

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Notations et préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1	Espace de Banach . . . . .	4
1.2	Opérateurs linéaires bornés . . . . .	6
1.3	Quelques espaces de Banach usuels . . . . .	8
1.4	La convergence faible . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Idéal d'opérateurs linéaires</b>	<b>12</b>
2.1	Théorie général des idéaux d'opérateurs . . . . .	13
2.2	Idéal des opérateurs de rang fini. . . . .	19
2.3	Quelques exemples des idéaux d'opérateurs. . . . .	22
2.3.1	Idéal des opérateurs approximables . . . . .	22
2.3.2	Idéal des opérateurs compacts . . . . .	22
2.3.3	Idéal des opérateurs complètement continus . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Le dual d'un idéal d'opérateurs linéaires</b>	<b>27</b>
3.1	Propriétés de dual d'un idéal . . . . .	28

## 0.1 Introduction

En 1968, Pietsch et son école ont commencé une investigation systématique sur les idéaux des opérateurs linéaires entre espaces Banach. Cette théorie est développée en 1978 dans l'excellente monographie de Pietsch "*Operator ideals*" qui contient de manière presque encyclopédique tout ce qui était connu au ce sujet.

En 1993, Defant et Floret publié le célèbre livre intitulé "*Tensor norms and operator ideals*" en centrant l'attention dans l'interaction entre la théorie des idéaux des opérateurs et la théorie des normes tensorielles.

L'objectif de notre mémoire est mettez en évidence quelques-uns des résultats de la théorie des idéaux d'opérateurs linéaires entre espaces de Banach.

Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 est un rappel sur les opérateurs linéaires bornés, quelques espaces de Banach usuels et en fin l'adjoint d'un opérateur linéaire borné et la convergence faible.

Dans le deuxième chapitre, on donne une étude générale sur la théorie des idéaux d'opérateurs linéaires et quelques exemples.

Le troisième chapitre représente les propriétés du dual d'un idéal des opérateurs linéaires avec des exemples.

# Chapitre 1

## Notations et préliminaires

Nous rappellerons les résultats dont nous aurons besoin au fil de notre travail concernant les espaces de Banach, les opérateurs linéaires bornés.

## 1.1 Espace de Banach

Un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé complet.

La boule unité fermée de l'espace  $X$  est définie par

$$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

### Critère de complétude

Dans la suite on donne un critère pour montrer qu'un espace normé est de Banach

Soient  $X$  un espace normé et  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments de  $X$ . La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  est dite

absolument convergente dans  $X$  si la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$  est convergente.

**Théorème 1.1.1** *Un espace normé  $X$  est de Banach si et seulement si toute série de  $X$  absolument convergente est convergente.*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 1.1.2** *Soient  $X$  est un espace normé et  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy de  $X$ .*

1) *Si  $(x_n)_{n \geq 1}$  possède une sous suite  $(y_p)_{p \geq 1}$  convergente dans  $X$  vers  $y$ . Alors  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $X$  vers  $y$ .*

2) *La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  possède une sous-suite  $(y_p)_{p \geq 1}$  pour laquelle on a l'inégalité suivante :*

$$\|y_{p+1} - y_p\| \leq \frac{1}{2^p}, \text{ pour tout } p \geq 1$$

**Démonstration.** (du Lemme 1.1.2)

1) Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0(\varepsilon)$  tel que

$$n, m > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

Puisque  $(y_p)_{p \geq 1}$  est une sous suite de  $(x_n)_{n \geq 1}$  on a  $y_p = x_{n(p)}$  où  $(n(p))_{p \geq 1}$  est une suite croissante. Il existe un entier  $p_0(\varepsilon)$  tel que

$$p > p_0(\varepsilon) \implies [n(p) > n_0(\varepsilon)] \text{ et } [\|y_p - y\| \leq \varepsilon]$$

Utilisons ceci pour comparer  $y$  à  $x_n$  pour  $n$  assez grand. Soit donc  $n > n_0(\varepsilon)$  et  $p > p_0(\varepsilon)$ , nous avons via (1.1)

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - y_p\| + \|y_p - y\| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y$ .

2) Il s'agit de construire une sous-suite de  $(x_n)_{n \geq 1}$  de Cauchy. Pour ceci on utilise le caractère de Cauchy de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  pour  $\varepsilon_p = 2^{-p}$ . Pour tout  $p \geq 1$  il existe  $N_p \geq 1$  tel que

$$i, j > N_p \implies \|x_j - x_i\| \leq 2^{-p}.$$

On pose

$$m_p = p + \max\{N_1, \dots, N_p\} \quad \text{et} \quad y_p = x_{m_p}.$$

Alors, la suite  $(m_p)_{p \geq 1}$  est strictement croissante et, comme  $\min\{m_p, m_{p+1}\} \geq N_p$  on a

$$\|y_{p+1} - y_p\| \leq \frac{1}{2^p}, \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

■

**Démonstration.** (du Théorème 1.1.1)

( $\implies$ ) Supposons que  $X$  est de Banach. Soit  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments de  $X$  telle que la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$  est convergente. Notons

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|.$$

D'après l'inégalité triangulaire on a

$$q \leq p \implies \|S_q - S_p\| \leq T_q - T_p. \tag{1.2}$$

Alors, si la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$  est convergente, on a  $T_q - T_p \rightarrow 0$  quand  $p, q \rightarrow +\infty$ , et (1.2) montre que  $S_q - S_p \rightarrow 0$  quand  $p, q \rightarrow +\infty$ , autrement dit  $(S_n)_n$  est de Cauchy, et converge.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que toute série de  $X$  absolument convergente est convergente. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy arbitraire de  $X$ , il s'agit de montrer qu'elle est convergente. Par 2) du Lemme 1.1.2 il existe une sous-suite  $(y_p)_{p \geq 1}$  de  $(x_n)_n$  vérifiant  $\|y_{p+1} - y_p\| \leq 2^{-p}$ , et la série de terme général  $(y_{p+1} - y_p)$  est absolument convergente, donc convergente. Donc, la suite de terme général

$$y_p = y_1 + \sum_{j=1}^{p-1} (y_{j+1} - y_j)$$

est convergente. D'après 1) du Lemme 1.1.2, la suite  $(x_n)_n$  est convergente. ■

## 1.2 Opérateurs linéaires bornés

Un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$  entre deux espaces de Banach est dit borné s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|Tx\| \leq C \|x\|, \text{ pour tout } x \in X.$$

Dans ce cas, on définit

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf \{C : \|Tx\| \leq C \|x\|\} \\ &= \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

On note par  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $Y$  qui est un espace de Banach sur  $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$  muni de la norme définie par (1.3).

