



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de mathématiques



Mémoire de master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs

Thème

*La méthode de perturbation d'homotopie pour une équation aux dérivées
partielles d'ordre fractionnaire*

Présentée par :

M^r Barkati Assia

Membres du jury:

Abdelkebir saad

Amroune Nasreddine

Chouder rafa

MAA,

MCB,

MAB,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président.

Encadreur.

Examineur.

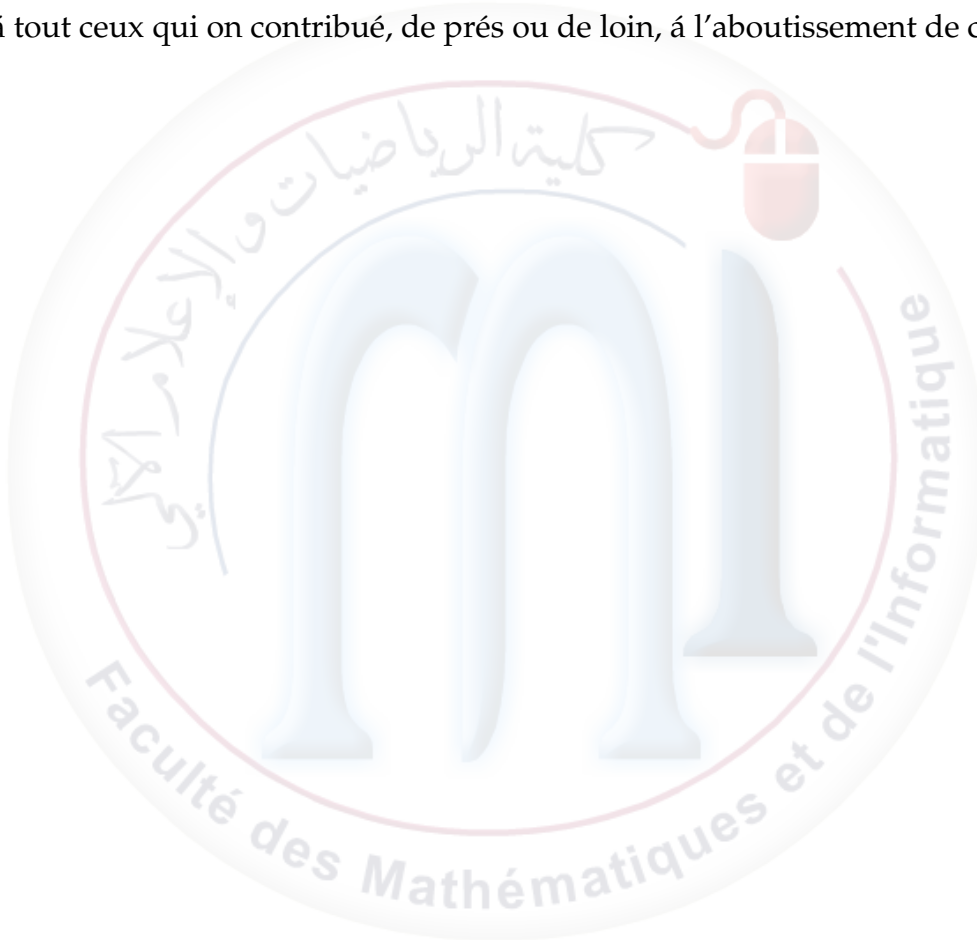
Année universitaire 2019/2020

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur du mémoire D_r AMROUNE Nasreddine pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux. Je remercie également le membre de jury. Enfin j'adresse sincère remerciement tous enseignants de faculté mathématique et informatique.

Merci à tout ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.



Dédicaces

Ce travail est dédié:

À mes parents

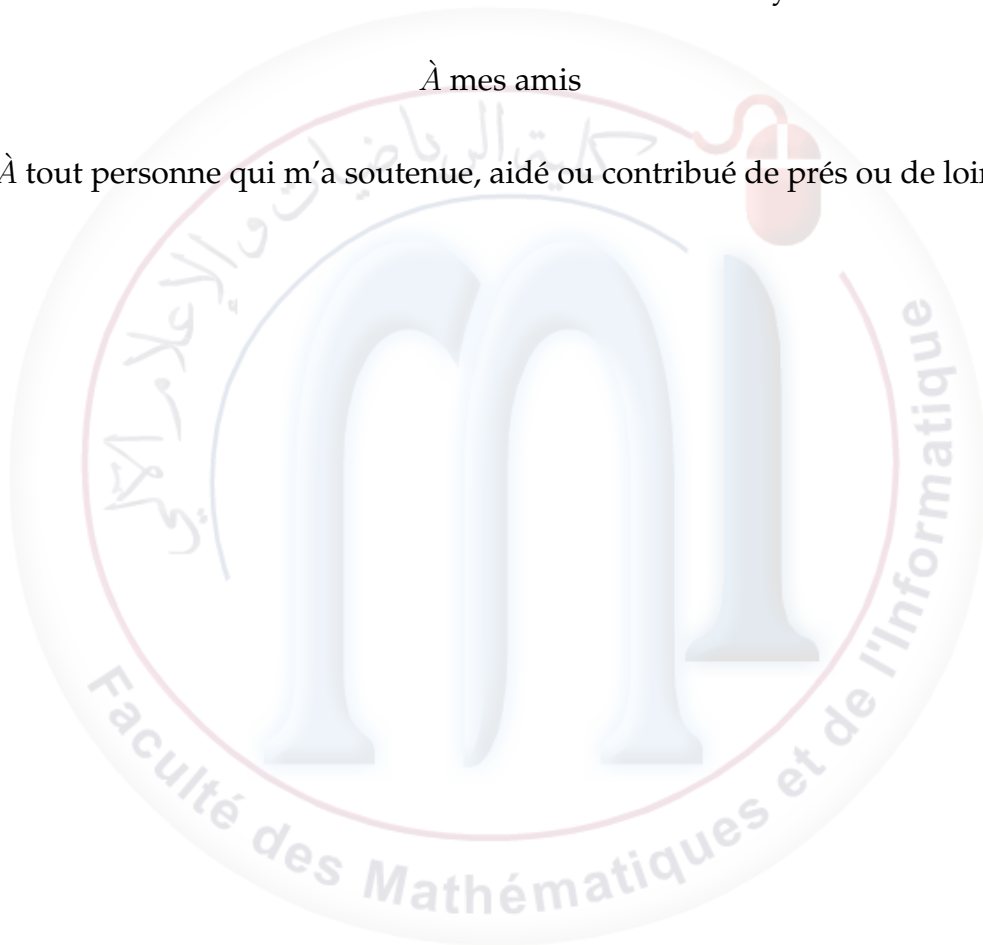
Mon mari et sa famille

À ma famille: mes soeurs "Imane et Issraa"

mes frères "Bahaa dinne et Dayaa dinne"

À mes amis

À tout personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin.



Contents

0.1	Introduction	5
1	Notions préliminaires	6
1.1	Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire	6
1.1.1	Fonction Gamma d'Euler	6
1.1.2	La fonction Beta	6
1.2	Calcul fractionnaire	7
1.2.1	Intégration fractionnaire	7
1.2.2	Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
1.2.3	Dérivation fractionnaire au sens de Caputo	10
2	La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)	13
2.1	Description de la méthode	13
2.2	Analyse de convergence	14
2.2.1	Applications	19
2.3	Description de la méthode de HPM pour des équations aux dérivées partielles fractionnaires	21
2.4	Analyse de convergence	23
2.4.1	Application numérique	25
3	La résolution d'une équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire par la méthode de HPM	28
3.1	L'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire	28
3.1.1	Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle	29
3.1.2	Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire spatiale	33

Notations

Ω : Un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$.

Γ : Frontière de Ω .

$L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est mesurable sur } [a, b] \text{ et } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$.

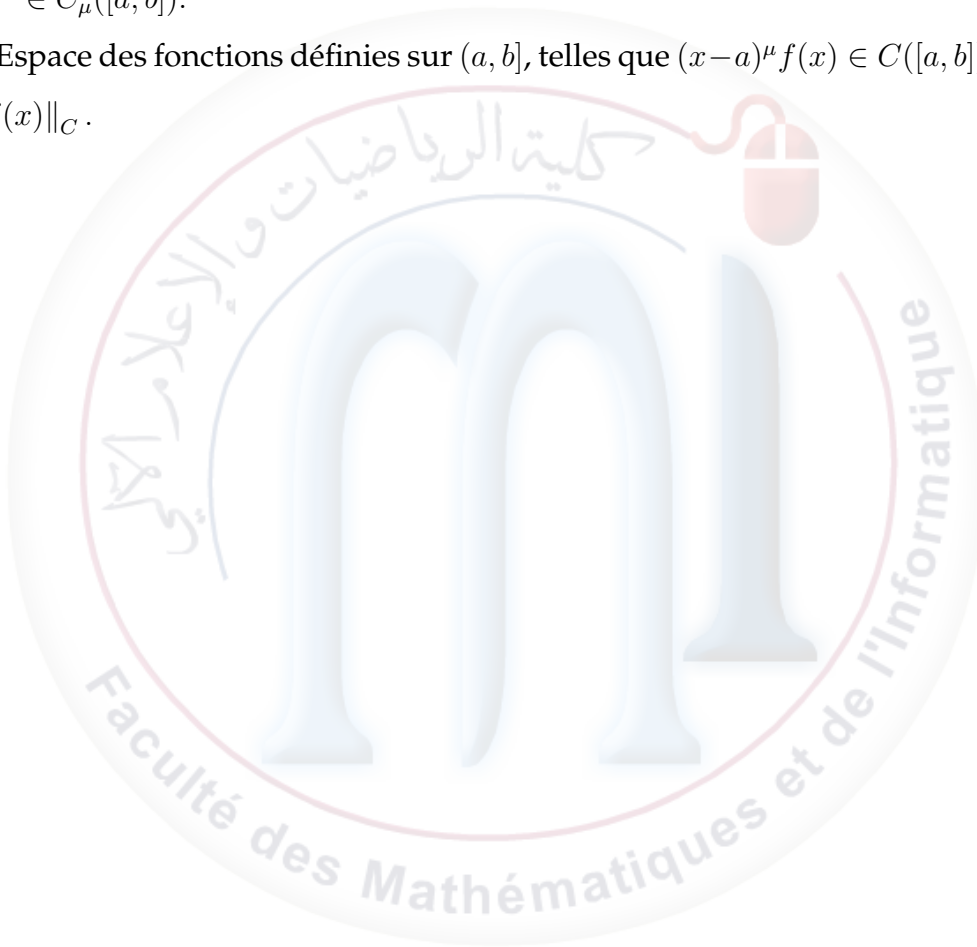
$L^\infty([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est mesurable. } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } [a, b]\}$.

