

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



# *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : EDP et Applications

## Thème

---

*Solutions des problèmes elliptiques avec contraintes*

---

Présentée par :

*M<sup>elle</sup> HADJ HAFSI Meryem*

Soutenu publiquement le : 14/06/2023.

Devant le jury composé de :

SENGOUGA Abdelmouhcene	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
BOUGHRARA Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
MOKHTARI Abdelhak	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2022/2023

# Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à **Allah** le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.

Je suis heureux d'exprimer au **Dr. BOUGHRARA Ibrahim**, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.

Aux membres de jury, nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire.

Enfin, je ne saurais jamais suffisamment remercier mon père et ma mère, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.

À toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes parents,

À mes frères,

À mes sœurs,

À toute la famille HADJ HAFSI,

À tous mes amis et toute ma famille de département de Mathématiques et à toute la promotion 2022/2023 de L'EDP.

À toutes mes adorables que j'ai connu pendant toute ma vie.....

À vous cher lecteur.

# Table des matières

<b>Notation</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels</b>	<b>3</b>
1.1 Espace de Lebesgue . . . . .	3
1.2 Espace de Hölder . . . . .	5
1.2.1 Espaces $\mathcal{C}^k$ . . . . .	5
1.2.2 L'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ . . . . .	5
1.3 Espace de Sobolev . . . . .	6
1.3.1 Définitions . . . . .	6
1.3.2 Injections de Sobolev . . . . .	7
1.3.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	8
<b>2 Rappels sur la théorie du points critique</b>	<b>10</b>
2.1 Différentiabilité des Fonctions . . . . .	10
2.1.1 Différentiabilité au sens de Gâteaux . . . . .	10
2.1.2 Différentiabilité au sens de Fréchet . . . . .	14
2.2 Définitions et Points Critiques . . . . .	19
2.2.1 Préliminaires . . . . .	19
2.2.2 Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	21
2.2.3 La condition de Palais-Smale . . . . .	24
<b>3 Applications aux Problèmes elliptiques</b>	<b>26</b>
3.1 Problème aux valeurs propres . . . . .	26
3.2 Problème semi-linéaire . . . . .	28
3.3 Problème non linéaire aux valeurs propre . . . . .	30
3.4 Problème de bi-laplacien aux valeurs propres . . . . .	33
3.5 Problème non linéaire aux valeurs propres . . . . .	35
3.6 Problème semi-linéaire sous-critique . . . . .	37

Conclusion	43
Bibliographie	45

# Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

<b>symbole</b>	<b>signification</b>
$dx$	Mesure de Lebesgue de dimension $N$ .
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\Omega$ , à Support compact dans $\Omega$ .
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ , c-à-d : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ .
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur $\Omega$ .
$p.p.$	Presque partout tous les points.
$J'(u)$	Dérivée au sens de Fréchet.
$J'_G(u)$	Dérivée au sens de Gâteaux.
$s.c.i$	Semi continue inférieurement.
$f.s.c.i$	Faiblement semi continue inférieurement.
$u$	Fonction mesurable définie de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ .
$Du = \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradient de $u$ .
$\Delta u$	Laplacien de $u$ .
$\Delta_p = \operatorname{div}( \nabla u ^{p-2} \nabla u)$	P Laplacien de $u$ .
$\partial\Omega$	La Frontière de $\Omega$ .
$C^1(X, \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue.
$C^K(\Omega)$	Fonctions de classe $K$ dans $\Omega$ .
$C^{0,\alpha}$	Espace de Hölder.
$C^\infty(\Omega)$	Fonctions indéfiniment différentiables dans $\Omega$ .
$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à Support compact.
$H^{-1}(\Omega)$	Espace dual de $H_0^1(\Omega)$ .
$E'$	Est le dual topologique de $E$ ou l'espace des formes linéaires et continues sur $E$ .
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension $N$ .
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\Omega$	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$\overline{\Omega}$	La frontière de $\Omega$ .
$p'$	Conjugué de Hölder de $p$ , $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$ .
$p^*$	L'exposant de Sobolev telle que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$ .
$\operatorname{Supp} f$	Support des fonctions.

- $H^1(\Omega)$      $u \in L^2(\Omega)$  et  $\nabla u \in L^2(\Omega)$ .  
 $H_0^1(\Omega)$      $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ .  
 $E \hookrightarrow F$      $E$  s'injecte continûment dans  $F$ .  
 $E \hookrightarrow_c F$      $E$  s'injecte d'une manière compacte dans  $F$ .  
 $\rightharpoonup$         Converge faiblement.  
 $\longrightarrow$     Converge fortement.  
 $(u, v)$        Est le produit scalaire.  
*f.s.c*        Faiblement séquentiellement continue.

# Introduction

Avant de présenter le travail qui a été réalisé à l'occasion du mémoire de master 2, nous allons faire une introduction général, afin de mettre en lumière le caractère général de notre sujet.

Les équations aux dérivées partielles "EDP en abrégé" correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique par exemple en mécanique de fluides : équations de Navier-Stokes, en électromagnétisme : équations de Maxwell et en mécanique quantique : équations de Schrödinger... ....etc. D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

En fait, une EDP n'est autre qu'une relation entre un fonction des plusieurs variables et ses dérivées qui S'écrit sous la forme suivante :

$$F(x, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_m}}) = 0$$

où  $m$  est le degré de l'équation

Les *EDP* sont donc des outils mathématiques dont l'importance prime par le fait de modéliser des phénomènes naturels, pour cette raison, elle demeurent fortement sollicitées dans différents contextes tels que : physique, chimie, mécanique, biologie,.....

Dans les dernières années, beaucoup d'attention à été accordée aux EDP, à plus forte raison les problèmes elliptiques dont la résolution de quelques classes fait l'objet principal de ce mémoire. Les équations elliptiques interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires. De puis leurs découverte, plusieurs méthodes ont été mises en évidence pour l'existence et les propriétés qualitatives qui sont basé à établir l'existence d'une point critique en utilisant le Théorème de multiplicateur de Lagrange et la condition de Palais-Smale et le théorème du col (mountain-pass).

La Théorie des points critiques a subi une impulsion nouvelle en 1973 avec la parution d'un article d'Ambrosetti et Rabinowitz dans lequel figure le Théorème du col, et elle a connu un essor avec l'application de la condition de Palais-Smale pour montrer l'existence d'une valeur critique.

Notre mémoire est divisée à trois chapitre :

**Dans le premier chapitre :** nous présentons quelque rappels sur les espaces de Sobolev et de Lebesgue et certain propriété de base de ces espaces.

**Dans le deuxième chapitre :** on présenté quelques définitions concernant la notion de différentiabilité au sens Gâteaux et Fréchet et Les points critiques, aussi le Théorème de Multiplicateur de Lagrange, en outre la condition de Palais-Smale, Théorème de Mountain-Pass (Théorème du col)

Pour **le troisième chapitre**, on a étudié l'existence de point critique de quelque problème aux limite elliptique on applique le Théorème de Multiplicateur de Lagrange et Mountain-pass avec la condition de Palais-Smale.

# Rappels

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions et compléments mathématiques en relation avec le travail de ce mémoire, nous présentons en particulier certains espaces fonctionnels et leurs propriétés.

## 1.1 Espace de Lebesgue

**Définition 1.1** (*L'espace  $L^p$* ) [2], [3]

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  un nombre réel supérieur ou égal à 1. On définit l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right) < \infty \right\},$$

On le munit de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

Quand  $p = 2$ , cette norme provient d'un produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx,$$

On peut vérifier facilement que  $\|\cdot\|_{L^p}$  définit une norme sur l'espace vectoriel  $L^p(\Omega)$  ce qui montre que  $L^p(\Omega)$  est un espace normé.

**Définition 1.2** (*L'espace  $L^\infty$* ) On défini l'espace  $L^\infty(\Omega)$  par :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable, } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega \}.$$

$L^\infty(\Omega)$  est une espace normé quand le muni par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ c, |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

**Théorème 1.1** • *L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .*

• *L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .*

• *L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de réflexif pour  $1 < p < \infty$ .*

**Notation 1.2** *Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de pas savoir :*

*Si  $p = 1, p' = +\infty$*

*Si  $p = +\infty, p' = 1$*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ou} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

**Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder)** *Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Alors,  $fg \in L^1(\Omega)$  et*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

*Si  $r = 1, p = p' = 2$ , l'inégalité 1.1 on a*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

*S'appelle **Cauchy Schwartz**.*

**Proposition 1.2 (Inégalité de Hölder généralisé)** *Soient  $p, p', r \in [1, \infty]$  tel que :*

*$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$ , et  $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$ . Alors*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

**Proposition 1.3 (Inégalité de Young)** *Soient  $a, b$  deux réels positifs et  $p, p' > 1$ , alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

*De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C(\varepsilon) > 0$  tel que :*

$$ab \leq \varepsilon \cdot a^p + C(\varepsilon) \cdot b^{p'},$$

**Proposition 1.4** [9] *on a les deux inégalités suivantes :*

(i) *Si  $1 < p < 2$*

$$\left| |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b \right| \leq c_p |a - b|^{p-1}$$

(ii) *Si  $p \geq 2$*

$$\left| |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b \right| \leq c_p \left( |a|^{p-2} + |b|^{p-2} \right) |a - b|$$

*pour certain constante  $c_p > 0$  dépend de  $p$  et pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^N$ .*

**Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)$ . On suppose que  $(f_n)_n$  converge p.p. sur  $\Omega$  vers une fonction  $f$  et qu'il existe une fonction  $g \in L^p(\Omega)$  telle que pour chaque  $n : |f_n(x)| \leq g(x)$  p.p.  $x \in \Omega$ .*

*Alors  $f \in L^p(\Omega)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ .*

## 1.2 Espace de Hölder

### 1.2.1 Espaces $\mathcal{C}^k$

**Définition 1.3** [2], [3] Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On définit les espaces suivants :

- \* pour  $k = 0$ ,  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continues.
- \* pour  $k > 0$ ,  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ayant toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  continues ; c-à-d  $D^\alpha f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in A_m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , telle que  $A_m$  est l'ensemble des multi-indices d'ordre  $m$ .
- \*  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) = \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continues et bornées. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|,$$

- \*  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions bornées dans  $\bar{\Omega}$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  peuvent être étendues Continûment sur  $\bar{\Omega}$  et sont bornées. Nous munissons cet espace de espace de la norme pour  $\alpha = \bar{0}, \bar{K}$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})},$$

S'il n'y pas d'ambiguïté, nous omettons la dépendance en  $\bar{\Omega}$  et écrivons simplement

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0},$$

- \*  $\mathcal{C}_{loc}^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f|_K \in \mathcal{C}^k(K)$  pour toute compact  $K \subset \Omega$ .