### Le dual topologique

L'espace des formes linéaires continues sur  $X$  est dit le dual topologique de  $X$ , noté  $X^*$ , i.e ( $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ). Pour  $x^* \in X^*$  et  $x \in X$  on notera généralement  $\langle x, x^* \rangle$  au lieu de  $x^*(x)$ .

La propriété suivante, que nous énonçons sans démonstration, est une conséquence du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires.

### L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , l'opérateur adjoint de  $T$  est l'unique opérateur linéaire borné  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  définie par

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) \text{ i.e. } \langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

pour tout  $x \in X$  et  $y^* \in Y^*$ .

De plus on a  $\|T\| = \|T^*\|$  et  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$  pour tout  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ .

### Isomorphisme, isométrie

L'application linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est dite isomorphisme si  $T$  est bijective continue et  $T^{-1}$  continue.

De plus si  $\|T(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in X$ , on dit que  $T$  est une isométrie.

Si l'isomorphisme  $T : X \rightarrow T(X)$  vérifie  $\|T(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in X$ , on dit que  $T$  est une isométrie injective et on écrit  $T : X \hookrightarrow Y$ .

### Espace de Banach réflexif

Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $X^*$  son dual topologique. On définit l'espace bidual  $X^{**}$  de  $X$  comme étant l'espace dual de  $X^*$ .

Il existe une application linéaire canonique  $k_X : X \rightarrow X^{**}$  associant à  $x \in X$  telle que la forme linéaire  $k_X(x) : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  est définie par

$$k_X(x)(x^*) = \langle k_X(x), x^* \rangle := \langle x, x^* \rangle$$

pour toute  $x^* \in X^*$ . Cette définition entraîne que l'application linéaire  $k_X : X \rightarrow X^{**}$  est une isométrie, en effet, pour tout  $x \in X$  on a

$$\|k_X(x)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle k_X(x), x^* \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

Alors on peut dire que  $k_X$  est une injection canonique et on écrit

$$k_X : X \hookrightarrow X^{**}.$$

En général l'application  $k_X$  n'est pas surjective.

**Définition 1.2.1** *Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que  $X$  est réflexif si  $k_X$  est surjective. i.e.*

$$k_X(X) = X^{**}, \text{ isométriquement.}$$

Lorsque  $X$  est réflexif on identifie implicitement  $X$  et  $X^{**}$  (à l'aide de l'isomorphisme  $k_X$ ).

**Proposition 1.2.2** [2] *Soit  $X$  un espace de Banach. Alors  $X$  est réflexif si et seulement si son dual  $X^*$  est réflexif.*

### 1.3 Quelques espaces de Banach usuels

Pour  $p > 1$  on note  $p^*$  le conjugué de  $p$  défini par la formule  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . On pose  $p^* = \infty$  si  $p = 1$ .

#### 1) L'espace $C(K)$

Soit  $K$  un espace topologique compact. L'espace de Banach  $C(K)$  est défini par :

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K} : \text{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|, f \in C(K).$$

#### 2) L'espace $L^p$

Soit  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré et  $1 \leq p < \infty$ , on définit l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  par

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$L^p(\mu)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = \left( \int |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = \infty$  nous avons  $f \in L^\infty(\mu)$  s'il existe  $C > 0$  telle que

$$|f| \leq C. \mu\text{-presque par tout} \quad (1.4)$$

$L^\infty(\mu)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{C, \text{vérifier (1.4)}\}.$$

### 3) L'espace $\ell_p$

Soit  $1 \leq p < \infty$ . On note par  $\ell_p$  l'espace de Banach des suites scalaires  $p$ -sommables

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_p := \left( \sum_{i \geq 1} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

pour  $p = +\infty$

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_\infty := \sup_i |x_i| < +\infty \right\}.$$

On définit aussi l'espace des suites scalaires convergeant vers zéro

$$c_0 = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \lim_{i \rightarrow +\infty} |x_i| = 0 \right\}$$

cet espace est un sous-espace fermé de  $\ell_\infty$  muni de la norme sup.

### Inégalité de Hölder généralisé

Soient  $(X, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$  deux suites finies d'éléments de  $X$  et  $p, q, r \in [1, +\infty[$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Alors

$$\left( \sum_{i=1}^n (\|x_i\| \|y_i\|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.5)$$

### 4) L'espace $\ell_p(\mathbf{X})$

Soit  $X$  un espace de Banach. On désignera par  $\ell_p(X)$  l'espace de Banach des suites  $p$ -sommables d'éléments de  $X$  dont la norme est

$$\|(x_i)_i\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et par  $\ell_\infty(X)$  l'espace de Banach des suites bornées, normé par

$$\|(x_i)_i\|_\infty = \sup_i \|x_i\|.$$

### 5) L'espace $c_0(X)$

On désignera par  $c_0(X)$  l'espace de Banach des suites  $(x_i)_i$  d'éléments de  $X$  convergeant vers 0. Notons que  $c_0(X)$  est un sous espace fermé de  $\ell_\infty(X)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

### 6) L'espace $\ell_{p,\omega}(X)$

On désignera par  $\ell_{p,\omega}(X)$  l'espace de Banach des suites  $(x_i)_i$  d'éléments de  $X$  faiblement  $p$ -sommables, c'est à dire des suites  $(x_i)_i$  vérifiant

$$(\langle x_i, x^* \rangle)_i \in \ell_p, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

muni de la norme définie par

$$\|(x_i)_i\|_{p,\omega} := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(\langle x_i, x^* \rangle)_i\|_p,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|(x_i)_i\|_{p,\omega} &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_i)_i\|_{\infty,\omega} &= \|(x_i)_i\|_\infty. \end{aligned}$$

## 1.4 La convergence faible

**Définition 1.4.1** Soit  $X$  un espace de Banach. La suite  $(x_n)_n$  de  $X$  est dite converge faiblement vers  $x \in X$  si

$$\forall \varphi \in X^* : \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

et on écrit  $x_n \xrightarrow{w} x$ .

