UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

ALILICHE Alia

Sujet

Les équations intégro-différentielles et la méthode des éléments finis

Devant le jury :

Selt Omar	Prof.	Univ de M'sila	Président
Gagui Bachir	Prof.	Univ de M'sila	Encadreur
Dilmi Mostafa	Prof.	Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur
B.GAGUI *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

je tient à remerier les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes parents et mes frères et ma soeur

A tout famaille (ALILICHE)

A tout les amis.

Table des matières

Introduction

Pour résourdre un phénomène physique on a besoin d'un modèle mathématique généralement sous la forme d'une équation différentielle ordinaire, aux dérivées partielles, intégrales et intégro-différentielles. cette dernière équation différent que les deux.

Au qu'une théorie dite que ce type d'équations admet une ou des solusion.

Notre objectif est de résoudre un certain type de ces équations en utilisant un outil basé sur la théorie de projction, ctte théchnique est dite la méthode des éléments finis, pour cela on divise ce mémoire en trois chapitres:

Le premier chapitre, consacré à les diffénitions de ces types d'équations (différentielles ordinaires, intégrales et intégro-différentielles) ainsi leurs classification.

Dans le deuxième chapitre on trouve le description générale de la méthode des éléments finis et leurs bagages fonctionnelle et numérique.

Dans le dernier chapitre on essaye de faire des implémention avec différent modèles, on termine par des comparaison avec la solution exacte et notre approche, cela fait par code Matlab.

Chapitre 1

Notions sur les équations: différentielles ordinaires, intégrales et intégro-différentielles

1.1 Généralité sur les équations différentielles ordinaires

Il est a remarquer que dans plusieurs applications de la Physique Mathématique la variable independante dont dependent les fonctions connues est notés par: $x, t, ...$ les fonctions inconnues est notés par:$y, z, ...$

Généralement les dérivées par rapport au x noté par :

$$y^{'} = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, ..., y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \tag{1.1.1}$$

Equation différentielle

On appelle équation différentielle une équation étaplissement la relation entre la variable indépendante x et la fonction inconnue $y = \varphi(x)$ est ses dérivées $y', y'', ..., y^{(n)}$.

c'est-à-dire

$$F\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1.2}$$

Si la fonction $y = \varphi(x)$ est d'une seule variable indépendante ,l'équation est dite ordinaire.

On appelle ordre d'équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation.

Solution d'une équation différentielle

On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonctions $y = \varphi(x)$ de la variable indépendante x, définie sur interval $]x_1, x_2[$, et vérifiant identiquement cette équation en tout points de cet interval .

L'interval $]x_1, x_2[$ est dit interval de définition de solution $y = \varphi(x)$.

(le cas $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$ ne sont pas exclus) .

Conditions initiales

Soit l'équation différentielle premier ordre suivante:

$$y' = F(x, y) \tag{1.1.3}$$

avec la solution $y = \varphi(x)$ satisfait la condition

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{1.1.4}$$

La relation (1.1.4) est dite condition initiale de l'équation différentielle (1.1.3) et les éléments x_0 et y_0 sont appelles les valeurs initialles de la solution $y = \varphi(x)$

Solution génerale d'une équation différentielle

On appelle solution générale d'une équation différentielle (1.1.3) la fonction $y = \varphi(x, c)$ dépendante de la variable indépendante x et d'une constante c et satisfaisante auxs conditions suivantes:

(1) La solution $y = \varphi(x, c)$ satisfait l'équation différentielle pour tout les valeurs de la constante c .

(2) Pour tout valeurs initiales (x_0, y_0) on peut trouver une valeur constante $c = c_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, c_0)$ vérifie la condition intiale donnée (eq 4) ,autrement dit

$$y_0 = \varphi(x_0, c_0)$$

Solution particulière d'une équation déffirentielle

On appelle solution particulière d'une équation déffirentielle (1.1.3) une solution de cette équation dont laquelle l'unicité a lieu, en particulier toute fonction $y = \phi(x, c_0)$ deduit de la solution général $y = \phi(x, c)$ en posant $c = c_0$ est une solution particulière.

1.2 Equations intégrales

Opérateur intégrale linéaire

Définition 1.2.1 *Soit $k : C[a,b] \times C[a,b] \to R$ une fonction continue l'opérateur intégrale linéaire sur $C[a,b]$ définit par $\varphi : C[a,b] \to A\varphi \in C[a,b]$, tel que,*

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt,$$

òu la fonction $k(x,t)$ s'appelle le noyau de A.

1.2.1 Equations intégrales et leurs classification

Définition 1.2.2 *Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$.*

La forme général d'une équation intégrale est:

$$\varphi(x) + \lambda \int_\Omega k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.2.1}$$

où Ω un ensemble fermé,borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finis, λ est un paramètre numérique, $k(x,t)$ le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est la fonction donnée, $\varphi(t)$ est la fonction inconnue

Equations intégrales de Volterra

La forme la plus classique de équations intégrales de Volterra linéaire est :

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \ , a \leq x \leq b, \ a \leq t \leq b$$

Equations intégrales de Fredholm

La forme plus classique de l'équations intégrales linéaire de Fredholm est :

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad , a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b$$

Placement du fonction inconnue φ :

Si $\lambda = 0$, on a $\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$ et $\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$ sont respectivement les équation de Fredholm et Volterra de premier espèce.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda\varphi(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$ et $\lambda\varphi(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$ sont respectivement les équation de Fredholm et Volterra de deuxième espèce.