$L^\infty([a, b])$: muni de la norme $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } [a, b]\}$.

$C^n([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ fonctions } n \text{ fois continûment différentiables sur } [a, b], n \geq 0\}$.

$C_\mu^n([a, b])$: Espace des fonctions f qui sont continûment différentiables sur $[a, b]$ d'ordre n et telle que $f^n \in C_\mu([a, b])$.

$C_\mu([a, b])$: Espace des fonctions définies sur $(a, b]$, telles que $(x-a)^\mu f(x) \in C([a, b])$ et $\|f\|_{C_\mu} = \|(x-a)^\mu f(x)\|_C$.



0.1 Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?.

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie de mathématiques.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements en visco-élasticité, électromagnétique, biologie et économie.

Le calcul fractionnaire est devenu tout simplement l'analyse fractionnaire. Dans certains problèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, on a besoin des méthodes numériques pour les résoudre parmi ces techniques est la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) qui a été proposée par Ji-Huan He en 1998.

Dans le [14] les auteurs ont appliqué la méthode de perturbation d'homotopie aux équations différentielles fractionnaire. Ainsi ils ont révélé que la méthode HPM est une méthode analytique alternative, la méthode de perturbation d'homotopie a aussi été combinée avec des transformation pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aussi aux dérivées partielles fractionnaire.

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode de perturbation d'homotopie pour résoudre des équations aux dérivées partielles fractionnaires.

Notre mémoire est organisé selon le plan suivant.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires concernant les outils de base du calcul fractionnaire.

Nous donnons dans le deuxième chapitre, la description de la méthode de perturbation d'homotopie et nous faisons l'analyse de sa convergence.

Dans le troisième chapitre, nous prenons comme exemple l'équation de Cahn-Hilliard pour la résoudre par la méthode de perturbation d'homotopie.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats de base dont on a besoin dans notre travail.

1.1 Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire

(voir [16])

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1. On définit la fonction Gamma-d'Euler par l'intégrale convergente suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. (posons le changement de variable $t = \tau^2$).

Lemme 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ Pour tout $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$, on a

$$1. \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$2. \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$3. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

1.1.2 La fonction Beta

Définition 1.2. La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dx, (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$ on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Propriétés 1.1. 1. $B(p, q) = B(q, p)$, (symétrique).

2. $B(z, 1) = \frac{1}{z}$

1.2 Calcul fractionnaire

(voir [2])

1.2.1 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$; on pose

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Pour une primitive d'ordre 2, on a

$$(I^2 f)(t) = \int_a^t (If)(x) dx = \int_a^t \left(\int_a^x f(\tau) d\tau \right) dx = \int_a^t (t-x)f(x) dx. \quad (1.2)$$

En répétant n fois, on obtient la relation suivante

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Définition 1.3. Soit $\alpha > 0$, l'opérateur I_a^α définit sur $L^1([a, b])$ par

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \alpha > 0, \quad (1.4)$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Exemple 1.2. • Dans cet exemple on doit calculer l'intégrale fractionnaire de la fonction f donnée par

$$f(t) = (t-a)^n, a \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le changement de variable $\tau = x(t-a) + a$, on trouve

$$\begin{cases} \tau = a \Leftrightarrow x = 0, \\ \tau = t \Leftrightarrow x = 1, \\ d\tau = (t-a)dx. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^n d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x(t-a)-a)^{\alpha-1} (x(t-a))^n (t-a) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+n} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^n dx \\
&= \frac{B(\alpha, n+1)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+n} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} (t-a)^{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

Cas particulier: si $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 1$ et $a = 0$, on a

$$I_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (t)^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

- L'intégrale fractionnaire de Riemman-Liouville d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}$) d'une fonction constante $f(t) = c$, est donnée comme suit

$$\Gamma_a^\alpha = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 1.2. Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, on a

1. $(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$
2. $(I_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$

Démonstration:

On a

$$(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1} d\tau,$$

et on pose $\tau - a = s(t-a)$

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((t-a) - s(t-a))^{\alpha-1} (s(t-a))^{\beta-1} (t-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.1. Pour $f \in [a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemman-Liouville possède la propriété

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0. \quad (1.5)$$

Preuve

On utilise directement la définition

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (t-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s) ds d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_a^\tau (t-\tau)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} d\tau ds.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

En utilisant le changement de variable $\tau = (t-s)u + s$, on aura

$$\begin{cases} \tau = s \Leftrightarrow u = 0, \\ \tau = t \Leftrightarrow u = 1, \\ d\tau = (t-s)du. \end{cases}$$

(1.6) devient

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_s^t (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) B(\alpha, \beta) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\
 &= I_a^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

1.2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

(voir [1])

Définition 1.4. Soient $\alpha > 0$, $f \in L^1([a, b])$ et $n = [\alpha] + 1$. Les dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville $D_{a+}^\alpha f$ et $D_{b-}^\alpha f$ d'ordre α de f sont définies par

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.7}$$

et

$$D_{b-}^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.8}$$

proposition 1.1. Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$ on a

1. $(D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1},$
2. $(D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.$

Démonstration

1. Posons $f(t) = (t - a)^{\beta-1}$, par la définition (1.7) et propriétés (1.2) on a

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha + \beta)} (t - a)^{n - \alpha + \beta - 1} \right),$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t - a)^{n - \alpha + \beta - 1} &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (n - \alpha + \beta - 1 - (n - 1)) \\ &\times (t - a)^{-\alpha + \beta - 1} \\ &: \\ &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha)(t - a)^{\beta - \alpha - 1}. \end{aligned}$$

De lemme(1.1), on a

$$\begin{aligned} \Gamma(n - \alpha + \beta) &= (n - \alpha + \beta - 1)\Gamma(n - \alpha + \beta - 1) \\ &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\Gamma(n - \alpha + \beta - 2) \\ &: \\ &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha + \beta)} (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha)(t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\ &= \frac{(n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha)\Gamma(\beta)}{(n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}. \end{aligned}$$

2. Similairement, on montre que

$$(D_{b-}^{\alpha} (b - t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - t)^{\beta - \alpha - 1}.$$

1.2.3 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n = [\alpha] + 1$. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo ${}^c D_{a+}^{\alpha} f$ et ${}^c D_{b-}^{\alpha} f$ d'ordre α de f sont définies par

$${}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

et

$${}^c D_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dx} \right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Propriétés 1.3. 1. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires.

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$${}^c D_{a+}^\alpha (\lambda f + \mu g) = \lambda ({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) + \mu ({}^c D_{a+}^\alpha g)(x).$$

$${}^c D_{b-}^\alpha (\lambda f + \mu g) = \lambda ({}^c D_{b-}^\alpha f)(x) + \mu ({}^c D_{b-}^\alpha g)(x).$$

2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$${}^c D^\alpha f(t) = D_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], t > 0, \quad (1.11)$$

$${}^c D^\alpha f(t) = D_{b-}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right], t > 0. \quad (1.12)$$

3. Si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$

$$({}^c D_{a+}^\alpha)(t) = D_{a+}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad (1.13)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha)(t) = D_{b-}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-t)^{k-\alpha}. \quad (1.14)$$

4. Si $f \in C([a, b])$, nous avons

$${}^c D_{a+}^\alpha (I_{a+}^\alpha f(t)) = f(t),$$

et

$$(I_{a+}^\alpha ({}^c D_{a+}^\alpha f(t))) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \quad (1.15)$$

Donc, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemple 1.3. • La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle, en effet

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \times 0 d\tau = 0. \end{aligned}$$

• Dans cet exemple on doit calculer la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction f qui donnée par $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$.