Nous donnons maintenant la définition des espace de Hölder.

### 1.2.2 L'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}$

**Définition 1.4** [2], [3] Soient  $\Omega$  un ouvert  $\mathbb{R}^n$ , une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et un réel  $0 \leq \alpha \leq 1$ . On définit la quantité

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y \in \Omega/x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Les espaces de Hölder sont définis par les ensembles suivants :

•  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  telle que

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty.$$

•  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  telles que

$$[D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty, \quad \text{où } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\beta| \leq k.$$

Il est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} = \|f\|_{\mathcal{C}^k} + \sum_{|\beta|=0}^k [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

•  $\mathcal{C}_{loc}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

**Remarque 1.1**    ☆ L'espace  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ , muni de la norme  $\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}}$ , est un espace de Banach.

☆ pour  $\alpha = 0$ , on a  $\mathcal{C}^{k,0}(\bar{\Omega}) = \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ , on écrit

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,0}} = \|f\|_{\mathcal{C}^k}.$$

**Définition 1.5 (Support d'une fonction)** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction, on appelle support de  $f$ , noté **Supp**  $f$ , l'ensemble définie par :

$$\text{Supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

C'est à dire, le plus petit fermé en dehors la fonction est nulle.

**Définition 1.6 (Espace des fonction Test )** On appelle espace des fonctions test sur  $\Omega$ , noté  $\mathcal{D}(\Omega)$ , l'ensemble définie par :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \text{Supp } f = K \subset \Omega\}, \quad \text{compact(bornée)}.$$

C'est à dire l'ensemble de toutes les fonctions :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{indéfiniment différentiable à Support compact dans } \Omega.$$

**Remarque 1.2**

$$\mathcal{D}(\Omega) \neq \phi.$$

## 1.3 Espace de Sobolev

### 1.3.1 Définitions

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on note par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact inclus dans  $\Omega$ .

**Définition 1.7** [2], [3] L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est définie par :

Soit  $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, 2} \right\}.$$

En particulier, pour  $p = 2$ , on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est appelé la dérivée faible par rapport à  $x_i$  de  $u$ .

**Notation 1.4** [3] L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

ou de la norme équivalente  $\left( \|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} \right)$ . L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Proposition 1.5** [2], [3]

- ✂ L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
- ✂ L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 \leq p < \infty$  et Séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .
- ✂ L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert.

### 1.3.2 Injections de Sobolev

**Définition 1.8** [2], [3] Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés.

☛  $E$  s'injecte de manière continue dans  $F$  si  $E \subset F$  et l'injection canonique  $j : E \rightarrow F$  est continue : c-à-d,

$$\exists c > 0 : \|x\|_F \leq c \|x\|_E, \forall x \in E.$$

et on note  $E \hookrightarrow F$

▣  $E$  s'injecte de manière compacte dans  $F$ , signifie  $E \subset F$  et l'injection  $j : E \rightarrow F$  est compact c'est à dire toute suite bornée dans  $E$  admet une sous-suite convergente dans  $F$  et on le note par  $E \hookrightarrow_c F$ .

**Notation 1.5** Si  $1 \leq p < n \leq \infty$ , l'exposante de Sobolev de  $p^*$  est définie par :

$$p^* = \frac{np}{n-p},$$

Où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

**Théorème 1.6 (Injection Continue)** [2], [3] Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $\mathcal{C}^1$ , borné, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$

- ✦ Si  $1 \leq p < n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ .
- ✦ Si  $p = n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, +\infty[$ .
- ✦ Si  $p > n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 1.7 (Rellich-Kondrachov) (Injection Compact)** [2], [3] On suppose que  $\Omega$  borné de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a

- ★ Si  $1 \leq p < n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*[$ .
- ★ Si  $p = n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, +\infty[$ .
- ★ Si  $p > n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ .

### 1.3.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.9** [3] Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , c-à-d :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ou de manière équivalente :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (\text{ou sens de trace}) \right\}.$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); D^\alpha f \in L^2(\Omega); u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \right\}.$$

L'espace  $\Omega$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1(\Omega)$

**Proposition 1.6** *L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach Séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert Séparable.*

*Le résultat suivante fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

**Proposition 1.7 (Inégalité de Poincaré)** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné, alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), (1 \leq p < \infty).$$

*En particulier, sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la quantité  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle de  $W^{1,p}(\Omega)$ . De plus la constante optimal  $c$  est exactement  $\frac{1}{\lambda_1}$ , ou  $\lambda_1$  est la premier valeur propre de l'opérateur  $-\Delta_p u$  sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

**Définition 1.10 (Espace dual)** *L'ensemble des fonctionnelle linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On appelle dual de l'espace  $X$  et on note  $X'$ . On munit  $X'$  de la norme*

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

*$X'$  muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité :*

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_x, \quad \forall x \in X.$$

**Définition 1.11 (Réflexivité)**

*Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $i$  l'injection canonique de  $X$  dans  $X''$ . On dit que  $X$  est réflexif, si  $i(X) = X''$ , où  $X''$  est la bidual de  $X$ .*

**corollaire 1.1 (Formule de Green)**

*Soient  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^1$  et  $u, \varphi$  deux fonction de classe  $C_c^2(\Omega)$ . Alors on a :*

$$-\int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\nu) \varphi(\nu) d\nu.$$

**Définition 1.12** *L'espace  $H_0^2(\Omega)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^2(\Omega)$  il est caractérisé par :*

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega), u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \right\}$$

**Définition 1.13 (Convergence faible)**

*Soit  $X$  un espace de Banach. On dit qu'une suite  $(x_n) \in X$  converge faiblement vers  $x$ , si pour tout  $f \in X'$*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle.$$

*et on écrit  $x_n \rightharpoonup x$*

## Rappels sur la théorie du points critique

### 2.1 Différentiabilité des Fonctions

#### 2.1.1 Différentiabilité au sens de Gâteaux

**Définition 2.1** [2] Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ouvert et soit  $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $J$  est différentiable au sens de Gâteaux ( $G$ -différentiable) en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A_u \in E'$  ( $A_u$  linéaire et continue), noté par  $J'_G(u)$  tel que, pour tout  $v \in E$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle A_u, v \rangle.$$

On dit que  $J$  est  **$G$ -différentiable** sur  $\Omega$  si  $J$  est  **$G$ -différentiable** en tout point de  $\Omega$ .

**Exemple 2.1** On considère :

$$\begin{aligned} J : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |v|^2 dx = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$J$  est  $G$ -différentiable sur  $L^2(\Omega)$ . En effet soit  $v \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \frac{\int_{\Omega} (u+tv)^2 dx - \int_{\Omega} u^2 dx}{t} \\ &= \frac{\int_{\Omega} u^2 dx + t^2 \int_{\Omega} v^2 dx + 2t \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Omega} u^2 dx}{t} \\ &= t \int_{\Omega} v^2 dx + 2 \int_{\Omega} uv dx \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = 2 \int_{\Omega} u.v dx$$

on vérifie que :

$$\begin{aligned} T_u : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto T_u(v) = 2 \int_{\Omega} u.v dx \end{aligned}$$

Évident que  $T_u$  est linéaire,  $T_u$  est continue on a :

$$|T_u(v)| = 2 \left| \int_{\Omega} u.v dx \right| \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz})$$

il suffit de prendre  $C = 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} > 0$ , donc  $J$  est  $G$ -différentiable, de plus

$$\langle J'_G(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} u.v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

**Exemple 2.2**  $1 < p < \infty$ , on considère la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx \end{aligned}$$

$J$  est  $G$ -différentiable sur  $L^p(\Omega)$ . En effet, soit  $v \in L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= \frac{\int_{\Omega} |u+tv|^p dx - \int_{\Omega} |u|^p dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} |u+tv|^p dx - \int_{\Omega} |u|^p dx}{t} \end{aligned}$$

On applique **Le théorème de accroissent finis**, on considère la fonction soit  $t > 0$

$$\begin{aligned} g : [0, t] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto g(s) = |u + sv|^p \end{aligned}$$