Placement du fonction connue f :

Si $f = 0$, l'équation (1.2.1) est dite homogène, sinon elle est dite non homogène .

1.3 Equation intégro-différentielle

Une équation intégro-différentielle (E,I,D) est une équation composée de deux opérations intégrale et différentiel qui impliquent la fonction inconnue u .

Nous intéressons dans ce chapitre aux types les plus simples qui concerne les (E.I-D) unidimentionnelle (la fonction inconnue u depende d'un variable)

la forme générale d'une équation intégro-différentielle linéaire d'ordre n est :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

1.3.1 Equations intégro-différentielles linéaire et leurs classification

Soit l'équation inégro-différentielle linéaire

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega k(x,t)u(t)dt$$

où Ω une ensemble fermé,borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie, λ est un paramètre numérique, $k(x,t)$ le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est la fonction donnée, $u(t)$ est la fonction inconnue.

La fonction $u(x)$ est vérifie les conditions initiales.

Equations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

Equations intégro-différentielles de Volterra

L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

Equations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

Equations intégro-différentielles de **Volterra-Fredholm** apparaissent dans la littérature sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt$$

λ_1 et λ_2 sont des paramètres numiriques, $k_1(x,t)$ et $k_2(x,t)$ les noyaux de l'équation intégrale, $f(x)$ est la fonction donnée, $u(t)$ est la fonction inconnue.

Chapitre 2

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est construire tout les méthodes d'interpolation , ainsi pour approcher une fonction,on decouper son domaine de diffénition en petits éléments et sur chaque élément le comportement local de la fonction est répresenté par une fonction simple.

2.1 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev $W^{1,p}$est définit par

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) \quad pour \quad tout\ multi\ indice\ \alpha, avec\ \ |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendu au sens de distributions

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

L'espace $H^1(\Omega)$

On note par $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3\},$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u; w))_{1,w}$

$$((u; w))_{1,w} = \int\limits_\Omega \left(uw + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u \partial w}{\partial x_i \partial x_i} \right) dv,$$

et par le fait même d'une norme induite

$$\|u\|_{1,\Omega} = (\ ((u;w))_{1,w})^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \left(uw + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u \partial w}{\partial x_i \partial x_i}\right)\right)^{1/2}.$$

1. si $p = 2$ on a $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

2.H^1 est un espace Hilbert.

On a quelques sous-espaces de H^1 sont extrémement utiles en pratique, il s'agit l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

2.2 Théorème de Lax-Milgram

Formes linéaires , bilinéaires et continue

On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert V. Une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes :

1. $l(\beta w) = \beta l(w), \qquad \forall w \in V$ et $\forall \beta \in R$
2. $l(w_1 + w_2) = l(w_1) + l(w_2), \qquad \forall w_1, w_2 \in V$

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui associe à un couple $(u, w) \in V \times V$un scalaire noté a(u,w) satisfaisant :

$$\begin{array}{lrcll} 1. & a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) & = & \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w), & \forall u_1, u_2, w \in V \ \ et\ \forall \beta_1, \beta_2 \in R \\ 2. & a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) & = & \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2), & \forall u, w_1, w_2 \in V et\ \forall \beta_1, \beta_2 \in R \end{array}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses deux arguments.

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$, s'il existe une constante C, telle que :

$$|a(u, w)| \leq C \ \ \|u\|_V \|w\|_V, \qquad \forall u, w \in V$$

Formes bilinéaires coercive

Une forme bilinéaire est dite coercive s'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$a(w, w) \geq \alpha \ \ \|w\|_V^2, \qquad \forall w \in V.$$

Théorème 2.2.1 *(Lax-Miligram): Soit V un espace de Hilbert et soitent l et a des formes linéaire et bilinéaire continues sur V et $V \times V$ respectivement. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel*

$$\begin{cases} \textit{trouver une fonction} \quad u \in V, \quad \textit{telle que} \\ \qquad a(u,w) = l(w), \qquad \forall w \in V \end{cases} \tag{2.2.1}$$

2.3 Interpolation de Lagrange

En dimension 1

Soit ξ_i, $\phi(\xi_i) = \phi_i, i = 0, 1, ..., N$, on définit

$$\phi(\xi) = \sum_{k=0}^{N} L_k(\xi)\phi_k, \; k = 0, 1, ..., N$$

tel que

$$L_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases},$$

et

$$\sum_{i=0}^{N} L_i(\xi) = 1,$$

et $L_k(\xi)$ donné par

$$L_i(\xi) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N} \left(\frac{\xi - \xi_m}{\xi_k - \xi_m} \right), \qquad k = 0, 1, ..., N$$

En dimension 2

Soit $\phi(\xi_i, \eta), i = 0, 1, ..., N$, l'approximation locale de ϕ, et on écrit:

$$\phi(\xi_i, \eta) = \sum_{i=0}^{N} L_i(\xi, \eta)\delta_i^e$$

telle que $L_i(\xi, \eta)$ sont des fonctions d'approximation local de noeud.

