REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et discrètes

Par : SEGHIRI Afaf

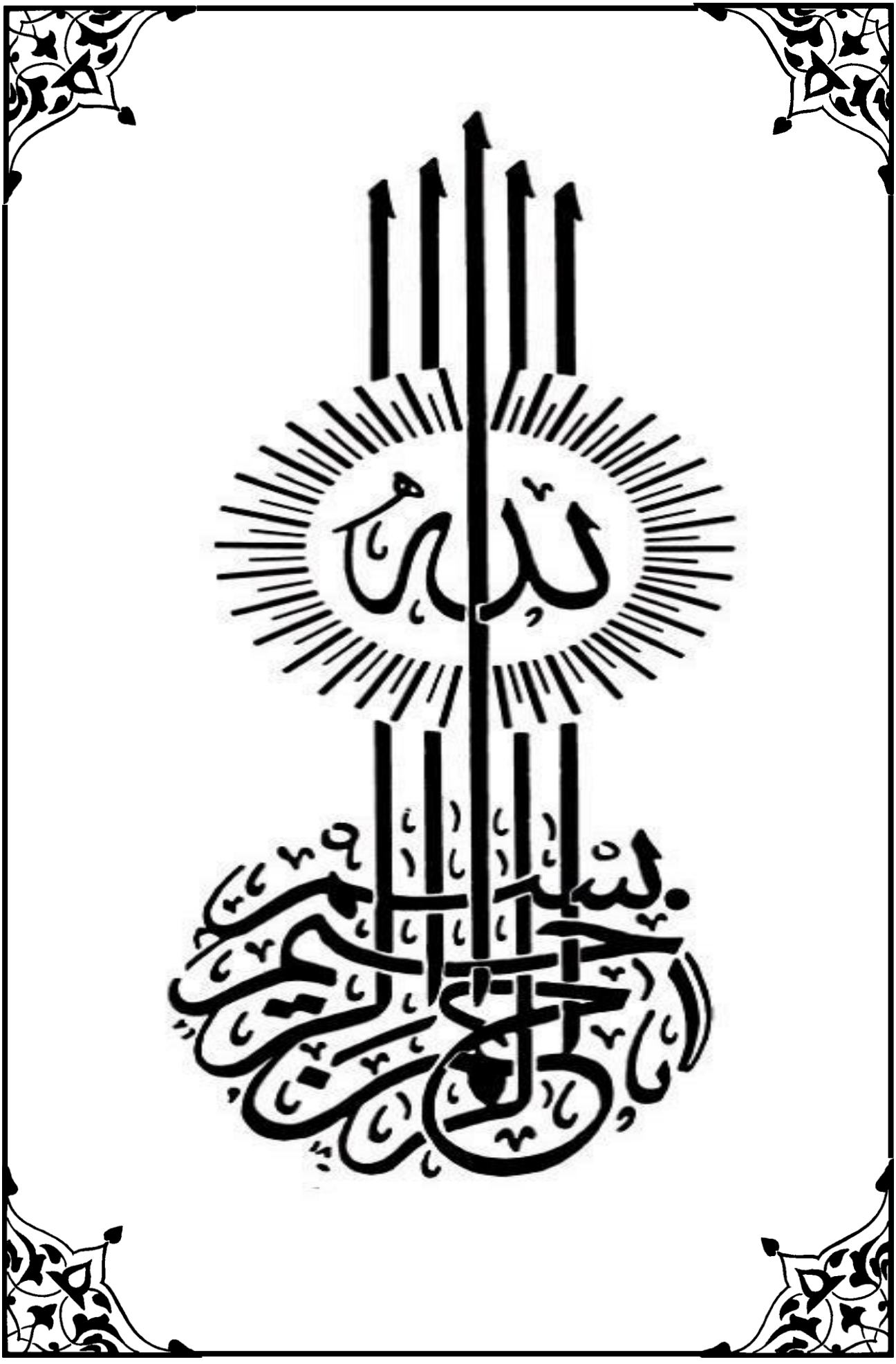
SUJET

SUR LES ENSEMBLES FLOUS

Soutenu publiquement le : 05 / 06/ 2016 devant le jury composé de :

AMROUNE Abdelaziz	**Prof**	**Université de M'sila**	**Président**
ZIANE Brahim	**M. A. A**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
MILLES Soheyb	**M. A. A**	**Université de M'sila**	**Examinateur**
BARKAT Omar	**M.A .A**	**Université de Batna**	**Examinateur**

Promotion : 2015 /2016



Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Allah qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercie Mr. *ZIANE Brahim* directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères et ma sœur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublies aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

-A mes parents ma mère et mon pére.

-A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

-Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

$[xy]$	Segment.
f_A	Fonction d'appartenance de A.
$f_A(x)$	Degré d'appartenance de x dans A.
AB	Produit algébrique de deux ensembles flous A et B.
$A + B$	Somme algébrique de deux ensembles flous A et B.
$\|A - B\|$	Différence absolu de deux ensembles flous A et B.
$C_{A\cap B}^{A\cup B}$	Complément de $A \cap B$ dans $A \cup B$.
$(A, B; \Lambda)$	Combinaison convexe de les ensembles flous A, B et Λ.
R	Relation flou.
$B \circ A$	Composition de deux relations flous A et B.
Γ_α	α-coupes (ensemble classique).
$R(\alpha)$	Rayon d'une sphére.
$\|\|x\|\|$	Norme euclidien de x
$S_H(A)$	projection de ensemble flou A en $H = \{x/x_1 = 0\}$.
$(0, 1]$	Intervalle ouvert $]0.1]$.
$(0, 1)$	Intervalle ouvert $]0.1[$.

Liste des Figures

1.1.1 Ensemble convexe / ensemble non convexe 3
1.1.2 Fonction convexe / Fonction non convexe 4

2.1.1 La fonction caractéristique de A 9
2.2.1 La fonction caractéristique de À. 10
2.2.2 Partition floue de l'univers du discours X. 11
2.2.3 La fonction caractéristique de $\grave{C}$ 11
2.2.4 La fonction caractéristique de $B \cup C$. 14
2.2.5 La fonction caractéristique de $B \cap C$. 16
2.2.6 Illustration de l'union et de l'intersection des ensembles flous en $\mathbb{R}^1$. 18
2.3.1 La fonction caractéristique de AB. 24
2.3.2 La fonction caractéristique de $A + B$. 24
2.3.3 La fonction caractéristique de $|A - B|$. 25
2.3.4 Exemple d'une relation flous. 29

3.0.1 Un ensemble flou convexe et non convexe en E^1. 33

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **2**

1.1 Convexité 2

1.2 Ensemble borné 4

1.3 Hyperplan 5

1.4 Espace euclidien 6

2 Ensembles flous **7**

2.1 Ensemble flou 7

2.2 Opérations sur les ensembles flous 9

2.2.1 Egalité 9

2.2.2 Complémentaire 10

2.2.3 Inclusion 12

2.2.4 Réunion 13

2.2.5 Intersection 15

2.2.6 Quelque propriétés de l'union, l'intersection et de la complémentation 20

2.3 Opérations algébriques sur les ensembles flous 22

2.3.1 Produit algébrique 22
2.3.2 Somme algébrique 23
2.3.3 Différence absolue 23
2.3.4 Combinaison convexe 25
2.3.5 Relation floue 27
2.3.6 n-aire relation floue 29
2.3.7 Composition des relations 30
2.4 Ensemble flou induit par application. 32

3 Convexité **33**
3.1 Convexité 34
3.2 Ensemble flou borné 36
3.3 Convexité stricte et forte 38
3.4 Projection d'un ensemble flou 41

Conclusion générale **44**

Bibliogeaphie 45

Introduction

Notre mémoire est un essai de compréhension des idées proposé par Zadeh dans son article "Fuzzy set"[6].

Ce dernier est le point de départ de la théorie des ensembles flous. C'est pour quoi dans ce travail on donne un intérêt spécial aux idées proposées dans cet article.

Pour cela, nous avons organisé le mémoire comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base des ensembles convexes, ensembles bornés, hyperplans, et l'espace euclidien dans le cas classique, pour pouvoir aborder le cas flou.

Le deuxième chapitre est consacré aux opérations ensemblistes, on présente les notions d'inclusion, Union, intersection, complémentation, relation, produit et somme algébriques, ...etc. Diverses propriétés et notions sont étendues au cas flous.

Le troisième chapitre traite la notion de convexité facilement étendue aux ensembles flous de manière à conserver un grand nombre des propriétés que l'on a dans le cadre d'ensembles classiques.

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente les notions de l'ensemble convexe, une fonction convexe, un ensemble borné, les hyperplans, et l'espace euclidien.