**Proposition 1.4.2** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $(x_n)_n$  une suite de  $X$ . On a

1) Si  $(x_n)_n$  converge vers  $x$  fortement, alors elle est convergente faiblement vers  $x$ , i.e

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \right) \implies \left( x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

2) Si  $x_n \xrightarrow{w} x$ , alors  $(\|x_n\|)_n$  est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$$

# Chapitre 2

## Idéal d'opérateurs linéaires

- 1) Théorie général des idéaux d'opérateurs.
- 2) Idéal des opérateurs de rang fini.
- 3) Quelques exemples des idéaux d'opérateurs.

## 2.1 Théorie général des idéaux d'opérateurs

### Les opérateurs linéaires de rang fini.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et soient  $\varphi \in X^*$  et  $y \in Y$ . On définit l'application linéaire  $\varphi \otimes y$  par

$$\varphi \otimes y : X \longrightarrow Y, \quad \varphi \otimes y(x) = \langle x, \varphi \rangle y$$

Cette application est continue de norme  $\|y\| \|\varphi\|$  car

$$\begin{aligned} \|\varphi \otimes y\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\langle x, \varphi \rangle y\| \\ &= \|y\| \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, \varphi \rangle| \\ &= \|y\| \|\varphi\| \end{aligned}$$

**Définition 2.1.1** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est de rang fini si  $\dim(\text{Im } T) < \infty$ .

De plus ( voir [9])  $T$  est de rang fini si et seulement si, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$T = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i$$

avec  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$  et  $y_1, \dots, y_n \in Y$ . On écrit  $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ .

**Définition 2.1.2** [9] Une classe  $\mathcal{I}$  des opérateurs linéaires bornés est dite idéal si

1)  $\mathcal{I}(X, Y)$  est un sous espace de  $\mathcal{L}(X, Y)$  et  $\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Y)$  pour tout espaces de Banach  $X$  et  $Y$ .

2) (Propriété d'idéal) si  $u \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ , alors  $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$ .

De plus, si  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

i)  $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est un espace normé (de Banach).

ii)  $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$ .

iii)  $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$ .

Alors  $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaire.

**Remarque 2.1.3**  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$  (avec la norme usuelle des opérateurs) est un idéal normé. En effet :

(a)  $\mathcal{I}(X, Y)$  est un sous espace de  $\mathcal{L}(X, Y)$

(b)  $\|Id_{\mathbb{K}}\| = \sup_{|\lambda| \leq 1} |Id_{\mathbb{K}}(\lambda)| = \sup_{|\lambda| \leq 1} |\lambda| = 1$ .

(c) Soit  $u \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y, F)$  pour tout  $x \in X$  on a

$$\|v \circ T \circ u\| \leq \|v\| \|T\| \|u\|.$$

Et alors  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$  est un idéal normé.

### L'idéal fermé

**Définition 2.1.4** Un idéal linéaire  $\mathcal{I}$  est dit fermé si  $\mathcal{I}(X, Y)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(X, Y)$  pour tout espaces de Banach  $X$  et  $Y$ .

### L'idéal injectif

**Définition 2.1.5** Un idéal linéaire  $\mathcal{I}$  est dit injectif s'il vérifie la propriété d'injectivité

$$i \circ T \in \mathcal{I}(X, Z) \implies T \in \mathcal{I}(X, Y)$$

où  $i : Y \hookrightarrow Z$  est une isométrie injective. De plus on a

$$\|i \circ T\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{I}} \tag{2.1}$$

*i.e.* l'idéal ne dépend pas de l'espace d'arrivé.

Le critère suivant il sera très utile pour prouver que certain classes sont des idéaux de Banach.

**Théorème 2.1.6** [9, Théorème 6.2.3]  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est un idéal de Banach si et seulement si :

(1)  $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  et  $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$

(2) Si  $u \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$ ,  $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ , alors  $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$  et  $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$

(3) Si  $(T_n)_n \subset \mathcal{I}(X, Y)$  avec  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}} < \infty$ , alors  $T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $\|T\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}}$

**Démonstration.** Premièrement supposons que  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est un idéal de Banach. L'opérateur  $Id_{\mathbb{K}}$  est de rang fini alors d'après la Définition 2.1.2 on a  $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  et  $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$ . Pour la condition (3), la série  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est absolument convergente dans l'espace de Banach  $\mathcal{I}(X, Y)$  alors elle est convergente et  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$ . La continuité de la norme dans un espace normé donne

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{I}} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n \right\|_{\mathcal{I}} = \left\| \lim_n \sum_{j=1}^n T_j \right\|_{\mathcal{I}} = \lim_n \left\| \sum_{j=1}^n T_j \right\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \lim_n \sum_{j=1}^n \|T_j\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfait. Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Il est clair que si  $T = 0$  de  $X$  dans  $Y$  et  $v = 0$  de  $\mathbb{K}$  dans  $Y$  et  $\varphi \in X^*$  on a

$$T = v \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$$

et l'hypothèse (2) donne  $T = 0 \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $\|0\|_{\mathcal{I}} = 0$ . L'hypothèse (3) affirmé que si  $T_1, T_2 \in \mathcal{I}(X, Y)$  alors

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{I}(X, Y) \quad \text{et} \quad \|T_1 + T_2\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1\|_{\mathcal{I}} + \|T_2\|_{\mathcal{I}}$$

(pour ceci on considère dans (3) la suite  $(T_n) \subset \mathcal{I}(X, Y)$  avec  $T_n = 0$  pour tout  $n \geq 3$ ).

Soit maintenant  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Il est clair que l'opérateur linéaire

$$T_{\lambda} : Y \longrightarrow Y, \quad T_{\lambda}(y) = \lambda y,$$

est continu avec  $\|T_\lambda\| = |\lambda|$ . La condition (2) donne

$$\lambda T = T_\lambda \circ T \in \mathcal{I}(X, Y) \quad \text{et} \quad \|\lambda T\|_{\mathcal{I}} \leq |\lambda| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}}$$

D'autre part pour  $\lambda \neq 0$  on a

$$\|T\|_{\mathcal{I}} = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda T \right\|_{\mathcal{I}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda T\|_{\mathcal{I}},$$

ce qui donne  $\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} \geq |\lambda| \|T\|_{\mathcal{I}}$ . Alors