$g$  est continue sur  $[0, t]$  et dérivable sur  $]0, t[$ , il existe  $c_t \in ]0, t[$

$$g(t) - g(0) = g'(c_t).t \tag{2.1}$$

on a :

$$(|x|^p)' = p |x|^{p-2} x.$$

alors

$$g'(s) = p |u + sv|^{p-2} (u + sv).v$$

donc

$$(2.1) \Leftrightarrow |u + tv|^p - |u|^p = p |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v).v.t$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \lim_{c_t \rightarrow 0} p \int_{\Omega} |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v).v dx$$

On a l'inégalité suivante :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad \forall p > 1, \forall a, b > 0 \tag{2.2}$$

On utilise **le théorème de convergence dominée 1.3**, pour démontrer :

$$\lim_{c_t \rightarrow 0} p \int_{\Omega} |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v).v dx = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u.v dx$$

$$(i) |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v) \cdot v \xrightarrow{c_t \rightarrow 0} |u|^{p-2} u \cdot v$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left| |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v) \cdot v \right| &= \left| |u + c_t v|^{p-1} v \right| \\ &\leq |u + c_t v|^{p-1} |v| \\ &\leq (|u| + c_t |v|)^{p-1} \cdot |v| \end{aligned}$$

en utilisant (2.2), on a :  $a, b > 0$  et  $p > 1$ , alors  $p - 1 > 0$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{p-2} \left( |u|^{p-1} + |c_t|^{p-1} |v|^{p-1} \right) |v| \\ &\leq 2^{p-2} \left( |u|^{p-1} |v| + |v|^p \right) \end{aligned}$$

Comme  $v \in L^p(\Omega)$  alors  $|v|^p \in L^1(\Omega)$ , on vérifie que  $|u|^{p-1} |v| \in L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p-1} |v| dx &\leq \left( \int_{\Omega} (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (D'après l'inégalité de Hölder)} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \cdot \|v\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u|^{p-1} |v| dx < \infty \Rightarrow |u|^{p-1} |v| \in L^1(\Omega)$$

Alors, d'après le **théorème de convergence dominée 1.3**, on déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{c_t \rightarrow 0} p \int_{\Omega} |u + c_t v|^{p-2} (u + c_t v) \cdot v dx &= p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v dx \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} &= p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v dx \end{aligned}$$

Maintenant, on vérifie que :

$$\begin{aligned} T_u : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto T_u(v) = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v dx \end{aligned}$$

On démontre que  $T_u \in (L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$  c-à-d :

$T_u$  est linéaire, en effet soit  $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$  et soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_u(\alpha v_1 + \beta v_2) &= p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u (\alpha v_1 + \beta v_2) dx \\ &= p \left[ \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \alpha v_1 dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \beta v_2 dx \right] \\ &= \alpha p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v_1 dx + \beta p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v_2 dx \\ &= \alpha T_u(v_1) + \beta T_u(v_2) \end{aligned}$$

Donc,  $T_u$  est linéaire.

$T_u$  est continue : (de même manière avec (2.3))

$$\begin{aligned} |T_u(v)| &= p \left| \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v dx \right| \\ &\leq p \int_{\Omega} |u|^{p-1} |v| dx \\ &\leq p \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \cdot \|v\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre  $C = p \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} > 0$ , donc  $J$  est  $G$ -différentiable et de plus :

$$\langle J'_G(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \cdot v dx, \forall v \in L^p(\Omega).$$

**Exemple 2.3** On considère

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$J$  est  $G$ -différentiable sur  $H_0^1(\Omega)$ . Nous appliquons les mêmes étapes que l'exemple 2.2 et on remplace  $u = \nabla u$ . D'où  $J$  est  $G$ -différentiable. Alors on obtient

$$\langle J'_G(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Exemple 2.4** On considère :

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

On montre d'abord que  $J$  est **G-différentiable** c'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle J'_G(u), v \rangle \quad (2.4)$$

Où  $J'_G(u) \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$  est la différentielle de Gâteaux. On sait que l'application  $X \mapsto |X|^p$  définie de  $\mathbb{R}^N$  sur  $\mathbb{R}_+$  est différentiable et donc **G-différentiable** pour tout  $p > 1$ , et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|X + tY|^p - |X|^p}{t} = p |X|^{p-2} X \cdot Y, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^N$$

(avec  $|X|^{p-2} X = 0$  pour  $X = 0$ ). Par conséquent, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla v(x)|^p}{t} = p |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x), \quad (2.5)$$

$p.p.x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi(t) = |X + tY|^p, \quad X, Y \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \quad (2.6)$$

Avec  $p > 1$ . Cette application est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et satisfait d'après le théorème des accroissements finis :

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} = \frac{|X + tY|^p - |X|^p}{t} = p |X + \theta Y|^{p-2} (X + \theta Y) \cdot Y,$$

pour  $0 < |\theta| < |t|$ . Supposons que  $|t| \leq 1$  et applique cette inégalité :  $\forall a, b \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} |a + b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q) & \text{si } q \geq 1 \\ |a + b|^q \leq |a|^q + |b|^q & \text{si } 0 < q < 1 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{|X + tY|^p - |X|^p}{t} \right| &\leq p |X + \theta Y|^{p-1} |Y| \\ &\leq c \left( |X|^{p-1} |Y| + |Y|^{p-1} \right) \end{aligned}$$

D'où, on a p.p.  $x \in \Omega$

$$\left| \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} \right| \leq c \left( |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| + |\nabla v(x)|^{p-1} \right) = h(x) \quad (2.7)$$

par l'inégalité de Hölder, on a  $h \in L^1(\Omega)$ . D'après (2.5) et (2.7), on peut appliquer le théorème de convergence dominée 1.3 on obtient (2.4). On en déduit que  $J$  est **G-différentiable** sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et

$$\langle J'_G(u), \cdot \rangle = p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

(il est facile de montrer que  $J'_G(u) \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$ ).

### 2.1.2 Différentiabilité au sens de Fréchet

**Définition 2.2** [2] Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et soit  $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $J$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A_u \in E'$  tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u) - A_u v}{\|v\|} = 0.$$

Où

$$J(u+v) - J(u) = A_u v + o(\|v\|).$$

Avec

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{o(\|v\|)}{\|v\|} = 0.$$

Si  $J$  est différentiable, alors  $A_u$  est unique et on note  $J'(u) = A_u$ .

Si la fonctionnelle  $J$  est différentiable en tout point  $u \in \Omega$ , on dit que  $J$  est différentiable sur  $\Omega$ .

#### Remarque 2.1

- On note que  $J'(u)$  est définie sur  $E$  tandis que  $J$  définie sur  $\Omega \subset E$ .
- Si  $J$  est différentiable en  $u$  alors  $J$  est **continue** en  $u$ .

**Exemple 2.5** Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $a$  un application bilinéaire et continue :

$$\begin{aligned} a : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) \end{aligned}$$

On considère la fonctionnelle associée :

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = a(u, u) \end{aligned}$$

$J$  est Fréchet différentiable sur  $E$ . En effet soit  $u, v \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} J(u+v) - J(u) &= a(u+v, u+v) - a(u, u) \\ &= a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) - a(u, u) \\ &= a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) \end{aligned}$$

Il suffit de prendre  $A_u(v) = a(u, v) + a(v, u)$  et  $o(\|v\|) = a(v, v)$

On a  $a$  est bilinéaire et continue c-à-d :  $\exists c > 0$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq c \|u\| \cdot \|v\| \\ \Rightarrow |a(v, v)| &\leq c \|v\|^2 \\ \Rightarrow \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|a(v, v)|}{\|v\|} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{a(v, v)}{\|v\|} &= 0 \end{aligned}$$

On montre que :

$$\begin{aligned} A_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto A_u(v) = a(u, v) + a(v, u) \end{aligned}$$

- Évident que  $A_u$  est **linéaire** car  $a$  est linéaire par rapport à  $v$ .
- $A_u$  est **continue** soit  $v \in E$

$$\begin{aligned} |A_u(v)| &= |a(u, v) + a(v, u)| \\ &\leq |a(u, v)| + |a(v, u)| \quad (\text{D'après linéarité de } a) \\ &\leq c_1 \|u\| \|v\| + c_2 \|u\| \|v\| = (c_1 + c_2) \|u\| \|v\| \\ &\leq C' \|v\| \end{aligned}$$

Donc  $A_u$  est **continue** avec  $C' = (c_1 + c_2) \|u\| > 0$  et par suite  $A_u \in E'$ .

D'où  $J$  est Fréchet différentiable, de plus :

$$\langle J'(u), v \rangle = a(u, v) + a(v, u).$$

$$J'(u) = a(u, \cdot) + a(\cdot, u).$$

De plus si  $a$  est **symétrique** :

Alors

$$\langle J'(u), v \rangle = 2a(u, v).$$

Donc

$$J'(u) = 2a(u, \cdot).$$

**Exemple 2.6** (cas particulier) Si on prend  $E = L^2(\Omega)$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et :

$$\begin{aligned} a : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = (u, v) = \int_{\Omega} uv dx \end{aligned}$$

On considère la fonctionnelle associée suivante :

$$\begin{aligned} J : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = a(u, u) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Évident que  $a$  est bilinéaire, continue et symétrique. Alors on déduit que :  $J$  est **Fréchet différentiable**, de plus :

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= 2a(u, v) \\ &= 2 \int_{\Omega} u \cdot v dx = 2(u, v) \end{aligned}$$

Donc

$$J'(u) = (2u, \cdot).$$

**Exemple 2.7** On considère la fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} J : H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \end{aligned}$$

On va montrer que  $J$  est  $F$ -différentiable. on a

$$\begin{aligned} J(u+v) - J(u) &= \int_{\Omega} |\Delta(u+v)|^2 dx - \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx + \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx. \end{aligned}$$

On pose  $\langle J'(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx$ ,

On a  $J'(u)$  est linéaire (évident), et on a  $J'(u)$  est continue car

$$\langle J'(u), v \rangle \leq 2 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} = C \|v\|_{H_0^2(\Omega)}.$$

et on a

$$\int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = o(\|v\|_{H_0^2(\Omega)}).$$

Donc  $J$  est différentiable au sens de Fréchet.

et on a

$$\begin{aligned} \|J'(u) - J'(w)\|_{H_0^{-2}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}=1} \langle J'(u) - J'(w), v \rangle \\ &= \sup_{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}=1} \int_{\Omega} \Delta(u-w) \cdot \Delta v dx \\ &\leq \sup_{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}=1} \left( \int_{\Omega} |\Delta(u-w)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u-w\|_{H_0^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc

$$u \xrightarrow{H_0^2(\Omega)} w \Rightarrow J'(u) \longrightarrow J'(w),$$

D'où  $J'$  est continue. Donc  $J$  est de classe  $\mathcal{C}^1(H_0^2; \mathbb{R})$ .