2.4 Intégration numérique

En dimension 1

Nous choisissons l'intervalle d'intégration $[-1,1]$ qui est l'élément de référence pour les problèmes en dimension 1

On cherche à évaluer une expression de la forme :

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{m_G} \omega_i g(\xi_i). \qquad (2.4.1)$$

L'expression (2.4.1) est appelée quadrature de *Gauss-Legendre* à m_G points. Les ξ_i sont appelés points d'intégration, tandis que les coefficients ω_i sont les poids d'intégration.

En dimension 2 ou 3

on peut utiliser directement les techniques d'intégration numériques développées en dimension 1. Puisque dans ce cas nous avons choisi le carré $[-1,1]^2$ comme élément de référence, il suffit de constater que

$$\int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi)d\eta \backsimeq \int_{-1}^{1}(\sum_{i=1}^{m_G} \omega_i g(\xi_i,\eta))d\eta = \sum_{i=1}^{m_G} \omega_i \int_{-1}^{1} g(\xi_i,\eta)d\eta = \sum_{i=1}^{m_G}\sum_{j=1}^{m_G} \omega_i\omega_j g(\xi_i,\eta_j).$$

2.5 Méthode de Ritz- Galerkin

Une fois le problème formulé sous la forme variationnelle, il reste à le discrétiser c-à-d. à le faire passer d'un problème de dimension infinie à un problème approché de dimension finie. Ce problème discrétisé sera ensuite résolu par les techniques d'algèbre linéaire classiques (résolution de systèmes algébriques linéaires ou non linéaires).

La méthode de Ritz- Galerkin est une technique de discrétisation de problèmes variationnels et est en quelque sorte le précurseur de la méthode des éléments finis.

Soit donc un problème variationnel vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } \ u \in V, \ \text{ telle que} \\ \qquad a(u,w) = l(w), \qquad \forall w \in V \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

où la fonction u vérifie les conditions aux limites essentielles homogènes. On se donne maintenant N fonctions $\phi_j \in V$, $\ j = 1, 2, ..., N+1$ appelées fonctions d'interpolation de Ritz ou plus simplement fonctions de Ritz vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes. On suppose ensuite que l'on peut écrire :

$$u(x) = u^N(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x).$$

Dans cette expression, les N coefficients u_j sont à déterminer et le problème est maintenant de dimension finie N. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions ϕ_j forme un sous-espace de dimension N de V noté V^N. On considère donc l'approximation suivante du problème variationnel (2.5.1) :

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } \ u \in V^N, \ \ \text{telle que:} \\ \quad a(u^N, w^N) = l(w^N), \qquad \forall w^N \in V \end{cases}$$

ou encore

$$a(\sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j, w^N) = l(w^N).$$

La bilinéarité de a nous permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^{N} u_j a(\phi_j, w^N) = l(w^N), \qquad \forall w^N \in V^N.$$

On va maintenant construire un système linéaire (parce que le problème de départ (2.5.1) est linéaire) dont les inconnues sont les coefficients u_j. Soit donc N nouvelles fonctions $\tilde{\phi}_i$,$i = 1, 2, \cdots, N$ appartenant à l'espace V^N. Puisque l'équation précédente est vraie quelle que soit la fonction $w^N \in V^N$, elle est valide pour chacune des fonctions $\tilde{\phi}_i$ et on a :

$$\sum_{j=1}^{N} u_j a(\phi_j, \tilde{\phi}_i) = l(\tilde{\phi}_i) \qquad 1 \leq i \ \leq N \ ,$$

qui est un système linéaire N sur N de la forme :

$$AU = F,$$

où la matrice A et les vecteurs U et F ont pour coefficients:

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \tilde{\phi}_1) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_1) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_1) \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_2) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_2) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_N) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_N) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\tilde{\phi}_i) \\ l(\tilde{\phi}_2) \\ \vdots \\ l(\tilde{\phi}_N) \end{pmatrix}. \qquad (2.5.2)$$

Remarque 2.5.1 *On remarque que le coefficient* A_{ij}*du système linéaire* (2.5.2) *est de la forme*

$$A_{ij} = a(\phi_j, \tilde{\phi}_i).$$

2.6 Principe général de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP ou EDO à résoudre sur un domaine. On écrit la formulation variationnelle de cette EDP ou EDO, et on se ramène donc à un problème du type

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } \ u \in V, \text{ telleque} \\ a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V \end{cases}$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du dommaine , gràce au quel on va définir un espace d'approximation V_h, s.e.v de V de dimension finie N_h. Le problème approché est alors

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } \ u \in V_h, \ \ \textit{telle que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Soit$(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N_h})$une base de V_h: En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$$

le problème (2.6.1) devient avec a biliéaire et l liéaire :

$$\begin{aligned} &\text{trouver une fonction } \ u \in V_h, \ \ \text{telle que} \\ &\sum_{i=1}^{N} u_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

pour $v_h = \varphi_j$

$$\begin{aligned} &\text{trouver une fonction } \ u \in V_h, \text{ telle que} \\ &\sum_{i=1}^{N} u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \qquad \forall j = 1, ..., N \end{aligned}$$

c'est à dire résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_1) & ... & a(\phi_N,\phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1,\phi_N) & a(\phi_2,\phi_N) & ... & a(\phi_N,\phi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\phi_1) \\ \vdots \\ l(\phi_N) \end{pmatrix}$$

où simplement

$$Au = b.$$

avec la matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base φ_i dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailes. Ainsi les termes $a(i;j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à de fonction φ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les φ_i de telle sorte que A soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.