1.1 Convexité

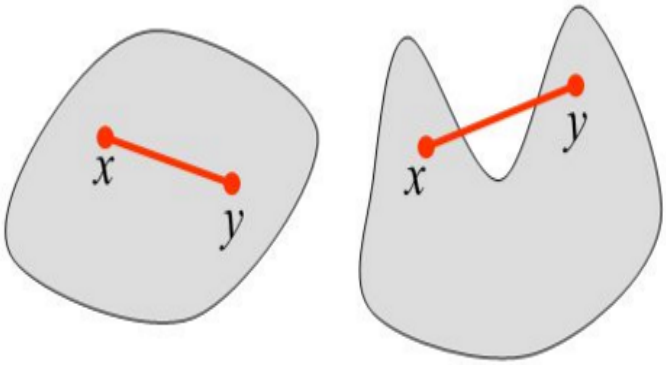
E un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Un segment de E est un ensemble noté et défini comme suit:*

$$[xy] = \{(1-t)\,x + ty / t \in [0,1]\}\,.$$

Définition 1.1.2 *Un ensemble A de E est dit convexe, pour tous x et $y \in A$, le segment $[xy]$ est contenu dans A c'est à dire:*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : (1-t)\,x + ty \in A.$$

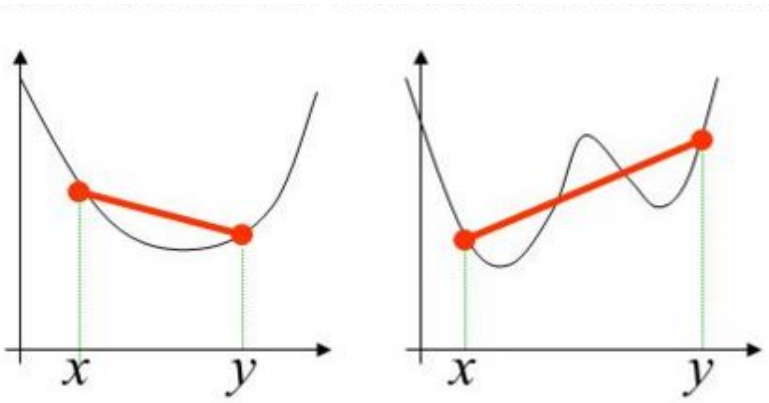


Ensemble convexe / Ensemble non convexe

Définition 1.1.3 *Une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe si: quels que soient deux points x_1 et x_2 du graphe de la fonction, le segment $[x_1x_2]$ est entièrement situé au-dessus du graphe, ou l'épigraphe de la fonction (l'ensemble des points qui sont au-dessus de son graphe) est un ensemble convexe, ou vu d'en dessous, le graphe de la fonction est en bosse. En précisant au moyen des valeurs de la fonction ce que sont les points x_1 et x_2 ci-dessus, on obtient une définition équivalente souvent donnée de la convexité d'une fonction: une fonction définie sur un intervalle réel I est convexe lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout t dans $[0,1]$ on a:*

$$f((1-t)\,x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Lorsque l'inégalité est stricte (avec $x_1 \neq x_2$ et t dans $]0,1[$), on parle de fonction strictement convexe.



Fonction convexe / Fonction non convexe

Exemple 1.1.1 *La fonction du second degré $x \mapsto ax^2$, avec $a > 0$, et la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ sont des exemples de fonctions strictement convexes. Les fonctions affines (en particulier constantes) sont convexes.*

Ces définitions se généralisent aux fonctions définies sur un espace vectoriel (ou affine) arbitraire et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. À l'inverse, une fonction dont un même segment $[xy]$ est situé en-dessous du graphe, ou dont l'hypographe (l'ensemble des points qui sont en-dessous du graphe de la fonction) est un ensemble convexe, ou encore dont, vu d'en-dessous, le graphe est en creux, est dite concave. En d'autres termes, une fonction f est concave si son opposée $-f$ est convexe.

1.2 Ensemble borné

Définition 1.2.1 *Soit E un ensemble non vide, ordonné.*

- *E est dit minoré, s'il existe un élément m tel que tout élément x de E soit supérieur ou égal à m.*

- *E est dit majoré s'il existe un élément M tel que tout élément x de E soit inférieur ou égal à M.*
- *E est dit borné s'il est en même temps minoré et majoré.*
- *m est appelé minorant de E et M est appelé majorant de E.*
- *Si M est un majorant de A, alors $M+1$, $M+2$ et plus généralement tout réel plus grand que M sont aussi des majorants de A.*

Exemple 1.2.1

Ensemble	*Minorant*	*Majorant*
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\{1/n, n \in \mathbb{N}\}$	0	1
$\{(-1)^n(1-1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	1
$\{(-1)^n(1+1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n+1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	$3/2$
$\{(-1)^n-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	1

1.3 Hyperplan

En mathématiques et plus particulièrement en algèbre linéaire et géométrie, les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension quelconque sont la généralisation des plans vectoriels d'un espace de dimension 3: ce sont les sous-espaces vectoriels de codimension 1 dans E. Si E est de dimension finie n, ses hyperplans sont donc ses sous-espaces de dimension $(n-1)$.

Exemple 1.3.1 *L'espace nul dans une droite vectorielle, une droite vectorielle dans un plan vectoriel.*

Exemple 1.3.2 *Dans le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps K, l'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan.*

1.4 Espace euclidien

Définition 1.4.1 *Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

Un espace euclidien, dans la conception actuelle, est un espace vectoriel ou affine réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Chapitre 2

Ensembles flous

Nous présentons dans ce chapitre les concepts de base des ensembles flous, le complémentaire, l'union, l'intersection, le produit et somme algébrique, la différence absolu, combinaison convexe, et une relation floue.

Soit X un ensembel des références.

2.1 Ensemble flou

Définition 2.1.1 *[6] A un ensemble flou de X est caractérisé par une fonction caractéristique $f_A(x)$ (Une fonction d'appartenance) sur X a valeurs dans l'intervalle $[0,1]$:*

$$\begin{array}{rccc} f_A & : & X & \rightarrow & [0,1] \\ & & x & \mapsto & f_A(x) \end{array}$$

La valeur de $f_A(x)$ représente " le degré d'appartenance " de l'élément x dans A.

- A est un ensemble flou vide si et seulement si ça fonction caractéristique égale zéro pour tout x.

$$f_A(x) = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow A = \emptyset.$$

- Si A est un ensemble classique, $f_A(x) = 1$ ou $f_A(x) = 0$, $\forall x \in X$.

- Si A est un ensemble flou on observe les trois cas possibles:

  1. $f_A(x) = 1$ si x appartient (entièrement) à A.
  2. $f_A(x) = 0$ si x n'appartient pas à A.
  3. $0 < f_A(x) < 1$ si x appartient partiellement à A.

Exemple 2.1.1 *$X = \mathbb{R}^2$ et $A = [0,1]$. Donc:*

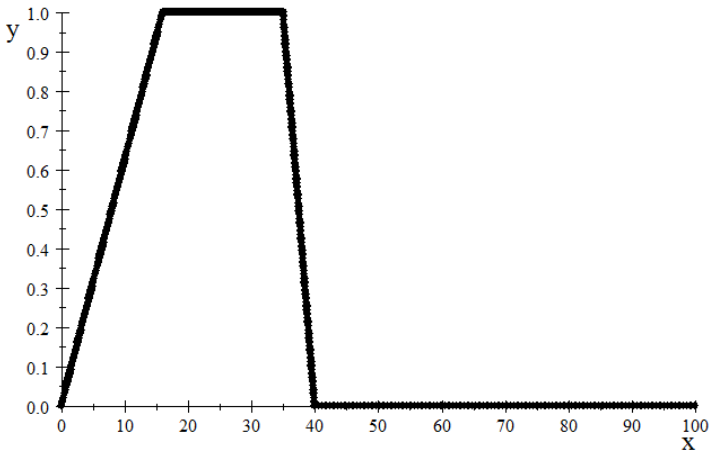
$$f_A(x,y) = \begin{cases} 1 & Si \quad x^2 + y^2 \leqq 1; \\ 0 & Si \quad x^2 + y^2 \geqq 4; \\ \exp(-\sqrt{x^2+y^2}) & Si \quad 1 < x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Exemple 2.1.2 *Soit X l'ensemble des personnes d'âges déférents, et soit A l'ensemble des jeunes de X. Donc la fonction caractéristique est définie par:*

$$\begin{array}{rccc} f_A & : & [0,100] & \rightarrow & [0,1] \\ & & x & \mapsto & f_A(x) \end{array}$$

Avec

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x & Si \quad x \leqq 16; \\ 1 & Si \quad 16 < x \leqq 35; \\ \frac{40-x}{5} & Si \quad 35 < x \leqq 40; \\ 0 & Si \quad x > 40. \end{cases}$$



La fonction caractéristique de A.

2.2 Opérations sur les ensembles flous

2.2.1 Egalité

Définition 2.2.1 *[6] A et B deux ensembles flous de X sont égaux:*

$$A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x), \forall x \in X.$$

Formelement:

$$A = B \Leftrightarrow f_A = f_B.$$

Exemple 2.2.1 *Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et soient A et B de X, tel que*

$$f_A : \begin{cases} f_A(a) = 0.3; \\ f_A(b) = 0.5; \\ f_A(c) = 0.9; \\ f_A(d) = 1. \end{cases}, \text{ et } f_B : \begin{cases} f_B(a) = 0.3; \\ f_B(b) = 0.7; \\ f_B(c) = 0.9; \\ f_B(d) = 1. \end{cases}$$

On a: $f_A(b) \neq f_B(b)$ donc, $A \neq B$.