**Proposition 2.1** Si  $J : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est Fréchet-différentiable en  $u \in \Omega$ , alors  $J$  est  $G$ -différentiable en  $u$ .

**Démonstration 2.1** On suppose que  $J$  est Fréchet-différentiable en  $u$  c'est à dire :  $\exists A_u \in E'$  :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u) - A_u v}{\|v\|} = 0$$

En particulier, on pose  $v = tw$ ,  $\|w\| = 1 \Rightarrow \|v\| = t$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+tw) - J(u) - tA_u w}{t} = 0 \\ \implies & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+tw) - J(u)}{t} = A_u w, \quad (A_u \in E') \end{aligned}$$

D'où  $J$  est  $G$ -différentiable.

Le cas inverse n'est pas toujours vraie.

**Proposition 2.2** Soient  $E$  un espace de Banach,  $\Omega$  un ouvert de  $E$ .

Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application **Gâteaux-différentiable** telle que l'application :

$$\begin{aligned} F'_G : \Omega &\rightarrow E' \\ u &\mapsto F'_G(u) \end{aligned}$$

est continue. Alors  $F$  est **Fréchet-différentiable** sur  $\Omega$  et de plus elle est de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$  et on

$$F'(u) = F'_G(u), \quad \forall u \in \Omega.$$

**Démonstration 2.2** [2] Soient  $u, v \in \Omega$ , avec  $\|v - u\| \ll 1$  (assez petit). Alors

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t) = F(u + t(v - u)) \end{aligned}$$

est bien défini. comme  $F$  est  $G$ -différentiable alors  $\phi$  est dérivable

$$\phi'(t) = \langle F'_G(u + t(v - u)), v - u \rangle$$

et on a

$$\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t) dt$$

D'où

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u) + \int_0^1 \langle F'_G(u + t(v - u)), v - u \rangle dt \\ &= F(u) + \langle F'_G(u), v - u \rangle + \int_0^1 \langle F'_G(u + t(v - u)) - F'_G(u), v - u \rangle dt \\ &= F(u) + \langle F'_G(u), v - u \rangle + h(u, v - u). \end{aligned}$$

Par commodité, on a posé :

$$h(u, v - u) = \int_0^1 \langle F'_G(u + t(v - u)) - F'_G(u), v - u \rangle dt.$$

Il suffit donc a montrer que  $h(u, v - u) = o(v - u)$  c'est à dire

$$\lim_{v \rightarrow u} \frac{h(u, v - u)}{\|v - u\|} = 0.$$

Or  $w \mapsto F'_G(w)$  étant continue. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|w - u\| < \delta \Rightarrow \|F'_G(w) - F'_G(u)\| < \varepsilon.$$

Par conséquent si  $\|v - u\| < \delta$  on a pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |h(u, v - u)| &\leq \|F'_G(u + t(v - u)) - F'_G(u)\| \|v - u\| \\ &\leq \varepsilon \|v - u\| \end{aligned}$$

Ce qui, en intégrant sur  $[0, 1]$ , donne  $|h(u, v - u)| \leq \varepsilon \|v - u\|$ , pourvu que  $\|v - u\| < \delta$ .

**Remarque 2.2** L'importance de la proposition (2.2) réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

**Exemple 2.8** On considère :

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

D'après l'exemple 2.4  $J$  est **G-différentiable**. Pour conclure la différentiabilité de  $J$  au sens Fréchet, On applique la proposition 2.2, il suffit de montrer la continuité de  $J'_G(u) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega)$ . En effet, soit  $C \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  un ensemble borné, i.e.

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall u \in C.$$

On a pour  $u, v \in C$

$$\begin{aligned} \|J'_G(u) - J'_G(v)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle J'_G(u) - J'_G(v), w \rangle \\ &= \sup_{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla w dx \\ &\leq \begin{cases} c_p \sup_{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}) (|\nabla u - \nabla v|) |\nabla w| dx & \text{si } p \geq 2 \\ c_p \sup_{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p-2} |\nabla w| dx & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(Ici on a appliqué les deux inégalités données par la proposition 1.4). D'où, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|J'_G(u) - J'_G(v)\|_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} \leq \begin{cases} 2Mc_p \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } p \geq 2 \\ Mc_p \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases}$$

D'où  $J'_G$  est uniformément continue sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Par conséquent  $J$  est Fréchet différentiable et

$$\langle J'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Donc  $J$  est de classe  $\mathcal{C}^1(W_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Exemple 2.9** On considère

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J(u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

D'après l'exemple 2.3  $J$  est Gâteau différentiable.

Pour conclure la différentiabilité de  $J$  au sens de Fréchet. Nous utilisons les mêmes étapes que l'exemple 2.8. Donc  $J$  est Fréchet différentiable et

$$\langle J'(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Donc  $J$  est de classe  $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Exemple 2.10** On considère

$$J : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$$

D'après l'exemple 2.1  $J$  est **G-différentiable**. Pour conclure la différentiabilité de  $J$  au sens de Fréchet. Nous utilisons les mêmes étapes que l'exemple 2.8.

Donc  $J$  est Fréchet différentiable et

$$\langle J'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Donc  $J$  est de classe  $\mathcal{C}^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ .

## 2.2 Définitions et Points Critiques

### 2.2.1 Préliminaires

Dans tout la suite  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach et  $\Omega$  est un ouvert de  $X$ .

**Définition 2.3** ( **Fonction semi continue inférieurement(s.c.i)** )  $x_0 \in \Omega$ , si on dit qu'une fonctionnelle  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point  $x_0 \in \Omega$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

c'est elle est s.c.i en  $x_0 \forall x_0 \in X$

**Définition 2.4** ( **Fonction Faiblement semi continue inférieurement(f.s.c.i)** )

Une fonctionnelle  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$  telle que  $x_n \rightharpoonup x$ , on a

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

$f$  est f.s.c.i sur  $X$ .

**Proposition 2.3** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et réflexif. Alors l'application

$$u \longmapsto \|u\|$$

est f.s.c.i. C'est à dire pour chaque suite  $(x_n) \subset X$  telle que  $x_n \rightarrow x$ , on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|.$$

**Définition 2.5 (Suite minimisante)**

Une suite minimisante d'une fonctionnelle  $J : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  est une suite  $(x_n)$  de  $X$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x).$$

**Définition 2.6 (Point Critique)**

Soient  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ . Supposons que  $J \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ , on dit que  $u \in \Omega$  est **un point critique** pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$ , si :

$$J'(u) - \lambda F'(u) = 0$$

Si  $u$  n'est pas point critique, alors on dit que  $u$  est un point régulier pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$ . Si  $c \in \mathbb{R}$ , alors on dit que  $c$  est une valeur critique pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$ , s'il existe  $u \in \Omega$  tel que

$$J(u) - \lambda F(u) = c \quad \text{et} \quad J'(u) - \lambda F'(u) = 0$$

Si  $c$  n'est pas une valeur critique, alors on dit que  $c$  est une valeur régulière pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$ .

**Définition 2.7 (faiblement séquentiellement continue (f.s.c))**

Une fonctionnelle  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite faiblement séquentiellement continue (f.s.c) au point  $u_0$ , si pour chaque suite  $(u_n) \subset \Omega$  telle que  $u_n \rightarrow x$

$$F(u_n) \longrightarrow F(u).$$

$F$  est f.s.c sur  $u$ .

**Définition 2.8 (Fonction Coercive)** Une fonctionnelle  $J$  définie sur un espace de Banach  $X$  vers  $\mathbb{R}$  est dite Coercive si :

$$\lim_{\|x\|_X \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty.$$

**Définition 2.9 (Fonction Carathéodory)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Carathéodory, si elle vérifie :

✿ L'application :

$$\begin{aligned} f(x, \cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

est continue presque partout  $x \in \Omega$ .

✿ L'application :

$$\begin{aligned} f(\cdot, t) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

est mesurable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2.2.2 Multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes ou sur une variété. C'est pourquoi on doit préciser le sens qu'on donne à un point critique ou à une valeur critique sur un ensemble de contraintes.