A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les φ_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de A, On peut toute fois indiquer que la plupart de ces diffécultés seront levées gràce à trois idées principales:

1- Le principe d'unisolvance: On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de V_h.

2-Défnition des φ_i: On définira les fonction de base par $\varphi_i = 1$ sur le i^{eme} ddl, et auront par les autres ddl. La manipulation des φ_i sera alors trés simplifiée, et les φ_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

3- La notion de famille affine d'éléments: Le maillage sera tel que toutes les mailes soient identiques à une transformation affine prés. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur un seule maile référence, par un simple changement de variable.

2.7 Méthode d'éléments finis de degré 1

Divisons l'intervalle $[0;1]$ en $N+1$ parties (N étant un entier positif) et posons $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2..., N+1$:

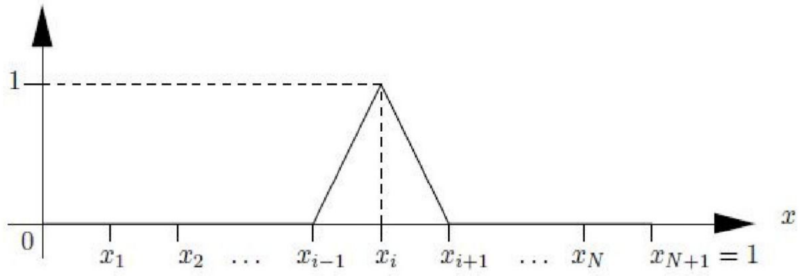


Figure 2.7.1 : Graphe de la fonction de base

On définit, pour $i = 1, 2, ..., N + 1$, les fonctions suivantes

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ou } \; x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction φ_i est représenté dans la Figure (2.7.1).

Clairement les fonctions φ_i est telle que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \; = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } \; i \neq j \end{cases} \qquad 0 \leq j \leq N + 1$$

$\varphi_{i|[x_{j-1}, x_j]}$ est un polynome de degré 1

Ainsi la fonction φ_i appartient à V. Les fonction $\varphi_1, \varphi_2, ..., \; \varphi_N$ sont linéairement indépendantes et nous les choisissons pour engendrer l'espace V^N. Nous dirons ainsi que :

$x_1, x_2, ..., \; x_{N+1}$ sont les noeuds de la discrétisation,

$[x_1, x_2], ..., \; [x_N; x_{N+1}]$ sont les éléments géométriques,

$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V^N de type éléments finis de degré 1 associées aux noeuds intèrieurs $x_1, x_2, ..., x_{N+1}$.

2.8 Méthode des éléments finis de degré 2

Divisons l'intervalle $[0; 1]$ en $N+1$ parties (N étant un entier positif) et posons $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2..., N + 1$: $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$, avec $i = 0, 1, ..., N$. On définit pour

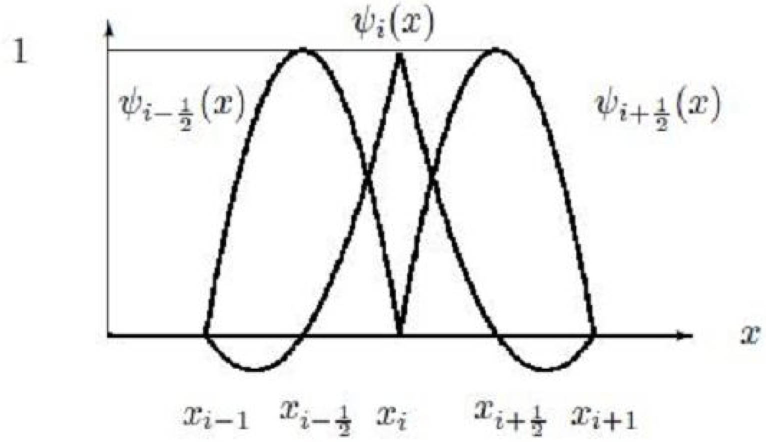
$i = 0, 1, ..., N$ les fonctions suivants

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1/2})}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+1/2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+1/2})}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, \quad \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ou} \quad x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

et pour $i = 0; 1, ..., N$, les fonctions suivantes

$$\varphi_{i+1/2}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, \quad \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ou} \quad x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

Le graphe des fonctions φ_i et $\varphi_{i+1/2}$ est représenté dans la Figure(2.8.1)



Graphe des fonctions de bases

(2.8.1)

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre on essaye de trouver la solution approchée de qulque types pour l'équation intégro-différentielles, on se basant sur la méthode des élément finis.

On va comparer entre la solution exact et la solution approchée.

On rappellons que, pour trouver la solution exact utilise la transformation de Laplace.