2.2.2 Complémentaire

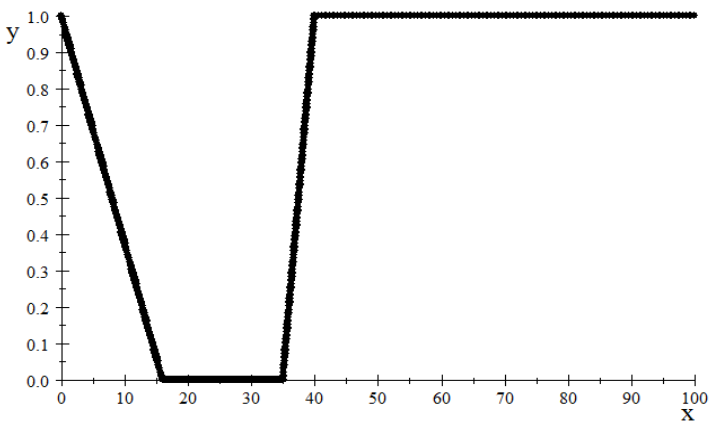
Définition 2.2.2 *[6] Le complémentaire d'un ensemble flou A de X noté $\grave{A}$, sa fonction caractéristique est définie par:*

$$f_{\grave{A}}(x) = 1 - f_A(x), \forall x \in X.$$

Formellement:

$$f_{\grave{A}} = 1 - f_A. \tag{2.2.1}$$

Exemple 2.2.2 *Avec l'ensemble flou A de l'exemple (2.1.2) on obtient la fonction caractéristique de le complémentaire de A.*



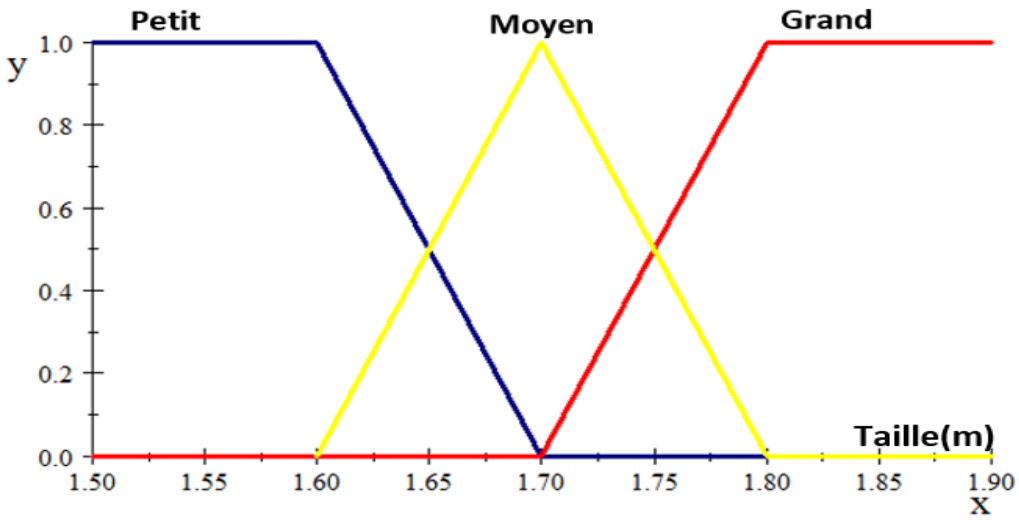
La fonction caractéristique de $\grave{A}$.

Exemple 2.2.3 *[3] Soit X l'ensemble des personnes de tailles déférentes. On peut définir les ensembles flous suivants:*

A est l'ensemble flou des personnes de Grandes tailles.

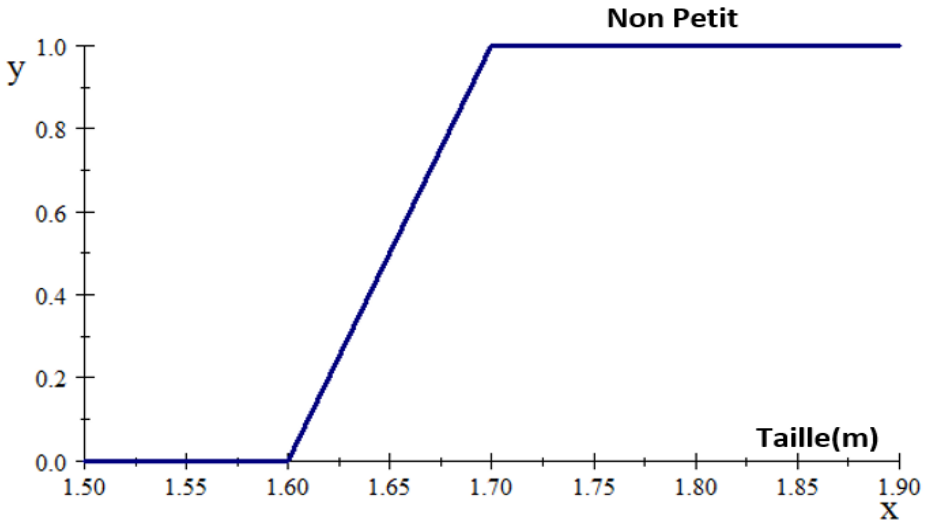
B est l'ensemble flou des personnes de tailles Moyennes.

C est l'ensemble flou des personnes de Petites tailles.



Partition floue de l'univers du discours X.

L'ensemble des personnes " Non petites " est un ensemble flou de fonction d'appartenance



La fonction caractéristique de $\grave{C}$.

Remarque 2.2.1 *Contrairement aux ensembles classiques, il vérifie généralement*

$$A \cap \grave{A} \neq \varnothing;$$
$$A \cup \grave{A} \neq X.$$

On a

$$A \cap \grave{A} \supset \varnothing;$$
$$A \cup \grave{A} \subset X.$$

Mais

$$A \cap \grave{A} \subset \varnothing;$$
$$A \cup \grave{A} \supset X.$$

En générale n'est pas verai.

Exemple 2.2.4 *Avec l'ensemble A et $\grave{A}$ de l'exemple (2.1.2), On a*

$$f_{A\cap\grave{A}}(10) = \min\left[f_A(10), f_{\grave{A}}(10)\right] = 0.4 \neq 0 \text{ } Donc \text{ } A \cap \grave{A} \nsubseteq \varnothing;$$
$$ET$$
$$f_{A\cup\grave{A}}(10) = \max\left[f_A(10), f_{\grave{A}}(10)\right] = 0.6 \neq 1 \text{ } Donc \text{ } A \cup \grave{A} \ngeq X.$$

2.2.3 Inclusion

Définition 2.2.3 *[6] A est un ensemble flou inclus dans B, ou (A est un sous-ensemble flou de B), ou (A est inférieur ou égale à B) si et seulement si*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leqq f_B(x), \forall x \in X. \tag{2.2.2}$$

Formellement:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow f_A \leqq f_B.$$

Exemple 2.2.5 *Soit* $X = \{x_1, x_2\}$ *et soient* A *et* B *de* X*, tel que*

$$f_A : \begin{cases} f_A(x_1) = 0.3; \\ f_A(x_2) = 0.5. \end{cases}, \text{ et } f_B : \begin{cases} f_B(x_1) = 0.3; \\ f_B(x_2) = 0.7. \end{cases}$$

On a $f_A(x_1) = f_B(x_1)$ *et* $f_A(x_2) \leqq f_B(x_2)$*, Donc* $A \subseteq B$*.*

2.2.4 Réunion

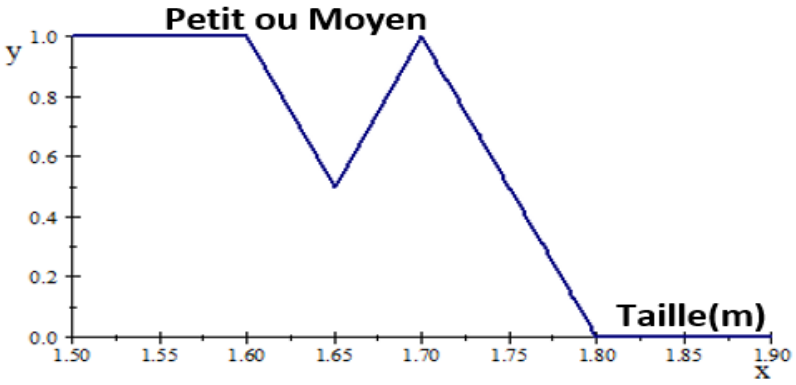
Définition 2.2.4 *[6] L'union de deux ensembles flous* A *et* B *de* X *de fonctions caractéristiques respectivement* f_A *et* f_B *est l'ensemble flou* $C = A \cup B$ *de fonction caractéristique* f_C *définie par:*

$$f_C(x) = \max\left[f_A(x), f_B(x)\right], \forall x \in X. \tag{2.2.3}$$

Formellement:

$$f_C = f_A \vee f_B. \tag{2.2.4}$$

Exemple 2.2.6 *Avec les ensembles flous* B *et* C *de l'exemple (2.2.3) on obtient l'ensemble des personnes de Petites tailles ou de tailles Moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance:*



La fonction caractéristique de $B \cup C$.

