

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة

ميدان: علوم المادة
فرع: الفيزياء
تخصص: فيزياء نظرية



كلية: العلوم
قسم: الفيزياء
رقم: Ph Th 06 /2019/

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمي

إعداد الطالبان:

بوداود أمال

بوشارب و داد

تحت عنوان

دراسة خصائص كثافة الجسيمات في فضاء فورييه و معامل التشتت
المرن لغاز فيرميوني منحل

**Study of the properties of the particle density in
Fourier space and elastic scattering factor for a
degenerate fermi gas**

تمت المناقشة يوم 1 / 07 / 2019 أمام اللجنة المكونة من:

رئيسة	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	د.س. قالي
مشرفا ومقررا	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	د.ص. مجدل
ممتحنا	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	د.ع. مطاظة
ممتحنا	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	د.س. مجبر

السنة الجامعية: 2019/2018

الشكر و العرفان

الشكر و الحمد لله الذي أعاننا على إتمام هذا البحث فلولا توفيقه و هداه لما وصلنا لهذا فالحمد الحمد حتى يبلغ الحمد منتهاه و تلبية لسنة رسولنا الكريم صلى الله عليه وسلم حين قال "من لم يشكر الناس لم يشكر الله " نتوجه بالشكر الجزيل الى كل من الاستاذ المشرف الدكتور مجدل صهيب . فنقول له شكرا على جهودك المبذولة لتكون مذكرتنا احسن و اروع مذكرة كما لا ننسى نصائحك القيمة , إرشاداتك و معلوماتك التي لم تبخل علينا بها من شيء فمهما شكرنا لن نوفيك حقك فشكرا ألف شكر لك . كما أخص بالذكر الاستاذ الفاضل السيد رئيس قسم الفيزياء بعجي نجيب فله منا أرقى معاني الشكر لما قدمه لنا من مساعدات سواء كانت علمية أو مادية و نصائحه القيمة شكرا لك و لمجهوداته كما نتقدم بالشكر كل من أعاننا من بعيد أو قريب ولو بحرف أو نصيحة أو إشارة, الى كل حاقد وحاسد فلكم منا شكر خاص فنار حقدكم أشعلت بداخلنا نارا الارادة و التصميم على بلوغ الهدف المراد الوصول اليه فشكرا لكم أيضا وهداكم الله لما يحبه و يرضاه.



اهداء

الهي لا يطيب الليل الا بشكرك ولا يطيب النهار الى بطاعتك ..ولا تطيب اللحظات الى
بذكرك .. ياالله جلا جلالك الى من بلغ الرسالة و أدى الامانة .. و نصح الامة .. الى نبي
الرحمة ونور العالمين .. سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم ..

بدأنا بأكثر من يد وقاسينا اكثر من هم و عانينا الكثير من الصعوبات وها نحن اليوم والحمد
الله نطوي سهر الليالي وتعب الايام و خلاصة مشوارنا بين دفتي هذا العمل المتواضع .

أهدي نجاحي الى النور الذي أنار دربي و السراج الذي لا ينطفئ نوره أبدا والذي بذل جهد
السنين من أجل أن أعتنى سلاالم النجاح والذي العزيز و الى من أخص الله الجنة تحت
قدميها و غمرتني بالحب و الحنان و أشعرتني بالسعادة و الامان هي حياتي وكل عمري
والدتي العزيزة.

الى سندي و مسندي ...الى من بهم أشد عضدي ...و فخري...الى من هم ركننا من أركان
روحي أجمل أقداري اخواني (وليد, مختار و مهدي) حماكم الله وحفظكم.

الى بسمه الحياة و سر الوجود...الى من كان تحفيزها سر نجاحي...أختي سلوى و الاخت
المدللة لويزة حفظهم الله.

والى أعز كتكوتين ابن أخي معنز (محمد) وابن أختي زينو(محمد الامين) حفظهم الله.

والى كل من اصبح فردا من العائلة زوج اختي سفيان وزوجة أخي زهرة .

كما أهديه لمن يحملون مرتبة الابويين في قلوب الجدة و الحد من كلا الطرفين وكل من
يحمل لقب بوداود وبوسعد كأفراد العائلة و الاقارب من أعمام و اخوال و زوجاتهم و عماتي
وخلاتي و ازواجهم .واولادهم من صغيرهم الى كبيرهم .

الى من سرنا سويا ونحن نشق الطريق معا نحو النجاح و الابداع الى من تكاتفنا بدا بيد و
نحن نقطف زهرة تعلمنا اصدقائي و صديقاتي.

بوداود أمال



اهداء

الى من تطيب بذكره القلوب و تطمئن.. ومن لا تتم به الصالحات إلا برضاه و عفوه
(الله عز وجل في علاه)

الى من جاء رحمة و هدى للناس.. و من بالصلاة عليه ترفع الدرجات و تحط السيئات
..الى خاتم الانبياء و الرسل نبي الامة سيدنا و حبيبنا
محمد صلى الله عليه وسلم .

الى من وضعت تحت أقدامها الجنة لعل منزلتها.. الى نبع الحنان و الحزن الدافئ الى من
لم تبخل علي من دعائها بشيء.. الى الغالية و مؤنسة القلب
أمي الحنونة حفظها الله و رعاها.

الى من علمني الكفاح و الاخلاق الحميدة.. الى من أعانني بالنصح و الارشاد الى من
تحمل عبء الحياة لأجل دراستي و راحتي
أبي الغالي حفظه الله و رعاه.

الى من وقفت بجانبني في كل شيء وكانت الدرع الايسر في طريقي.. الناصحة المرشدة و
الحنونة ورمز العطاء و الشيء الجميل في حياتي الى الغالية على قلبي
أختي أسية حفظها الله و رعاها .

الى أول من همس بحروفي إسمي و درعي الأيمن في الحياة الى من هو فخري و عزي
وسندي أخي الغالي
خليل حفظه الله و رعاه.

الى أحدى ملائكة الأرض و أجمل هدية منحنا الله إياها في هذا العام ..أغلى كتكوت في
العائلة و الحفيد الأول عبد العزيز بوقرة حفظه الله و رعاه.

الى من دخلوا العائلة من بابها الواسع بأدب و إحتشام زوج اختي الأمين و زوجة أخي لامية.
الى أحوالي و أعمامي و خالاتي و عماتي و أولادهم خاصة الكتاكيت منهم.