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}}$$

Pour  $\lambda = 0$  l'égalité est évidente. Soit  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$  tel que  $\|T\|_{\mathcal{I}} = 0$ . Supposons que  $T \neq 0$ , alors il existe  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  tel que  $T(x) \neq 0$  (on peut choisir  $x$  avec  $\|x\| = 1$ ). Par le Théorème de Hahn-Banach il existe une fonctionnelle  $\varphi \in F^*$  tel que  $\varphi(T(x)) = 1$ . L'application linéaire définie par

$$S : \mathbb{K} \longrightarrow E, \quad S(\lambda) = \lambda x,$$

est de rang fini, alors  $S \in \mathcal{I}(X, Y)$ . D'autre part pour toute  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a

$$\varphi \circ T \circ S(\lambda) = \varphi(T(S(\lambda))) = \varphi(T(\lambda x)) = \lambda \varphi(T(x)) = \lambda = Id_{\mathbb{K}}(\lambda).$$

Donc la condition (2) implique que  $\varphi \circ T \circ S = Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(X, Y)$  et  $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}} \cdot \|S\| = 0$ . Alors  $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 0$ , ce qui contredit la condition (1), donc  $T = 0$ . Alors nous avons montré que  $\mathcal{I}(X, Y)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$  et que  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$  est une norme sur espace vectoriel  $\mathcal{I}(X, Y)$ . Maintenant nous montrons que  $\mathcal{I}(X, Y)$  contient les opérateurs linéaires de rang fini. Soit  $\varphi \in X^*$  et  $y \in Y$ , l'opérateur linéaire

$$S_y : \mathbb{K} \rightarrow F, \quad S_y(\lambda) = \lambda y,$$

est clairement continu. D'autre part pour tout  $x \in E$  on a

$$S_y \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi(x) = S_y(\varphi(x)) = \varphi(x)y = \varphi \otimes y(x)$$

alors nous avons conclu que  $\varphi \otimes y = S_y \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$ . Par les conditions (1) et (2) on a  $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(X, Y)$ . Soit maintenant  $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ , comme  $\mathcal{I}(X, Y)$  est un espace vectoriel on a

$$T = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i \in \mathcal{I}(X, Y)$$

En fin, le Théorème 1.1.1 (avec la condition (3)) assure que  $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est de Banach.

■

**Proposition 2.1.7** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  un idéal normé.

Alors

(a)  $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$  pour tout  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$

(b)  $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$  pour tout  $\varphi \in X^*$  et  $y \in Y$ .

**Démonstration.** (a) Soient  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$ ,  $x \in B_X$  et  $\varphi \in B_{Y^*}$ . Premièrement on a

$$\varphi(T(x))Id_{\mathbb{K}} = \varphi \circ T \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x).$$

En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi(T(x))Id_{\mathbb{K}})(\lambda) &= \varphi(T(x))Id_{\mathbb{K}}(\lambda) \\ &= \varphi(T(\lambda x)) \\ &= \varphi(T(Id_{\mathbb{K}}(\lambda)x)) \\ &= \varphi(T((Id_{\mathbb{K}} \otimes x)(\lambda))) \\ &= (\varphi \circ T \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x))(\lambda). \end{aligned}$$

Pour tout  $\varphi \in B_{Y^*}$ ,  $x \in B_X$  et  $T \in \mathcal{I}(X, Y)$  on a

$$\begin{aligned} |\varphi(T(x))| &= |\varphi(T(x))| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi(T(x))Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|\varphi \circ T \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x)\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}} \cdot \|Id_{\mathbb{K}} \otimes x\| \\ &= \|\varphi\| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}} \cdot \|x\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} |\varphi(T(x))| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$$

(b) Soient  $\varphi \in X^*$  et  $y \in Y$ , nous avons vu que  $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(X, Y)$ . Par (a), il s'ensuit que

$$\|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}}.$$

D'autre coté, pour tout  $x \in X$  on a

$$\begin{aligned} ((Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi)(x) &= (Id_{\mathbb{K}} \otimes y)(Id_{\mathbb{K}}(\varphi(x))) \\ &= (Id_{\mathbb{K}} \otimes y)(\varphi(x)) \\ &= Id_{\mathbb{K}}(\varphi(x))y \\ &= \varphi(x)y \\ &= (\varphi \otimes y)(x), \end{aligned}$$

donc  $\varphi \otimes y = (Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$ . Dans ce cas, encore d'après (a) et la propriété d'idéal on peut écrit,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \cdot \|y\| &= \|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|Id_{\mathbb{K}} \otimes y\| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|\varphi\| \\ &= \|y\| \cdot \|\varphi\|, \end{aligned}$$

En fin  $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$ . ■

### Fermeture d'un idéal

Pour un idéal d'opérateurs  $\mathcal{I}$  et deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , on définit

$$\overline{\mathcal{I}}(X, Y) = \overline{\mathcal{I}(X, Y)}$$

tel que la fermeture est au sens de la norme usuelle des opérateurs linéaires bornés.

**Théorème 2.1.8** *Soit  $\mathcal{I}$  idéal des opérateurs. Alors  $\overline{\mathcal{I}}$  est un idéal de Banach muni de la norme usuelle des opérateurs.*

**Démonstration.** Premièrement montrons que  $\overline{\mathcal{I}}$  est un idéal

Comme  $\mathcal{I}$  est un idéal, nous avons que  $\mathcal{I}(X, Y)$  est un sous espace de  $\mathcal{L}(X, Y)$  qui contient

$\mathcal{F}(X, Y)$ , alors  $\overline{\mathcal{I}}(X, Y)$  est aussi un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$  contenant  $\mathcal{F}(X, Y)$  car

$$\mathcal{F}(X, Y) \subseteq \mathcal{I}(X, Y) \subseteq \overline{\mathcal{I}}(X, Y) := \overline{\mathcal{I}(X, Y)}$$

Soient  $T_3 \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T_2 \in \overline{\mathcal{I}}(X, Y)$  et  $T_1 \in \mathcal{L}(Y, F)$ . Alors il existe une suite  $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}(X, Y)$  telle que  $T_n \rightarrow T_2$  avec la norme usuelle des opérateurs. Par la propriété d'idéal de  $\mathcal{I}$ , la suite  $(T_1 \circ T_n \circ T_3)_{n=1}^{\infty}$  est dans  $\mathcal{I}(E, F)$ . De plus, pour chaque  $x \in E$  on a

$$\begin{aligned} \|T_1(T_n(T_3(x))) - T_1(T_2(T_3(x)))\| &= \|T_1((T_n - T_2)(T_3(x)))\| \\ &\leq \|T_1\| \cdot \|T_n - T_2\| \cdot \|T_3\| \|x\| \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|T_1 \circ T_n \circ T_3 - T_1 \circ T_2 \circ T_3\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_n - T_2\| \cdot \|T_3\| \rightarrow 0$$