La trasformation de laplace d'une fonction $f(x)$,pour $x \geq 0$ est donéé par:

$$F(s) = \pounds\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx.$$

3.1 La méthode de transformation de Laplace pour les équation integro différentielles

La méthode à été utilisée auparavant pour résoudre les équations intégrales. Il a également été utilisé dans ce chapitre pour la résolution d'équations intégro-différentielles.

Dans le théorème de covolution pour la méthode de transformation de Laplace, il était a déclaré que si le noyau $k(x,t)$ de l'équation intégrale

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u(t) dt,$$

dépend de la différence $x - t$, on appelle cela un noyau de différence, l'équation intégro-différentielle peut donc être exprimée par

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)u(t)dt. \tag{3.1.1}$$

Considérons les deux fonctions$f_1(x)$ et $f_2(x)$ possèdent les conditions nécessaires pour l'existance de transformer de Laplace pour chacun. Transforme de Laplace pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est donnée par:

$$\pounds\{f_1(x)\} = F_1(s), \qquad \pounds\{f_2(x)\} = F_2(s).$$

Le produit de convolution de Laplace de cettes deux fonctions est donné par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt,$$

où

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt,$$

rappeler cela

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x).$$

nous pouvons facilement montrer que la transformation de Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donée par :

$$\pounds\{(f_1 * f_2)(x)\} = \pounds\{\int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt\} = F_1(s)F_2(s).$$

Pour résourdre les équation integro-différentielle de Volterra à l'aide de la méthode de transformation de Laplace, il est des dérvées de $u(x)$, nous pouvons facilement montrer que

$$\pounds\{u^{(n)}(x)\} = \pounds\{\int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt\} = F_1(s) * F_2(s).$$

ceci donnent simplement

$$\begin{aligned} \pounds\{u^{'}(x)\} &= s\pounds\{u(x)\} - u(0) \\ &= sU(s) - u(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pounds\{u^{''}(x)\} &= s^2\pounds\{u(x)\} - su(0) - u'(0) \\
&= s^2U(s) - su(0) - u'(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pounds\{u^{'''}(x)\} &= s^3\pounds\{u(x)\} - s^2u(0) - su^{'}(0) - u''(0) \\
&= s^3U(s) - su^2(0) - su'(0) - u^{''}(0),
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned}
\pounds\{u^{(iv)}(x)\} &= s^4\pounds\{u(x)\} - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0) \\
&= s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0),
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les dérivés d'ordre supérieur.

On appliquons d'abord la transformation de Laplace à(3.1.1), utilisez la transformation de Laplace appropriée pour la dérivé de $u(x)$, puis résolvez pour $U(x)$, Nous utilisons ensuite la transformation inverse de Laplace de deux côtés de l'équation pour obtenir la solution $u(x)$.

Pour résourdre les équation integro- différentielle par la méthode de la transformation de Laplace sera illustré pour les exemples suivants.

1^{ere} application

Utilisons la méthode de la transformation de Laplace pour résourdre l'équation integro-différentielle de Volterra suivant

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \int\limits_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

avec le noyau $k(x-t) = 1$. Prendre la transformation de Laplace pour deux côtés de (3.1.3), alors

$$\pounds(u'(x)) = \pounds(1) + \pounds(1 * u(x)),$$

obtenu en utilisant (3.1.2)

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s),$$

On utilise la condition initiale donnée puis on résoudre pour $U(s)$, nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s-1}. \tag{3.1.4}$$

En prenant la transformation inverse de Laplace à deux côtés de (3.1.4), la solution est donnée par

$$u(x) = e^x. \tag{3.1.5}$$

2^eme application

Utilissons la méthode de la transformation de Laplace pour résourdre l'équation integro-différentielle de Volterra suivant

$$\begin{cases} u''(x) = -1 - x + \int\limits_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u(0) = 1, \; u'(0) = 1, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

avec le noyau $k(x-t) = (x-t)$. Prendre la transformation de Laplace des deux côtés de (3.1.6), on trouve

$$\pounds(u''(x)) = -\pounds(1) - \pounds(x) + \pounds((x-t) * u(x)),$$

obtenu en utilisant (3.1.2)

$$s^2U(s) - su(0) - u'(0) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}U(s),$$

On utilise la condition initiale donnée et on résoudre pour $U(s)$, nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}. \tag{3.1.7}$$

En prenant la transformation inverse de Laplace de deux côtés de (3.1.7), la solution est donnée par

$$u(x) = \sin x + \cos x.$$

3.2 Méthode des éléments finis pour l'équation integro-différentielle

On considérons le problème continue de l'équation intégro-différentielle suivant:

$$(PC) = \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que,} \quad 0 \le x \le 1 \\ -u''(x) + a\ u'(x) + b\ u(x) + \int\limits_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où k, f sont des fonctions donées continues sur $[0,1]$tels que,

$$\int_0^1 |k(x,t)|^2 \, dxdt < \infty, \quad \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Formulation variationnelle

Soit v est une fonction de test définit sur l'intervalle $[0,1]$, appartient l'espace d'approximation V de dimension infini.

Le problème continue (PC) peut être écrit

$$(PV) \begin{cases} \text{trouver} \quad u \in V \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

avec a n'est pas linéaire et l est linéaire.