3ص	قائمة المصطلحات والاختصارات
5ص	مقدمة عامة
8ص	الفصل الأول: مصفوفة الكثافة لبلوخ و علاقتها ببعض المقادير الفيزيائية
9ص	1. مقدمة
10ص	2. مصفوفة الكثافة لبلوخ (BDM)
11ص	3. علاقة مصفوفة بلوخ ببعض المقادير الفيزيائية
11ص	أ- تحويل لابلاس وتحويله المعكوس
12ص	ب- العلاقة بين $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ و $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$
13ص	ت- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ و كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$
14ص	ث- العلاقة بين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \xi)$ وكثافة التيار $J(\mathbf{r})$
14ص	ج- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ و كثافة الجسيمات المحلية $n(\mathbf{k})$
15ص	ح- العلاقة بين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ و الكثافة الطيفية $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)$
16ص	خ- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ وكثافة الحالات $g(\varepsilon)$
16ص	د- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ و كثافة الطاقة الحركية $\tau(\mathbf{r})$
16ص	ذ- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ و عدد الجسيمات N
17ص	4. عبارة مصفوفة بلوخ من أجل بعض الجمل
17ص	أ- كمون هزاز توافقي متمائل المناحي في حالة دوران
18ص	ب- كمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي في حالة دوران
19ص	5. الحصول على طيف طاقة الجملة من خلال مصفوفة بلوخ
19ص	أ- طيف طاقة جملة جسيمات تحت تأثير كمون هزاز توافقي متمائل المناحي في حالة دوران
21ص	ب- طيف طاقة جملة جسيمات تحت تأثير كمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي في حالة دوران
22ص	الفصل الثاني: إيجاد كثافة الجسيمات في فضاء فورييه لغاز من الفيرميونات فائقة البرودة خاضع لكمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي في حالة دوران.
23ص	1. مقدمة
23ص	2. عبارة كثافة الجسيمات المحلية من أجل كمون متمائل المناحي في حالة دوران

3. عبارة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه من أجل كمون لا تماثل المناحي في حالة دوران
ص24
- الفصل الثالث: دراسة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه و معامل التشتت المرن
ص28
1. مقدمة
ص29
2. دراسة الجملة في فضاء فورييه من أجل قيم مختلفة لسرعة الدوران ونسبة لا تماثل مناحي كمون الحصر
ص29
3. المقارنة ما بين النتائج المحصل عليها بواسطة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ و كثافة الجسيمات
في فضاء الفيزيائي $\rho(\mathbf{r})$
ص32
- دراسة الجملة في الفضاء الفيزيائي بسرعة دوران ثابتة و قيم مختلفة لنسبة لا تماثل مناحي كمون الحصر
ص33
4. معامل التشتت المرن $S_{el}(\mathbf{k})$
ص35
- أ- التوزيع الزاوي لِتَشْتت الضَّوء
ص35
- ب- دراسة وتفسير مساهمة التشتت المرن في التوزيع الزاوي للضوء المنتشر
ص37
- الخاتمة
ص41
- الملحق
ص43
- قائمة المراجع
ص44

قائمة المصطلحات والاختصارات

Center of mass coordinates	\mathbf{R}	إحداثيات مركز الكتلة
Relative coordinates	\mathbf{s}	الإحداثيات النسبية
Chemical potential	$\mu.$	الكمون الكيميائي
Eigenfunctions	$\varphi_{n,m}(\mathbf{r})$	الدوال الذاتية للجملة
Magnetic field	\mathbf{B}	الحقل المغناطيسي
Bloch density Matrix Elements	$c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \beta)$	مصفوفة الكثافة لبلوخ
Fourier transform of the local density	$n(\mathbf{k})$	تحويل فورييه للكثافة المحلية
Frequencies of a two dimensional anisotropic harmonic potential	$\Omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega$	تردد كمون هزاز توافقي لا متماثل المناحي في بعدين
Inverse Laplace Transform.	\mathcal{L}_{μ}^{-1}	تحويل لابلاس المعكوس
Larmore precession	ω_L	تواتر لارمور
Pauli Blocking effect	/	مفعول حجب باولي
Heaviside step function	$\Theta(x)$	دالة القفزة
Scattering angles	$(\theta, \varphi).$	زاويا الانتشار
Angular velocity	$\Omega.$	السرعة الزاوية للدوران
Wave vector.	\mathbf{k}	شعاع الموجة
Length of the harmonic oscillator	$a_{oh} = \sqrt{\hbar/m^*\omega_0}$	طول المميز لكمون الهزاز التوافقي
Elastic scattering factor.	$s_{el}(\mathbf{k})$	معامل التشتت المرن
Parameter of the anisotropy.	$\delta = \omega_y/\omega_x$	عامل لا تماثل المناحي، أو عامل شدة التباين
Particle number	N	عدد الجسيمات
Complex number with real part.	$\xi.$	عدد مركب جزؤه الحقيقي موجب

Orbital angular moment	L	العزم الحركي المداري
Mass of particles	m^*	كتلة الجسيمات
Density of states	$g(\epsilon)$	كثافة الحالات
The Kinetic energy density	$\tau(\mathbf{r})$	كثافة الطاقة الحركية
Current density	$J(\mathbf{r})$	كثافة التيار
Harmonic oscillator potential	$V(\mathbf{r})$	كُمون الهزاز التوافقي
Generalized Laguerre polynomials of order d and degree k	L_k^d	كثيرات حدود لاغير المعممة من درجة k و الرتبة d
Lowest Landau Levels	LLL	مستويات لانداو المنخفضة
System energy Level.	$E_{n,m}$	مستوى طاقة النظام
Particle density matrix	$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$	مصفوفة كثافة الجسيمات
Bloch Density Matrix	MDB	مصفوفة كثافة بلوخ
Hamiltonian operator	H	مؤثر الهاملتوني

مقدمة عامة

General introduction

مقدمة عامة

يُعدُّ ميدان الغازات فائقة البرودة من بين أهم بحوث الفيزياء الحديثة والذي يُعرف في أيامنا هذه بتاميا متزايدا بشكل سريع وكبير إذ أنه أثار اهتمام العديد من الباحثين لما حققه من نتائج كانت سابقا حبيسة الأطر الرياضية النظرية. إن سنة 1995 التي تم فيها الحصول تجريبيا على ما يُسمى تكاثف بوز-أينشتاين [1] كانت محطة رئيسة لإعادة الاهتمام بشكل ملفت بهذا الميدان الذي تعود أصوله النظرية إلى سنة 1925 أين تمت فيها صياغة نظرية تكاثف الغازات فائقة البرودة. في الحقيقة، لم تتوقف جهود الباحثين، التجريبيين والنظريين على حد سواء، منذ بداية الربع الثاني من القرن العشرين في محاولة تبريد أبخرة بعض المواد قصد الوصول إلى درجات حرارة تظهر فيها التأثيرات الكمية على خصائص المادة بشكل ملحوظ يتوافق مع الإطار الرياضي المتوقع لها، لكن عجز وعدم كفاية الاجهزة التجريبية المستعملة آنذاك حالت دون ذلك.