Alors  $T_1 \circ T_n \circ T_3 \rightarrow T_1 \circ T_2 \circ T_3$  dans  $\mathcal{I}(E, F)$  avec la norme usuelle et donc  $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \in \overline{\mathcal{I}}(E, F)$ . Par Définition 2.1.4,  $\overline{\mathcal{I}}$  est un idéal fermé. Et comme  $\overline{\mathcal{I}}(E, F)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(E, F)$  pour tout espace de Banach  $E$  et  $F$ . alors  $\overline{\mathcal{I}}$  est un idéal de Banach avec la norme usuelle des opérateurs. ■

## 2.2 Idéal des opérateurs de rang fini.

**Proposition 2.2.1** *La classe  $\mathcal{F}$  (des opérateurs de rang fini) est le plus petit idéal d'opérateur et  $\mathcal{L}$  est le plus grand.*

**Démonstration.**  $\mathcal{F}(X, Y)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$  car est le sous espace engendré par les opérateurs de type  $\varphi \otimes y$ . Pour la propriété d'idéal, soient  $u \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T \in \mathcal{F}(X, Y)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ . Il existe  $(y_i)_{i=1}^n \subset Y$  et  $(\varphi_i)_{i=1}^n \in X^*$  tel que

$$T = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i.$$

Dans ce cas, pour tout  $x \in E$  on a

$$\begin{aligned} v \circ T \circ u(x) &= v(T(u(x))) = v\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i(u(x))\right) \\ &= v\left(\sum_{i=1}^n \langle u(x), \varphi_i \rangle y_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle u(x), \varphi_i \rangle v(y_i), \end{aligned}$$

ceci implique que image de  $\text{Im}(v \circ T \circ u)$  est inclu dans le sous espace engendré par  $(v(y_i))_{i=1}^n$ , et donc le rang de l'opérateur  $(v \circ T \circ u)$  est fini d'où  $v \circ T \circ u \in \mathcal{F}(E, F)$ .

$\mathcal{F}$  est le plus petit idéal car, par définition, tous les idéaux contient  $\mathcal{F}$ . ■

La proposition suivante montre que  $\mathcal{F}$  n'est pas un idéal de Banach avec la norme usuelle des opérateurs.

**Proposition 2.2.2** [4] ou [9] *L'idéal  $\mathcal{F}$  n'est pas de Banach avec la norme usuelle des opérateurs.*

**Démonstration.** Il suffit de trouver deux espaces de Banach  $X_0$  et  $Y_0$  et montrons que  $\mathcal{F}(X_0, Y_0)$  n'est pas fermé dans  $\mathcal{L}(X_0, Y_0)$ .

On considère les espaces de Banach  $X_0 = c_0$  muni de la norme sup, et l'espace  $Y_0 = \ell_1$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Soit  $(e_n)_{n=1}^\infty$  la base canonique de l'espace  $\ell_1$ , i.e.

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{(\text{ordre } i)}{1}, 0, \dots), \quad \text{pour tout } i \geq 1$$

On définit l'application  $T : c_0 \longrightarrow \ell_1$  par

$$T((\lambda_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} e_j, \quad (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_0$$

Cette application est bien définie car pour tout suite  $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_0$  on a

$$\|T((\lambda_j)_{j=1}^\infty)\| = \left\| \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} e_j \right\| = \sum_{j=1}^\infty \frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty < \infty$$

Il est facile de prouver que  $T$  est linéaire. Aussi, par l'inégalité précédente, il est immédiat de voir que  $T$  est continue avec norme  $\leq 1$ .

Maintenant on définit une suite  $(T_n)_n$  des opérateurs linéaires  $T_n : c_0 \longrightarrow \ell_1$  par

$$T_n((\lambda_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2^j} e_j, \quad (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_0$$

On remarque que  $\text{Im}(T_n)$  est incluse dans le sous espace engendré par  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ce qui implique que

$$\dim(\text{Im}(T_n)) < \infty$$

et donc  $T_n \in \mathcal{F}(c_0, \ell_1)$  pour tout  $n \geq 1$ .

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \|(T - T_n)((\lambda_j)_{j=1}^\infty)\| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \left\| \sum_{j=n+1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} e_j \right\| \\ &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \sum_{j=n+1}^\infty \frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \sum_{j=n+1}^\infty \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Donc,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^\infty \frac{1}{2^j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

ce qui donne  $T_n \longrightarrow T$  dans  $\mathcal{L}(c_0, \ell_1)$  muni de la norme usuelle des opérateurs.

D'autre part notons que  $T(2^j e_j) = e_j$ . Alors

$$e_j \in \text{Im}(T), \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Ceci signifie que l'espace  $\text{Im}(T)$  contient une infinité de vecteurs  $e_j$  linéairement indépendants, alors la dimension de  $\text{Im}(T)$  est infinie, d'où  $T \notin \mathcal{F}(c_0, \ell_1)$ . Finalement on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}(c_0, \ell_1) \\ T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{L}(c_0, \ell_1) \\ T \notin \mathcal{F}(c_0, \ell_1) \end{array} \right.$$

D'où  $\mathcal{F}(c_0, \ell_1)$  n'est pas fermé dans  $\mathcal{L}(c_0, \ell_1)$  avec la norme usuelle des opérateurs. ■

## 2.3 Quelques exemples des idéaux d'opérateurs.

### 2.3.1 Idéal des opérateurs approximables

La classe  $\mathcal{F}$  des opérateurs linéaires de rang fini est un idéal normé dont la norme idéal est la norme usuelle des opérateurs (Proposition 2.2.1 et Remarque 2.1.3). Puisque  $\mathcal{F}$  n'est pas fermé, on peut définir la classe des opérateurs suivante.

**Définition 2.3.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés. L'opérateur  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est dit approximable s'il existe une suite  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  dans  $\mathcal{F}(X, Y)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$$

On note par  $\mathcal{A}(X, Y)$  l'espace de tout les opérateurs approximables de  $X$  dans  $Y$ . Réellement on a

$$\mathcal{A}(X, Y) = \overline{\mathcal{F}(X, Y)}.$$

**Proposition 2.3.2**  $\mathcal{A}$  est un idéal de Banach avec la norme usuelle des opérateurs.

**Démonstration.** Comme  $\mathcal{A}(X, Y) = \overline{\mathcal{F}(X, Y)}$ , le Théorème 2.1.8 garante que  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  est un idéal de Banach ■

### 2.3.2 Idéal des opérateurs compacts

**Définition 2.3.3** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés. L'opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est dit compact si  $\overline{T(B_X)}$  est compact dans  $Y$ .