Proposition 2.2.1 *[6] L'union de A et B est le plus petit ensemble flou contient A et B.*

Preuve. L'union de A et B est le plus petit ensemble flou contient A et B, C'est à dire: Si D un ensemble flou contient A et B alors D contient l'union de A et B on a:

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \text{Et} \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\left[f_A(x), f_B(x)\right] \geqq f_A; \\ \text{Et} \\ \max\left[f_A(x), f_B(x)\right] \geqq f_B. \end{cases}$$

Donc si D ensemble flou contient A et B alors:

$$f_D \geqq f_A \text{ et } f_D \geqq f_B \text{ , et donc } f_D \geqq \max\left[f_A(x), f_B(x)\right] = f_C$$

$$\Longrightarrow C \subset D.$$

■

Exemple 2.2.7 *Soit X l'ensemble des couleurs préférées, et soient A l'ensemble flou des couleurs claires, B l'ensemble flou des couleurs foncées. On note $X = \{Blanc,\ Noir,\ Brun,\ Jaune,\ Rouge,\ Bleu,\ Vert,\ Orange,\ Violet\}$, et $A = \{Vert,\ Orange,\ Violet\}$, $B = \{Jaune,\ Rouge,\ Bleu\}$.*

On a C l'ensemble flou des couleurs $C = A \cup B$ avec

$$C = \{(B;0), (N;0), (Br;0), (Ja;0.5), (Ro;0.06), (Bl;0.9), (Ve;0.1), (Or;0.6), (Vi;0.04)\}.$$

Soit D un ensemble flou contient A et B avec

$$D = \{(B;0), (N;0.5), (Br;1), (Ja;0.5), (Ro;0.6), (Bl;0.9), (Ve;0.2), (Or;0.7), (Vi;0.14)\}.$$

On a

$$f_D \geqq \max\left[f_A(x), f_B(x)\right] = f_C, \forall x \in X.$$

Donc

$$C \subset D.$$

2.2.5 Intersection

Définition 2.2.5 *[6] L'intersection de deux ensembles flous A et B de X de fonctions caractéristiques respectivement f_A et f_B c'est l'ensemble flou $C = A \cap B$ de fonction caractéristique f_C définie par:*

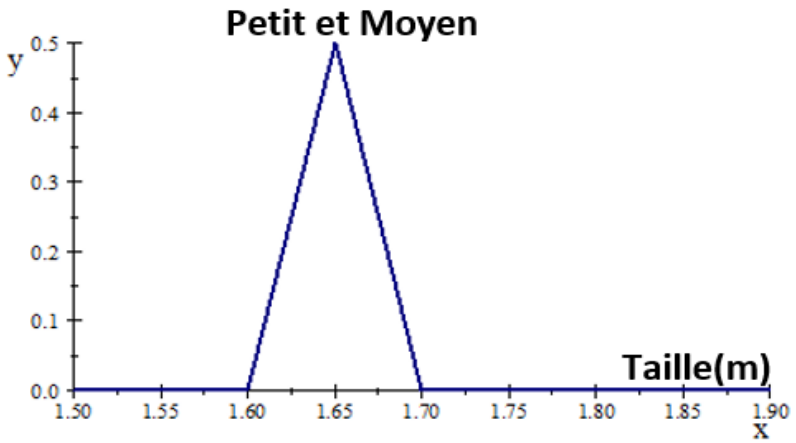
$$f_C(x) = \min\left[f_A(x), f_B(x)\right], \forall x \in X. \tag{2.2.5}$$

Formellement:

$$f_C = f_A \wedge f_B. \tag{2.2.6}$$

Exemple 2.2.8 *Avec les ensembles flous B et C de l'exemple (2.2.3) on obtient l'ensemble des personnes de petites tailles et de tailles moyennes est*

un ensemble flou de fonction d'appartenance:



La fonction caracteristique de $B \cap C$.

Proposition 2.2.2 *[6] L'intersection de A et B est le plus grande ensemble flou inclus dans A et B.*

Preuve. L'intersection de A et B est le plus grande ensemble flou inclus dans A et B. C'est à dire: S' il existe D un ensemble flou inclus dans A et B alors D inclus dans $A \cap B$. On a:

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{Et} \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\left[f_A(x), f_B(x)\right] \leqq f_A(x); \\ \text{Et} \\ \min\left[f_A(x), f_B(x)\right] \leqq f_B(x). \end{cases}$$

Danc si D ensemble flou inclus dans A et B alors:

$$f_{_D} \leqq f_{_A} \text{ et } f_{_D} \leqq f_B$$

Et donc

$$f_D \leqq \min\left[f_A(x), f_B(x)\right] = f_C \Longrightarrow D \subset C.$$

■

Exemple 2.2.9 *Avec les ensembles flous A et B de l'exemple (2.2.7).Et soit* $C = A \cap B$ *avec*

C={(B;0),(N;0),(Br;0),(Ja;0.15),(Ro;0.02),(Bl;0.19),(Ve;0.01),(Or;0.07),(Vi;0.03)}.

Soit D un ensemble flou inclus dans A et B

D={(B;0),(N;0),(Br;0),(Ja;0.05),(Ro;0.01),(Bl;0.10),(Ve;0),(Or;0.05),(Vi;0.008)}.

On a

$$\forall x \in X,\ f_D \leq \min\left[f_A(x), f_B(x)\right] = f_C$$

Donc

$$D \subset C.$$

Remarque 2.2.2 *Dans le cas classique A et B sont disjoint si:* $A \cap B = \emptyset$*, c'est-à-dire dans le cas de ensemblesflou on a:*

$$\min\left[f_A(x), f_B(x)\right] = 0, \forall x \in X.$$

Proposition 2.2.3 *Si* A, B, C *des ensembles flous on a:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

Et

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

L'intersection et l'union de deux ensembles flous en droite real sont illustrées dans la figure suivante. La fonction de caractéristique de l'union est composée des courbes segments, 1 et 2 celui de l'intersection est constitué de

segments 3 et 4 [6, voir page 342]

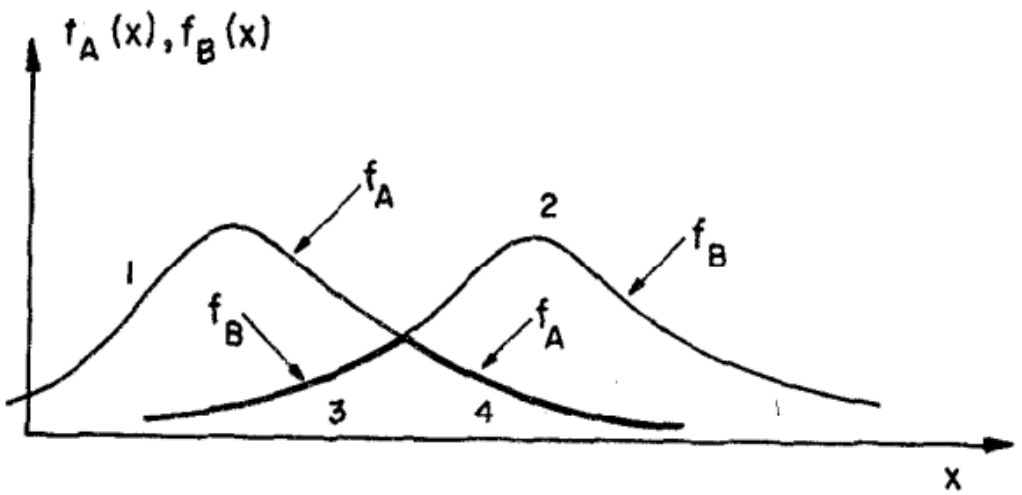


Illustration de l'union et de l'intersection des ensembles flous en $\mathbb{R}^1$.

Exemple 2.2.10 *[2] Soit* $X = \{Paris, Ville\ de\ province,\ Bourgade\}$*, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés* P, V, B*. On peut définir les sous-ensembles flous suivants, correspondant à des choix:* A *et* H *des fonctions caractéristiques* f_A *et* f_H *défini par:*

$$f_A : \begin{cases} f_A(P) = 0.8; \\ f_A(V) = 0.6; \\ f_A(B) = 0.4. \end{cases} \quad Et\ f_H : \begin{cases} f_A(P) = 0.2; \\ f_A(V) = 1; \\ f_A(B) = 0. \end{cases}$$

En poursuivant on obtient $\grave{A}$ *Le complémentaire de l'ensemble flou* A*, de fonction caractéristique*

$$f_{\grave{A}} : \begin{cases} f_{\grave{A}}(P) = 0.2; \\ f_{\grave{A}}(V) = 0.4; \\ f_{\grave{A}}(B) = 0.6. \end{cases}$$

Et on obtient $A \cap H$ et $A \cup H$ sont défini pare

$$f_{A\cap H} : \begin{cases} f_{A\cap H}(P) = 0.2; \\ f_{A\cap H}(V) = 0.6; \\ f_{A\cap H}(B) = 0. \end{cases} \quad \text{Et } f_{A\cup H} : \begin{cases} f_{A\cup H}(P) = 0.8; \\ f_{A\cup H}(V) = 1; \\ f_{A\cup H}(B) = 0.4. \end{cases}$$

Dans le cas classique les notions de l'inclusion, l'union et l'intersection jouent le même rôle entre les ensembles flous.

Remarque 2.2.3 *[6] Notez que la notion « Appartenance », qui joue un rôle fondamental dans le cas des ensembles classiques, n'a pas le même rôle dans le cas des ensembles flous. Ainsi, il n'a pas de sens de parler d'un point x: « appartient » à un ensemble flou A, sauf dans le sens trivial du $f_A(x) \geqq 0$. Trivialement, on peut introduire deux niveaux α et β $(0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \beta < \alpha)$ et d'accord pour dire que:*

1. *" x appartient à A " C'est-à-dire il existe α tel que: $f_A(x) \geqq \alpha$;*
2. *" x n'appartient pas à A " C'est-à-dire il existe $\beta, (\beta < \alpha)$ tel que: $f_A(x) \leqq \beta$;*
3. *" x a un statut indéterminé par rapport à A " C'est-à-dire ils existes $\alpha, \beta, (\beta < \alpha)$ tel que $\beta < f_A(x) < \alpha$.*

Cela conduit à une logique à trois valeurs [5] avec trois valeurs de vérité:

- $\mathrm{T}^{(1)}(f_A(x) \geqq \alpha)$,
- $\mathrm{F}^{(2)}(f_A(x) \leqq \beta)$,
- $\mathrm{U}^{(3)}(\alpha < f_A(x) < \beta)$.

