= I - (\alpha I + A)^{-1} A_n + \frac{1}{\alpha} [I - (\alpha I + A)^{-1} A_n] A_n \\
 &= I - (\alpha I + A)^{-1} A_n + \frac{1}{\alpha} [(\alpha I + A)^{-1} ((\alpha I + A) - A_n)] A_n \\
 &= I - (\alpha I + A)^{-1} A_n + \frac{1}{\alpha} [(\alpha I + A)^{-1} (\alpha I + A - A_n)] A_n \\
 &= \left(I + \frac{1}{\alpha} (\alpha I + A)^{-1} (A - A_n) A_n \right)
 \end{aligned}$$

En notant que, le côté droit de la dernière expression est inversible, car

$$\frac{1}{\alpha} \|(\alpha I + A_n)^{-1} (A - A_n)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|(\alpha I + A)^{-1}\| \| (A - A_n) A_n \| < 1.$$

L'injectivité du côté droit implique celle de $(\alpha I + A_n)$ et donc sa bijectivité. Pour l'erreur, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_n - \varphi\| &= \|(\alpha I + A_n)^{-1} - (\alpha I + A)^{-1}\| \|f\| \\
 &= \|(\alpha I + A)^{-1} (A_n - A) (\alpha I + A_n)^{-1}\| \|f\| \\
 &= \|(\alpha I + A)^{-1} (A - A_n)\| \|\varphi_n\| \\
 &\leq \|(\alpha I + A)^{-1}\| \| (A - A_n) \| \|\varphi_n\| = o(\alpha)
 \end{aligned}$$

4.5 Exemples explicatifs

Exemple 1. Considérons les équations intégrales de premier type de Fredholm

$$\int_0^1 e^{xt} \varphi(t) dt = \frac{e^{x+1} - 1}{x + 1}$$

Où $0 \leq t, x \leq 1$, et la fonction $f(x)$ est choisie de sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = e^x$$

Tableau 1. Nous présentons la solution exacte φ et son approximative φ_α ainsi que l'erreur absolue $|\varphi - \varphi_\alpha|$ de l'exemple 1 en quelques points arbitraires pour

$N = 10$ et $\alpha=10^{-6}$ l'erreur est comparée à la méthode des ondelettes de Chebyshev [19] et à la méthode des ondelettes de Haar [24].

Tableau 1 : comparaison numérique entre la solution exacte et la solution approchée φ_α de l'exemple1[29]

Valeur de x	La solution exacte φ	La solution approchée φ_α	$ \varphi - \varphi_\alpha $	L'erreur ondelette de Tchebychev	L'erreur ondelette de Haar
0.000	1.00e+00	9.99e-01	1.21e-06	1.46e-05	7.85e-03
0.200	1.22e+00	1.22e+00	8.22e-07	1.73e-05	5.69e-03
0.400	1.49e+00	1.49e+00	3.09e-07	1.57e-05	2.31e-03
0.600	1.82e+00	1.82e+00	1.05e-06	1.30e-06	2.86e-03
0.800	2.22e+00	2.22e+00	1.80e-06	1.52e-05	1.04e-02
1.000	2.71e+00	2.71e+00	7.95e-06	1.04e-05	4.98e-03

Exemple 2. Considérons les équations intégrales de premier type de Fredholm

$$\int_0^1 e^{t \sin x} \varphi(t) dt = \frac{1}{1 + \sin^2(x)} e^{\sin x} ((\cos 1 \sin x + \sin 1) - \sin x)$$

Où $0 \leq t, x \leq 1$, et la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution Exacte soit donnée par $\varphi(x) = \cos(x)$

Tableau 2. Nous présentons la solution exacte φ et son approximative φ_α ainsi que l'erreur absolue $|\varphi - \varphi_\alpha|$ de l'exemple 2 en quelques points arbitraires pour $N = 10$ et $\alpha=10^{-6}$, l'erreur est comparée à Legendre méthode de collocation par ondelettes [21].