أدى ظهور الليزر الذي ترافق مع تطور نظرية تفاعل المادة والاشعاع (الذرة المتفاعلة مع حقل كهرومغناطيسي بشكل خاص) إلى ظهور حزم ضوئية مترابطة تبثها الذرات المثارة تم حثها بواسطة اشعاع كهرومغناطيسي موام، هذه الحزم هي ما سميت بالليزر اختصارا لأصل مصدرها. إن سهولة التحكم في هذه الأخيرة سمح بتطور ونشوء تقنيات التبريد الحديثة سواء كانت باعتماد تقنية أسر الذرات مع استخدام حزم الليزر ذات التواتر القابل للتغيير أثناء التجربة أو باعتماد الليزر للأسر والتبريد أيضا، مما أدى إلى الوصول إلى درجات حرارة من رتبة النانو كلفن، أي أقل من درجة حرارة فيرمي للغازات المبردة و التي يكون فيها السلوك الكمي للغاز هو المهيمن على خصائصه وهو ما يُسمى حينئذٍ بالغاز الكوموي المنحل (Degenerate quantum gases)، الأمر الذي تم التحقق منه بالوصول تجريبيا لظاهرة الغازات فائقة البرودة أين يمكن ابراز التأثيرات الكمية على سلوك الانظمة الفيزيائية بصفة مايكروسكوبية. فمن أجل غاز من البوزونات برزت لنا ظاهرة تكاثف بوز-أينشتاين (1995)، أما بالنسبة لغاز من الفيرميونات بدت لنا ظاهرة الانحلال الكوانتي و بحر فيرمي (1999) [2].

أهم ما يميز ميدان الغازات فائقة البرودة هو سهولة التحكم في الوسائط التجريبية، سواء بواسطة تغيير شدة واتجاه الحقول المغناطيسية المستعملة في أسر الذرات بواسطة ما يُسمى تجاوبات فيشياخ المتمثلة في تغيير مستويات طاقة الذرات، أو تغيير تواترات الليزر المستعمل ليتوافق مع التشكيلة التجريبية المرغوبة (هاملتوني الجملة) وذلك يسمح بخلق كمونات ذات أنواع مختلفة، كمونات تدافع أو تجاذب، قصيرة المدى أو طويلة المدى، متغيرة في المكان والزمان أو ثابتة خاصة الكمونات الدورية، هذه التشكيلات المختلفة هي التي منحت دفعة

جديدة لحقل البحوث في الغازات الباردة والتي تمثلت بقدرة محاكاتها لأنظمة فيزيائية معقدة متمثلة بشكل أساسي في الأجسام الصلبة أو الموائع الفائقة أو النواقل الفائقة .. إلخ [3]. لا ننسى ان نذكر في هذا السياق القدرة العالية لتقنيات التصوير عالي الدقة والتحليل المرافق للتصوير لسحابة الغازات الباردة الذي يسمح بالحصول عن المعلومات الخاصة بهذا النظام بشكل دقيق من وجهة نظر تجريبية وبالتالي التحقق من حدوث النتائج المرغوبة المؤيدة للنظريات التي تم طرحها لوصف سلوك الغازات الباردة قبل التحقق التجريبي منها. نقترح لمن يريد الاستزادة في هذا الموضوع المقالات المرجعية التالية [4].

يعدُّ المجال الخاص بدراسة استجابة غاز البوزونات او الفيرميونات فائقة البرودة للدوران السريع احد أهم المجالات البحثية أيضا في ميدان الغازات فائقة البرودة فقد بدأ العمل التجريبي عليها تزامنا مع التحقيق التجريبي لتكاثفات بوز- اينشتاين أين تم تدوير هذه الأخيرة بطرق ميكانيكية وضوئية [5]، إن مثل هذا التدوير السريع سمح بالتحقق تجريبيا من حالتها فائقة الميوعة أين تم الكشف عن نشوء الدوامات التي يتزايد عددها مع تزايد سرعة الدوران بعد تجاوزها سرعة حرجة، الأمر المميز لهذه الحالة الكمية الإستثنائية التي رافقتها النظريات الخاصة بوصف سلوكها عند تجاوز عتبة سرعة الدوران الحدية .

ما يهْمنا في هذه المذكرة هو دراسة دوران غاز فيرميونات محايدة كهربائيا محصورة بواسطة حقل مغناطيسي تفاعله مع ذرات الغاز يخلق كمون هزاز توافقي والذي يكون غالبا لا متمائل المناحي. يمكن اعتبار هذه التشكيلة نمذجة لجملة جسيمات مشحونة خاضعة لحقل مغناطيسي وكمون هزاز توافقي نظرا لتمائل الهاملتوني الذي يصف كلا النظامين كما هو معلوم من التكافؤ دوران-حقل مغناطيسي [6].

تُعدُّ كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ الكمية الاساسية التي تُستمد منها جميع الكميات الأخرى. لكن الحصول على هذه الكثافة يُعدُّ أمرا في غاية الصعوبة في الجملة التي اخترنا دراستها إذ أنه لم يُشتق لها عبارة تحليلية دقيقة وصالحة لعدد كافي من الجسيمات لحد الان، فقد تم دراستها بصورة تقريبية فقط في الأعمال التالية [7]- [8]. هذه الحقيقة دعنا للانتقال الى صورتها في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ التي يمكن الحصول عليها بصورة تحليلية دقيقة وشاملة عبر ما يسمى بمصفوفة بلوخ التي تُعتبر مفتاح الدراسة المستعمل هنا والتي يمكن من خلالها أيضا دراسة بعض من خصائص الجملة.

إنَّ دراسة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه يسمح لنا بمعرفة سلوك النظام عند القيام بتدويره بسرعات مختلفة خاصة عند الكبيرة منها مع اخضاعه لكمون حصر شديد، بالإضافة الى أنها تسمح بدراسة معامل

التشتت المرن للضوء والذي ما هو إلا تربيعة هذه الكثافة. إنَّ لهذا المعامل اهمية بالغة في معرفة التوزيع الزاوي للضوء المُشْتَّت بصورة مرنة بواسطة السحابة الغازية الباردة.

تمّ تنظيم هذه المذكرة بحيث تحتوي على ثلاثة فصول وخاتمة كما يلي:

- الفصل الأول و نتناول فيه الجانب الرياضي أين نقدم لمحة عن مصفوفة الكثافة لبلوخ وكذا علاقتها ببعض المقادير الفيزيائية المختلفة خاصة منها كثافة الجسيمات في فضاء فورييه.
- الفصل الثاني سنهتم فيه باشتقاق العبارة التحليلية لكثافة الجسيمات في فضاء فورييه في بعدين وثلاثة ابعاد للنظام الفيزيائي المعبر.
- الفصل الثالث والذي يحتوي على عرض النتائج العددية والمناقشة الخاصة بكثافة الجسيمات في فضاء فورييه بالإضافة الى مقارنة نتائج هاته الدراسة مع اعمال سابقة [7-8] التي اهتمت بكثافة الجسيمات في الفضاء الفيزيائي الحقيقي، و نتناول أيضا دراسة معامل التشتت المرن مع إعطاء التفسيرات الممكنة للتوزيع الزاوي للضوء المشتت بصورة مرنة بواسطة الغاز.
- الخاتمة ونُجمل فيها أهم النقاط التي تناولناها في المذكرة.