On a

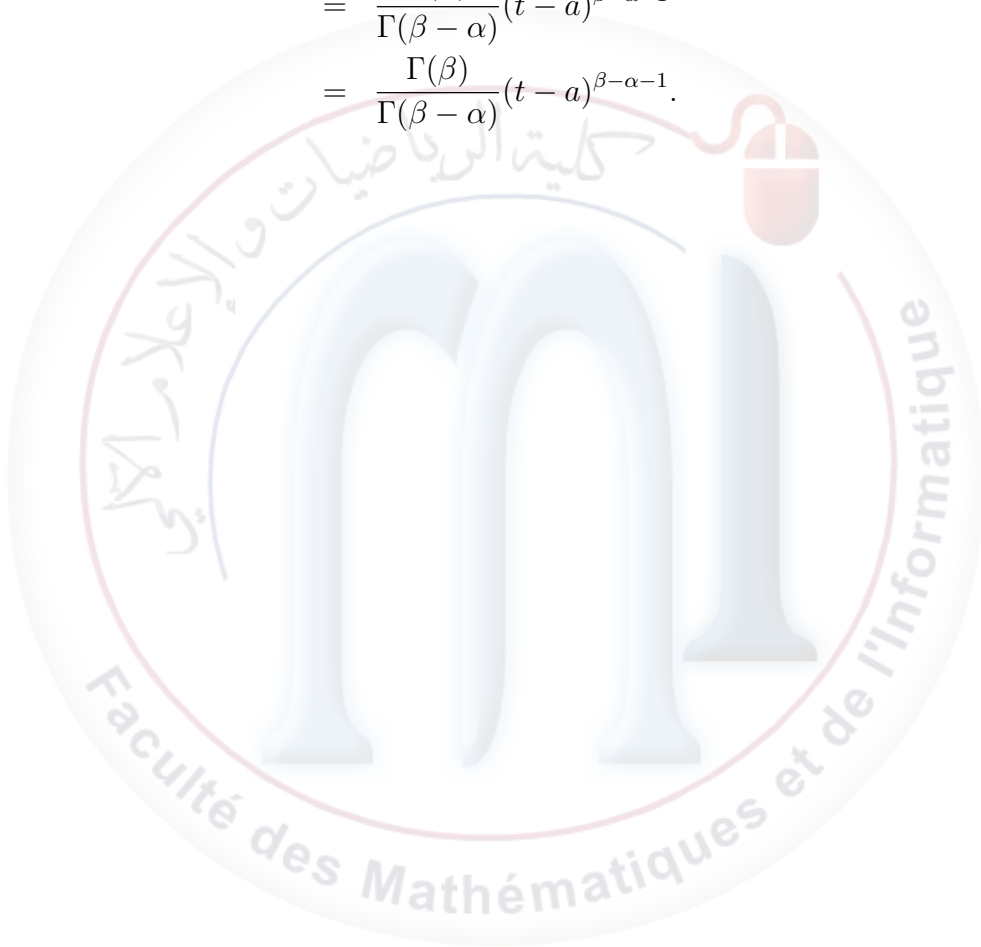
$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \circ D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-a)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= \beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau, \end{aligned}$$

et on pose $\tau = s(t-a) + a$

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$



LA MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE (HPM)

La méthode du perturbation de l'homotopie (HPM) a été établie par **Ji-Haun-He** en 1999. Cette méthode a été utilisée par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations différentielles ou équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

La solution numérique de la méthode HPM est considérée une série de fonction qui converge rapidement vers la solution exacte. Cette méthode permet de transformer la résolution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre. La méthode HPM est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre $p \in [a, b]$, affublé à l'équation étudiée.

2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante (voir [10], [12])

$$A(u) - f(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Avec les conditions aux limites

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.2)$$

Où A est un opérateur différentiel, B est un opérateur de limite, f est une fonction connue, et Γ la frontière de Ω .

On divise l'opérateur A en deux parties N et L où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non linéaire, donc l'équation (2.1) s'écrit sous la forme

$$L(u) + N(u) - f(x) = 0. \quad (2.3)$$

On construit une homotopie $v(x; p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$H(v; p) = (1 - p) [L(v) - L(u^0)] + p [A(v) - f(x)] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

ou

$$H(v; p) = L(v) - L(u^0) + pL(u^0) + p[N(v) - f(x)] = 0, \quad (2.5)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre d'homotopie, u^0 est un approximation initiale de (2.1) qui satisfait les conditions aux limites.

De (2.5), on aura

$$H(v; 0) = L(v) - L(u^0) = 0, \quad (2.6)$$

$$H(v; 1) = A(v) - f(x) = 0. \quad (2.7)$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u^0(x)$ en $u(x)$, en topologie avec cette dernière propriété la fonction $v(x; p)$ est une fonction itérative, est appelée homotopie. D'après la méthode HPM, nous pouvons utiliser p comme un petit paramètre, et supposons que la solution de l'équation (2.5) s'écrit comme une série de puissance p

$$v = v^0 + pv^1 + p^2v^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i. \quad (2.8)$$

Pour $p = 1$, la solution approchée de l'équation (2.1) s'écrit

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i = v^0 + v^1 + v^2 + \dots \quad (2.9)$$

2.2 Analyse de convergence

Dans ce paragraphe, on étudie la convergence de la méthode de HPM. On peut réécrire (2.5) comme suit (voir [3], [4])

$$(1 - p) [L(v) - L(u^0)] + p [A(v) - f(x)] = L(v) - L(u^0) - pL(v) + pL(u^0) + L(u^0) + pN(v) - pf(x)$$

$$L(v) - L(u^0) = p [f(x) - L(u^0) - N(v)]. \quad (2.10)$$

On remplace (2.8) dans (2.10), on obtient

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i\right) - L(u^0) = p \left[f(x) - L(u^0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i\right) \right], \quad (2.11)$$

ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i L(v^i) - L(u^0) = p \left[f(x) - L(u^0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i\right) \right]. \quad (2.12)$$

Le développement de Maclaurin est donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Alors le développement de Maclaurin de $N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right)$ par rapport à p

$$N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right) p^i \right)_{p=0}, \quad (2.13)$$

D'après [9], nous aurons

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right) \right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left(\sum_{i=0}^n v^i p^i \right) \right)_{p=0}, \quad (2.14)$$

donc

$$N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial p^n} N \left(\sum_{i=0}^n v^i p^i \right) \right) p^i. \quad (2.15)$$

On pose

$$H^n(v^0, v^2, \dots, v^n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left(N \left(\sum_{i=0}^n v^i p^i \right) \right)_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

H^n sont appelés les polynômes de He.

Alors

$$N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i p^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i p^i. \quad (2.17)$$

En remplaçant (2.17) dans (2.12), on trouve

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v^i) - L(u^0) = p \left[f(x) - L(u^0) - \sum_{i=0}^{\infty} H^i p^i \right], \quad (2.18)$$

donc

$$\begin{aligned} L(v^0 + pv^1 + p^2v^2) - L(u^0) &= pf(x) - pL(u^0) - p(H^0 + pH^1 + p^2H^2 + \dots) \\ \Rightarrow L(v^0) + pL(v^1) + p^2L(v^2) - L(u^0) &= pf(x) - pL(u^0) - pH^0 - p^2H^1 - p^3H^2 - \dots \end{aligned}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances p , on trouve

$$\begin{aligned} p^0 : L(v^0) - L(u^0) &= 0 \\ p^1 : L(v^1) &= f(x) - L(u^0) - H^0 \\ p^2 : L(v^2) &= -H^1 \\ &: \\ &: \\ p^{n+1} : L(v^{n+1}) &= -H^n. \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur inverse L^{-1}

$$\begin{aligned} p^0 : v^0 &= u^0 \\ p^1 : v^1 &= L^{-1}(f(x)) - u^0 - L^{-1}(H^0) \\ p^2 : v^2 &= -L^{-1}(H^1) \\ &\vdots \\ p^{n+1} : v^{n+1} &= -L^{-1}(H^n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Théorème 2.1. (voir[3]) La solution de l'équation (2.1) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de s^n donnée par

$$s^n = v^0 + v^1 + \dots v^n, \quad s^0 = 0. \quad (2.20)$$

En utilisant le schéma itératif

$$s^{n+1} = -L^{-1}N_n(s^n + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)), \quad (2.21)$$

où

$$N_n \left(\sum_{i=0}^n v^i \right) = \sum_{i=0}^n H^i. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Preuve

Pour $n = 0$, d'après (2.21), on a

$$s^1 = -L^{-1}N_0(s^0 + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)) = -L^{-1}(H^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)), \quad (2.23)$$

alors

$$v^1 = -L^{-1}(H^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)). \quad (2.24)$$

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} s^2 &= -L^{-1}N_1(s^1 + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\ &= -L^{-1}(H^1) - L^{-1}(H^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\ &= -L^{-1}(H^1) + v^1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Selon $s^2 = v^1 + v^2$, nous obtenons

$$v^2 = -L^{-1}(H^1). \quad (2.26)$$

La démonstration de ce théorème se fera par induction. Supposons que

$$v^{k+1} = -L^{-1}(H^k), \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

donc

$$\begin{aligned} s^{n+1} &= -L^{-1}N_n(s^n + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\ &= -L^{-1} \left(\sum_{i=0}^n H^i \right) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\ &= -\sum_{i=0}^n L^{-1}(H^i) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\ &= v^1 + v^2 \dots v^n - L^{-1}(H^n). \end{aligned}$$

Puis, d'après (2.20) on peut trouver

$$v^{n+1} = -L^{-1}(H^n). \quad (2.27)$$

Ce résultat est identique à celui de (2.19) obtenu par la méthode HPM.

Théorème 2.2. Soit B un espace de Banach.