(1) T : Vrai (True)
(2) F: Faux (False)
(3) U: Indécis (Undécidé)

2.2.6 Quelque propriétés de l'union, l'intersection et de la complémentation

Avec les opérations d'union, intersection et complémentation définies comme dans les équations (2.2.3), (2.2.5) et (2.2.1), il est facile d'étendre la plupart des identités de base qui détiennent des ensembles classique à des ensembles flous, nous avons

- Les lois de Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'. \tag{2.2.7}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{2.2.8}$$

- Distributivité:

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B). \tag{2.2.9}$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B). \tag{2.2.10}$$

Proposition 2.2.4 *[6] Les relations correspondantes pour les fonctions d'appartenance de A, B et C sont des identités. Par exemple, dans le cas de l'équation (2.2.7). Nous avons:*

$$1 - \max[f_A, f_B] = \min[1 - f_A, 1 - f_B]. \tag{2.2.11}$$

Preuve. Qui peut être facilement vérifié comme une identité en le testant pour les deux cas possibles:

1. Si

$$f_A(x) \leqq f_B(x) \Rightarrow 1 - \max[f_A, f_B] = 1 - f_B.$$

En autre face on a

$$\min[1 - f_A, 1 - f_B] = 1 - f_B \text{ car } 1 - f_A(x) \geqq 1 - f_B(x).$$

2. Si

$$f_B(x) \leqq f_A(x) \Rightarrow 1 - \max[f_A, f_B] = 1 - f_A.$$

En autre face on a

$$\min[1 - f_A, 1 - f_B] = 1 - f_A \text{ car } 1 - f_A(x) \leqq 1 - f_B(x).$$

Enfin, nous avons:

$$1 - \max[f_A, f_B] = \min[1 - f_A, 1 - f_B].$$

■

Proposition 2.2.5 *[6] Les relations correspondantes pour les fonctions d'appartenance de A, B et C sont des identités. Par exemple, dans le cas de l'équation (2.2.10). Nous avons:*

$$\max[f_c, \min[f_A, f_B]] = \min[\max[f_C, f_A], \max[f_C, f_B]]. \tag{2.2.12}$$

Preuve. On a six cas:

Prenons le cas: $f_A(x) < f_B(x) < f_C(x)$, on a:

$$f_A(x) < f_B(x) < f_C(x) \Rightarrow \max[f_c, \min[f_A, f_B]] = \max[f_c, f_A] = f_c.$$

En autre face on a

$$\min[\max[f_C, f_A], \max[f_C, f_B]] = \min[f_C, f_C] = f_C.$$

De la même façon nous allons prouver les cinq cas restants;

$f_A(x) < f_C(x) < f_B(x)$; $f_B(x) < f_A(x) < f_C(x)$; $f_B(x) < f_C(x) < f_A(x)$;
$f_C(x) < f_A(x) < f_B(x)$; $f_C(x) < f_B(x) < f_A(x)$.

■

2.3 Opérations algébriques sur les ensembles flous

Outre les opérations de l'union et de l'intersection, on peut définir un certain nombre d'autres façons de former des combinaisons d'ensembles flous et à les relier les uns aux autres. Parmi les plus importants de ceux-ci sont les suivantes

2.3.1 Produit algébrique

Définition 2.3.1 *[6] Le produit algébrique de deux ensembles flous A et B c'est l'ensemble flou noté AB, et est définie en termes de fonctions caractéristiques de A et B comme suit:*

$$f_{AB} = f_A f_B. \tag{2.3.1}$$

Proposition 2.3.1 *[6] On a*

$$AB \subset A \cap B. \tag{2.3.2}$$

Preuve. On a

$$f_A(x) \times f_B(x) \leq f_A(x);$$

Et

$$f_A(x) \times f_B(x) \leq f_B(x).$$

Donc

$$f_{AB}(x) \leq \min[f_A(x), f_B(x)].$$

Et donc

$$AB \subset A \cap B.$$

■

2.3.2 Somme algébrique

Définition 2.3.2 *[6] La somme algébrique de deux ensembles flous A et B c'est l'ensemble flou noté $A + B$, et est définie en termes de fonctions caractéristiques de A et B comme suit:*

$$f_{A+B} = f_A + f_B. \tag{2.3.3}$$

Proposition 2.3.2 *[6] La somme algébrique de A et B est inférieure ou égal à l'unité, ainsi différente de la produit algébrique, la somme algébrique n'a de sens que lorsque la condition:*

$$f_{A+B}(x) = f_A(x) + f_B(x) \leqq 1, \forall x \in X.$$

2.3.3 Différence absolue

Définition 2.3.3 *[6] La différence absolue de deux ensembles flous A et B c'est l'ensemble flou noté $|A - B|$, et est définie en termes de fonctions caractéristiques de A et B comme suit:*

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B|.$$

Avec

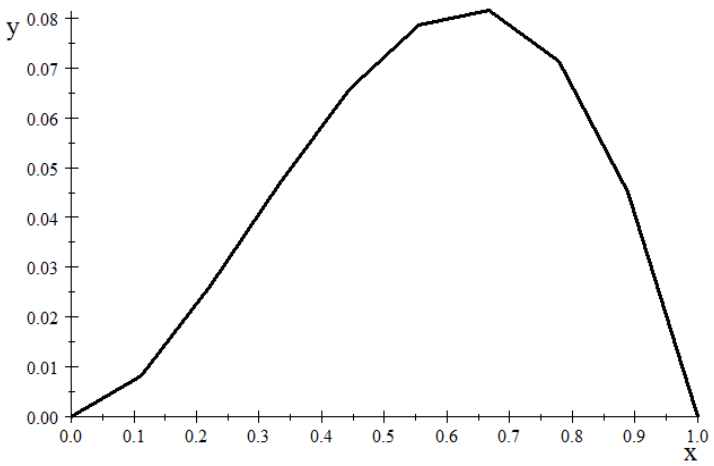
$$|A - B| = (A - B) \cup (B - A).$$

Exemple 2.3.1 *Soit $X = [0, 1[$ et soient A et B de X, tel que*

$$f_A(x) = x^2 \text{ et } f_B(x) = 1 - \sqrt{x}.$$

Donc

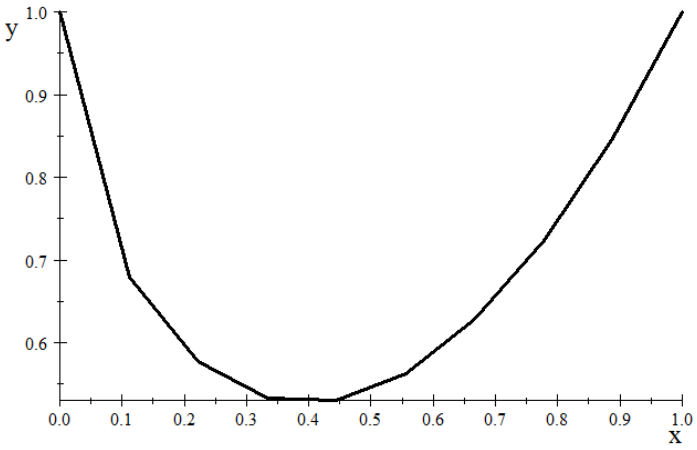
$$f_{AB}(x) = f_A(x) \times f_B(x) = x^2 - x^2\sqrt{x}.$$



La fonction caractéristique de AB.

Et on a

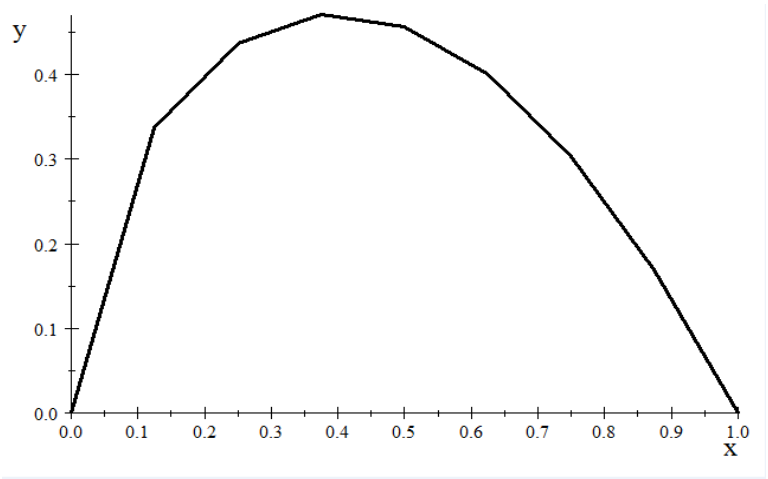
$$f_{A+B}(x) = f_A(x) + f_B(x) = x^2 + 1 - \sqrt{x}.$$



La fonction caractéristique de $A + B$.

Et donc

$$f_{|A-B|}(x) = |f_A(x) - f_B(x)| = \left|x^2 - \sqrt{x}\right| = \sqrt{x} - x^2.$$



La fonction caractéristique de $|A - B|$.