### Définition 2.10 [2]

Soient  $X$  un espace de Banach,  $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$  et un ensemble de **contraintes** :

$$S = \{v \in X, F(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout  $u \in S$ , on a  $F'(u) \neq 0$ . Si  $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$  (ou bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $S$  ou encore  $\mathcal{C}^1$  sur  $S$ ). On dit que  $c \in \mathbb{R}$  est **valeur critique** pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$  sur  $S$  s'il existe  $u \in S$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $J(u) - \lambda F(u) = c$  et  $J'(u) = \lambda F'(u)$ . Le point  $u$  est **un point critique** pour la fonctionnelle  $J - \lambda F$  sur  $S$  et le réel  $\lambda$  est appelé **multiplicateur de Lagrange** pour la valeur critique  $c$  (ou le point critique  $u$ ).

Cette définition est justifiée par le résultat suivant qui établit l'existence de multiplicateur de Lagrange.

**Remarque 2.3** Lorsque  $X$  est un espace fonctionnelle et l'équation  $J'(u) = \lambda F'(u)$  correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que  $J'(u) = \lambda F'(u)$  est l'équation d'Euler-Lagrange (ou l'équation d'Euler) satisfaite par le point critique  $u$  sous la contrainte  $S$ .

### Proposition 2.4 [2]

Sous les hypothèses et notations de la définition 2.10, on suppose que  $u_0 \in S$  est tel que  $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$ . Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

**Démonstration 2.3** (de proposition 2.4) [2]

Soit  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$  et  $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ ,  $S = \{v \in X; F(v) = 0\}$ ).

Soit  $u_0 \in S$  tel que  $J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u)$ .

On montre que  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  :

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$$

Comme  $F'(u_0) \neq 0$ ,  $\exists w_0 \in X$  tel que :

$$\langle F'(u_0), w_0 \rangle = 1$$

et on a :

$$\dim \text{Ker} F'(u_0) + \dim \text{Im} F'(u_0) = \dim X.$$

D'où

$$X = \text{Ker} F'(u_0) \oplus w_0 \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Où

$$w_0 \mathbb{R} = \{\lambda w_0 / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On pose :  $X_0 = \text{Ker} F'(u_0)$  ( $X = X_0 \oplus w_0 \mathbb{R}$ )

On définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \phi : X_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, t) &\longmapsto \phi(v, t) = F(u_0 + v + tw_0) \end{aligned}$$

Et on a

$$\partial_t \phi(v, t) = \langle F'(u_0 + v + tw_0), w_0 \rangle.$$

$$\partial_t \phi(0, 0) = \langle F'(u_0), w_0 \rangle = 1 \neq 0.$$

et on a :  $\phi(0, 0) = F(u_0) = 0$  car  $u_0 \in S$ .

$$\partial_v \phi(v, t) = \langle F'(u_0 + v + tw_0), 1 \rangle = F'(u_0 + v + tw_0) \quad , \quad \partial_v \phi(0, 0) = F'(u_0) = 0 \quad \text{sur } X_0.$$

On applique Le théorème des fonctions implicites sur  $\phi$  en  $(0, 0)$ , on obtient  $\exists T$  un application et  $W$  est un ouvert de  $X_0$

$$\begin{aligned} T : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto T(v) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = 0 &\Leftrightarrow \phi(v, T(v)) = 0, \forall v \in W \\ F(u_0 + v + tw_0) = 0 &\Leftrightarrow F(u_0 + v + T(v) \cdot w_0) = 0 \end{aligned}$$

et on a :  $\phi(v, T(v)) = 0$  et  $\phi(0, 0) = 0 \Rightarrow \phi(0, T(0)) = 0 \Rightarrow T(0) = 0$

D'où il existe un voisinage  $\Omega \subset X$  de  $u_0$ , tel que :

$$F(u_0 + v + T(v) \cdot w_0) = 0, \quad \forall v \in W$$

$\Omega = u_0 + T(v) \cdot w_0 + W$  car  $v \in W, \forall u \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} F(u) = 0 &\Leftrightarrow F(u_0 + v + T(v).w_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow u = u_0 + v + T(v).w_0, \quad \forall v \in W \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \tilde{J} : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \tilde{J}(v) = J(u_0 + v + T(v).w_0) \end{aligned}$$

On a

$$\tilde{J}(0) = J(u_0) = \inf_S J = \inf_{v \in W} \tilde{J}(v).$$

et on a  $\tilde{J}$  est de classe  $\mathcal{C}^1(W, \mathbb{R})$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{J}'(0) = 0 &\Leftrightarrow \langle \tilde{J}'(0), v \rangle = 0, \quad \forall v \in X_0 \\ \langle \tilde{J}'(v), k \rangle &= \langle J'(u_0 + v + T(v).w_0), k + \langle T'(v), k \rangle w_0 \rangle \end{aligned}$$

on a :

$$\langle (f \circ g)'(u), k \rangle = \langle f'(g(u)), g'(u).k \rangle$$

on remplace  $v = 0$

$$\langle \tilde{J}'(0), k \rangle = \langle \tilde{J}'(0), k + \langle T'(0), k \rangle w_0 \rangle, \quad \forall k \in X_0$$

et on a  $T'(0) = 0$ . En effet : On a

$$\partial_v \phi(v, T(v)) = 0 \tag{2.9}$$

et on a

$$\begin{aligned} \langle \partial_v \phi(v, T(v)), k \rangle &= \langle \partial_v F(u_0 + v + T(v).w_0), k \rangle \\ &= \langle F'(u_0 + v + T(v).w_0), k + \langle T'(v), k \rangle w_0 \rangle \\ \partial_v \phi(0, 0) &= \langle F'(u_0), k + \langle T'(0), k \rangle w_0 \rangle = 0 \\ \langle F'(u_0), k \rangle &= -\langle F'(u_0), w_0 \rangle \langle T'(0), k \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$\langle T'(0), k \rangle = \langle F'(u_0), k \rangle = 0, \quad \forall v \in X_0$$

Donc

$$T'(0) = 0$$

Donc

$$\langle \tilde{J}'(0), k \rangle = \langle J'(u_0), k \rangle, \quad \forall k \in X_0$$

Alors

$$\langle J'(u_0), k \rangle = 0, \forall k \in X_0 = \text{Ker} F'(u_0)$$

D'où

$$X_0 \subset \text{Ker} J'(u_0)$$

Soit  $W \in \mathbb{R}w_0$ . On distingue deux cas :

Si  $\langle J'(u_0), W \rangle = 0$ , alors

$$J'(u_0) = 0 \quad \text{sur } X.$$

Donc on choisit  $\lambda = 0$  et on a

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0) \quad \text{sur } X,$$

Si  $\langle J'(u_0), W \rangle \neq 0$ , alors

soit  $u \in X = X_0 \oplus w_0\mathbb{R}$ . Donc  $u = v_0 + \alpha w_0$  tel que  $v_0 \in X_0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

D'où

$$\begin{aligned} J'(u_0) = \lambda F'(u_0) &\Leftrightarrow \langle J'(u_0), v_0 + \alpha w_0 \rangle = \lambda \langle F'(u_0), v_0 + \alpha w_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow \alpha \langle J'(u_0), w_0 \rangle = \lambda \alpha \langle F'(u_0), w_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow \lambda = \langle J'(u_0), w_0 \rangle \end{aligned}$$

Donc Il suffit de choisir

$$\lambda = \langle J'(u_0), w_0 \rangle \neq 0.$$

### 2.2.3 La condition de Palais-Smale

Soit  $X$  un espace de Banach. Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale.

**Définition 2.11** [2] Soient  $X$  un espace de Banach, et  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $c \in \mathbb{R}$ , on dit que  $J$  vérifie **la condition de Palais-Smale** (au niveau  $c$ ), si toute suite  $(u_n)_n$  de  $X$  telle que :

$$J(u_n) \rightarrow c \quad \text{dans } \mathbb{R}, \quad \text{et } J'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } X'$$

Contient une sous-suite  $(u_{n_k})$  convergeant.

**Remarque 2.4** Intuitivement, ce que l'on exige c'est la compacité des suites qui ont tendance à réaliser une valeur critique. Mes, même si la fonction est bornée inférieurement et  $c = \inf J$ , il n'est pas du tout évident que lorsque  $J(u_n) \rightarrow c$ , alors  $J'(u_n)$  tend vers zéro. Si  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale en  $c \in \mathbb{R}$ , une conséquence importante est que l'ensemble

$$K(c) = \{u \in X; J(u) = c \quad \text{et} \quad J'(u) = 0\}.$$

est compacte, il en est de même de  $\bigcup_{a \leq c \leq b} K(c)$ , pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ .

En fait, très souvent il faut adapter la définition de condition de Palais-Smale au problème que l'on veut résoudre. Une variante est la suivante : s'il existe  $(u_n)_n$  une suite de  $X$  telle que  $J(u_n)$  tend vers  $c$  et  $J'(u_n) \rightarrow 0$  dans  $X'$  alors  $c$  est une valeur critique de  $J$ .

**Remarque 2.5** Pour une fonctionnelle  $J$  qui n'est pas bornée, chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminées par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne.

**Exemple 2.11** La fonction  $J(x) = e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ , ne vérifie pas la Condition de Palais-Smale en 0.

**Exemple 2.12** La fonction  $J(x) = \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ , ne vérifie pas la Condition de Palais-Smale.

**Théorème 2.1 (Théorème du Col (Mountain-Pass theorem))[2]** Soient  $X$  un espace de Banach,  $J \in C(X, \mathbb{R})$  vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que  $J(0) = 0$  et que :

(i) il existe  $R > 0$  et  $\rho > 0$  tels que si  $\|u\| = R$ , alors  $J(u) \geq \rho$ .

(ii) il existe  $e \in X$  tel que  $\|e\| > R$  et  $J(e) \leq 0$ .