1. $\sum_{i=0}^{\infty} v^i$ converge vers $s \in B$, si

$$\exists (0 \leq \lambda < 1) \text{ telque } (\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|v^n\| \leq \lambda \|v^{n-1}\|). \quad (2.28)$$

2. $s = \sum_{i=1}^{\infty} v^i$ vérifie

$$s = -L^{-1}N(s + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)). \quad (2.29)$$

Preuve

1. On a

$$\|s^{n+1} - s^n\| = \|v^{n+1}\| \leq \lambda \|v^n\| \leq \lambda^2 \|v^{n-1}\| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} \|v^0\|. \quad (2.30)$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$

$$\begin{aligned} \|s^n - s^m\| &= \|(s^n - s^{n-1}) + (s^{n-1} - s^{n-2}) + \dots + (s^{m+1} - s^m)\| \\ &\leq \|s^n - s^{n-1}\| + \|s^{n-1} - s^{n-2}\| + \dots + \|s^{m+1} - s^m\| \\ &\leq \lambda^n \|v^0\| + \lambda^{n-1} \|v^0\| + \dots + \lambda^{m+1} \|v^0\| \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{m+1}) \|v^0\| \\ &\leq (\lambda^{m+1} + \dots + \lambda^n + \dots) \|v^0\| \\ &\leq \lambda^{m+1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \dots) \|v^0\| \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1 + \lambda} \|v^0\|. \end{aligned}$$

comme v^0 borné. Ainsi

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|s^n - s^m\| = 0. \quad (2.31)$$

$(s^n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach, alors elle est convergente, i.e

$$\exists s \in B, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} v^n = s. \quad (2.32)$$

2. D'après (2.21), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} s^{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(s^n + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)), \\
&= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n \left(\sum_{i=0}^n v^i \right) - u^0 + L^{-1}(f(x)). \\
s &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n H^i - u^0 + L^{-1}(f(x)), \\
&= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} H^i - u^0 + L^{-1}(f(x)).
\end{aligned}$$

Par (2.22) et (2.17), pour $p = 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} H^i = N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i \right). \quad (2.33)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
s &= -L^{-1} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v^i \right) - u^0 + L^{-1}(f(x)) \\
&= -L^{-1} N(s + v^0) - u^0 + L^{-1}(f(x)).
\end{aligned}$$

Lemme 2.1. L'équation (2.29) est équivalente à

$$L(u) + N(u) - f(x) = 0. \quad (2.34)$$

Preuve

L'équation (2.29) s'écrit comme suit

$$s + u^0 = -L^{-1} N(s + v^0) + L^{-1}(f(x)). \quad (2.35)$$

En appliquant l'opérateur L à l'équation précédente, on obtient

$$L(s + u^0) = -N(s + v^0) + f(x), \quad (2.36)$$

comme $u^0 = v^0$,

$$L(s + v^0) + N(s + v^0) = f(x). \quad (2.37)$$

Pour $u = s + v^0 = \sum_{i=0}^{\infty} v^i$ l'équation (2.34) devient l'équation d'origine.

En suite, la solution de l'équation (2.29) est la même solution de $A(u) - f(x) = 0$.

Définition 2.1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v^{i+1}\|}{\|v^i\|}, & \|v^i\| \neq 0, \\ 0, & \|v^i\| = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Dans le théorème (2.2), $\sum_{i=0}^{\infty} v^i$ converge vers la solution exacte, lorsque $0 \leq \lambda_i < 1$. Si v^i et $(v^i)'$ sont obtenus par deux différent homotopie, et $\lambda_i < \lambda'_i$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le taux de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} v^i$ est supérieure à $\sum_{i=0}^{\infty} (v^i)'$.

2.2.1 Applications

Exemple 2.1. On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, & t \geq 0, \quad t \in \Omega, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

La solution exacte de cette équation

$$u(t) = \frac{1}{1+t}. \quad (2.40)$$

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante $u : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1-p)(v' - (u^0)') + p(v' + (v^2)) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega, \quad (2.41)$$

avec $u^0 = 1$.

Les solutions de l'équation (2.39), sont écrites sous la forme

$$v = v^0 + pv^1 + p^2v^2 + \dots \quad (2.42)$$

En remplaçant (2.42) dans (2.41)

$$\begin{aligned} & (1-p) \left[(v^0)' + p(v^1)' + p^2(v^2)' - u^0 \right] \\ & + p \left[(v^0)' + p(v^1)' + p^2(v^2)' + (v^0)^2 + p^2(v^1)^2 + 2pv^0v^1 + 2p^2v^0v^2 + \dots \right] = 0 \\ \Rightarrow & (v^0)' + p(v^1)' + p^2(v^2)' - u^0 - p(v^0)' - p^2(v^1)' - p^3(v^2)' + pu^0 + pv^0 + p^2(v^1)' \\ & + p^3(v^2)' + p(v^1)^2 + 2p^2v^0v^1 + 2p^3v^0v^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , nous aurons

$$\begin{aligned} p^0 : (v^0)' &= (u^0)' \\ p^1 : (v^1)' &= -(u^0)' - (v^0)^2 \quad v^1(0) = 0 \\ p^2 : (v^2)' &= -2v^0v^1, \quad v^2(0) = 0, \\ & \vdots \\ & . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} p^0 : v^0 &= 1 \\ p^1 : v^1 &= -t \\ p^2 : v^2 &= t^2, \\ & \vdots \\ & . \end{aligned}$$

donc la solution de (2.39) est

$$u(t) = \lim_{p \rightarrow 1} v = 1 - t + t^2 + \dots \quad (2.43)$$

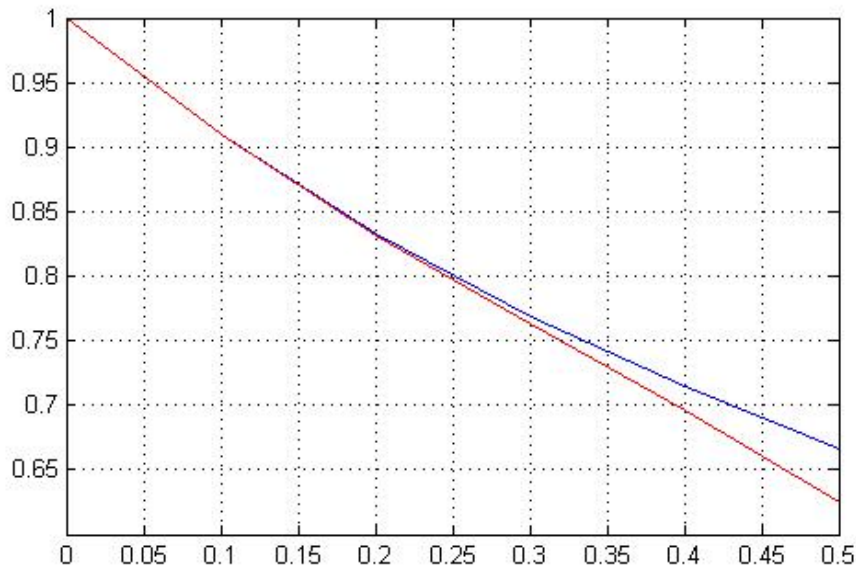


Figure 2.1: La solution exacte(Bleu); La solution approchée (Rouge)

Exemple 2.2. On considère l'équation de Riccati suivante

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1, t \geq 0, t \in \Omega, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

La solution exacte de cette équation est $u(t) = \tan(t)$, le développement de Taylor de u au voisinage de zéro est donné par

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + t^8\epsilon(t).$$

La solution avec la méthode de HPM, on construire l'homotopie suivante

$$u : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(1 - p)(v' - (u^0)') + p(v' - (v)^2 - 1) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega, \quad (2.45)$$

avec $u^0 = 0$.

Les solutions de l'équation (2.44), sont données sous la forme d'une série comme suit

$$v = v^0 + pv^1 + p^2v^2 + \dots \quad (2.46)$$

on obtient

$$v' - (u^0)' + p((u^0)' - (v)^2 - 1) = 0. \quad (2.47)$$

En remplaçant (2.46) dans (2.47)

$$\begin{aligned} & (v^0 + pv^1 + p^2v^2 + \dots)' - (u^0)' + p \left[(u^0)' - (v^0 + pv^1 + p^2v^2 + \dots)^2 - 1 \right] = 0 \\ & (v^0)' + p(v^1)' + p^2(v^2)' + \dots - (u^0)' \\ & + p \left[(u^0)' - (v^0)^2 - 2pv^0v^1 - p^2(v^1)^2 - 2pv^0v^2 - 2p^3v^1v^2 - p^4(v^2)^2 - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , nous aurons

$$\begin{aligned} p^0 & : (v^0)' - (u^0)' = 0 \\ p^1 & : (v^1)' + (u^0)' - (v^0)^2 - 1 = 0 \\ p^2 & : (v^2)' - 2v^0v^1 = 0 \\ p^3 & : (v^3)' - 2v^0v^2 - (v^1)^2 = 0 \\ p^4 & : (v^4)' - 2v^1v^2 - 2v^1v^3 = 0 \\ p^5 & : (v^5)' - 2v^1v^3 - (v^2)^2 = 0, \\ & \vdots \end{aligned}$$

par l'intégration

$$\begin{aligned} v^0 & = 0 \\ v^1 & = t \\ v^2 & = 0 \\ v^3 & = \frac{1}{3}t^3 \\ v^4 & = 0 \\ v^5 & = \frac{2}{15}t^5, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Alors la solution approchée de l'équation (2.44) est

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \dots$$

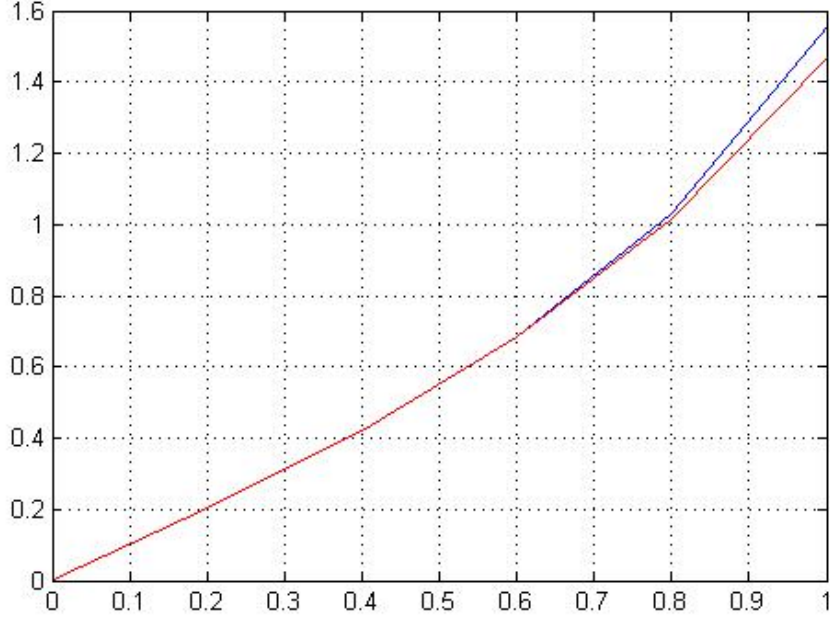


Figure 2.2: La solution exacte(Bleu); La solution approchée (Rouge)

2.3 Description de la méthode de HPM pour des équations aux dérivées partielles fractionnaires

Pour illustrer l'algorithme de modification du HPM, considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante avec une dérivée temporelle de n'importe quel ordre de la forme

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) = L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) + h(x, t), t > 0, \\ u^k(x, 0) = g_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (2.48)$$

Où L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire qui pourrait également inclure d'autres dérivées fractionnaires d'ordre inférieur à α . La fonction h est une fonction connue et ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α ($m-1 < \alpha \leq m$).