الفصل الأول

مصفوفة الكثافة لبloch وعلاقتها ببعض المقادير الفيزيائية

Bloch Density Matrix and its relations with some physical quantities

1. مقدمة

يُعدّ استعمال مصفوفة الكثافة لبلوخ (Bloch density matrix) [9]، والتي يُرمز لها بـ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ ، في دراسة بعض الجمل الفيزيائية المكوّنة من عدد كبير من الجسيمات أحد الطرق الرياضية المنتشرة في البحوث المتعلقة بمسائل البحث عن الخصائص الفيزيائية للغازات المنحلة [9-12]، خاصة منها تلك التي تكون دوالها الموجية معقدة العبارة - إن كانت معروفة بدقة - بحيث لا تسمح بالحصول على نتائج تحليلية مُرضية. إنّ اهتمامنا بهذه الأداة الرياضية في معالجة الجملة الفيزيائية التي سنتناولها في هذه المذكرة يعود أساسا إلى عدة أسباب تقنية نذكر منها ما يلي:

- أنه يمكن من الناحية الرياضية دراسة بعض خصائص النظام الفيزيائي وذلك من خلال العلاقات الرياضية التي تربط هذه المقادير بمصفوفة بلوخ، مثل علاقتها بكثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ و الكثافة في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ ، وكذا كثافة الحالات $g(\varepsilon)$ ، إلخ.

- أنها تغنينا عن عناء البحث عن الدوال الموجية للجملة عبر حل معادلة شرودينغر فيما يخص مجال اهتمامنا هنا.

- استعمالها يسمح لنا بالحصول على النتائج الرئيسية لهذه المذكرة كما سنرى في الفصلين القادمين.

إنّ اهم علاقة تربط بين مصفوفة الكثافة لبلوخ مع المقادير الفيزيائية لهذا النوع من الجمل هي علاقتها بمصفوفة كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ وذلك بالربط بين هذه الأخيرة وبين ما يسمى بتحويل لابلاس المعكوس (ILT) لمصفوفة كثافة بلوخ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ ، لأن هذه العلاقة ستسمح بالحصول على باقي المقادير التي تُستخرج من $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ والتي يمكن الحصول عليها مبدئيا بالبحث عن دوال الموجة للجملة إن أمكن ذلك. باستعمال هذا الربط بين المصفوفتين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ و $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ أمكن دراسة كثير من خصائص الغازات فائقة البرودة [10-12].

في الحقيقة، لقد تمكن الباحثون المشار إليهم في الأعمال السابقة من الحصول على توزيع الجسيمات في الفضاء الحقيقي والمتمثلة في كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ إذ أنه تم إيجاد عبارات دقيقة فيما يخص هذا المقدار من أجل جمل فيزيائية متنوعة، منها جملة غاز من الفيرميونات الحرة أو المحصورة بواسطة كمون إرجاع الخاص بالهزاز التوافقي سواء كان متماثّل المناحي او غير متماثّل المناحي، وكذلك بالنسبة لجمال الغازات المكونة من الذرات المحايدة كهربائيا و الخاضعة لدوران تحت تأثير كمون هزاز توافقي متماثّل المناحي أو، بصورة مكافئة، جملة الجسيمات المشحونة تحت تأثير حقل مغناطيسي و كمون هزاز توافقي متماثّل المناحي [11-13]. إن دراسة الجسيمات الخاضعة للدوران (وربما أيضا لكمون حصر معين V) تبين لنا وجود علاقة تشابه مع دراسة جملة من الجسيمات المشحونة الخاضعة لحقل مغناطيسي. يمكن الرجوع في هذا الصدد إلى المرجع [6] الذي تناول بالتفصيل هذا الموضوع.

إن ما سنقوم به في هذا الفصل هو التعريف بمصفوفة الكثافة لبلوخ وكذا تبين علاقتها ببعض المقادير الفيزيائية المهمة ككثافة توزيع الجسيمات، وكثافة الحالات، ... إلخ. إضافة إلى ذلك سنعطي العبارات الجبرية المختلفة لها من

أجل بعض الجمل الخاصة والتي يمكن إيجاد طرق اشتقاقها في الأعمال المذكورة في موضعها، كما سنقوم بتقديم طريقة بسيطة لإيجاد طيف الطاقة انطلاقاً من عبارة مصفوفة بلوخ بدون معرفة الدوال الموجية المرافقة للطيف الخاص بالجملة المعنية الموافقة للطيف الطاقوي

من المهم أن نشير في هذا السياق قبل المُضي في اشتقاق العلاقات المختلفة إلى أن كل التعاريف والمتطابقات الرياضية المستخدمة أثناء البحث عن العلاقات المختلفة في هذه المذكرة تم الرجوع فيها إلى [19] حيث اكتفينا به لوحده نظراً لشموله. كما نشير أيضاً إلى أن التعاريف الأولية الخاصة بالمقادير الفيزيائية المذكورة تم الرجوع فيها إلى [9]، [20].

2. مصفوفة الكثافة لبلوخ (BDM)

يمكن الحصول على عناصر مصفوفة الكثافة لبلوخ من أجل جملة نظام مدروس عند درجة حرارة مأخوذة مساوية للصفر المطلق $T = 0K^\circ$ انطلاقاً مما يُعرف بمؤثر بلوخ والمعرف ب:

$$(1.1) \quad C = \exp(-\xi H)$$

حيث أن H ما هو إلا مؤثر الهاملتوني للنظام و ξ هو عدد مركب جزؤه الحقيقي موجب كما سنرى فيما بعد. إن عناصر هذه المصفوفة في تمثيل الموضع تكتب كما يلي:

$$(2.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \langle \mathbf{r} | \exp(-\xi H) | \mathbf{r}' \rangle$$

بإدخال علاقة الانغلاق الخاصة بالأشعة الذاتية المتعامدة والمعيّرة $\{|i\rangle\}$ لهاملتوني جسيم واحد و المشكلة لقاعدة فضاء أشعة الموجة نجد:

$$(3.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \sum_{i,j} \langle \mathbf{r} | i \rangle \langle i | e^{-\xi H} | j \rangle \langle j | \mathbf{r}' \rangle = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_i^*(\mathbf{r}') e^{-\xi E_i}$$

حيث أن $\varphi_i(\mathbf{r})$ تمثل الدوال الذاتية لهاملتوني H والتي هي حلول معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن:

$$(4.1) \quad H\varphi_i(\mathbf{r}) = E_i\varphi_i(\mathbf{r})$$

و E_i هي قيم الطاقة الذاتية الموافقة لها. إن الحرف i في شعاع الحالة $|i\rangle$ يشير إلى كل الأعداد الكمية الخاصة بالنظام المدروس. بالنسبة لجملتنا، سنرى في الفقرة الخامسة من هذا الفصل أنه في بعدين يكون لدينا $|i\rangle \equiv |n, m\rangle$ حيث أن n و m تمثلان الأعداد الكمية المميزة لحالة الجملة، أي أن المجموع سيكون على كل القيم الممكنة لهما. لذلك نُفضّل أن نكتب (4.1) على الصورة التالية:

$$(5.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') e^{-\xi E_{nm}}$$

إن العلاقة (5.1) يمكن أن توحى بأنه لإيجاد عناصر مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ لابد من معرفة الدوال الذاتية. ولكن في الحقيقة يمكن إيجادها بطرق رياضية مختلفة من أجل جعل مختلفة دون معرفة دوالها الذاتية إذ يكفي لذلك معرفة هاملتوني الجملة فقط [14-15].