Tableau 2 : comparaison numérique entre la solution exacte et la solution approchée φ_α de l'exemple2[29]

Valeur de x	La solution exacte φ	La solution approchée φ_α	$ \varphi - \varphi_\alpha $	L'erreur par la méthode de Legendre
0.000	1.000e+00	9.991e-01	8.828e-04	1.488e-03
0.200	9.800e-01	9.803e-01	2.667e-04	2.531e-03
0.400	9.210e-01	9.207e-01	3.320e-04	4.740e-03
0.600	8.253e-01	8.255e-01	2.007e-04	2.920e-03
0.800	6.967e-01	6.966e-01	4.073e-05	4.951e-03
0.900	5.816e-01	5.815e-01	9.163e-05	1.239e-03

Exemple 3. Considérons les équations intégrales de premier type de Fredholm

$$\int_0^1 (x^2 + 2xt + t^2)\varphi(t) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$$

Où $0 \leq t, x \leq 1$, et la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = x$

Tableau 3. Nous présentons la solution exacte φ et son approximative φ_α ainsi que l'erreur absolue $|\varphi - \varphi_\alpha|$ de l'exemple 3 en quelques points arbitraires pour $N = 10$ et $\alpha=10^{-6}$ l'erreur est comparée à Hermite méthode polynomiale [27].

Tableau 3 : comparaison numérique entre la solution exacte et la solution approchée φ_α de l'exemple3[29]

Valeur de x	La solution exacte φ	La solution approchée φ_α	$ \varphi - \varphi_\alpha $	L'erreur par le polynôme d'Hermite
0.000	0.000e+00	1.781e-07	1.781e-07	1.6e-03
0.200	2.000e-01	2.000e-01	2.158e-08	6.0e-04
0.400	4.000e-01	4.000e-01	4.687e-08	5.0e-04
0.600	6.000e-01	5.999e-01	8.356e-08	5.0e-04
0.800	8.000e-01	8.000e-01	7.016e-09	4.0e-04
1.000	1.000e-00	1.000e-00	1.140e-07	1.7e-03

Exemple 4. Considérons les équations intégrales de premier type de Fredholm

$$\int_0^1 \cos(x - t) \varphi(t) dt = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \cos(x - 2)$$

Où $0 \leq t, x \leq 1$, et la fonction $f(x)$ est choisie de sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \sin x$.

Tableau 4. Nous présentons la solution exacte φ et son approximative φ_α ainsi que l'erreur absolue $|\varphi - \varphi_\alpha|$ de l'exemple 4 en quelques points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N= 10$ et $\alpha=10^{-6}$.

SUR LA SOLUTION NUMÉRIQUE DE FREDHOLM

Tableau 4 : comparaison numérique entre la solution exacte et la solution approchée φ_α de l'exemple4[29]

Valeur de x	La solution exacte φ	La solution approchée φ_α	$ \varphi - \varphi_\alpha $
0.000	0.000e+00	1.384e-08	1.384e-08
0.200	1.986e-01	1.986e-01	8.067e-09
0.400	3.894e-01	3.894e-01	5.170e-09
0.600	5.646e-01	5.646e-01	1.680e-08
0.800	7.173e-01	7.173e-01	1.941e-08
1.000	8.414e-01	8.414e-01	3.261e-08

Exemple 5. Considérons les équations intégrales de premier type de Fredholm

$$\int_0^1 \sinh(x - t) \varphi(t) dt = \frac{1}{8} \exp(x) (\exp(-2) - 3 + \exp(-2x) + \exp(2) \exp(-2x))$$

Où $0 \leq t, x \leq 1$, et la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \cosh(x)$.

Tableau 5. Nous présentons la solution exacte φ et son approximative φ_α ainsi que l'erreur absolue $|\varphi - \varphi_\alpha|$ de l'exemple 5 en quelques points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N= 10$ et $\alpha=10^{-6}$.

4.6 Conclusion

Cette technique numérique de la résolution des équations intégrales de Fredholm de premier type, concentrée sur quelques modifications de la méthode classique de Lavrentiev supportées par l'approximation de Simpson modifiée [25], la solution approchée φ_α est sensiblement proche de la solution exacte φ de l'équation donnée sur l'intervalle entier $[0, 1]$. Cette méthode est testée en résolvant quelques exemples dont la solution exacte est connue et prouve son efficacité par rapport à d'autres méthodes.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons effectué une étude approfondie sur les opérateurs linéaires bornés et les opérateurs compacts dans l'espace d'**Hilbert** pour donner un univers pour les solutions des équations linéaires, par exemple les systèmes linéaires et les équations intégrales de **Fredholm** de première espèce. Par suite d'atteindre nos objectifs mathématiques nous avons présenté la décomposition en valeurs singulières des matrices reliées avec ses valeurs propres pour trouver les solutions exactes de ses systèmes.