On désignera par  $\mathcal{K}(X, Y)$  l'espace des opérateurs compacts de  $X$  dans  $Y$ .

Dans la suite nous donnons une caractérisation importante des opérateurs compacts par les suites.

**Théorème 2.3.4** Soit  $T : X \longrightarrow Y$  un opérateur linéaire entre espaces normés. Donc  $T$  est compact si, et seulement si, pour toute suite bornée  $(x_n)_{n=1}^\infty$  dans  $X$ , la suite  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  contient une sous suite convergente dans  $Y$ .

**Proposition 2.3.5**  $\mathcal{K}$  est idéal des opérateurs linéaires.

**Démonstration.** Il est clair que l'opérateur nul à zéro  $0 : X \longrightarrow Y$  est compact. Soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$  une suite bornée. Comme  $T_1 \in \mathcal{K}(X, Y)$ , la suite  $(T_1(x_n))_{n=1}^\infty$  admet une sous suite  $(T_1(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  convergente. On pose alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_1(x_{n_k}) = z_1 \in Y.$$

La même chose pour  $T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$ , on pose

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_2(x_{n_k}) = z_2 \in Y.$$

La suite  $((T_1 + \lambda T_2)(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  est une sous suite de  $((T_1 + \lambda T_2)(x_n))_{n=1}^\infty$  qui converge vers  $z_1 + \lambda z_2$ . Alors d'après le Théorème 2.3.4, on a  $T_1 + \lambda T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$  et donc  $\mathcal{K}(X, Y)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Prouvons que  $\mathcal{K}(X, Y)$  contient les opérateurs linéaires de rang fini, il suffit de montrer que

$$\varphi \otimes y \in \mathcal{K}(X, Y), \quad \text{pour tout } \varphi \in X^* \text{ et } y \in Y$$

Il est clair que  $(\varphi \otimes y)(B_E)$  contient le sous espace vectoriel engendré par  $y$ , i.e.

$$(\varphi \otimes y)(B_E) \subset \text{span} \{y\}.$$

Comme  $\varphi \otimes b$  est un opérateur continu,  $(\varphi \otimes Y)(B_E)$  est un ensemble borné, de plus

$$\overline{(\varphi \otimes y)(B_E)} \subset \text{span} \{y\}$$

et  $\dim(\text{span} \{y\}) = 1$ , alors  $\overline{(\varphi \otimes y)(B_E)}$  est un ensemble compact parce qu'il est fermé et borné dans un espace normé de dimension fini. Donc  $\varphi \otimes y$  est un opérateur compact.

Pour la propriété d'idéal. Soient  $T_3 \in \mathcal{L}(X, E)$ ,  $T_2 \in \mathcal{K}(E, F)$ ,  $T_1 \in \mathcal{L}(F, Y)$ . Si une suite  $(x_n)_{n=1}^\infty$  est bornée dans  $X$ . Il en sera de même de la suite  $(T_3(x_n))_{n=1}^\infty$  et,  $T_2$  étant compact, la suite  $(T_2 \circ T_3(x_n))_{n=1}^\infty$  contient une sous suite  $(T_2 \circ T_3(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  convergente. La continuité de  $T_1$  implique la convergence de la suite  $(T_1 \circ T_2 \circ T_3(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  qui est une sous suite de la suite  $(T_1 \circ T_2 \circ T_3(x_n))_{n=1}^\infty$ . De nouveau le Théorème 2.3.4 donne  $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Avec la Remarque 2.1.3 nous concluons que  $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$  est un idéal normé. ■

**Proposition 2.3.6**  $\mathcal{K}$  est un idéal fermé.

**Démonstration.** Montrons que  $\mathcal{K}(X, Y)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(X, Y)$  pour tout espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . Soit  $(T_n)_{n=1}^\infty$  une suite d'opérateurs compacts qui converge vers un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , il s'agit de prouver que  $T$  est un opérateur compact. Cela revient à prouver que  $T(B_X)$  est relativement compact. Soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $n_0 \geq 1$  tel que

$$\|T_{n_0} - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Puisque  $T_{n_0} \in \mathcal{K}(X, Y)$ , l'ensemble  $T_{n_0}(B_X)$  est relativement compact et il existe donc  $(x_i)_{i=1}^n \subset B_X$  tels que

$$T_{n_0}(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(T_{n_0}(x_i), \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

on en déduit que pour tout  $x \in B_X$  on a

$$\|T(x) - T(x_i)\| \leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_i)\| + \|T_{n_0}(x_i) - T(x_i)\| < \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B(T(x_i), \varepsilon)$$

ce qui termine la preuve. ■

### 2.3.3 Idéal des opérateurs complètement continus

**Définition 2.3.7** Un opérateur linéaire borné  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est dit complètement continu s'il transforme une suite convergeant faiblement dans  $X$  vers  $x$  en une suite convergeant

en norme vers  $T(x)$  dans  $Y$  i.e.

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X : x_n \xrightarrow{w} x \implies T(x_n) \longrightarrow T(x)$$

On écrit  $T \in \mathcal{V}(X, Y)$ .

**Proposition 2.3.8** *La classe  $\mathcal{V}$  est un idéal d'opérateurs linéaires.*

**Démonstration.** Il est clair que  $T = 0 \in \mathcal{V}(X, Y)$ .

Soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{V}(X, Y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  une suite de  $X$  tel que  $x_n \xrightarrow{w} x \in X$ . Alors

$$(T_1 + \alpha T_2)(x_n) = T_1(x_n) + \alpha T_2(x_n) \longrightarrow T_1(x) + \alpha T_2(x) = (T_1 + \alpha T_2)(x).$$

Donc  $(T_1 + \alpha T_2) \in \mathcal{V}(X, Y)$ .

Maintenant montrons que  $\mathcal{V}(X, Y)$  contient  $\mathcal{F}(X, Y)$ . Soient  $\varphi \in X^*$ ,  $y \in Y$  et  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$  tel que  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Par la définition de convergence faible on a  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ . Alors,

$$(\varphi \otimes y)(x_n) = \varphi(x_n)y \longrightarrow \varphi(x)y = \varphi \otimes y(x).$$

Ceci prouve que  $\varphi \otimes y \in \mathcal{V}(X, Y)$ . En fin on a  $\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{V}(X, Y)$ .