Approximation variationnelle

Divisons l'intervalle $[0,1]$ en $N+1$ parties (N étant un entier positif) et posons

$$\begin{cases} x_0 = 0, \; x_N = 1 \\ h = \frac{1}{N+1}, x_{i+1} = x_i + h, i = 0, 1, 2, ..., N \end{cases}$$

On introduit l'éspace d'approximation de dimension finis V^Ntel que:

$$V^N = \{v^N \in C^2([0,1]), v^N_{|[x_i, x_{i+1}]} \in P \in [x_i, x_{i+1}], v^N(0) = 0\}$$

On définit, pour $i = 1; 2; ...; N+1$, les fonctions suivantes

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ou} \quad x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

clairement les fonctions φ_i verifiés

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad 0 \leq j \leq N+1.$$

Soit v appartient l'éspace d'appraximation V^N, on multiplier scalairement l'équaion intégro-différentielle de le problème continue (PC) avec la fonction v, on obtient

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx+a\int_0^1 u'(x)v(x)dx+b\int_0^1 u(x)v(x)dx+\int_0^1\left(\int_0^x k(x,t)u(t)dt\right)v(x)dx=\int_0^1 f(x)v(x)dx$$

On intéger par partie et utiliser les conditions homogènes de le prpblème variationnelle (PV), on trouver,

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx-a\int_0^1 u(x)v'(x)dx+b\int_0^1 u(x)v(x)dx+\int_0^1\left(\int_0^x k(x,t)u(t)dt\right)v(x)dx=\int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

donc le problème variationnelle s'écrit,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{trouver}\quad u\in C^2([0,1])\\ a(u,v)=l(v)\\ a(u,v)=\displaystyle\int_0^1 u'(x)v'(x)dx-a\int_0^1 u(x)v'(x)dx+b\int_0^1 u(x)v(x)dx\\ +\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^x k(x,t)u(t)dt\right)v(x)dx,\ \forall v\in V^N,\quad l(v)=\int_0^1 f(x)v(x)dx,\\ u(0)=u(1)=0.\end{array}\right. \tag{3.2.1}$$

Aprés la méthode de Galerkin la solution de (3.2.1) s'écrit sous la forme

$$u(x)=\sum_{j=0}^N u_j\varphi_j(x),\quad \text{et}\quad v(x)=\varphi_i(x),$$

donc, on peut écrit le problème sous forme

$$\left\{\begin{array}{c}\text{trouver}\quad u\in C^2([0,1])\\ \displaystyle\sum_{j=0}^N u_jA_{ij}-a\sum_{k=0}^N u_kB_{ik}+b\sum_{l=0}^N u_lC_{il}+\sum_{m=0}^N u_mD_{im}=C_i,\\ avec\\ A_{ij}=\displaystyle\int_0^1\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx,\quad B_{ik}=\int_0^1\varphi_i'(x)\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_k(t)dt\right)dx,\\ C_{il}=\displaystyle\int_0^1\varphi_l(x)\varphi_i(x)dx,\quad D_{im}=\int_0^1\left(\int_0^x k(x,t)u(t)dt\right)v(x)dx,\quad E_i=\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx.\end{array}\right. \tag{3.2.2}$$

Assemblage de les matrices du système

Le système linéaire(3.2.2) auquel aboutit la demarche des éléments finis est:

$$Au + Bu + C_{il}u + D_{im}u = E_i.$$

3.2.1 Exemples numérique

Exemple 3.2.1 *Considérons l'équation intégro-différentielle de le problème suivant:*

$$\begin{cases} -u''(x) + 4u(x) + \int\limits_0^x x\ t\ u(t)dt = -f(x), \qquad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

avec,

$$f(x) = \frac{x^3}{2}\cosh(1) - \frac{x^2}{2}\sinh(2x-1) + \frac{x}{4}\cosh(2x-1) - \frac{x}{4}\cosh(1) + \frac{x^2}{2}\cosh(1)$$

cet problème admet une solution exacte telle que

$$u(x) = \cosh(2x-1) - \cosh(1).$$

1^{ere} étape : On recherche le problème variationnel, tel que l'éspace d'approximation

$$V^N = \{u \in H^1([0,1]), \qquad \text{avec } u(0) = u(1) = 0\}, \tag{3.2.4}$$

on multiplier scalairement l'équation (3.2.3) par une fonction de test v, tel que $v \in V^N$, on obtient

$$-\int\limits_0^1 u''(x)v(x)dx + 4\int\limits_0^1 u(x)v(x)dx + \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (xt)u(t)dt\right) v(x)dx = -\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx$$

cette expression implique

$$\int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx + 4\int\limits_0^1 u(x)v(x)dx + \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (xt)u(t)dt\right) v(x)dx = -\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx,$$

finalemment, le problème variationnelle s'écrit sous la forme suivant:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V^N, \text{tel que} \\ \int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx + 4\int\limits_0^1 u(x)v(x)dx + \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (xt)u(t)dt\right) v(x)dx = -\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Le problème (3.2.5) admet une solution unique $u^N \in V^N$ s'écrit sous la forme :

$$u^N = \sum_{i=0}^{1} u_i \varphi_i, \qquad i = 0, 1/2, 1$$

2ème **étape** : les fonctions de base, on a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, \quad \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ou} \quad x \geq x_{i+1} \end{cases} \tag{3.2.6a}$$

et on a

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } \ i \neq j \end{cases}, \qquad 0 \leq j \leq N+1$$

donc

$$\sum_{j=0}^{N} u_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx + 4\sum_{k=0}^{N} u_k \int_0^1 \varphi_l(x)\varphi_i(x)dx + \sum_{l=0}^{N} u_l \int_0^1 \left(\int_0^x k(x,t)\varphi_l(t)dt\right)\varphi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx,$$