Remarque 2.3.1 *[6] Dans le cas des ensembles classiques* $|A - B|$ *réduire le complément relatif de* $A \cap B$ *dans* $A \cup B$. *C'est à dire*

$$|A - B| = C_{A\cap B}^{A\cup B}.$$

2.3.4 Combinaison convexe

Définition 2.3.4 *[6] La combinaison convexe de deux vecteurs* f *et* g *est la généralisation de la combinaison linéaire de* f *et* g *a la forme:*

$$\lambda f + (1 - \lambda)g,\ 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Ce façon de combinaison pouvoir généraliser par un ensemble flou comme suivant:

Définition 2.3.5 *Soit* A, B *et* Λ *des ensembles flous, ainsi la combinaison convexe de* A, B *et* Λ *est noté* $(A, B; \Lambda)$ *et est défini par la relation:*

$$(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \grave{\Lambda} B. \tag{2.3.4}$$

Tell que $\grave{\Lambda}$ *est le complément de* Λ. *En écrit ca fonction caractéristique se lire en l'équation (2.3.4):*

$$f_{(A,B;\Lambda)}(x) = f_{\Lambda}(x) f_A(x) + [1 - f_{\Lambda}(x)] f_B(x), \forall x \in X. \tag{2.3.5}$$

La propriété principale de la combinaison convexe

Proposition 2.3.3 *[6] La propriété principale de la combinaison convexe de* A, B *et* Λ, *il est de la forme:*

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B. \tag{2.3.6}$$

Pour tout Λ.

Preuve. *Cet propriété est la plus proche conséquence de inégalité*

$$\min [f_A(x), f_B(x)] \leqq \lambda f_A(x) + (1-\lambda) f_B(x) \leqq \max [f_A(x), f_B(x)], \ \forall x \in X. \tag{2.3.7}$$

Lequel appliquer pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

1. *Si*

$$f_A(x) \leq f_B(x);$$

Alors

$$\lambda f_A(x) \leq \lambda f_B(x);$$

Donc

$$f_A(x) \leq \lambda f_A(x) + (1 - \lambda) f_B(x) \leq f_B(x).$$

2. *Si*

$$f_B(x) \leq f_A(x);$$

Alors

$$\lambda f_B(x) \leq \lambda f_A(x);$$

Donc

$$f_B(x) \leq \lambda f_A(x) + (1-\lambda) f_B(x) \leq f_A(x).$$

■

Proposition 2.3.4 *[6] Cet intérêt à observer que prend un ensemble flou C satisfaisant*

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B.$$

Pouvoir toujours trouver l'ensemble flou Λ tel que:

$$C = (A, B; \Lambda).$$

C'est-à-dire

$$f_C(x) = f_\Lambda(x) f_A(x) + [1 - f_\Lambda(x)] f_B(x), \forall x \in X.$$

Donc sa fonction caractéristique est:

$$f_\Lambda(x) = \frac{f_C(x) - f_B(x)}{f_A(x) - f_B(x)}, x \in X. \tag{2.3.8}$$

2.3.5 Relation floue

Définition 2.3.6 *[6] Une relation floue sur X est un ensemble flou dans $X \times X$ tel que:*

$$\begin{aligned} R \ : \ X \times X \ &\rightarrow \ [0,1] \\ (x_i, x_j) \ &\mapsto \ R(x_i, x_j) = f_R(x_i, x_j) \end{aligned}$$

De plus, si X fini on peut representé la relation R matriciellement comme suit:

$$\begin{pmatrix} R(x_1,x_1) & R(x_1,x_2) & \cdots & R(x_1,x_n) \\ R(x_2,x_1) & R(x_2,x_2) & \cdots & R(x_2,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_n,y_1) & R(x_n,x_2) & \cdots & R(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.2 *La relation R est $\ll$ approximativement égale à $\gg$ défini par:*

$$\begin{array}{rcl} R & : & \{0,5\} \times \{0,5\} \rightarrow [0,1] \\ & & (\ x\ ,\ y\ ) \mapsto f_R(x,y) \end{array}$$

Avec

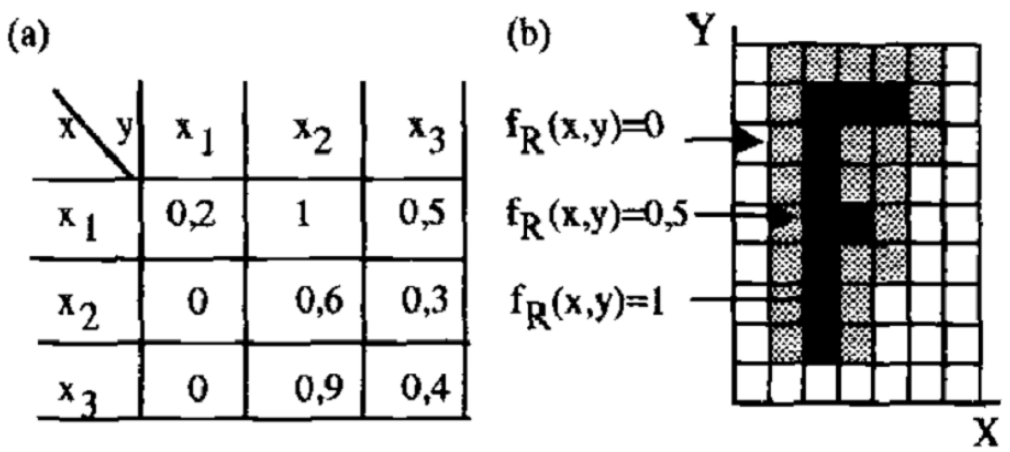
$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 & Si \ \ x = y; \\ 0.5 & Si \ \ |x-y| < 5; \\ 0 & Si \ \ |x-y| = 5. \end{cases}$$

Et ca matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.3 *[2] Soit d'abord $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, est défini sous forme matricielle (figure (a)). Soit ensuite l' ensemble des pixels d'une image en noir et blanc; en utilisant un seul niveau de gris, on décrit l'image par l'intermédiaire d'une relation floue de fonction d'appartenance égale à 0,*

$0,5$ *et* 1 *pour les coordonnées des pixels respectivement blancs, gris et noirs (figure (b)).*



Exemple d'un relation flou.

2.3.6 n-aire relation floue

Définition 2.3.7 *[6] Un n-aire relation flou dans X est un ensemble flou A sur $X \times X \times ... \times X$, tel que ca fonction caractéristique se forme*

$$f_A(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ avec } x_i \in X, i = 1, ..., n.$$

Exemple 2.3.4 *Soit $X = [0, 1]$ en défini R un 3-éme relation flou dans X, Avec ca fonction caractéristique*

$$f_R(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}.$$

2.3.7 Composition des relations

Définition 2.3.8 *[6] La composition de deux relations flous A et B sur X est noté $B \circ A$, et est défini un relation flou sur X de ca fonction caractéristique*

$$f_{B\circ A}(x,y) = \sup_{z} \min\left[f_A(x,z), f_B(z,y)\right].$$

Exemple 2.3.5 *Soit R et S deux relations flous définis sur $X = \{a,b\}$.*

$$\begin{array}{rcccl} R & : & \{a,b\}\times\{a,b\} & \to & [0,1] \\ & & (\ x\ ,\ z\ ) & \mapsto & f_R(x,z). \end{array}$$

Avec

$$\begin{cases} f_R(a,a) = 0.1; \\ f_R(a,b) = 0.3; \\ f_R(b,b) = 0; \\ f_R(b,a) = 0.5. \end{cases}$$

Et

$$\begin{array}{rcccl} S & : & \{a,b\}\times\{a,b\} & \to & [0,1] \\ & & (\ z\ ,\ y\ ) & \mapsto & f_S(z,y). \end{array}$$

Avec

$$\begin{cases} f_S(a,a) = 1; \\ f_S(a,b) = 0.2; \\ f_S(b,b) = 0.4; \\ f_S(b,a) = 0.9. \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{array}{rcccl} S\circ R & : & \{a,b\}\times\{a,b\} & \to & [0,1] \\ & & (\ x\ ,\ y\ ) & \mapsto & f_{S\circ R}(x,y). \end{array}$$

Avec

$$\begin{cases} f_{S\circ R}(a,a) &= 0.3; \\ f_{S\circ R}(a,b) &= 0.2; \\ f_{S\circ R}(b,b) &= 0.4; \\ f_{S\circ R}(b,a) &= 0.5. \end{cases}$$

Proposition 2.3.5 *[6] L'opération La composition des relations flous est associative:*

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

Preuve. *Pour montrer*

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

Il suffit de montre que

$$f_{A\circ(B\circ C)}(x,y) = f_{(A\circ B)\circ C}(x,y), \forall (x,y) \in X \times X.$$

On a:

$$\begin{aligned} f_{A\circ(B\circ C)}(x,y) &= \sup_z \min[f_{B\circ C}(x,z), f_A(z,y)] \\ &= \sup_z \min[\sup_k \min[f_C(x,k), f_B(k,z)], f_A(z,y)] \\ &= \sup_k \min[f_C(x,k), \sup_z \min[f_B(k,z), f_A(z,y)]] \\ &= \sup_k \min[f_C(x,k), f_{A\circ B}(k,y)] \\ &= f_{(A\circ B)\circ C}(x,y). \end{aligned}$$

Donc:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

CQFD. ■

2.4 Ensemble flou induit par application.

Définition 2.4.1 *[6] Soit T une application de X dans Y, et soit B ensemble flou de Y de fonction caractéristique $f_B(y)$. L'application T^{-1} induit à l'ensemble flou A de X de fonction caractéristique*

$$f_A(x) = f_B(y), \forall y \in Y. \tag{2.4.1}$$

Pour tout x dans X qui sont appliqué par T pour y.