Alors  $J$  possède une valeur critique  $c$  telle que  $c \geq \rho$ . De façon plus précise, si on pose :

$$\mathcal{B} = \{\varphi([0, 1]) \mid \varphi \in C([0, 1]; X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = e\},$$

et

$$c = \inf_{\varphi \in \mathcal{B}} \max_{t \in [0, 1]} J(\varphi(t)),$$

Alors  $c$  est une valeur critique de  $J$ , et  $c \geq \rho$ .

## Applications aux Problèmes elliptiques

### 3.1 Problème aux valeurs propres

On considère le Problème aux valeurs propres suivant :

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier,  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

**Définition 3.1 (Solution faible)** Une solution faible de  $(P_\lambda)$  est une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} u v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors on a le résultat d'existence suivant :

**Théorème 3.1** Le Problème  $(P_\lambda)$  admet une solution faible pour certain  $\lambda > 0$ .

Pour montrer ce théorème, on a besoin de ce résultat auxiliaire :

**Proposition 3.1** On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto F(u) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 1 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Avec

$$S = \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \right\}.$$

Alors il existe  $u_0 \in S$  tel que :

$$J(u) = \mu_1 = \min_{v \in S} J(v).$$

**Démonstration 3.1 (de proposition 3.1)** On a pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$

$$J(u) = \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq 0,$$

Donc  $J$  est minoré. Soit  $(u_n) \subset S$  une suite minimisant de  $J$  c-à-d :

$$J(u_n) \longrightarrow \mu = \inf_{u \in S} J(u).$$

Comme  $(J(u_n))$  est convergente alors elle est bornée. D'où  $J(u_n) = \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  est borné et donc  $u_n$  est borné dans  $H_0^1(\Omega)$  et par conséquent

$\exists u \in H_0^1(\Omega)$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = \mu \quad (3.1)$$

Par ailleurs, d'après le Théorème de Rellich-Kondrachov 1.7

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$$

donc

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

D'où

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \longrightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1, \quad \text{alors} \quad u \in S$$

Alors  $F(u) = 0$  et par la définition de  $\mu$

On a

$$J(u) \geq \mu \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2),  $J$  atteint son minimum en  $u$  c-à-d :

$$J(u) = \min_S J(v) = \mu.$$

**Démonstration 3.2 ( du théorème 3.1)** On pose

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

$$F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto F(u) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 1$$

On a  $F$  et  $J$  sont de classe  $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  ( voir exemples 2.9, 2.10). D'après la proposition précédente :  $\exists u \in S$

$$J(u) = \inf_{v \in S} J(v).$$

D'après le Théorème de multiplicateur de Lagrange 2.4,  $\exists \lambda \neq 0$  tel que :

$$J'(u) = \lambda F'(u),$$

$$\int \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc  $u$  est une solution faible de  $(p_\lambda)$ .

## 3.2 Problème semi-linéaire

On considère le Problème suivante :

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1} \cdot u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier,  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

On va montrer le résultat d'existence suivante :

**Définition 3.2 (Solution faible)** Soit  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ . Une Solution faible de  $(P_1)$  est une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} |u|^{p-1} uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

pour montrer ce théorème, on a besoin de ce résultat auxiliaire :

**Théorème 3.2** Soit  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ . Alors le Problème  $(P_1)$  admet une solution faible .

**Proposition 3.2** Soient  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ . On considère, l'ensemble :

$$S = \{v \in H_0^1(\Omega); F(v) = 0\}.$$

et on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Alors, il existe  $u_0 \in S$  tel que :

$$J(v_0) = \mu = \min_{v \in S} J(v).$$

**Démonstration 3.3 (de proposition 3.2)** On a :

$$J(v_n) = \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx = \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Donc  $J$  est minoré. Soit  $(v_n) \subset S$  une suite minimisante de  $J$  i.e.

$$J(v_n) \longrightarrow \mu = \inf_{v \in S} J(v),$$

Comme  $(J(v_n))$  est convergente alors elle est bornée. D'où  $J(v_n) = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  est borné et donc  $(v_n)$  est borné dans  $H_0^1(\Omega)$ , on peut extraire une sous suite notée encore  $(v_n)_n$  :

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega).$$

On a donc d'après la proposition 2.3

$$\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

$$J(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \lim J(v_n) = \mu. \quad (3.3)$$

Par ailleurs puisque  $p < (N+1)/(N-2) = (2N)/(N-2) - 1 = 2^* - 1$ , d'où  $p+1 < 2^*$ . D'après le théorème de Rellich-Kondratchov (1.7) on a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$$

Alors il existe une sous-suite notée encore  $(v_n)_n$ , telle que  $v_n \rightarrow v_0$  dans  $L^{p+1}(\Omega)$ . En particulier  $F(v_0) = 0$  et donc  $v_0 \in S$  et par définition de  $\mu$  on a :

$$J(v_0) \geq \mu \quad (3.4)$$

De (3.3), (3.4),  $J$  atteint son minimum en  $v_0$  c-à-d :

$$J(v_0) = \mu = \min_S J(v).$$

**Démonstration 3.4 ( du théorème(3.2))** On pose :

$$S = \{v \in H_0^1(\Omega); F(v) = 0\}.$$

avec

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v(x)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v(x)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

On a  $F$  et  $J$  de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  voir exemple 2.9 et 2.10. D'après la proposition précédente :  
 $\exists v_0 \in S$

$$J(v_0) = \inf_S J(v).$$

D'après le Théorème de multiplicateur de Lagrange 2.4,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  telle que :

$$J'(v_0) = \lambda F'(v_0).$$

c-à-d pour tout  $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$2 \int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla \phi dx = \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0|^{p-1} v_0 \phi dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.5)$$

Pour  $\phi = v_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx &= \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0|^{p+1} dx = \lambda(p+1). \\ 2\mu &= \lambda(p+1). \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = \frac{2\mu}{p+1}.$$

Donc la formule (3.5) devient :

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla \phi = \mu \int_{\Omega} |v_0|^{p-1} v_0 \phi dx.$$

On pose  $u = \mu^{\frac{1}{p-1}} v_0$ ,  $\nabla u = \mu^{\frac{1}{p-1}} \nabla v_0$ .

D'où

$$\begin{aligned} \mu^{\frac{-1}{p-1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \mu \int_{\Omega} \left| \mu^{\frac{-1}{p-1}} v_0 \right|^{p-1} (\mu^{\frac{-1}{p-1}} v_0) v dx. \\ &= \mu^{\frac{-1}{p-1}} \int_{\Omega} |v_0|^{p-1} v_0 v dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx.$$

Donc  $u$  est une solution faible de  $(P_1)$ .

**Remarque 3.1** On peut montrer que l'on peut choisir la suite minimisante  $(v_n)_n$  telle que  $v_n \geq 0$  et on obtient ainsi une solution  $u \geq 0$  et de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$ .

### 3.3 Problème non linéaire aux valeurs propre

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Où  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier,  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

**Définition 3.3** (*Solution faible*) Une Solution faible de  $(P_2)$  est une fonction  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Théorème 3.3** Le Problème  $(P_2)$  admet une Solution faible pour certain valeurs de  $\lambda$ .

**Proposition 3.3** Soient  $\Omega$  un ouvert bornée régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $p \geq 1$  tel que  $p \in [1, +\infty[$  On considère, sur l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$S = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega); F(v) = 0 \right\}.$$

avec

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v\|_{L^p(\Omega)}^p - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

Alors, il existe  $u_0 \in S$  tel que :

$$J(u_0) = \mu_0 = \min_{v \in S} J(v).$$

**Démonstration 3.5** On a  $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$J(u_n) \geq 0.$$

D'où  $J$  est minoré, soit  $(v_n) \subset S$  une suite minimisante de  $J$  c-à-d :

$$J(v_n) \longrightarrow \mu_0 = \inf_{v \in S} J(v).$$

Comme  $(J(v_n))$  est convergente alors elle est bornée. D'où  $J(u_n) = \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p$  est bornée et Donc  $(v_n)$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

$W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach et réflexif et comme  $(v_n)$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors on peut extraire une sous-suite noté encore  $(v_n)_n$  :

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

Alors, on a donc d'après la proposition 2.3

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ J(v_0) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = \lim J(v_n) = \mu_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

par ailleurs, comme  $p < p^*$ , d'après le théorème de Rellich-Kondrachov(1.7)  
Si  $p < N$ , alors pour tout  $p \geq 1$  tel que :  $p < p^*$  :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega),$$

déduit que  $v_n \rightarrow v_0$  dans  $L^p(\Omega)$ . En particulier on a  $v_0 \in S$  car :

$$\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |v_n|^p dx = 1 \rightarrow \|v_0\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

D'où

$$\|v_0\|_{L^p(\Omega)}^p = 1, \text{ alors } v_0 \in S.$$

d'où

$$F(v_0) = 0.$$

$J(v_0) = \inf_v J(v)$  et par définition de  $\mu_0$  on a :

$$J(v_0) \geq \mu_0, \tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7),  $J$  atteint son minimum en  $v_0$  c-à-d :

$$J(v_0) = \mu_0 = \min_{v \in S} J(v).$$

**Démonstration 3.6 (du théorème(3.3))** On pose :

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v\|_{L^p(\Omega)}^p - 1 \\ S &= \{v \in W_0^{1,p}(\Omega); F(v) = 0\}. \end{aligned}$$

On a  $F$  et  $J$  sont de classe  $\mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  (voir 2.8, 2.10).