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - L(u, u_x, u_{xx}) - h(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^c D_t^\alpha u \right], \quad (2.49)$$

ou

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - h(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^c D_t^\alpha u \right], \quad (2.50)$$

où $p \in [0, 1]$.

Dans le cas $p = 0$, l'équation (2.49) devient l'équation linéaire suivante

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = L(u, u_x, u_{xx}) - h(x, t), \quad (2.51)$$

et l'équation (2.50)

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = h(x, t). \quad (2.52)$$

La solution de l'équation (2.49) ou de (2.50) s'écrit sous la forme

$$u(x, t) = u^0 + pu^1 + p^2u^2 + \dots \quad (2.53)$$

Donc la solution approximative est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n(x, t). \quad (2.54)$$

2.4 Analyse de convergence

On considère le problème suivant

$${}^c D_t^\alpha u(t) = f(t, u(t), D^{n_1}u(t), D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (2.55)$$

$$y^k(0) = b^k, \quad u(x, t) = g(x, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Où ${}^c D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α , $m - 1 \leq \alpha \leq m$, $n_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i

considérons que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(t, u^1, u^2, \dots, u^n)$ admet des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ continues et bornées qui satisfont la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} & |f(t, u^1(t), D^{n_1}u^1(t), D^{n_2}u^1(t), \dots, D^{n_q}u^1(t)) - f(t, u^2(t), D^{n_1}u^2(t), D^{n_2}u^2(t), \dots, D^{n_q}u^2(t))| \\ & \leq A |f(u^1, D^{n_1}u^1, D^{n_2}u^1, \dots, D^{n_q}u^1) - f(u^2, D^{n_1}u^2, D^{n_2}u^2, \dots, D^{n_q}u^2)| \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour illustrer les concepts de base de la HPM pour l'équation aux dérivée partielle fractionnaire (2.55) avec les conditions initiales (2.56), nous construisons l'homotopie de (2.55) comme suite

$$(1 - p) {}^c D_t^\alpha u(x, t) + p({}^c D_t^\alpha u(x, t) - f(t, u(t), D^{n_1}u(t), D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t))) = 0, \quad (2.58)$$

ou bien

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = p(f(t, u(t), D^{n_1}u(t), D^{n_2}u(t), \dots, D^{n_q}u(t))). \quad (2.59)$$

En remplaçant (2.53) dans (2.59)

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\alpha u^0(t) + p {}^c D_t^\alpha u^1(t) + p^2 ({}^c D_t^\alpha u^2(t) + \dots) = \\ & p(f(t, (u^0(t) + pu^1(t) + p^2u^2(t)), D^{n_1}(u^0(t) + pu^1(t) + p^2u^2(t)), \dots) \\ & = p(f(t, u^0(t), D^{n_1}u^0(t), D^{n_2}u^0(t) + \dots) + p^2(f(t, u^1(t), D^{n_1}u^1(t), D^{n_2}u^1(t) \dots) \\ & + p^3(f(t, u^2(t), D^{n_1}u^2(t), D^{n_2}u^2(t) \dots) + p^4(f(t, u^3(t), D^{n_1}u^3(t), D^{n_2}u^3(t) \dots) + \dots \end{aligned}$$

Par identification avec les termes des différents monômes en p , on obtient les équations suivants

$$\begin{aligned} p^0 : & {}^c D_t^\alpha u^0(x, t) = f(x, t) \\ p^1 : & {}^c D_t^\alpha u^1(x, t) = f(t, u^0(t), D^{n_1}u^0(t), D^{n_2}u^0(t), \dots, D^{n_q}u^0(t) \\ p^2 : & {}^c D_t^\alpha u^2(x, t) = f(t, u^1(t), D^{n_1}u^1(t), D^{n_2}u^1(t), \dots, D^{n_q}u^1(t) \\ p^3 : & {}^c D_t^\alpha u^3(x, t) = f(t, u^2(t), D^{n_1}u^2(t), D^{n_2}u^2(t), \dots, D^{n_q}u^2(t) \\ & \vdots \\ p^n : & {}^c D_t^\alpha u^n(x, t) = f(t, u^{n-1}(t), D^{n_1}u^{n-1}(t), D^{n_2}u^{n-1}(t), \dots, D^{n_q}u^{n-1}(t)). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Utilisons l'opérateur de Riemann-Liouville I^α , qui est l'opérateur, l'inverse de la dérivée de Caputo ${}^c D_t^\alpha$ sur les deux membres de (2.60), les premiers termes de la solution sont donnés par

$$\begin{aligned} u^0(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k t^k}{k!} + I^\alpha(f(x, t)) \quad (\text{D'après 1.15}) \\ u^1(x, t) &= I^\alpha(f(t, u^0(t), D^{n_1}u^0(t), D^{n_2}u^0(t), \dots, D^{n_q}u^0(t))) \\ u^2(x, t) &= I^\alpha(f(t, u^1(t), D^{n_1}u^1(t), D^{n_2}u^1(t), \dots, D^{n_q}u^1(t))) \\ u^3(x, t) &= I^\alpha(f(t, u^2(t), D^{n_1}u^2(t), D^{n_2}u^2(t), \dots, D^{n_q}u^2(t))) \\ & \vdots \\ u^n(x, t) &= I^\alpha(f(t, u^{n-1}(t), D^{n_1}u^{n-1}(t), D^{n_2}u^{n-1}(t), \dots, D^{n_q}u^{n-1}(t))). \end{aligned} \quad (2.61)$$

La solution de (2.55) est donnée par

$$u(x, t) = u^0(x, t) + u^1(x, t) + u^2(x, t) + u^3(x, t) + \dots \quad (2.62)$$

Soit $(C[0, T], \|\cdot\|)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ avec la norme

$$\|f(t)\| = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Théorème 2.3. (Existence et l'unicité des solutions)

Si f une fonction qui satisfait la condition de Lipschitz (2.57), alors le problème (2.55) admet une solution unique $u(x, t)$, pour tout $0 < \gamma < 1$.

Théorème 2.4. (convergence)

Soient $u^n(x, t)$ et $u(x, t)$ définies dans l'espace de Banach $(C[0, T], \|\cdot\|)$. Alors la solution sous forme de série $\sum_{n=1}^{\infty} u^n(x, t)$ définies dans (2.62) converge vers la solution de (2.55), pour tout $0 < \gamma < 1$.

Théorème 2.5. (Estimation d'erreur)

L'estimation de l'erreur de la solution en série (2.62) du problème (2.55) est donnée par

$$\left| u(x, t) - \sum_{i=0}^m u^i(x, t) \right| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{(1 - \gamma)} \|u^0(t)\|. \quad (2.63)$$

2.4.1 Application numérique

Exemple 2.3. On considère l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire suivante [8]

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2.64)$$

$$u(x, 0) = 2x. \quad (2.65)$$

La solution exacte dans le cas particulier $\alpha = 1$ est donnée par

$$u(x, t) = \frac{2x}{1 + 2t}. \quad (2.66)$$

Selon la méthode HPM, on construit l'homotopie suivante

$$(1 - p)({}^c D_t^\alpha u - {}^c D_t^\alpha u^0) = p(u_{xx} - uu_x - {}^c D_t^\alpha u), \quad (2.67)$$

ou

$${}^c D_t^\alpha u - {}^c D_t^\alpha u^0 = p(u_{xx} - uu_x - {}^c D_t^\alpha u). \quad (2.68)$$

En remplaçant (2.8) dans (2.68)

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha (u^0 + pu^1 + p^2 u^2) &= p[(u^0 + pu^1 + p^2 u^2)_{xx} - (u^0 + pu^1 + p^2 u^2)(u^0 + pu^1 + p^2 u^2)_x \\ &\quad - {}^c D_t^\alpha (u^0 + pu^1 + p^2 u^2)]. \\ {}^c D_t^\alpha u^0 + p({}^c D_t^\alpha u^1) + p^2({}^c D_t^\alpha u^2) &= p[u_{xx}^0 + p^1 u_{xx}^1 + p^2 u_{xx}^2 - u^0 u_x^0 + pu^0 u_x^1 - p^2 u^0 u_x^2 + pu^1 u_x^0 \\ &\quad + p^2 u^1 u_x^1 + p^3 u^1 u_x^2 + p^2 u^2 u_x^0 + p^3 u^2 u_x^1 + p^4 u^2 u_x^2 - {}^c D_t^\alpha u^0 \\ &\quad - p({}^c D_t^\alpha u^1) - p^2({}^c D_t^\alpha u^2) + \dots \end{aligned}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances p , on trouve

$$\begin{aligned} p^0 : {}^c D_t^\alpha u^0 &= 0 \\ p^1 : {}^c D_t^\alpha u^1 &= u_{xx}^0 - u^0 u_x^0 - {}^c D_t^\alpha u^0 \\ p^2 : {}^c D_t^\alpha u^2 &= u_{xx}^1 - u^0 u_x^1 - u^1 u_x^0 \\ p^3 : {}^c D_t^\alpha u^3 &= u_{xx}^2 - u^0 u_x^2 - u^1 u_x^1 - u^2 u_x^0 \\ &\vdots \\ p^i : {}^c D_t^\alpha u^i &= (u^{i-1})_{xx} - \sum_{j=0}^{i-1} u^j (u^{i-j-1})_x. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Par utilisation l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α sur les deux côtés de (2.69), on obtient

$$\begin{aligned}
 I^\alpha({}^c D_t^\alpha u^0) &= u^0(x, t) = 2x \\
 I^\alpha({}^c D_t^\alpha u^1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (u_{xx}^0 - u^0 u_x^0) d\tau \\
 &= \frac{-4xt^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\
 u^1(x, t) &= \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 u^0(x, t) &= 2x \\
 u^1(x, t) &= \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
 u^2(x, t) &= \frac{16xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
 u^3(x, t) &= \frac{-16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right), \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