إن العناصر القطرية لمصفوفة الكثافة لبلوخ، والتي نرسم لها ب $C(\mathbf{r}; \xi)$ ، نتحصل عليها من خلال (5.1) كما يلي:

$$(6.1) \quad C(\mathbf{r}; \xi) = C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \xi)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}) e^{-\xi E_{nm}}$$

يمكننا باستخدام علاقة التقنين للدوال الذاتية $\varphi_{nm}(\mathbf{r})$ أن نستخرج العلاقة التالية:

$$(7.1) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \sum_{n,m} e^{-\xi E_{nm}} \overbrace{\left(\int \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)}^{=1} = \sum_{n,m} \exp(-\xi E_{nm})$$

سنحتاج هذه العلاقة عند استخراج طيف الطاقة للنظام الذي سندرسه، كما أنها ستسمح لنا بربط كثافة الحالات مع العناصر القطرية $C(\mathbf{r}; \xi)$.

3. علاقة مصفوفة الكثافة لبلوخ ببعض المقادير الفيزيائية

نود قبل أن نبدأ بإبراز العلاقات التي تربط بين مصفوفة الكثافة لبلوخ وعناصرها القطرية مع المقادير الفيزيائية الأخرى أن نقدم قبل ذلك عرضاً موجزاً لتحويل لابلاس وتحويله المعكوس حتى يكون اشتقاق العلاقات الآتية فيما بعد واضحاً بصورة كافية.

أ- تحويل لابلاس \mathcal{L} وتحويله المعكوس \mathcal{L}^{-1}

إن تحويل لابلاس لدالة ما $f(\mu)$ ، والذي نرمز له ب $\mathcal{L}\{f(\mu)\}$ يعطى بالتكامل التالي:

$$(8.1) \quad \mathcal{L}\{f(\mu)\} = F(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi\mu} f(\mu) d\mu \quad ; \text{Re}(\xi) > 0$$

حيث إن معرفة إحدى الدالتين تسمح بمعرفة الأخرى انطلاقاً من هذا التحويل.

من جهة أخرى يعطى تحويل لابلاس المعكوس بالتكامل التالي:

$$(9.1) \quad \mathcal{L}_\mu^{-1}\{F(\xi)\} = f(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\xi) \exp(\xi\mu) d\xi$$

حيث أن c هو عدد حقيقي أكبر من الجزء الحقيقي لكل نقاط تفرّد الدالة $F(\xi)$.

نود أن نتناول هنا مثالين مهمين نحتاجهما في الفقرات القادمة وهما دالة القفزة لهيفيزايد ودالة دلتا ديراك.

مثال 1: تحويل لابلاس المعكوس لدالة القفزة Θ لهيفيزايد Heaviside

بالتعريف، دالة القفزة لهيفيزايد $\Theta(x)$ هي الدالة التي تساوي 1 أو 0 من أجل $x > 0$ أو $x < 0$ على الترتيب. سنحتاج فيما سيأتي إليها بحيث تكون من الشكل $\Theta(\mu - E_{n,m})$ والتي يمكن كتابتها على شكل تحويل لابلاس المعكوس كما يلي:

$$(10.1) \quad \Theta(\mu - E_{nm}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp[\xi(\mu - E_{nm})]}{\xi} d\xi$$

أين أخذنا $(F(\xi) = \exp(-\xi E_{nm})/\xi)$ ، وبالتالي يكون c عدد حقيقياً موجباً.

مثال 2: تحويل لابلاس المعكوس لدالة دلتا ديراك $\delta(\varepsilon)$

دالة دلتا ديراك، أو بالأحرى دالة التوزيع دلتا، هي التي تكون معدومة في جميع النقاط ماعدا عند النقطة ε التي تكون عندها لانهائية. في الحقيقة سنحتاجها عند إيجاد العلاقة بين كثافة الحالات وكثافة بلوخ بحيث تكون من الشكل $\delta(\varepsilon - E_{nm})$ والتي يمكن كتابتها على شكل تحويل لابلاس المعكوس كما يلي:

$$(11.1) \quad \delta(\varepsilon - E_{nm}) = \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}\{\exp(-\xi E_{nm})\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp[\xi(\varepsilon - E_{nm})] d\xi$$

ب- العلاقة بين $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ و $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$

تعتبر مصفوفة كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ من أهم المقادير الفيزيائية التي نرغب في معرفتها عند دراسة المسائل ذات N جسيم عموماً، وذلك لارتباطها بمعظم المقادير المميزة لخصائص النظام الفيزيائي. تُعطى عبارة مصفوفة كثافة الجسيمات لنظام مُكوّن من N جسيمة فيرميونية غير متفاعلة فيما بينها وعند درجة الحرارة $T = 0K^\circ$ كما يلي:

$$(12.1) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \Theta(\mu - E_{nm})$$

حيث ان μ هو الكمون الكيميائي للجلمة (طاقة مستوي فارمي E_F في هذه الحالة) عند درجة الحرارة $T = 0K$. لقد تم إدخال دالة القفزة لهيفيزايد $\Theta(\mu - \varepsilon_{n,m})$ في المجموع أعلاه (12.1) من أجل احتساب الحالات المشغولة فقط التي طاقتها أقل أو تساوي طاقة فيرمي.