D'après la proposition précédente  $\exists v_0 \in S$

$$J(v_0) = \inf_{v \in S} J(v),$$

D'après le Théorème de multiplicateur de Lagrange (2.4),  $\exists \lambda \neq 0$  telle que :

$$\begin{aligned} J'(v_0) &= \lambda F'(v_0), \quad \forall \phi \in W_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} |\nabla v_0|^{p-2} \nabla v_0 \cdot \nabla \phi dx &= \lambda \int_{\Omega} |v_0|^{p-2} v_0 \phi dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

pour  $\phi = v_0$ , on obtient

$$\mu_0 = J(v_0) = \lambda.$$

Donc  $u$  est une solution faible de  $(P_2)$ .

### 3.4 Problème de bi-laplacien aux valeurs propres

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta^2 u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Où  $\Omega$  un ouvert borné connexe de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

**Définition 3.4 (Solution faible)** Une solution faible de  $(P_3)$  est une fonction  $u \in H_0^2(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \lambda \int_{\Omega} u v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Pour montrer ce théorème, on a besoin de ce résultat auxiliaire :

**Théorème 3.4**

$$(p) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier. Alors ce problème admet une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  et  $\exists c > 0$  (dépend de  $\Omega$ ) tel que :  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$   
De plus  $u \mapsto \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$  définit une norme sur  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  et sur  $H_0^2(\Omega)$ .

**Proposition 3.4** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné connexe de classe  $\mathcal{C}^1$ . On considère, l'ensemble :

$$S = \left\{ v \in H_0^2(\Omega); \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \right\}.$$

et on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} F : H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Alors, il existe  $v_0 \in S$  tel que :

$$J(v_0) = \mu = \min_{v \in S} J(v),$$

**Démonstration 3.7** (de proposition 3.4) On a pour tout  $u \in H_0^2(\Omega)$  :

$$J(v_n) = \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$$

Donc  $J$  est minoré. Soit  $(v_n)_n \subset S$  une suite minimisante de  $J$  : i.e.

$$J(v_n) \longrightarrow \mu = \inf_{u \in S} J(v),$$

Notons que  $u \mapsto \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$  définit une norme sur  $H_0^2(\Omega)$  équivalente à celle de  $H^2(\Omega)$  (voir Théorème 3.4)

D'où on a :

$$\|v_n\|_{H_0^2(\Omega)} = J(v_n) \leq c, \forall n$$

et donc  $(v_n)_n$  est bornée dans  $H_0^2(\Omega)$  et par conséquent,  $\exists v_0 \in H_0^2(\Omega)$  :

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans} \quad H_0^2(\Omega)$$

et

$$\|v_0\|_{H_0^2(\Omega)} = J(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{H_0^2(\Omega)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n)$$

D'où

$$J(v_0) \leq \mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) \quad (3.8)$$

et on a d'après le Théorème de Rellich-Kondrachov 1.7 :

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow_c H_0^1(\Omega)$$

Donc (pour une sous suite), on a :

$$v_n \longrightarrow v_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

D'où

$$\begin{cases} v_n \longrightarrow v_0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) \\ \nabla v_n \longrightarrow \nabla v_0 & \text{dans} \quad (L^2(\Omega))^N \end{cases}$$

En particulier

$$\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = \lim \|v_n\| = 1$$

et donc

$$v_0 \in S$$

D'où

$$\mu = \inf_S J(v) \leq J(v_0), \quad (3.9)$$

De (3.8) et (3.9), on déduit que

$$J(v_0) = \mu.$$

Donc  $J$  atteint son minimum en  $v_0$

**Démonstration 3.8 (du théorème 3.4)** On pose :

$$S = \left\{ v \in H_0^2(\Omega); \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \right\}.$$

et on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} F : H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto F(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 1 \end{aligned}$$

et

$$J : H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto J(v) = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On a  $F$  et  $J$  sont de classe  $\mathcal{C}^1(H_0^2(\Omega), \mathbb{R})$  voir exemple 2.7 .

D'après la proposition précédente :  $\exists v_0 \in S$

$$J(v_0) = \inf_{v \in S} J(v).$$

D'après le Théorème de multiplicateur de Lagrange,  $\exists \lambda \neq 0$  tel que

$$J'(v_0) = \lambda F'(v_0)$$

D'où pour tout  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$

$$\langle J'(v_0), \varphi \rangle = \lambda \langle F'(v_0), \varphi \rangle$$

$$\int_{\Omega} \Delta v_0 \Delta \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} v_0 \varphi dx$$

pour  $\varphi = v_0$ , on obtient

$$\int_{\Omega} |\Delta v_0|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} v_0^2 dx$$

Donc

$$\|\Delta v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'où

$$\lambda = \|\Delta v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = J(v_0)$$

Donc  $u$  est une solution faible de  $P_3$ .

### 3.5 Problème non linéaire aux valeurs propres

$$(P_4) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2} u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Où  $\Omega$  un ouvert borné et régulier,  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$  .

**Définition 3.5 (Solution faible)** Une Solution faible de  $(P_4)$  est une fonction  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} |u|^{q-2} u v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Théorème 3.5** Le Problème  $(P_4)$  admet une Solution faible.

**Proposition 3.5** Soient  $\Omega$  un ouvert bornée régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $q < \frac{Np}{N-p}$  si  $p < N$

On considère, sur l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{L^q(\Omega)}^q = 1 \right\}$$

avec

$$F : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto F(u) = \frac{1}{q} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q - 1$$

et

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p$$

Alors, il existe  $u \in S$  tel que :

$$J(u_0) = \mu = \min_{v \in S} J(v).$$

**Démonstration 3.9 (de proposition 3.5)** On a pour tout  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$J(u) = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \geq 0$$

Donc  $J$  est minoré. Soit  $(u_n)_n \subset S$  une suite minimisante de  $J$  : i.e.

$$J(u_n) \longrightarrow \mu = \inf_{u \in S} J(u).$$

Comme  $(J(u_n))$  est convergente alors elle est bornée. D'où  $J(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p$  est borné et donc  $u_n$  est borné dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et par conséquent  $\exists u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

et

$$\|u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = J(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n)$$

D'où

$$J(u_0) \leq \mu = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \tag{3.10}$$

et on a  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$  (voir théorème 1.7) Donc (pour une sous suite), on a :

$$u_n \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega)$$

D'où

$$\|u_n\|_{L^q(\Omega)} = 1 \longrightarrow \|u_0\|_{L^q(\Omega)}$$

Alors

$$\|u_0\|_{L^q(\Omega)} = 1 \quad \text{alors} \quad u_0 \in S$$

Donc

$$\mu = \inf_S J(v) \leq J(u_0) \tag{3.11}$$

de(3.10) et (3.11), on déduit que  $J$  atteint son minimum en  $u_0$  c-à-d :

$$J(u_0) = \mu.$$

**Démonstration 3.10 (du théorème 3.5)** On a l'ensemble de contrainte suivante :

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{L^q(\Omega)}^q = 1 \right\}.$$

avec

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto F(u) = \frac{1}{q} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

On a  $F$  et  $J$  sont de classe  $\mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  voir exemple 2.8

D'après la proposition précédente :  $\exists u_0 \in S$  :

$$J(u_0) = \inf_S J(v).$$

D'après le Théorème de multiplicateur de Lagrange 2.4,  $\exists \lambda \neq 0$  tel que :

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} |u_0|^{q-2} u_0 v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

pour  $v = u_0$ , on obtient

$$\mu = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u dx = \lambda$$

On pose  $u = cu_0 \Rightarrow u_0 = \frac{u}{c}$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c}\right)^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u dx &= \mu \left(\frac{1}{c}\right)^{q-1} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u \cdot u dx \\ \left(\frac{1}{c}\right)^{p-1} &= \mu \left(\frac{1}{c}\right)^{q-1} \Rightarrow c^{q-p} = \mu \end{aligned}$$

Donc

$$c = \mu^{\frac{1}{q-p}}.$$

Alors  $u$  est une solution faible de  $(P_4)$ .

### 3.6 Problème semi-linéaire sous-critique

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^n$  et  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ . On considère le problème semi linéaire suivante :

$$(P_5) \quad \begin{cases} -\Delta u + \rho u &= |u|^{p-1} \cdot u \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Où  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $\rho(x) \geq -C_0 > -\lambda_1$ .

Où  $\lambda_1$  est la première valeur propre de  $-\Delta$ .

**Remarque 3.2** Notons que le terme  $\int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx$  est bien défini car  $p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$ . Donc

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega).$$

D'où

$$u \in H_0^1(\Omega) \implies u \in L^{p+1}(\Omega) \implies |u|^{p-1} u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Et on a  $v \in L^{p+1}(\Omega)$ . Comme  $\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$  alors d'après l'inégalité de Hölder On a  $\int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx < \infty$ .