Pour la propriété d'idéal, soient  $v \in \mathcal{L}(E, X)$ ,  $T \in \mathcal{V}(X, Y)$ ,  $u \in \mathcal{L}(Y, F)$  et  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$  tel que  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Comme  $v$  est continu, nous avons  $v(x_n) \xrightarrow{w} v(x)$ . Comme  $T \in \mathcal{V}(X, Y)$  nous avons

$$T(v(x_n)) \longrightarrow T(v(x)).$$

En fin par continuité de  $u$  on a

$$u(T(v(x_n))) \longrightarrow u(T(v(x))).$$

D'où,  $u \circ T \circ v \in \mathcal{V}(E, F)$ . ■

**Proposition 2.3.9** *L'idéal  $\mathcal{V}$  est fermé.*

**Démonstration.** Soient  $(T_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{V}(X, Y)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$  et montrons que  $T \in \mathcal{V}(X, Y)$ . Soit  $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$  avec  $x_j \xrightarrow{w} x \in X$ . Comme chaque  $T_n$  est complètement continu, pour tout  $n$  on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|T_n(x_j) - T(x)\| = 0$$

Par la Proposition 1.4.2, il existe  $M > 0$  tel que

$$\forall j : \|x_j\| \leq M \quad \text{et} \quad \|x\| \leq \liminf_j \|x_j\| \leq M.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|T_{n_0} - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

Comme  $T_{n_0} \in \mathcal{V}(X, Y)$ , nous avons  $\lim_{j \rightarrow +\infty} T_{n_0}(x_j) = T_{n_0}(x)$ , et donc il existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall j \geq j_0 : \|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors pour tout  $j \geq j_0$  on a

$$\begin{aligned} \|T(x_j) - T(x)\| &= \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j) + T_{n_0}(x_j) + T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j)\| + \|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_{n_0} - T\| \cdot \|x_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{n_0} - T\| \cdot \|x\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon, \end{aligned}$$

ceci donne  $\lim_{j \rightarrow +\infty} T(x_j) = T(x)$ , et donc  $T \in \mathcal{V}(X, Y)$ . ■

# Chapitre 3

## Le dual d'un idéal d'opérateurs linéaires

1) Propriétés de dual d'un idéal

### 3.1 Propriétés de dual d'un idéal

En utilisant les propriétés de l'adjoint d'un opérateur linéaire borné pour étudier le dual d'un idéal.

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal des opérateurs linéaires. Pour tout espaces de Banach  $X$  et  $Y$  on définit

$$\mathcal{I}^{dual}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)\}$$

**Théorème 3.1.1** *Si  $\mathcal{I}$  est un idéal des opérateurs linéaires alors  $\mathcal{I}^{dual}$  est aussi un idéal des opérateurs linéaires.*

**Démonstration.** Dans la suite on désigne par  $spam \{(x_i)_{i=1}^n\}$  l'espace engendré par les vecteurs  $(x_i)_{i=1}^n$ .

Il est clair que opérateur nul  $T = 0 \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  parce que  $T^* = 0 \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$ . Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $T_1, T_2 \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ . Comme  $T_1^*, T_2^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$  et comme  $\mathcal{I}(Y^*, X^*)$  est sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$  on a

$$(T_1 + \lambda T_2)^* = T_1^* + \lambda T_2^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$$

et donc  $(T_1 + \lambda T_2) \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ .

Maintenant montrons que  $\mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  contient les opérateurs de rang fini. Tout d'abord montrons que pour tout  $\varphi \in X^*$  et  $y \in Y$ , si  $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(X, Y)$ , alors  $(\varphi \otimes y)^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$ .

En effet, pour tout  $x \in X$  et  $y^* \in Y^*$  on a

$$\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y \in spam \{y\}.$$

et

$$(\varphi \otimes y)^*(y^*)(x) = y^*(\varphi \otimes y(x)) = y^*(\varphi(x)y) = y^*(y).\varphi(x),$$

donc

$$(\varphi \otimes y)^*(y^*) = y^*(y).\varphi \in spam \{\varphi\}$$

ce qui implique que l'image de l'opérateur  $(\varphi \otimes y)^*$  est incluse dans  $\text{span} \{\varphi\}$  (de dimension finie) et ceci montre que l'opérateur  $(\varphi \otimes y)^*$  est de rang fini, alors

$$(\varphi \otimes y)^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*).$$

Soit  $T \in \mathcal{F}(X, Y)$  alors

$$T = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i, \quad \text{avec } \varphi_i \in X^* \text{ et } y_i \in Y$$

Comme  $\mathcal{I}$  est idéal des opérateurs on a

$$T^* = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \otimes y_i)^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*),$$

ce qui donne

$$T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y).$$

Pour la propriété d'idéal, soient  $T_3 \in \mathcal{L}(X, E)$ ,  $T_2 \in \mathcal{I}^{dual}(E, F)$  et  $T_1 \in \mathcal{L}(F, Y)$ . Alors  $T_3^* \in \mathcal{L}(E^*, X^*)$ ,  $T_2^* \in \mathcal{I}(F^*, E^*)$  et  $T_1^* \in \mathcal{L}(Y^*, F^*)$ . Par la propriété d'idéal de  $\mathcal{I}$  on a

$$(T_3^* \circ T_2^* \circ T_1^*) = (T_1 \circ T_2 \circ T_3)^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*).$$

Donc  $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ . ■

**Définition 3.1.2** Soit  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  un idéal normé des opérateurs. Pour tout  $T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ , on définit

$$\|T\|_{\mathcal{I}^{dual}} := \|T^*\|_{\mathcal{I}}.$$

**Théorème 3.1.3** Si  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est un idéal normé des opérateurs, alors  $(\mathcal{I}^{dual}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual}})$  aussi est un idéal normé des opérateurs.