من أجل ربط مصفوفة بلوخ بمصفوفة كثافة الجسيمات نستفيد من عبارة تحويل لابلاس المعكوس ل $\Theta(\mu - \varepsilon_{n,m})$ حيث يمكننا استخدام العبارتين (10.1) و(12.1) و نكتب:

$$(13.1) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \xi^{-1} \left(\sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \exp(-\xi E_{nm}) \right) \right\}$$

نلاحظ هنا ظهور عبارة مصفوفة الكثافة لبلوخ المعطاة بالعلاقة (5.1)، إذن يمكننا الان كتابة مصفوفة كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ بدلالة مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ بشكل صريح كما يلي :

$$(14.1) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)}{\xi} \right]$$

ت- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ وكثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$

تعرف كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ و $C(\mathbf{r}, \xi)$ على انهما العناصر القطرية للمصفوفتين $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ و $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ على الترتيب، أي أن :

$$(15.1) \quad \begin{cases} \rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \\ C(\mathbf{r}, \xi) = C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \xi)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \end{cases}$$

إذن من العلاقة (14.1) نجد مباشرة أن :

$$(16.1) \quad \rho(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{C(\mathbf{r}; \xi)}{\xi} \right]$$

من شرط التقنين لكثافة الجسيمات المحلية فإن العدد الكلي للجسيمات N هو تكامل $\rho(\mathbf{r})$ على كل الفضاء الفيزيائي، أي :

$$(17.1) \quad \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N$$

ث- العلاقة بين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ وكثافة التيار $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

ترتبط علاقة كثافة التيار $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ بمصفوفة الكثافة للجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ بالعلاقة التالية:

$$(18.1) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2m^*i} [(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

حيث أن m^* تشير إلى كتلة كل جسيم وذلك تمييزاً لها عن العدد الكمي m . نستطيع استغلال العلاقة (14.1) لكتابة كثافة التيار $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ بدلالة مصفوفة بلوخ. في الحقيقة نتحصل على العلاقة التالية:

$$(19.1) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2m^*i} \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left[(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \left(\frac{C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)}{\xi} \right) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

ج- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ و كثافة الجسيمات في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$

نبدأ أولاً بصورة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ ذي بُعد d ، بصفة عامة، والتي تعطى بواسطة التحويل الآتي لكثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$:

$$(20.1) \quad n(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d^d\mathbf{r}$$

و منه فالعكس هذا التحويل في الفضاء الفيزيائي (الحقيقي) هو:

$$(21.1) \quad \rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^d \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} n(\mathbf{k}) d^d\mathbf{k}$$

كما فعلنا مع المقادير السابقة، يمكننا الآن ربط $n(\mathbf{k})$ ب $C(\mathbf{r}; \xi)$ إذا استخدمنا العلاقات (16.1) و (20.1) لنتحصل على:

$$(22.1) \quad n(\mathbf{k}) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \xi^{-1} \left(\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} C(\mathbf{r}; \xi) d^d\mathbf{r} \right) \right\} = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{C}(\mathbf{r}; \xi)}{\xi} \right\}$$

حيث وضعنا قصد التبسيط والاختصار:

$$(23.1) \quad \tilde{C}(\mathbf{r}; \xi) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} C(\mathbf{r}; \xi) d^d\mathbf{r}$$

الذي هو عبارة عن تحويل فورييه ل $C(\mathbf{r}; \xi)$ في d بعد.

في العمل المنجز في مذكرتنا هذه سنهتم بحالتين، وهما تحويل فورييه في بعدين وثلاثة أبعاد. وعلى هذا تصبح العبارة (23.1) مثلاً في حالة بعدين كما يلي:

$$(24.1) \quad \tilde{C}(\mathbf{r}; \xi) = \int e^{-i(k_x x + k_y y)} C(x, y; \xi) dx dy$$

أيضا بالنظر إلى شرط التقنين (17.1) والعلاقة (20.1) نستنتج بسهولة العلاقة عدد جسيمات النظام N و كثافة الجسيمات في فضاء فورييه :

$$(25.1) \quad n(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = N$$

إن هذه العلاقة الأخيرة ذات أهمية خاصة رغم بساطتها حيث أنها ستسمح لنا انطلاقا من عبارة $n(\mathbf{k})$ ، بتحديد قيمة مستوى فيرمي للنظام المدروس وربطه بالوسائط المختلفة له من سرعة دوران وشدة كمون الأسر وكذا عدد الجسيمات الكلي للنظام، كما سنرى في الفصول القادمة.

ح- العلاقة بين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ والكثافة الطيفية $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)$

إن الكثافة الطيفية و كثافة الحالات تعتبر مقادير جد مهمة في دراسة الخصائص الالكترونية وغيرها للأجسام الصلبة، ولذلك ارتابنا أن نقدم هنا طريقة الربط بين هذين المقدارين وبين مصفوفة الكثافة لبلوخ وكذا عناصرها القطرية. تُعطي الكثافة الطيفية بالعلاقة التالية:

$$(26.1) \quad g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) = \langle \mathbf{r} | \delta(\varepsilon - H) | \mathbf{r}' \rangle = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \delta(\varepsilon - E_{nm})$$

باستخدام خواص دالة دلتا ديراك يمكن أن نستنتج أن :

$$(27.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi \varepsilon} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) d\varepsilon = \mathcal{L}\{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)\}$$

فيمكن بسهولة استنتاج أن مصفوفة الكثافة الطيفية $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)$ ماهي إلا تحويل لابلاس المعكوس لمصفوفة الكثافة لبلوخ، وعليه يكون :

$$(28.1) \quad g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) = \mathcal{L}_\mu^{-1}\{C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)\}$$

في الحقيقة، يمكننا أيضا الحصول على نفس النتيجة بطريقة مباشرة لو قمنا بتعويض العلاقة (11.1) في (26.1).

خ- العلاقة بين $C(\mathbf{r}; \xi)$ وكثافة الحالات $g(\varepsilon)$

تعطي كثافة الحالات بالعلاقة التالية:

$$(29.1) \quad g(\varepsilon) = \text{Tr } \delta(\varepsilon - H)$$

في تمثيل الموضع يمكننا أن نكتب العلاقة (29.1) كما يلي:

$$g(\varepsilon) = \int \langle \mathbf{r} | \delta(\varepsilon - H) | \mathbf{r} \rangle d\mathbf{r} = \sum_{n,m} \delta(\varepsilon - E_{nm}) \overbrace{\left(\int \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)}^{=1}$$

حيث استخدمنا في الطرف الأخير خاصية تقنين الدوال الذاتية للهاملتوني. إذن باستخدام (11.1) نجد أن:

$$(30.1) \quad g(\varepsilon) = \mathcal{L}_\varepsilon^{-1} \left\{ \sum_{n,m} \exp(-\xi E_{nm}) \right\} = \mathcal{L}_\varepsilon^{-1} \left\{ \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} \right\}$$

د- العلاقة بين $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ و كثافة الطاقة الحركية $\tau(\mathbf{r})$

إن عبارة كثافة الطاقة الحركية تعطى بالعلاقة التالية:

$$(31.1) \quad \tau(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i'} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = [(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

بما أن كثافة الطاقة الحركية مرتبطة بمصفوفة كثافة الجسيمات فيمكننا إذن ربطها بواسطة مصفوفة الكثافة لبلوخ وذلك بإدراج العلاقة (14.1) في العبارة (31.1) لتتوصل على:

$$(32.1) \quad \tau(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} [(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \right\}$$