**Théorème 3.6** Le Problème  $(P_5)$  admet une solution faible  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

On va appliquer le Théorème de Mountain-Pass 2.1. On considère la fonctionnelle suivante :

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

Alors, on a  $J$  est de classe  $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ , (pour  $p+1 < 2^*$ ) (voir 2.9, 2.10) et on a

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \rho u v dx - \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx.$$

On commence par démontrer :

**Lemme 3.1**  $J$  satisfait la condition de Palais-Smale. C'est à dire :  
Si  $(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite de  $(u_n)_n$  convergente dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Démonstration 3.11 (de Lemme 3.1)**

On a  $F$  et  $J$  sont de Classe  $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  (voir 2.9 et 2.8) et  $F'(u) \neq 0$ . Soient  $c \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_n \in S$  telle que :

$$\begin{cases} J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) = -\Delta u_n + \rho u_n - |u_n|^{p-1} u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' \end{cases}$$

On a  $p \geq 1$ , d'où  $p+1 \geq 2$

Donc d'après 1.6

$$L^{p+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

D'où

$$\int_{\Omega} \rho(x) u^2 dx \leq \|\rho\|_{\infty} \int_{\Omega} u^2 = c \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C' \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2 \leq C''$$

On a

$$J(u_n) = \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \rho(x) u_n^2 dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \longrightarrow c$$

et

$$J'(u_n) \longrightarrow 0$$

D'où

$$J(u_n) - \frac{1}{p+1} \langle J'(u_n), u_n \rangle \longrightarrow c$$

D'autre part

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{p+1} \langle J'(u_n), u_n \rangle &= \left( \frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx - \frac{1}{p+1} \|u_n\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \right) \\ - \frac{1}{p+1} \left( \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx - \|u_n\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \right) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \left( \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx \right) \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \left( \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C_0 \int_{\Omega} u_n^2 \right) \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \left( \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{C_0}{\lambda_1} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \left( 1 - \frac{C_0}{\lambda_1} \right) \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} \langle h_n, u_n \rangle &= \langle -\Delta u_n, u_n \rangle + \langle \rho u_n, u_n \rangle + \langle -|u_n|^{p-1} u_n, u_n \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx + \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \\ &= \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \rho u_n^2 dx - \|u_n\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \\ &= J(u_n) \end{aligned}$$

Alors  $(\langle h_n, u_n \rangle)$  est borné. D'après le théorème de compacité de Rellich- Kondrachov 1.7 :

et on a  $p < \frac{N+2}{N-2}$ ,  $p < 2^* - 1$  et

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^{p+1}(\Omega)$$

et

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$$

D'où  $u_n \longrightarrow u$  dans  $L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ . Donc on peut extraire une sous-suite noté encore  $(u_n)_n$  qui converge vers  $u$  dans  $(L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$

on a :

$$\begin{aligned} h_n &= -\Delta u_n + \rho u_n - |u_n|^{p-1} u_n, \\ -\Delta u_n &= h_n - \rho u_n + |u_n|^{p-1} u_n, \end{aligned}$$

On pose  $f_n = h_n - \rho u_n + |u_n|^{p-1} u_n$ . D'où  $-\Delta u_n = f_n$

On a

$$h_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega),$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

Comme

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \quad \text{alors} \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

et on a

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^{p+1}(\Omega),$$

D'où

$$|u_n|^{p-1} u_n \longrightarrow |u|^{p-1} u \quad \text{dans} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Donc

$$|u_n|^{p-1} u_n \longrightarrow |u|^{p-1} u \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Alors

$$f_n \longrightarrow f = -\rho u + |u|^{p-1} u \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

et on a  $-\Delta u_n = f_n$ ,

On considère  $(u_n - u)$  comme une fonction test

Alors

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) = \langle f_n, u_n - u \rangle \longrightarrow 0.$$

et on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) dx \longrightarrow 0.$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

Comme

$$\begin{cases} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Alors

$$u_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u$$

Il reste à démontrer les deux Conditions géométriques de Théorème de Mountain-Pass.

**Lemme 3.2** *On a*

(1)  $\exists \rho, r > 0$  tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r \Rightarrow J(u) \geq \rho.$$

(2)  $\exists e \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$\|e\|_{H_0^1(\Omega)} > r \quad \text{et} \quad J(e) \leq 0.$$

**Démonstration 3.12 (de Lemme 3.2)**

On a  $p + 1 < 2^*$ . Comme  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ .

Alors

$$\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}.$$

Et on a d'après l'inégalité de Poincaré (voir proposition 1.7)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho u^2 dx &\geq -C_0 \int_{\Omega} u^2 dx \\ &\geq -\frac{C_0}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= -\frac{C_0}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_0}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

On pose  $\alpha = 1 - \frac{C_0}{\lambda_1} > 0$  car  $C_0 > -\lambda_1$

Donc

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

On pose  $\phi(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{1}{p+1} t^{p+1}$ ,  $t > 0$

On a  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(t) = \alpha t - t^p$  ( $p > 1$ )

$$\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow t_\alpha = \alpha^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{ou} \quad t = 0$$

la fonction  $\phi(t)$  est croissante sur  $[0, \alpha^{\frac{1}{p-1}}[$  et décroissante sur  $]\alpha^{\frac{1}{p-1}}, +\infty[$ .

D'où on a  $t_\alpha = \alpha^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow J(u) = \phi(\alpha^{\frac{1}{p-1}}) > 0$

Il suffit de choisir :

$$r = \alpha^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad \rho = \phi(\alpha^{\frac{1}{p-1}})$$

D'où la condition (1) est satisfait. Montrons la condition (2).

faisons  $u \in H_0^1(\Omega)$  avec  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$  on a

$$J(tu) = t^2 + t^2 \int_{\Omega} \rho u^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

D'où pour  $t$  assez grand, on a

$$J(tu) \leq 0.$$

On choisit  $e = t_0 u$ , avec  $t_0 > r$  Alors

$$J(e) \leq 0.$$

**Démonstration 3.13 (du Théorème)** D'après le Théorème de Mountain-Pass (voir théorème 2.1)

$J$  admet un point critique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$J(u) = \inf_{\varphi \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\varphi(t)).$$

Où

$$\Gamma = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, 1], H_0^1(\Omega)); \varphi(0) = 0, \varphi(1) = e \right\}.$$

et on a  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = e$ ,  $\|e\| > r$ . Alors  $\exists t_0 \in [0, 1] : \varphi(t_0) = r$

Donc

$$\max_{0 \leq t \leq 1} J(\varphi(t)) \geq \rho > 0.$$

D'où

$$J(u) = \inf_{\varphi \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\varphi(t)) \geq \rho > 0.$$

Ce qui implique que  $u \neq 0$  car sinon  $J(u) \equiv 0$ . Donc  $u$  est un point critique non nulle de  $J$ .

C'est à dire

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \rho u v dx - \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx = 0.$$

*Par les lemmes précédents, on a la condition de Palais-Smale et les condition géométriques du Théorème de Mountain-Pass qui sont vérifiées. Donc on obtient un point critique  $u_0$  de  $J$ .*

**Remarque 3.3** *pour  $p = 1$  ce dernier Problème Correspond à un Problème aux valeurs propres. Lorsque  $p > 1$ , certains auteurs de façon quelque peu impropre appellent ce genre d'équation Problème aux valeurs propres non-Linéaire, ce qui n'a pas beaucoup de sens de ce cadre puisque, par un argument d'homothétie, on peut montre que  $\forall \lambda > 0$ , il existe infinité de Solution pour*

$$-\Delta u + \rho u = \lambda |u|^{p-1} u.$$

*Nous verrons plus loi que si  $(N - 1)p = N + 2$  et  $N \geq 3$ , alors en général  $J$  ne satisfait pas la Condition de Palais-Smale sur  $S$ .*

## **Conclusion**

L'approche variationnelle appliqué à des problèmes elliptiques non-Linéaire est assez clossale puisque un simple chargement sur l'équation étudier peut basculé vers l'existence ou la non existence de solution, de plus la présence des exposants critiques du type Sobolev présentent beaucoup de difficultés vu qu'ils cause la perte de compacité. L'existence de la solution devient délicate à démontrer.

## Résumé

Beaucoup de problèmes elliptiques admettent plusieurs solutions ou une infinité de solutions. Il est alors intéressant d'étudier les solutions de certains problèmes, en étudiant une fonctionnelle adéquate sur une contrainte bien choisie pour des raisons différentes par exemple on cherche la solution qui rend l'énergie est minimal. Dans ce mémoire on considère des problèmes elliptiques semi-linéaire avec des contraintes et on étudie l'existence de la solution avec cette contrainte en utilisant des méthodes variationnelles.

**Mots clés** : Différentiabilité au sens de Gâteaux et de Fréchet, Multiplicateur de Lagrange, condition de palais-smale, Théorème du col (Mountain-Pass), problèmes elliptiques, points critiques.

## Abstract

Many elliptical problems admit several solutions or infinity of solutions. It is then interesting to study the solution of certain problems, to study an adequate functional on a well-chosen constraint for different reasons, for example we seek the solution which makes the energy is minimal. In this thesis we consider semi-linear elliptic problems with constraints and we study the existence of the solution with this constraint using variational methods.

**Keywords** : Differentiability in the Gâteaux and Fréchet sense, lagrange multiplier, palais-smale condition, mountain-pass theorem, elliptic problem, critical points.

# Bibliographie

- [1] Antonio Ambrosetti, Annea Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.
- [2] Otared Kavian. Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques.
- [3] H. Brézis ; Analyse fonctionnelle. Théorie et application. Masson, Paris, 1983. 2, 4, 5, 6, 8.
- [4] R. A. Adams ; Sobolev Spaces, Academic press, New York, 1975. 2, 3, 4, 6.
- [5] Antonio Ambrosetti, David Arcoya, An Introduction Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems.
- [6] K.J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight functions, J. Differential Equations. 193 (2003) 481-499.
- [7] L.Mok, Introduction à la théorie des points critiques. Application à l'étude de quelques équation aux dérivées partielles non linéaires, Université Mira de Bejaia, (2015).
- [8] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris(1969).
- [9] Peter Lindqvist, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 109, No. 1 (May, 1990), PP. 157-164.