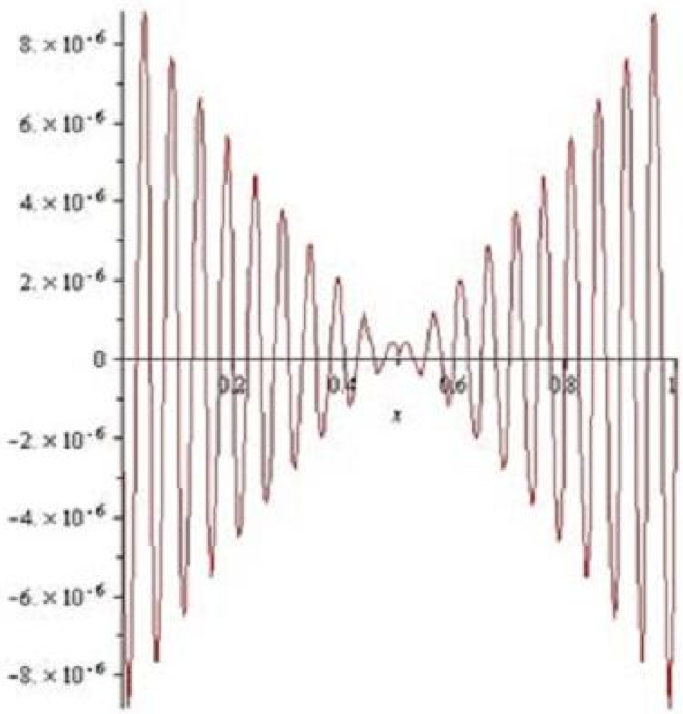
donc, on peut écrit le problème sous forme

$$\begin{cases} \text{trouver} \quad u \in C^2([0,1]) \\ \sum_{j=0}^{N} u_j A_{ij} + \sum_{k=0}^{N} u_k B_{ik} + \sum_{l=0}^{N} u_l C_{il} + \sum_{m=0}^{N} u_m D_{im} = E_i, \\ avec \\ A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx, \quad B_{ik} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_k(t)dt\right)dx, \\ C_{il} = \int_0^1 \varphi_l(x)\varphi_i(x)dx, \quad D_{im} = \int_0^1 \left(\int_0^x (xt)u(t)dt\right)v(x)dx, \quad E_i = -\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx. \end{cases}$$

3eme**étape** : détermine la solution approchée: on utiluse le programme Matlab.

4^{eme} étape : Comparaison avec la solution exact et la solution approchée

x_i	sol_{app}	sol_{ext}	$erreur$
0.1	-0.205645740000000	-0.205645680000000	6×10^{-8}
0.3	-0.462008340000000	-0.462008260000000	8×10^{-8}
0.5	-0.543080680000000	-0.543080630000000	5×10^{-8}
0.7	-0.462008320000000	-0.462008260000000	6×10^{-8}
0.9	-0.205645720000000	-0.205645680000000	4×10^{-8}



Graphe de l'erreur de l'exemple 1

Exemple 3.2.2 *Considérons l'équation intégro-différentielle de le problème suivant:*

$$\begin{cases} -u''(x) - 3u(x) - \int\limits_0^x \sin(x+t)\ u(t)dt = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases} \tag{3.2.7}$$

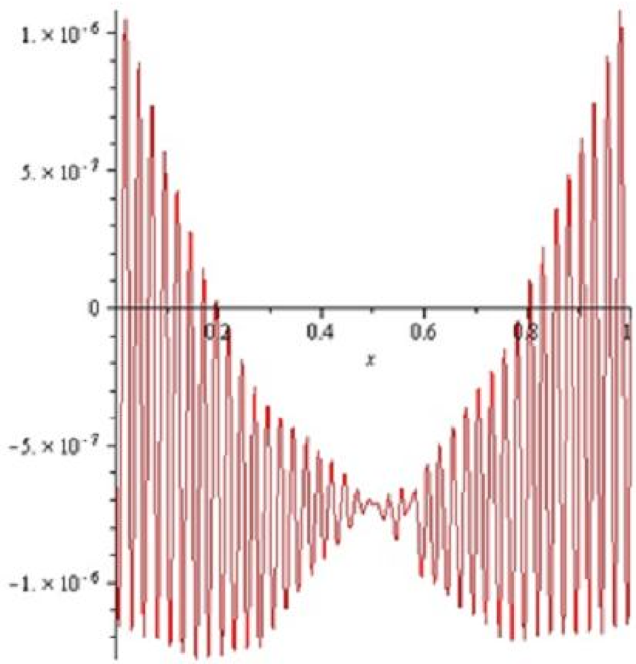
avec,

$$f(x) = 2 - 3x + 3x^2 + (x^2 - x - 2)\cos(2x) - (2x - 1)\sin(2x) - \sin(x) + 2\cos(x)$$

ce problème admet une solution exacte telle que

$$u(x) = x^2 - x.$$

Pour trouver la solution approchée de ce problème on applique la méthode des élément finis, et on utiluse le programme Matlab, on obtient