1) La détermination d'une solution φ_α de l'équation $(A + \alpha I) = f$ qui converge vers la solution exacte de l'équation $A\varphi = f$ par la régularisation de

Tikhonov

2) Détermination de la solution numérique de l'équation intégrale de **Fredholm**, de première espèce

3) Des exemples ont t'été pris en détail pour donner preuve à nos résultats de la solution numérique.

En perspectif nous avons installé une méthode mathématique pour convertir l'équation de Fredholm à la forme numérique.

Références bibliographiques

- [01] article est partiellement ou en totalité issu de l'article de Wikipédia en anglais intitulé « Hilbert Space » (voir la liste des auteurs). Colmez 2009, p. 159.
- [02] Pierre Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres), Éditions de l'École Polytechnique, 2009 (ISBN 978-2-7302-1563-3, lire en ligne [archive]), chap. II.2 (« Espaces de Hilbert »), p. 159-164
- [03] en) J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides et G. López Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Springer, 1997 (ISBN 978-3-76435794-8, lire en ligne [archive]), p. 13, dans le cas où X et Y sont des espaces de Banach et T n'est définie que sur une partie de X.
- [04] (en) Yuri A. Abramovich et Charalambos D. Aliprantis, An Invitation to Operator Theory, AMS, coll. « GSM (en) » (n° 50), 2002 (lire en ligne [archive]), p. 272-273.
- [05] (en) Ronald G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, 1972, p. 133 [archive].
- [06] Georg Wilhelm Friedrich Hegel, Les Orbites des planètes : dissertation de 1801, p. 52.
- [07] CRAS, Volume 3, Gauthier-Villars, 1836, p. 141.
- [08] « 3.6 système surdéterminé » dans Analyse numérique première partie, Professeur F.X. LITT, Centrale des cours de l'AEES (ULg).
- [09] P. Cornillon et É. Matzner-Løber, Régression, Paris, Springer, 2007.
- [10] Tikhonov AN, 1943, On the stability of inverse problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 39, No. 5, 195-198
- [11] Tikhonov AN, 1963, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math Dokl 4, 1035-1038 English translation of Dokl Akad Nauk SSSR 151, 1963, 501-504
- [12] Tikhonov AN and Arsenin VA, 1977, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons, Washington, (ISBN 0-470-99124-0).
- [13] Hansen, P.C., 1998, Rank-deficient and Discrete ill-posed problems, SIAM
- [14] Hoerl AE, 1962, Application of ridge analysis to regression problems, Chemical Engineering Progress, 58, 54-59.
- [15] Foster M, 1961, An application of the Wiener-Kolmogorov smoothing theory to matrix inversion, J. SIAM, 9, 387-392
- [16] Phillips DL, 1962, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J Assoc Comput Mach, 9, 84-97

- [17] Tarantola A, 2004, Inverse Problem Theory ([free PDF version \[archive\]](#)), Society for Industrial and Applied Mathematics, (ISBN 0-89871-572-5)
- [18] Wahba, G, 1990, spline Models for Observational Data, SIAM
- [19] H. Adibi and P. Assari, Chebyshev wavelet method for numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010, Article ID 138408, 17 pages
- [20] M. Bahmanpour and M. A. F. Araghi, A method for solving Fredholm integral equation of the first kind based on Chebyshev wavelets, *Analysis in Theory and Applications* 29(3) (2013), 197-207.
- [21] J. Kumar, P. Manchanda and Pooja, Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind using Legendre wavelets collocation method, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 117(1) (2017), 33-43.
- [22] K. Maleknejad and R. Dehbozorgi, Legendre wavelets direct method for the numerical solution of Fredholm integral equation of the first kind, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2016*, Vol. 1, London, U.K.
- [23] Y. Maleknejad, H. S. Rostami, and Kalalagh, Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method, *International Journal of Applied Physics and Mathematics* 6(3) (2016), 120-128.
- [24] K. Maleknejad, R. Mollapourasl and K. Nouri, Convergence of numerical solution of the Fredholm integral equation of the first kind with degenerate kernel, *Applied Mathematics and Computation* 181(2) (2006), 1000-1007.
- [25] M. Nadir and A. Rahmoune, Modified method for solving linear Volterra integral equations of the second kind using Simpsons rule, *International Journal Mathematical Manuscripts* 1(2) (2007), 133-140.
- [26] M. Nadir and N. Djaidja, Approximation method for Volterra integral equation of the first kind, *International Journal of Mathematics and Computation* 29(4) (2018), 67-72.
- [27] M. Nadir and N. Djaidja, Comparison between Taylor and perturbed method for Volterra integral equation of the first kind, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, in press.
- [28] N. A. Sulaiman and T. I. Hassan, Numerical solutions of Fredholm integral equation of the first kind with degenerate kernel by using Hermite polynomial, *J. Edu. Sci.* 18(4) (2006), 63-73.
- [29] A. Bendjabri, M. Nadir, On the numerical solution of fredholm integral equation of the first kind, *Advances and Applications in Mathematical Sciences*. Vol 19 issue 12 (2020), 1267-1277.