D'après $t \leq \frac{\gamma}{2}, 0 < \gamma < 1, \alpha = 1$ et selon le théorème (2.4), nous avons

$$\begin{aligned}
 \|s^1 - s^0\| &= \left\| \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\| \\
 &= \left\| (2x) \left(\frac{-2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\| \\
 &\leq 4 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \|2x\| = \gamma \|u^0\|.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
 \|s^2 - s^0\| &\leq \|s^2 - s^1\| + \|s^1 - s^0\| \\
 &\leq \left\| \frac{16xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\| + \left\| \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\| \\
 &= \left\| (2x) \left(\frac{8t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right\| + \left\| (2x) \left(\frac{-2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\| \\
 &= \|2x\| \left(8 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \\
 &\leq 16 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \|2x\| = \gamma^2 \|u^0\|.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
\|s^3 - s^1\| &\leq \|s^3 - s^2\| + \|s^2 - s^1\| \\
&= \left\| \frac{-16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) \right\| + \left\| \frac{16xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\| \\
&= \left\| (2x) \left(\frac{-8t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) \right\| + \left\| (2x) \left(\frac{8t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \right\| \\
&\leq \left(8 \left(\frac{\gamma}{3} \right)^3 + 8 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \\
&\leq 32 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3 \|2x\| = \gamma^3 \|u^0\|.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}
\|s^n - s^m\| &\leq \|s^n - s^{n-1}\| + \|s^{n-1} - s^{n-2}\| + \dots + \|s^{m+1} - s^m\| \\
&= \left\| \sum_{j=0}^n u^j - \sum_{i=0}^{n-1} u^i \right\| + \left\| \sum_{j=0}^{n-1} u^j - \sum_{i=0}^{n-2} u^i \right\| + \dots + \left\| \sum_{j=0}^{m+1} u^j - \sum_{i=0}^m u^i \right\| \\
&= \|u^n\| + \|u^{n-1}\| + \dots + \|u^m\| \\
&\leq 2^{2n+2} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{n+1} \|u^0\| = \gamma^n \|u^0\|.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

comme u^0 est un bornée

Par conséquent, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|s^n - s^m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \|u^0\| = 0$; donc s^n est une suite de Cauchy.

La solution approchée sous forme de série est

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u^0(x, t) + u^1(x, t) + u^2(x, t) + \dots \\
&= 2x - \frac{4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{16xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.75}$$

LA RÉOLUTION D'UNE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE PAR LA MÉTHODE DE HPM

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) pour résoudre une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre fractionnaire.

3.1 L'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire

L'équation de Cahn-Hilliard (John W.Cahn et John E.Hilliard) est une équation de la physique mathématique qui décrit le procédé de séparation de phase, par lequel deux composants d'un fluide binaire se séparent spontanément et forment des domaines purs dans chaque composant ([7], [13], [15]). L'équation n'étant pas facile à résoudre nous appliquons dans cette section la méthode HPM pour sa résolution dans les deux cas fractionnaire temporel et spatiale.

Dans le cas entier, l'équation de Cahn-Hilliard est donnée par

$$u_t = \gamma u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx}. \quad (3.1)$$

En utilisant la dérivation au sens de Caputo, l'équation (3.1) devient

$${}^c D_t^\alpha u = \gamma {}^c D_x^\beta u + 6u({}^c D_x^\beta u)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx} \quad 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1. \quad (3.2)$$

Nous utilisons la méthode HPM [14] pour obtenir les solutions numériques de l'équation (3.2).

Dans le cas particulier $\gamma = 1$, on obtient par la formule (2.50) $h(x, t) = 0$ et

$$L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) = u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx},$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[\frac{\partial u}{\partial t} + {}^c D_x^\beta u + 6u({}^c D_x^\beta u)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx} - {}^c D_t^\alpha u \right]. \quad (3.3)$$

Nous allons résoudre numériquement l'équation (3.2) dans les deux cas temporel et spatiale.

3.1.1 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle

Pour $\beta = 1$, on obtient l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle présentée par la formule

$${}^c D_t^\alpha u = u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx}, \quad (3.4)$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = g(x) = th(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$.

La solution exacte de (3.4) pour $\alpha = 1$ est

$$u(x, t) = th(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + t)). \quad (3.5)$$

En remplaçant (2.53) dans (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial t} = & p \left[\frac{\partial(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial t} + (u^0 + pu^1 + p^2u^2)_x \right. \\ & + 6(u^0 + pu^1 + p^2u^2) [(u^0 + pu^1 + p^2u^2)_x]^2 \\ & + (3(u^0 + pu^1 + p^2u^2)^2 - 1)(u^0 + pu^1 + p^2u^2)_{xx} - (u^0 + pu^1 + p^2u^2)_{xxxx} \\ & \left. - {}^c D_t^\alpha u, \right. \end{aligned}$$

il vient par identification avec les termes de mêmes puissances de p

$$\begin{aligned} p^0 : u^0 &= g(x) \\ p^1 : \frac{\partial u^1}{\partial t} &= \frac{\partial u^0}{\partial t} + (u^0)_x + 6u^0((u^0)_x)^2 + (3(u^0)^2 - 1)(u^0)_{xx} - (u^0)_{xxxx} - ({}^c D_t^\alpha u^0) \\ p^2 : \frac{\partial u^2}{\partial t} &= \frac{\partial u^1}{\partial t} + (u^1)_x + 6u^1((u^0)_x)^2 + (3u^0 - 1)(u^1)_{xx} + 6u^0u^1(u^0)_{xx} + 12u^0(u^0)_x(u^1)_x \\ &\quad - (u^1)_{xxxx} - ({}^c D_t^\alpha u^1) \\ p^3 : \frac{\partial u^3}{\partial t} &= \frac{\partial u^2}{\partial t} + (u^2)_x + 6u^2((u^0)_x)^2 + 6u^0u^1(u^1)_{xx} + (3(u^0)^2 - 1)(u^1)_{xx} \\ &\quad + 12u^1(u^0)(u^1)_x + (u^2)_x + 6u^0(2(u^0)_x(u^2)_x + ((u^1)_x)^2) \\ &\quad + (6u^0u^2 + 3(u^1)^2)(u^0)_{xx} - (u^2)_{xxxx} - ({}^c D_t^\alpha u^2), \\ &: \\ &. \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur d'intégration de Riemann-Liouville I^α nous avons

$$\begin{aligned}
u^0 &= g(x) \\
u^1 &= I^\alpha(u_x^0) + 6I^\alpha(u^0(u_x^0)^2) + I^\alpha(3(u^0)^2u_{xx}^0 - u_{xx}^0) - I^\alpha(u_{xxxx}^0) \\
&= [u_x^0 + 6u^0(u_x^0)^2 + (3(u^0)^2u_{xx}^0 - u_{xx}^0) - (u_{xxxx}^0)] \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
u^2 &= I^\alpha(u_x^1) + 6I^\alpha(u^1(u_x^0)^2) + I^\alpha(3(u^0)^2u_{xx}^1 - u_{xx}^1) + 6I^\alpha(u^0u^1u_{xx}^0) + 12I^\alpha(u^0u_x^0u_x^1) - I^\alpha(u_{xxxx}^1) \\
&= I^\alpha(u_x^1) + 6I^\alpha(2u^0u_x^0u_x^1 + u^1(u_x^0)^2) + I^\alpha(3(2u^0u^1u_{xx}^0 + (u^0)^2u_{xx}^1) - u_{xx}^1) - I^\alpha(u_{xxxx}^1) \\
&= [u_x^1 + 6(2u^0u_x^0u_x^1 + u^1(u_x^0)^2) + (3(2u^0u^1u_{xx}^0 + (u^0)^2u_{xx}^1) - u_{xx}^1) - u_{xxxx}^1] \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
u^3 &= I^\alpha(u_x^2) + 6I^\alpha(u^2(u_x^0)^2) + 6I^\alpha(u^0u^1u_{xx}^1) + I^\alpha(3(u^0)^2u_{xx}^1 - u_{xx}^1) \\
&+ 12I^\alpha(u^1u^0u_x^1) + I^\alpha(u_x^2) + 6I^\alpha(2u^0u_x^0u_x^2 + 2(u_x^1)^2u^0) \\
&+ I^\alpha((6u^0u^2 + 3(u^1)^2)(u_{xx}^0)) - I^\alpha(u_{xxxx}^2) \\
u^3 &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} [2u_x^2 + 6(u^2(u_x^0)^2 + u^0u^1u_{xx}^1 + 2u^1u^0u_x^1 + 2u^0u_x^0u_x^2 + 2(u_x^1)^2u^0 + u^0u^2u_{xx}^0) \\
&+ 3((u^0)^2u_{xx}^1 + (u^1)^2u_{xx}^0) - u_{xx}^1 - u_{xxxx}^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\begin{aligned}
u^0(x, t) &= th \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \\
u^1(x, t) &= \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}} \\
u^2(x, t) &= \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{2} - \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
u^3(x, t) &= \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{2} \\
&+ \frac{\sqrt{2}t^3 \left(2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4} - \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\
&- \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

telle que $sech(t) = \frac{1}{ch(t)}$.