Problème 2.4.1 *[6] Considérons maintenant un problème inverse dans laquelle A est un ensemble flou donné dans X et T, comme auparavant, est une application de X à Y. La question est: Qu'est-ce, la fonction d'appartenance pour l'ensemble flou B dans Y qui est induite par cette application ? Si T n'est pas bijectif, puis une ambiguïté survient lorsque deux ou plusieurs points distincts dans X, disent x_1 et x_2, avec différentes dégre d'appartenance à A, sont mappés dans le même point y dans Y. Dans ce cas, la question est: Quel degré d'appartenance à B devrait être affecté à y ?*

Pour résoudre ce problème, nous sommes d'accord pour attribuer la plus grande des deux grades de y. Plus généralement, la fonction d'appartenance pour B seront définis par

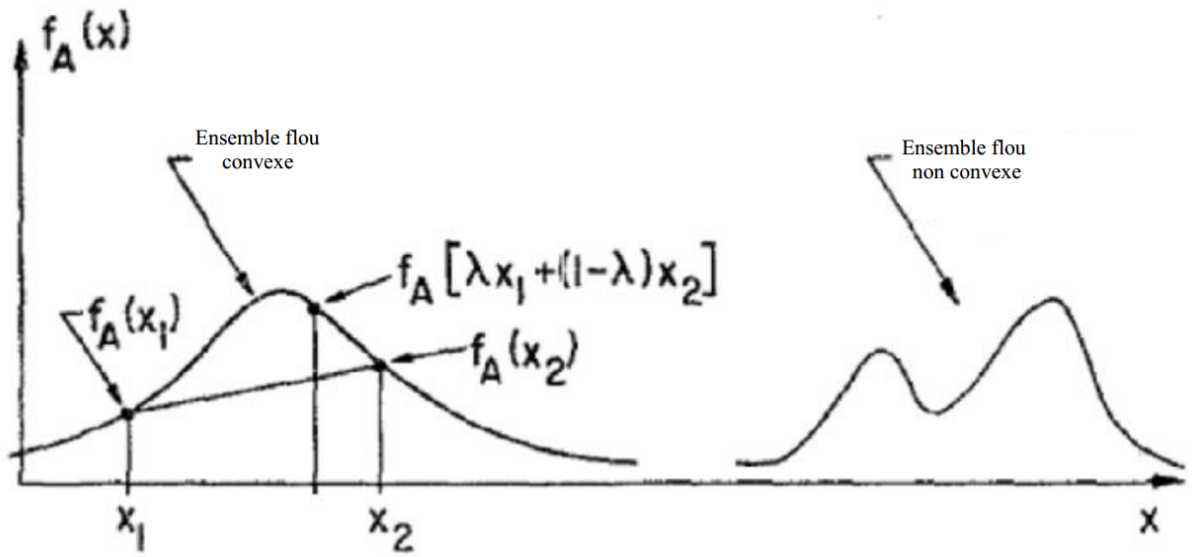
$$f_B(y) = \max_{x \in T^{-1}(y)} f_A(x), y \in Y. \tag{2.4.2}$$

où $T^{-1}(y)$ est l'ensemble des points dans X qui sont mappées en y par T.

Chapitre 3

Convexité

Comme on le verra dans la suite, la notion de convexité peut être facilement étendue aux ensembles flous, de manière à préserver plusieurs des propriétés dont il dispose dans le cadre des ensembles classiques. Cette notion semble être particulièrement utile dans des applications impliquant Classification de patrons, d'optimisation et de problèmes connexes.



Ensemble flou convexe et ensemble flou non convexe en E^1

Dans ce qui suit, nous supposons pour concrétude que X est un espace réel Euclidien E^n.

3.1 Convexité

Définition 3.1.1 *[6] A ensemble flou est convexe si et seulement si les ensembles Γ_α défini par:*

$$\Gamma_\alpha = \{x / f_A(x) \geqq \alpha\}. \tag{3.1.1}$$

Sont convexes pour tout α dans l'intervalle $(0, 1]$.

Remarque 3.1.1 $\Gamma_0 = X$.

Théorème 3.1.1 *[6] A est convexe si et seulement si*

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq \min[f_A(x_1), f_A(x_2)]. \tag{3.1.2}$$

Pour tout x_1 et x_2 dans X, pour tous $\lambda \in [0, 1]$.

Preuve. *Soit A est convexe dans le sens de la premier définition et*

$$\alpha = f_A(x_1) \leqq f_A(x_2).$$

Alors

$$x_2 \in \Gamma_\alpha \text{ et } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha.$$

Par la convexité de Γ_α. Donc

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq \alpha = f_A(x_1) = \min[f_A(x_1), f_A(x_2)].$$

Inversement si A est convexe en le sens de la deuxième définition et

$$\alpha = f_A(x_1).$$

Alors Γ_α pouvoir considéré comme l'ensemble de tous les points x_2, pour les quelles

$$f_A(x_1) \leqq f_A(x_2).$$

En l'équation (3.1.2) chaque point de forme

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Est aussi dans Γ_α, et donc Γ_α est un ensemble convexe. CQFD. ■

Théorème 3.1.2 *[6] Si A et B deux ensembles flous convexes alors, leur intersection est convexe.*

Preuve. *Soit A et B sont deux ensembles flous convexes et*

$$C = A \cap B$$

Avec

$$f_C\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] = \min\left[f_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right], f_B\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right]\right] \tag{3.1.3}$$

Donc comme A et B sont convexes

$$\begin{aligned} f_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] &\geqq \min\left[f_A(x_1), f_A(x_2)\right] \\ f_B\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] &\geqq \min\left[f_B(x_1), f_B(x_2)\right] \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Et donc

$$f_C\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geqq \min\left[\min\left[f_A(x_1), f_A(x_1)\right], \min\left[f_B(x_2), f_B(x_2)\right]\right] \tag{3.1.5}$$

Ou équivalent à

$$f_C\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geqq \min\left[\min\left[f_A(x_1), f_B(x_1)\right], \min\left[f_A(x_2), f_B(x_2)\right]\right] \tag{3.1.6}$$

Alors

$$f_C\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geqq \min\left[f_C(x_1), f_C(x_2)\right] \tag{3.1.7}$$

CQFD. ■

3.2 Ensemble flou borné

Définition 3.2.1 *[6] A un ensemble flou est borné si et seulement si les ensembles* Γ_α *défini par:*

$$\Gamma_\alpha = \{x / f_A(x) \geqq \alpha\}.$$

Sont bornés pour toute $\alpha > 0$.
De plus on a pour chaque $\alpha > 0$ *il existe* $R(\alpha)$ *fini tel que:*

$$\|x\| \leqq R(\alpha), \forall x \in \Gamma_\alpha.$$

Définition 3.2.2 *[6] Si A est un ensemble flou borné, puis pour chaque* $\xi > 0$*, alors il existe un hyperplan H telle que* $f_A(x) \leqq \xi$*, pour tout x sur les côté de H qui ne contient pas l'origine. Pour considérer l'ensemble*

$$\Gamma_\xi = \{x / f_A(x) \geqq \xi\}.$$

Par hypothèse, cet ensemble est contenu dans une sphère S de rayon $R(\xi)$*. Soit H tout hyperplan de support S. Ensuite, tous les points du côté de H que ne contenir l'origine se trouvent à l'extérieur ou sur S, et donc pour tous ces points de*

$$f_A(x) \leqq \xi.$$

Lemme 3.2.1 *[6] Soit A un ensemble flou borné, et soit* $M = \sup_x f_A(x)$*. (M sera appelé le maximum grade dans A). Ensuite, il y a au moins un point* x_0

à laquelle M est essentiellement atteints en ce sens que, pour chaque $\xi > 0$, chaque voisinage sphérique de x_0 contient des points dans l'ensemble

$$Q(\xi) = \{x/f_A(x) \geqq M - \xi\}.$$

Preuve. Considérons une séquence imbriquée d'ensembles bornée $\Gamma_1, \Gamma_2, ...,$ Où

$$\Gamma_n = \left\{ x/f_A(x) \geqq M - \frac{M}{(n+1)} \right\}, n = 1, 2, ...$$

Noter que Γ_n est vide, pour tout n fini, et par définition de M on a:

$$M = \sup_x f_A(x), M > 0$$

(Nous supposons que $M > 0$). Soit x_n être un point choisi arbitrairement en $\Gamma_n, n = 1, 2, ...$Puis $x_1, x_2, ...,$est une séquence de points dans un ensemble borné Γ_1.Par **le théorème de Bolzano-Weierstrass**(1), cette séquence doit avoir au moins un point de limite disons x_0 en Γ_1. Par conséquent, chaque voisinage sphérique de x_0 contiendra une infinité de points de séquence $x_1, x_2, ...,$et plus particulièrement du subséquence $x_{N+1}, x_{N+2}, ...,$Où

$$N \geqq M/\xi.$$

Étant donné que les points de cette séquence se situent dans l'ensemble

$$Q(\xi) = \{x/f_A(x) \geqq M - \xi\}.$$

Le lemme est prouvé. ■

(1) En topologie des espaces métriques, le théorème de Bolzano-Weierstrass donne une caractérisation séquentielle des espaces compacts. Il tire son nom des mathématiciens Bernard Bolzano et Karl Weierstrass.