**Démonstration.** Soit  $T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ . Donc  $T^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$ , et comme  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$  est une norme sur  $\mathcal{I}(X, Y)$ , nous avons

$$\|T\|_{\mathcal{I}^{dual}} := \|T^*\|_{\mathcal{I}} \geq 0$$

Par la même raison,

$$(\|T\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|T^*\|_{\mathcal{I}} = 0) \iff (T^* = 0) \iff (\|T^*\| = 0) \iff (T = 0)$$

Pour l'inégalité triangulaire, si  $T_1, T_2 \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ , alors  $T_1^*, T_2^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$  et

$$\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|(T_1 + T_2)^*\|_{\mathcal{I}} = \|T_1^* + T_2^*\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1^*\|_{\mathcal{I}} + \|T_2^*\|_{\mathcal{I}} = \|T_1\|_{\mathcal{I}^{dual}} + \|T_2\|_{\mathcal{I}^{dual}}.$$

Si  $T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $T^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$ , et

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|(\lambda T)^*\|_{\mathcal{I}} = \|\lambda T^*\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|T^*\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|T\|_{\mathcal{I}^{dual}}$$

Et aussi on a

$$\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|(Id_{\mathbb{K}})^*\|_{\mathcal{I}} = \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1.$$

Soient  $T_3 \in \mathcal{L}(X, E)$ ,  $T_2 \in \mathcal{I}^{dual}(E, F)$  et  $T_1 \in \mathcal{L}(F, Y)$ . La propriété d'idéal de  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  donne

$$\begin{aligned} \|T_1 \circ T_2 \circ T_3\|_{\mathcal{I}^{dual}} &= \|(T_1 \circ T_2 \circ T_3)^*\|_{\mathcal{I}} = \|T_3^* \circ T_2^* \circ T_1^*\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|T_3^*\|_{\mathcal{I}} \cdot \|T_2^*\|_{\mathcal{I}} \cdot \|T_1^*\|_{\mathcal{I}} = \|T_3\|_{\mathcal{I}^{dual}} \cdot \|T_2\|_{\mathcal{I}^{dual}} \cdot \|T_1\|_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

■

**Théorème 3.1.4** *Si  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est un idéal de Banach, donc  $(\mathcal{I}^{dual}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual}})$  aussi est idéal de Banach.*

**Démonstration.** Nous utiliserons le critère de Théorème 2.1.6. Les conditions (1) et (2) sont déjà montrés. Il reste à prouver la condition (3). Soit  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  une suite dans  $\mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  tel que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}^{dual}} < \infty$ . Donc  $(T_n^*)_{n=1}^{\infty}$  est une suite dans  $\mathcal{I}(Y^*, X^*)$  et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^*\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}^{dual}} < \infty$$

Comme  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  est idéal de Banach, par le critère de Théorème 2.1.6 on a

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*) \subset \mathcal{L}(Y^*, X^*) \quad \text{et} \quad \|S\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^*\|_{\mathcal{I}}.$$

D'autre part d'après (a) dans la Proposition 2.1.7, nous avons

$$\|T_n\| = \|T_n^*\| \leq \|T_n^*\|_{\mathcal{I}}, \text{ pour tout } n$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^*\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^*\|_{\mathcal{I}} < \infty.$$

Ceci dire que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est absolument convergente dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Par le Théorème 1.1.1 alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est convergent dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , dire  $T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ . De

$$\left\| T^* - \sum_{j=1}^n T_j^* \right\| = \left\| \left( T - \sum_{j=1}^n T_j \right)^* \right\| = \left\| T - \sum_{j=1}^n T_j \right\| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

nous concluons que  $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* = S \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$ . Ceci implique que  $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  et

$$\|T\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|T^*\|_{\mathcal{I}} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* \right\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^*\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}^{dual}}.$$

Par le Théorème 2.1.6,  $(\mathcal{I}^{dual}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual}})$  est un idéal de Banach. ■

**Corollary 3.1.5** *Si  $\mathcal{I}$  est un idéal fermé, alors  $\mathcal{I}^{dual}$  aussi est un idéal fermé.*

**Démonstration.** Supposons que  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  est une suite de  $\mathcal{I}^{dual}(X, Y)$  qui converge vers  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et montrons que  $T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ . On a  $(T_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}(Y^*, X^*)$  et  $T_n^* \longrightarrow T^*$  car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n^* - T^*\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Puisque  $\mathcal{I}$  est un idéal fermé on a  $T^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)$  d'où  $T \in \mathcal{I}^{dual}(X, Y)$ . ■

### **Idéal des opérateurs $p$ -sommants**

Cet idéal est introduit par Pietsch dans [8].

Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $1 \leq p < \infty$  on dit que  $T$  est  $p$ -sommant s'il existe une constante  $C > 0$  tel que pour toute  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ , on ait

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \tag{3.1}$$

L'idéal des opérateurs  $p$ -sommants est noté par  $\Pi_p$  et sa norme idéal est définie par

$$\pi_p(T) = \inf \{C : \text{vérifiant (3.1)}\}.$$

### **Idéal des opérateurs fortement $p$ -sommants**

Cet idéal est introduit par Cohen dans [3].

Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $1 < p < \infty$  on dit que  $T$  est fortement  $p$ -sommant s'il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$  et tout  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$  on ait

$$\|(\langle T(x_i), y_i^* \rangle)_{i=1}^n\|_1 \leq C \| (x_i)_{i=1}^n \|_p \| (y_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \quad (3.2)$$

L'idéal des opérateurs fortement  $p$ -sommants est noté par  $\mathcal{D}_p$  et sa norme idéal est définie par

$$d_p(T) = \inf \{C : \text{vérifiant (3.2)}\}.$$

Cohen a montré dans [3, Theorem 2.2.2] que l'opérateur linéaire  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est fortement  $p$ -sommant si et seulement si son adjoint  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  est  $p^*$ -sommant. Autrement dit,

$$(\Pi_p)^{dual} = \mathcal{D}_{p^*}$$

### **Idéal des opérateurs compacts**

Le théorème de Schauder dit que l'opérateur linéaire  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , entre espaces de Banach, est compact si et seulement si son adjoint  $T \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  est compact. Autrement dit,

$$(\mathcal{K})^{dual} = \mathcal{K}$$

# Bibliographie

- [1] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. 25 (2005/2006), 69–102.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [3] J.S. Cohen, *Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. 201 (1973) 177–200.
- [4] A. Defant and K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] J.A. López Molina and E.A. Sánchez-Pérez, *Ideales de operadores absolutamente continuos*, Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 87 (1993), 349–378.
- [7] U. Matter, *Absolutely continuous operators and super-reflexivity*, Math. Nachr. 130 (1987), 193–216.
- [8] A. Pietsch, *Absolute  $p$ -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math., 28 (1967), 333–353.
- [9] A. Pietsch, *Operator ideals*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.