La solution de (3.4) déterminé comme suite

cas $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} u^0(x, t) &= th \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \\ u^1(x, t) &= \frac{t sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}} \\ u^2(x, t) &= -\frac{t^2}{2} \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ u^3(x, t) &= \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Comme la solution de (3.4) s'écrit ce forme une série, alors les quatre premiers termes est déterminée par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^0(x, t) + u^1(x, t) + u^2(x, t) + u^3(x, t). \\ u(x, t) &= th \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) + \frac{t sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2} \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(sech \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4} + \dots \end{aligned}$$

cas $\alpha = \frac{1}{2}$

Dans ce cas, en remplaçant $\alpha = \frac{1}{2}$

$$u^0(x, t) = th \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right)$$

$$u^1(x, t) = \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}}$$

$$u^2(x, t) = \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{2} - \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}$$

$$= \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)}{2} - 0.3761263891 \cdot \sqrt{2} t^{\frac{3}{2}} \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}}$$

$$u^3(x, t) = -\frac{t^2}{2} \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4}$$

$$- \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} th \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})},$$

:
.

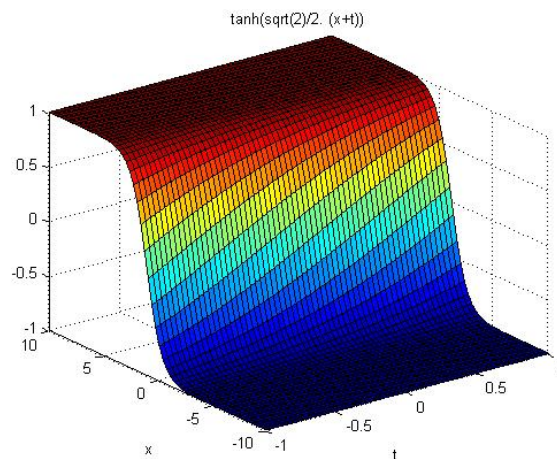


Figure 3.1: La solution exacte

3.1.2 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire spatiale

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire spatiale (voir[6]).

$$u_t = {}^c D_x^\beta u + 6u({}^c D_x^\beta u)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad x, t > 0, \quad (3.6)$$

on prend la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x) = x^2. \quad (3.7)$$

La transformée homotopique de (3.6) est construite comme suite

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[{}^c D_x^\beta u + 6u({}^c D_x^\beta u)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx} \right]. \quad (3.8)$$

En remplaçant (2.53) dans (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^0 + pu^1 + p^2u^2 + \dots)}{\partial t} = & p \left[\frac{\partial^\beta(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial x^\beta} + 6(u^0 + pu^1 + p^2u^2) \left(\frac{\partial^\beta(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial x^\beta} \right)^2 \right. \\ & + \frac{\partial^2(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial x^2} (3(u^0 + pu^1 + p^2u^2) - 1) - \frac{\partial^4(u^0 + pu^1 + p^2u^2)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned}$$

il vient par identification avec les termes de mêmes puissances de p ,

$$\begin{aligned} p^0 : u^0 &= g(x) \\ p^1 : \frac{\partial u^1}{\partial t} &= \frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} + 6u^0 \left(\frac{\partial^\beta(u^0)}{\partial x^\beta} \right)^2 + (3(u^0)^2 - 1) \frac{\partial^2(u^0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u^0}{\partial x^4} \\ p^2 : \frac{\partial u^2}{\partial t} &= (3(u^0)^2 - 1) \frac{\partial^2(u^1)}{\partial x^2} + 6u^0 u^1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \\ &+ 12u^0 \left(\frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^\beta u^1}{\partial x^\beta} + 6u^1 \left(\frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} \right)^2 + \frac{\partial^\beta u^1}{\partial x^\beta} - \frac{\partial^4 u^0}{\partial x^4} \\ p^3 : \frac{\partial u^3}{\partial t} &= (3(u^0)^2 - 1) \frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2} + 6u^0 u^1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + (6u^0 u^2 + 3(u^1)^2) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \\ &- \frac{\partial^4 u^2}{\partial x^4} + 6u^0 \left(2 \left(\frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} \right) \left(\frac{\partial^\beta u^2}{\partial x^\beta} \right) + \left(\frac{\partial^\beta u^1}{\partial x^\beta} \right)^2 \right) \\ &+ 12u^1 \left(\frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^\beta u^1}{\partial x^\beta} + 6u^2 \left(\frac{\partial^\beta u^0}{\partial x^\beta} \right)^2 + \frac{\partial^\beta u^2}{\partial x^\beta}, \\ &: \\ &. \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur d'intégration de Riemann-Liouville I^β nous avons

$$\begin{aligned}
 u^0 &= x^2 \\
 u^1 &= I^\beta(D_x^\beta u^0) + 6I^\beta(u^0(D_x^\beta u^0)^2) + I^\beta(3(u^0)^2 u_{xx}^0 - u_{xx}^0) - I^\beta(u_{xxxx}^0) \\
 u^2 &= I^\beta(D_x^\beta u^1) + 6I^\beta(2u^0 D_x^\beta u^0 D_x^\beta u^1 + (D_x^\beta u^0)^2 u^1) + I^\beta(3(2u^0 u^1 u_{xx}^0 + (u^0)^2 u_{xx}^1) - u_{xx}^1) \\
 &\quad - I^\beta(u_{xxxx}^1) \\
 u^3 &= I^\beta(D_x^\beta u^2) + (3(u^0)^2 u_{xx}^2 - u_{xx}^2) + 6I^\beta(u^0 u^1 u_{xx}^2) + 3I^\beta(u^1)^2 u_{xx}^0 + 2u^0 u^2 u_{xx}^0 \\
 &\quad + 6I^\beta(2u^0 D_x^\beta u^0 D_x^\beta u^2 + (D_x^\beta u^1)^2) + 6I^\beta(u^2(D_x^\beta u^0)^2) - D_x^\beta u^0 - I^\beta(u_{xxxx}^0), \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

La solution de (3.6) déterminés comme suite

cas $\beta = 1$

$$\begin{aligned}
 u^0(x, t) &= x^2 \\
 u^1(x, t) &= 2t(-1 + 3x^4) \\
 u^2(x, t) &= \frac{2t(-3\pi + 4\sqrt{\pi}x^{3/2} + 9\pi x^4 + 64x^5)}{3\pi}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Comme la solution de (3.6) s'écrit se forme une série, alors les premiers termes est déterminée par

$$u(x, t) = u^0(x, t) + u^1(x, t) + u^2(x, t) + \dots$$

$$u(x, t) = x^2 + 2t(-1 + 3x^4) + 24(-3t^2 - 2t^2 x^2 + 6t^2 x^6) + \dots$$

cas $\beta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 u^0(x, t) &= x^2 \\
 u^1(x, t) &= \frac{2t(-3\pi + 4\sqrt{\pi}x^{3/2} + 9\pi x^4 + 64x^5)}{3\pi}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Comme la solution de (3.4) s'écrit se forme un série alors les premiers termes est déterminée par

$$u(x, t) = x^2 + \frac{2t(-3\pi + 4\sqrt{\pi}x^{3/2} + 9\pi x^4 + 64x^5)}{3\pi} + \dots$$