3.3 Convexité stricte et forte

Définition 3.3.1 *[6] Un ensemble flou A est strictement convexe si les ensembles $\Gamma_\alpha, 0 < \alpha \leqq 1$ sont strictement convexes, c'est-à-dire*

$$\Gamma_\alpha = \{x / f_A(x) \geqq \alpha\}.$$

Sont strictement convexe (Autrement dit, si le milieu de toute deux points distincts de Γ_α reste dans l'intérieur de Γ_α).

Notation 3.3.1 *[6] Notez que cette définition réduit à celui de la convexité stricte pour les ensembles classique lorsque A est un ensemble quelconque*

Définition 3.3.2 *[6] Un ensemble flou A est fortement convexe si pour n'importe quels deux points distincts x_1 et x_2 ,et pour toute λ dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$.*

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq \min[f_A(x_1), f_A(x_2)].$$

Proposition 3.3.1 *[6]*

Notez que la convexité forte n'implique pas la convexité strict, vice-versa.

On note si A et B sont bornés alors leur union et l'intersection, De même.

Si A et B sont strictement (fortement) convexes, leur intersection est strictement (fortement) convexe.

Définition 3.3.3 *[6] Soit A un ensemble flou convexe et soit*

$$M = \sup_x f_A(x).$$

Si A est borné, alors de ce qui précéde, soit M est atteinte pour un certain x, dit x_0, ou s'il y a au moins un point, x_0 à laquelle M est essentiellement

atteint en ce sens que, pour chaque $\xi > 0$, chaque voisinage sphérique de x_0 contient des points dans l'ensemble

$$Q(\xi) = \{x / f_A(x) \geqq M - \xi\}.$$

En particulier, si A est fortement convexe et x_0 est atteint, alors x_0 est unique.

Car si

$$M = f_A(x_0) \text{ et } M = f_A(x_1)$$

Avec $x_0 \neq x_1$, puis $f_A(x) > M$ pour $x = 0.5x_0 + 0,5x_1$, qui contredit

$$M = \max_x f_A(x).$$

Définition 3.3.4 *Le noyau d'un ensemble flou A de X, Noté $Noy(A)$, est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement à A (avec un degré 1).*

Formellement:

$$Noy(A) = \{x \in X, f_A(x) = 1\}.$$

Plus générale

Soit $C(A)$ l'ensemble de tous les points de X telle que M est essentiellement atteint. Cet ensemble sera désigné comme le noyau de A. Dans le cas des ensembles flous convexes, nous pouvons affirmer la propriété suivante de $C(A)$.

Théorème 3.3.1 *[6] Si A est un ensemble flou convexe alors le noyau de A est un ensemble convexe.*

Preuve. Il suffit montré que si M est essentiellement atteint en x_0 et x_1. telle que $x_1 \neq x_0$. Alors M est essentiellement atteint en tous les points x de forme:

$$x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 \text{ telle que } 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Jusqu'à la fin soit P un cylindre de rayon ξ, le droite passer en x_0 et x_1 comme son axe. Soit $\grave{x}_0$ un point d'une sphère de rayon ξ et de centre x_0 et $\grave{x}_1$ être un point dans une sphère de rayon ξ centré sur x_1 telle que:

$$f_A(\grave{x}_0) \geqq M - \xi \text{ et } f_A(\grave{x}_1) \geqq M - \xi.$$

D'apré la convexité de A pour tout point u en le segment $\grave{x}_0\grave{x}_1$, nous avons

$$f_A(u) \geqq M - \xi.$$

En outre, par la convexité P, tous les points sur $\grave{x}_0\grave{x}_1$ seront sur P. Maintenant, nous allons x un point quelconque dans le segment x_0x_1. La distance entre ces point et la segment $\grave{x}_0\grave{x}_1$doit être inférieure ou égale a ξ, $\grave{x}_0\grave{x}_1$ depuis réside dans P. Par conséquent, une sphère de rayon ξ centré sur x contiendra au moins un point de la segment $\grave{x}_0\grave{x}$. Et donc contiendra au moins un point, dire w, au cours de laquelle

$$f_A(w) \geqq M - \xi.$$

Ce qui montre qu'il M est essentiellement atteint en x et prouve ainsi le théorème.

Corollaire 3.3.1 *[6] Si $X = E^1$ et A est fortement convexe, le point où M est essentiellement atteint est unique.*

■

3.4 Projection d'un ensemble flou

Soit A est un ensemble flou dans E^n de fonction caractéristique

$$f_A(x) = f_A(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Définition 3.4.1 *[6] La notion de projection (l'ombre) de A sur un hyperplan H sera définie ci-dessous pour le cas particulier où H est un hyperbole de coordonnées, par exemple*

$$H = \{x/x_1 = 0\}.$$

Remarque 3.4.1 *[6] Spécifiquement, la projection de A en*

$$H = \{x/x_1 = 0\}$$

Est défini comme un ensemble flou $S_H(A)$ dans E^{n-1} avec

$$f_{S_H(A)}(x) = f_{S_H(A)}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sup_{x_1} f_A(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Notez que cette définition est conforme à l'équation (2.4.2).

Lorsque A est un ensemble flou convexe, la propriété suivante de $S_H(A)$ est une conséquence immédiate de la définition ci-dessus:

Proposition 3.4.1 *[6] Si A est un ensemble flou convexe, alors son projection sur tout hyperplan est également un ensemble flou convexe.*

Proposition 3.4.2 *[6] La projection de deux ensembles flous convexe est exprimée par l'incidence suivante:*

$$S_H(A) = S_H(B) \Leftrightarrow A = B.$$

Pour tout H.

Preuve. Pour prouver cette affirmation, il suffit de montrer que s'il existe un point, dit x_0, de telle sorte que

$$f_A(x_0) \neq f_B(x_0).$$

Puis leur existe un hyperplan H tel que

$$f_{S_H(A)}(x_0^*) \neq f_{S_H(B)}(x_0^*).$$

Où x_0^* est la projection de x_0 sur H. Supposons que

$$f_A(x_0) = \alpha > f_B(x_0) = \beta.$$

Puisque B est un ensemble flou convexe, l'ensemble

$$\Gamma_\beta = \{x / f_B(x) > \beta\}.$$

Est convexe, et donc il existe un hyperplan F soutenir Γ_β et passant par x_0. Soit H un orthogonale hyperplan à F, et que x_0^* la projection de x_0 sur H. Ensuite, étant donné que

$$f_B(x) \leqq \beta.$$

Pour tout x sur F, nous avons

$$f_{S_H(B)}(x_0^*) \leqq \beta.$$

D'autre part

$$f_{S_H(A)}(x_0^*) \geqq \alpha.$$

Par conséquent

$$f_{S_H(B)}(x_0^*) \neq f_{S_H(A)}(x_0^*).$$

Et de même pour le cas où $\alpha < \beta$. ■

- Une forme un peu plus générale de l'affirmation ci-dessus est le suivant: Soit A, mais pas nécessairement B, soit un ensemble flou convexe, et

$$S_H(A) = S_H(B).$$

Pour tous H. Alors

$$A = convB.$$

Où $convB$ est la coque convexe (ou Enveloppe convexe)de B, qui est le plus petit ensemble convexe contenant B. Plus généralement

$$S_H(A) = S_H(B).$$

Pour tous H implique

$$convA = convB.$$

Conclusion générale

La théorie du flou (Fuzzy théory) est presque devenue une mode pendant les années 90. Beaucoup de chercheurs, dans différents domaines scientifiques, utilisant la théorie formulée par le professeur Lotfi Zadeh de l'université de Berkeley [6].

Cette théorie est très attractive, parce qu'elle est basée sur le raisonnement intuitif et prend en compte la subjectivité et l'imprécision. Mais ce n'est pas une théorie imprécise. C'est une théorie mathématique rigoureuse, adaptée au traitement de tout ce qui est subjectif et/ou incertain.

Nous avons simplifié les concepts et démontré quelques résultats, étudié les ensembles flous, les ensembles convexes et la relation entre eux.

Bibliographie

[1] G.Birkhoff,"Lattice Theory", American Mathematical. Vol 25,1948. New York.

[2] B. Bouchon-Meunier , *La logique floue*, Presses Universitaires de France, 1993 108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris.

[3] A.Cornuéjols, "Introduction à la logique floue", 2013.

[4] S.P.l.HALMO, "Naive Set Theory." Van Nostrand, 1960, New York.

[5] S.C.KLEENE, "Introduction to Metamathematics", p. 334. Van Nostrand, 1952, New York.

[6] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets, Information and Control" 8 (June, 1965) 338-353.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة المجموعة الضبابية وتطرقنا إلى أهم خواصها : تحدب مجموعة ضبابية وعلاقتها بالدالة المميزة، معتمدين في عملنا هذا على أول مقال للبروفيسور لطفي علي زادة بـعنوان: « Fuzzy sets » .(June, 1965)

الكلمات المفتاحية: المجموعة الضبابية، العلاقة الضبابية، التحدب، الاسقاط.

ABSTRACT

In this work, we studied the fuzzy Set and some of its properties.

The most important propertie that we dealt with the convexity, we relied on the first article of Professor Lotfi Zadeh Ali, entitled: « Fuzzy sets » (June, 1965).

Keywords: fuzzy set, fuzzy relation, Convexity, Projection.

RESUMES

Dans ce travail, nous avons étudié l'ensemble flou et certaines de ses propriétés.

La propriété le plus importante que nous traitaient de la convexité, nous nous sommes appuyés sur le premier article de professeur Lotfi Ali Zadeh, intitulée : « Fuzzy sets » (Juin, 1965).

Mots clés: Ensemble flou, Relation flou, Convexité, Projection.