ذ- العلاقة بين عدد الجسيمات N و $C(\mathbf{r}; \xi)$

يمكننا الحصول على العلاقة بين عدد جسيمات النظام المدروس N و العناصر القطرية لمصفوفة بلوخ وذلك انطلاقاً من العلاقة التي تم الحصول عليها باستخدام شرط التقنين (17.1) للكثافة المحلية $\rho(\mathbf{r})$ والتي أوصلتنا إلى العلاقة (25.1) والتي يمكن كتابتها أيضاً بشكل صريح بدلالة $C(\mathbf{r}; \xi)$ وذلك بإدراج (22.1) في (25.1) لنجد في النهاية:

$$(33.1) \quad N = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \xi^{-1} \left(\int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} \right) \right\} = \sum_{n,m} \Theta(\mu - E_{nm})$$

4. عبارة مصفوفة بلوخ لبعض الجمل الخاضعة لحقل دوران

نورد في هذه الفقرة العبارات التحليلية الخاصة بمصفوفة الكثافة لبلوخ الخاصة بنظام مكون من N جسيم خاضع لحقل دوران حول المحور Oz العمودي على مستوى الدوران. بالإضافة إلى أن هذا النظام خاضع لكمون هزاز توافقي

يمكن أن يكون متماثل أو لا تماثل المناحي، كما نُذكر أن موضوع دراستنا في الفصول القادمة يتناول هذه الحالة الخيرة، أي الكمون اللامتماثل النواحي في حالة الدوران.

أ- كمون هزاز توافقي متماثل المناحي في حالة دوران

نعتبر الجملة الفيزيائية المدروسة عبارة عن N من الذرات الفيرميونية المستقلة (غير المتفاعلة فيما بينها) والمتعادلة كهربائياً، ولكل منها كتلة m^* ، مَحْصُورَة في فضاء ذو بعدين، وليكن المستوي (Oxy) ، بواسطة كمون حصر يكون شديداً جداً وفق المحور Oz حتى يمكن اعتبار النظام ثنائي البعد، ويكون على مَحْوَرِيّ المستوي (Oxy) مُمَاتِلًا لكمون هزاز توافقي متماثل المناحي حيث $V(\mathbf{r}) = (m^* \omega_0^2 / 2) \mathbf{r}^2$. إن وضع هذه الجملة في حالة دوران بسرعة زاوية Ω عمودية على مستوى النظام يؤدي إلى ظهور حد الدوران $(\Omega \cdot \mathbf{L})$ في عبارة الهاملتوني الخاص بجسيم واحد و المعبر عنه في المعلم الدوّار كما يلي [6]:

$$(34.1) \quad H_{rot} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2 - \Omega \cdot \mathbf{L}$$

حيث أن \mathbf{L} هو العزم الحركي المداري لجسيم من الجملة.

من الملاحظ أنّ عبارة هذا الهاملتوني تتشابه مع هاملتوني جسيمة مشحونة ذات الشحنة q خاضعة لحقل مغناطيسي منتظم \mathbf{B} عمودي على مستوى الجملة :

$$(35.1) \quad H_{mag} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_L^2 \mathbf{r}^2 - \omega_L \cdot \mathbf{L}$$

حيث أن $\omega_L = \frac{q}{2m^*} \mathbf{B}$ هو تواتر لارمور Larmor. لمزيد من التوضيح والتفصيل حول التكافؤ دوران - حقل مغناطيسي يمكن الرجوع إلى [6، 16].

لقد تم اشتقاق العبارة التحليلية لعناصر مصفوفة الكثافة لبلوخ من أجل هذه الجملة [11-12]، والتي تعطى عناصرها القطرية بالعلاقة التالية:

$$(36.1) \quad C(\mathbf{R}, \mathbf{S}; \xi) = \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[\frac{im^* \omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} (\mathbf{R} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{e}_z \right] \\ \times \exp \left[\frac{-m^* \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{R}^2 \right] \\ \times \exp \left[\frac{-m^* \omega_0}{4\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) + \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{S}^2 \right]$$

اين قمنا بإدخال احداثيات مركز الكتلة $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$ والنسبية $\mathbf{S} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

ب- كمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي في حالة دوران

من أجل نفس الجملة السابقة ونفس الشروط ولكن في حالة كمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي $V(\mathbf{r}) = (m^*/2)(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$ مع العلم ان ω_x و ω_y هما تواتري الحصر على المحورين (Ox) و (Oy) على الترتيب. في هذه الحالة سيكون هاملتوني الجسم في المعلم الدوار:

$$(37.1) \quad H = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

وتكون مصفوفة بلوخ لهذه الجملة [15، 18]:

$$(38.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = g(\xi) \exp \left[- \left(\frac{iA}{\hbar B} \right) (xy - x'y') \right] \exp [a(x + x')^2 + a'(x - x')^2 + b(y + y')^2 + b'(y - y')^2 + c(x + x')(y - y') + c'(x - x')(y + y')]]$$

حيث ان المعاملات $a, a', b, b', c, c', g(\xi), A, B$ تمثل دوال متعلقة بتواترات الهزاز التوافقي (ω_x, ω_y) ، والسرعة الزاوية Ω والعدد المركب ξ . (ولمعرفة عبارات هاته المعاملات أنظر الى الملحق في اخر المذكرة). فقط نود أن نعرض في هذا السياق عبارات الكتل والتواترات الجديدة التي تظهر عند اشتقاق العبارة (38.1) والتي سنكون بحاجة اليها فيما بعد وهي:

$$(39.1) \quad \mu_{\pm} = \frac{2m^* S}{S + (\omega_x^2 - \omega_y^2) \pm 4\Omega^2}$$

$$(40.1) \quad \Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 \pm S)$$

$$\text{حيث: } S = \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$

قبل الانتهاء من هذه الفقرة، نود إدخال بعض الوسائط التي سنستخدمها في الفصول القادمة والتي تسمح لنا بتغيير حالة النظام حسب سرعة دورانه أو حسب شدة كمون الحصر الذي يتعرض له مما سيؤثر حتما على خصائصه الفيزيائية كما سنرى في الفصل الثالث. الوسيط الأول هو الذي يشير إلى شدة كمون الحصر والذي نعرفه كما يلي:

$$(41.1) \quad \delta = \frac{\omega_y}{\omega_x} \geq 1$$

بحيث يدل على أننا اخترنا أن لا تماثل مناحي كمون الحصر سيكون بحيث تكون شدته على المحور (Ox) أقل من شدته على المحور (Oy)، نسميه عامل التباين. ولمعرفة سلوك الجملة تحت تأثير الدوران نعرف معاملا آخر مشابه لعامل التباين δ وهو معامل الدوران η والذي يُعرّف كما يلي:

$$(42.1) \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_x} \leq 1$$

والذي يسمح بمعرفة تأثير زيادة نسبة سرعة الدوران على خصائص للنظام. إن الشرط الموضوع في (42.1) تم من أجل الحفاظ على استقرار النظام بحيث لا ينفلت تحت تأثير القوة الطاردة الناشئة عن تخطي سرعة الدوران سرعة الأسر الكموني وفق المحور (Ox).