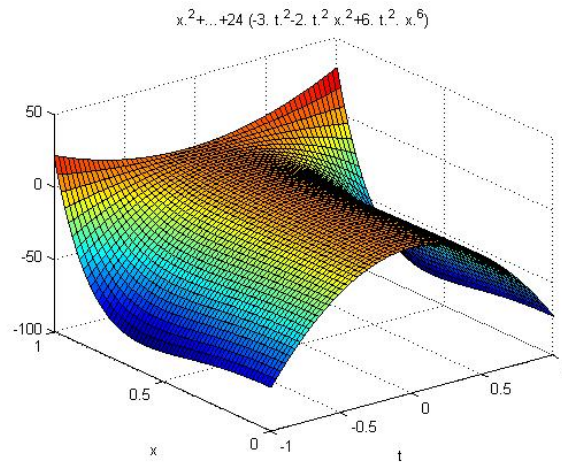


Figure 3.2: La solution approchée pour $\beta = 1$

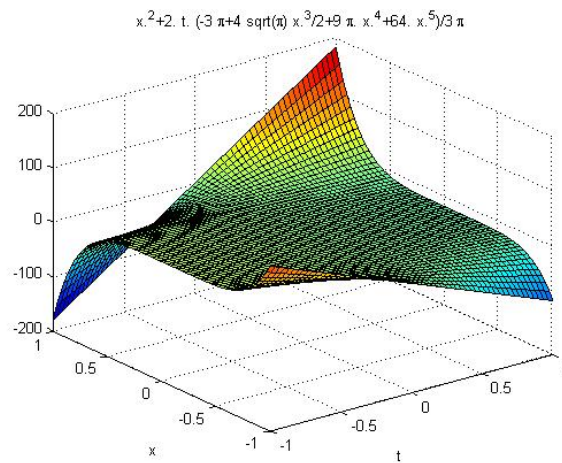


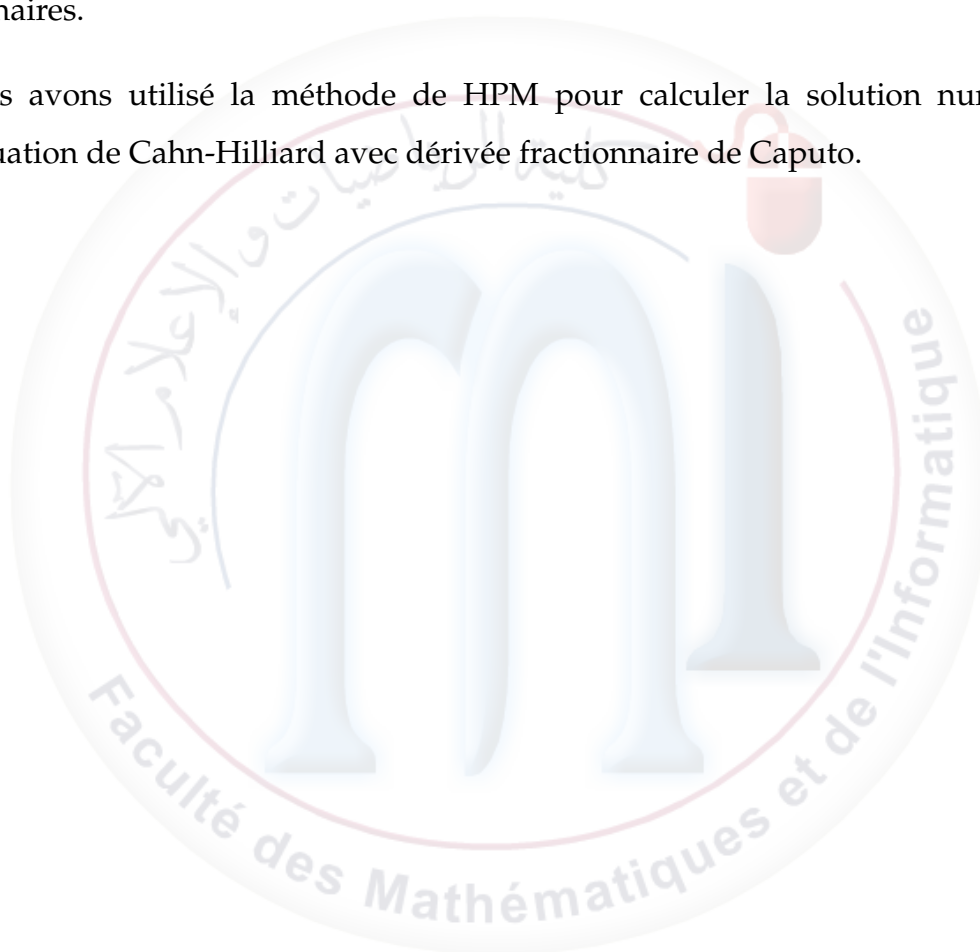
Figure 3.3: La solution approché pour $\beta = \frac{1}{2}$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode de perturbation d'homotopie pour résoudre des équations aux dérivées partielles fractionnaires de Caputo.

Ce travail se déroule en deux étapes

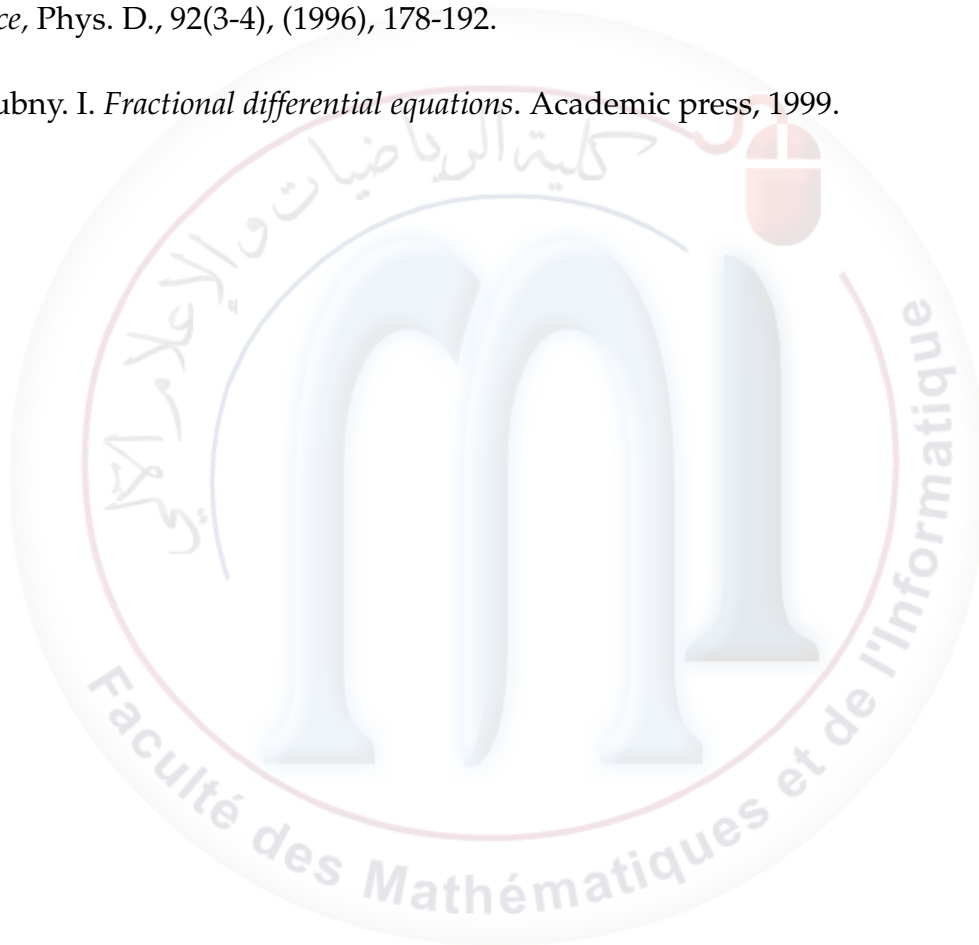
1. Nous avons donné une description de la méthode de perturbation d'homotopie, et étudié la convergence de la méthode pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires.
2. Nous avons utilisé la méthode de HPM pour calculer la solution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard avec dérivée fractionnaire de Caputo.



Bibliography

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. ELSEVIER, 2006
- [2] Arioua. Y, *cours de équations différentielles fractionnaires*. Université Mohamed Boudiaf De M'sila, 2017/2018
- [3] Ayatia, Z., Biazar, J. *On the convergence of Homotopy perturbation method*, J. Egyptian. Meth. Soci., 23, (2015), 424-428.
- [4] Biazar, J., Aminikhah, H. *Study of convergence of homotopy perturbation method for systems of partial differential equation*, Comput. Meth. App., 58(2009), 2221-2230.
- [5] Biazar, J., Ghazvini, H. *convergence of homotopy perturbation method for partial differential equation*, Nonlinear Analysis: Real World Application., 10, (2009), 2633-2640.
- [6] Bouhassoun, A., Hamdi Cherif, M. *Homotopy Perturbation Method For Solving The Fractional Cahn-Hilliard Equation*, J. Interdisc. Math, 18(5), (2015), 513-524.
- [7] Cahn, J. W., Hilliard, J. E. *Free energy of nonuniform system. i. interfacial free energy*, J. Chem. Phys., 28(258), (1958).
- [8] Elbelez, A. A, Kilicman, A. Taib, B. M. *Note on the convergence Analysis of Homotopy Perturbation Method for Fractional Partial Differential Equations*, H. Pub. corp. Abst. Appl. Anal., A. ID 803902, (2014), 1-8.
- [9] Ghorbani, A. *Beyond Adomian's polynomials: He polynomials*, Chaos Solitons Fract., 39(3), (2009), 1486-1492
- [10] He, J. H. A *coupling method of homotopy technique and perturbation technique for non linear problems*, Int. J. Non-Linear Mech., 35, (2000), 37-43.
- [11] He, J. H. *Homotopy perturbation technique*, Comput. Meth. App. Mech. Eng., 178(3), (1999), 257-262.

- [12] He, J. H. *Application of homotopy perturbation method to non linear wave equations*, Chaos Solitons Fractals., 26(3), (2005), 695-700.
- [13] Liu, S., Wang, F., Zahao, H. *Global existence and asymptotics of solutions of the cahn-Hilliard equation*, J. Differential Equations., 238(2), (2007), 426-469.
- [14] Momani, S., Odibat, Z. *Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order*, Phy. Lett. A., 365, (2007), 345-350.
- [15] Morton, E. G. *Generalized Ginzburg-Landau and cahn-Hilliard equation based on a microforce balance*, Phys. D., 92(3-4), (1996), 178-192.
- [16] Podlubny. I. *Fractional differential equations*. Academic press, 1999.



ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الكسرية، بتعبير أدق المشتق بمعنى كابوتو، من خلال طريقة اضطراب التماثل. طبقا هذه الطريقة من أجل حل معادلة كان هيليارد في كلتا الحالتين الزمانية والمكانية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الكسرية، طريقة HPM، مشتق كسري بمعنى كابوتو.

Abstract

In this memory, we have studied the partial differential equations of fractional ordre, more precisely the derivative in the sense of Caputo, by the homotopy perturbation method (HPM).

We applied this method to solve the Cahn Hilliard equation in both temporal and spatial cases.

Keywords: Fractional partial differential equation, HPM method, derivative in the sense of Caputo.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaires, plus précisément la dérivée au sens du Caputo, par la méthode de perturbation d'homotopie (HPM).

Nous avons appliqué cette méthode pour résoudre l'équation de Cahn Hilliard dans les deux cas temporelle et spatiale.

Mots clés: Équation aux dérivées partielles fractionnaire, méthode HPM, dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