Graphe de l'erreur de l'exemple 2

Exemple 3.2.3 *Considérons l'équation intégro-différentielle de le problème suivant:*

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{\pi^2}{\cos(\frac{x}{\pi})}u'(x) - \frac{1}{\pi^2}u - \int\limits_0^x (xt+1)\ u(t)dt = \pi(1+x^2)\cos(\frac{x}{\pi}) - x\pi^2\sin(\frac{x}{\pi}), & x \in [0,1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \sin(\frac{1}{\pi}), \end{cases} \tag{3.2.8}$$

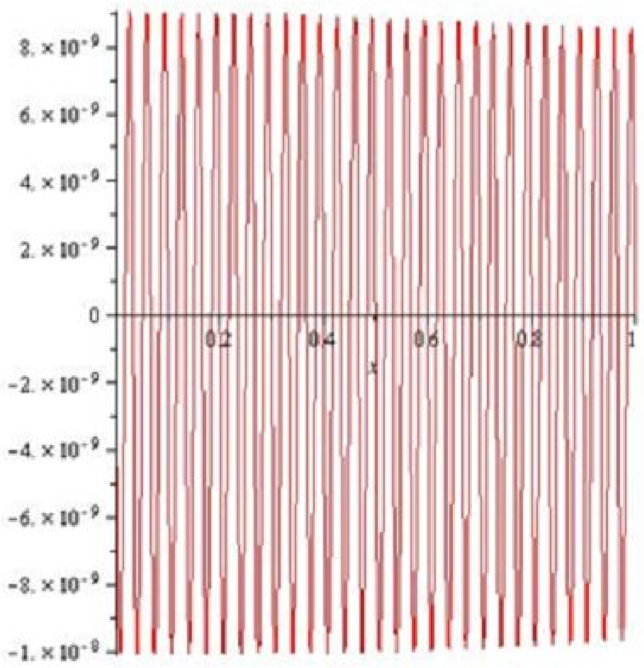
avec,

$$f(x) = 2 - 3x + 3x^2 + (x^2 - x - 2)\cos(2x) - (2x - 1)\sin(2x) - \sin(x) + 2\cos(x)$$

ce problème admet une solution exacte telle que

$$u(x) = \sin(\frac{x}{\pi}).$$

Pour trouver la solution approchée de cet problème on applique la méthode des élément finis, et on utiluse le programme Matlab, on obtient



Graphe de l'erreur de l'exemples 3

Conclusion

Dans ce mémoire on a essaye de cherché la solution approximation de certaine classe des équations intégro-différentielles par la théchnique de projection, notamment la méthode des éléments finis qui basée sur le principe de Galerkin.

Cette étude à besoin d'un pagage mathématique frés dure, comme les éspaces sobolev, thechnique de projection, interpolation polynamiale et intégration numérique.

pour prouver l'éfficacité de cette théchnique, on illustré par des exemples.

Bibliographie

[1] H. AHMED MILI, "Méthode des éléments finis pour les équations linéaires", mémoire de Master, univercité de M'sila, 2015.

[2] E. BLAYO, Notes de cours sur la méthode des éléments finis, Janvier 2010.

[3] A. FORTIEN, A. GARON, "Les élément finis: de la théorie à la pratique", École Polytechnique de Montréal, ©1997-1998-1999-2000.

[4] R. LAMRI, Resolution des equations intégro-différentielles de type Volterra, mémoire de Magistère, 2013.

[5] M. MOUSSAI, "Résolution des équations intégro-défférentielles", univercité de M'sila, fev 2018.

[6] M. Nadir, "Généralité sur les équations différentielles ordinaires", Cours de Master, Université de M'sila, 2017.

[7] J.N. REDDY et S. KARAN, "The Finite Element Method for Initial Value Problems", Mathematics and Computations-CRC Press 2018.

[8] A. WAZWAZ, "Linear and Nonlinear Integral Equations- Methods and Applications"-Springer 2011.

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بتطبيق طريقة العناصر المنتهية على بعض أصناف المعادلات التفاضلية–التكاملية، من أجل إيجاد الحلول التقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.

<u>الكلمات المفتاحية:</u>

المعادلات التفاضلية–التكاملية، طريقة العناصر المنتهية، مبدأ غالركين، استقطاب كثير حدود لاغرونج.

Résumé

Dans ce mémoire on appliqué la méthode des éléments finis sur certaine classe des équations intégro-différentielles, pour déterminer la solution approchée, et faire comparaison avec la solution exact.

<u>Mots clés :</u>

Equations intégro-différentielles, Méthode des éléments finis, Principe de Galerkin, Interpolation de Lagrange.

Abstract

In this work, we apply the finite element method on certain class of the integro-differential equations, to determine the approximate solution, and to make comparison with the exact solution.

<u>Keywords :</u>

Intégro-différentielle equation, the finite element method, Galerkin Principle, interpolation of Lagrange.