الخلاصة

في هذا العمل، نحن مهتمون بالحل التقريبي للمعادلة الخطية $A\varphi = f$ حيث A هو مؤثر خطي متراس، وتقبل هذه المعادلة الأخيرة حلاً وحيداً بالمعنى المباشر أو بمعنى المربعات الصغرى بشرط أن يكون الجانب الأيمن f إما في $R(A)$ أو في $R(A) + R(A)^\perp$ ، على التوالي. نظراً لنطاق $R(A)$ غير المغلق، فإن الحل غير مستقر. علاوة على ذلك، إذا كان المؤثر A معرفاً موجباً، فيمكننا استبدال المعادلة الأصلية بالمعادلة المساعدة:

$$\alpha\varphi_\alpha + A\varphi_\alpha = f$$
 حيث يكون حلها φ_α موجوداً ومستقرًا ويتقارب نحو الحل الدقيق φ لمعادلة الأصلية عندما α تقترب من الصفر، مع $\alpha > 0$.

وفي هذا العمل، نقدم حلاً عددياً للمعادلات التكاملية من النمط الأول لفريدهولم على الحافة الملساء الموجهة مع نواة من نوع كوشي، ولهذا نستخدم تقريباً خطياً متوافقاً تم بناؤه بواسطة المؤلف لهذه المعادلة، بناءً على قاعدة شبه المنحرف، ويتم التعامل مع العديد من الأمثلة لإثبات كفاءة هذا التقريب.

Abstract

In this work we concern with the approximate solution of the linear equation where $A\varphi = f$ is injective and compact operator, this equation admits a unique solution in direct sense or in the least square sense provided the right-hand side f is in $R(A)$ or in $R(A) + R(A)^\perp$ respectively. Due to the non-closed range $R(A)$ the solution is not stable. Besides, if A is positive defined, we can replace the original equation by the auxiliary one $\alpha\varphi_\alpha + A\varphi_\alpha = f$ where φ_α its solution exists, stable and converges to the exact solution φ of the original equation as α tends to zero.

And in this work, we present a numerical solution for singular integral equation of the first kind on the oriented smooth contour with Cauchy-type kernel, for this we use a suitable linear approximation built by the author for this equation, based on the trapezoidal rule. Many examples are treated in order to prove the efficiency of this approximation.

Résumé

Dans ce travail nous nous intéressons à la solution approchée de l'équation linéaire $A\varphi = f$ où A est l'opérateur injectif et compact, cette équation admet une solution unique au sens direct ou au sens des moindres carrés à condition que le membre droit f soit dans $R(A)$ ou dans $R(A) + R(A)^\perp$, respectivement. En raison de la plage $R(A)$ non fermée, la solution n'est pas stable. Par ailleurs, si A est définie positif on peut remplacer l'équation d'origine par l'équation auxiliaire $\alpha\varphi_\alpha + A\varphi_\alpha = f$ où sa solution φ_α existe, stable et converge vers la solution exacte φ de l'équation d'origine lorsque α tend à zéro.

Et dans ce travail, nous présentons une solution numérique pour équation intégrale singulière de la première espèce sur le contour lisse orienté avec noyau de type Cauchy, pour celui-ci nous utilisons une approximation linéaire adaptée construite par l'auteur pour cette équation, basée sur la règle trapézoïdale. De nombreux exemples sont traités afin de prouver l'efficacité de cette approximation.