إذا كانت نفس الجملة خاضعة لنفس الكمون ولكن في حالة 3 أبعاد فإن مصفوفة الكثافة لبلوخ تأخذ الشكل الأكثر عمومية من السابق بحيث تحتوي على مساهمة المحور (Oz) [15، 18]:

$$(43.1) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = G(\xi) \exp \left[- \left(\frac{iA}{\hbar B} \right) (xy - x'y') \right] \exp [a(x + x')^2 + a'(x - x')^2 + b(y + y')^2 + b'(y - y')^2 + d(z + z')^2 + d'(z - z')^2 + c(x + x')(y - y') + c'(x - x')(y + y')]]$$

5. الحصول على طيف طاقة الجملة من خلال مصفوفة بلوخ

أ- طيف طاقة جملة جسيمات تحت تأثير كمون هزاز توافقي متماثل المناحي في حالة دوران

يمكن الحصول على طيف طاقة جسيمات الجملة بسهولة انطلاقاً من تكامل العناصر القطرية لمصفوفة الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}; \xi)$ على كامل الفضاء الحقيقي. في الحقيقة إن العناصر القطرية لمصفوفة بلوخ تعطى في هذه الحالة وفقاً للعبارة (36.1) كما يلي:

$$(44.1) \quad C(\mathbf{r}; \xi) = \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \times \exp \left[\frac{-2m^* \omega_0 \sinh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 + \Omega)}{2} \right) \sinh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 - \Omega)}{2} \right)}{\hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \mathbf{r}^2 \right]$$

فيكون التكامل المضاعف على كامل المستوي الذي يحتوي النظام إذن:

$$(45.1) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sinh(\xi \hbar(\omega_0 + \Omega)/2) \sinh(\xi \hbar(\omega_0 - \Omega)/2)}$$

حيث استخدمنا نتيجة التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\pi/\alpha}$ باستعمال نشر تايلور التالي:

$$(46.1) \quad \sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(2n+1)x)$$

نصل الى العبارة التالية:

$$(47.1) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left\{ -\xi \left[\hbar(\omega_0 + \Omega) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar(\omega_0 - \Omega) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

بمقارنة هذه العبارة الأخيرة مع العبارة (7.1) نجد عبارة طيف طاقة هذه الجملة دون اللجوء الى البحث عن الدوال الموجية:

$$(48.1) \quad E_{nm} = \hbar(\omega_0 + \Omega) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar(\omega_0 - \Omega) \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

حيث $n, m = 0, 1, 2 \dots$

إنّ هذا الطيف يشبه طيف الطاقة الخاص كمون هزاز توافقي متمائل المناحي في بعدين والذي يحتوي على الترددات الخاصة به $(\omega_0 + \Omega)$ و $(\omega_0 - \Omega)$.

نستطيع أن نلاحظ من خلال هذه العبارة أنه عندما تكون سرعة الدوران Ω قريبة من السرعة الحرجة او سرعة فائقة الدوران، أي $\Omega \approx \omega_0$ ، فإن هذا يعني أن قوة الطرد المركزي $m^* \Omega^2 r$ تكون متوازنة مع قوة الحصر $-m^* \omega_0^2 r$ ، وعندها تظهر مستويات لانداو شديدة الانحلال ذات الطيف الطاقوي $E_{n,m} = \hbar \omega_0 (2n+1)$. حيث n يحدد كل مستوى من مستويات لانداو و يعطي m عندئذ درجة الانحلال لهذا المستوي. في الحقيقة، إن عدد الانحلال m يأخذ قيما كبيرة في حالة النظام الدوراني السريع جداً. أي أن الوضع $\Omega \approx \omega_0$ يوضح لنا جليا أن طيف الطاقة (48.1) يصبح مشابها تماما لطيف لانداو المعروف من أجل جسيمات مشحونة الخاضعة لحقل مغناطيسي شديد وهذا أمر متوقع نظرا لتمائل هاملتوني الجملتين كما رأينا من خلال العلاقتين (34.1) و (35.1).

ب- طيف طاقة جملة جسيمات تحت تأثير كمون هزاز توافقي لا متمائل المناحي في حالة دوران

باتباع نفس طريقة الحساب كما في الفقرة السابقة يمكننا إيجاد طيف طاقة الجملة في هذه الحالة باستخدام العلاقة

(38.1) في حالة بعدين و (43.1) في حالة ثلاثة أبعاد. نعالج حالة بعدين أولا حيث أنه من أجل $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ تصبح (38.1) كما يلي:

$$(49.1) \quad C(\mathbf{r}; \xi) = g(\xi) \exp[4ax^2 + 4by^2]$$

باستخدام عبارة المعاملات المعطاة في الملحق في اخر هذه المذكرة نجد:

$$(50.1) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \left[4 \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2}\right) \right]^{-1}$$

و بتطبيق العلاقة (46.1) فإن العبارة (50.1) تصبح كما يلي:

$$(51.1) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \exp\left[-\xi \left(\hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2}\right) \right)\right]$$

بمقارنتها مع العلاقة (7.1) فإن طيف الطاقة للجملة يُعطى بالعبارة التالية:

$$(52.1) \quad E_{n,m} = \hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

حيث أن التواترات Ω_{\pm} معطاة بالعبارات (40.1).

نشير في اخر هذا الفصل إلى أنه في حالة الدوران السريع يظهر لنا هنا أيضا طيف لاندو بحيث يكون عند سرعات الدوران الكبيرة جدا $\Omega_- \gg \Omega_+$ وتبقى المناقشة المذكورة في الفقرة السابقة صالحة للأعداد الكمية n و m .

يمكن تمديد هذه الطريقة لمعالجة حالة ثلاثة أبعاد لنحصل في الأخير على:

$$(53.1) \quad E_{nm\ell} = \hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2}\right) + \hbar \omega_z \left(\ell + \frac{1}{2}\right)$$

حيث $n, m, \ell = 0, 1, 2 \dots$

الفصل الثاني

كثافة الجسيمات في فضاء فورييه لغاز من الفيرميونات فائق البرودة خاضع لكمون هزاز
توافقي لا متماثل المناحي في حالة دوران.

Particle density in Fourier space for a rotating anisotropic harmonic trap of
an ultra-cold Fermi gas

1. مقدمة

بعد ما رأينا في الفصل السابق العبارات الجبرية لمصفوفة الكثافة لبلوخ من أجل بعض الجمل الخاضعة لكمون هزاز توافقي متمائل وغير المتمائل المناحي في حالة دوران، يُمكننا الآن اشتقاق عبارة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه التي ستساعدنا على فهم ووصف سلوك النظام المعتبر هنا وخاصة عند بعض الحالات الحدية من دوران بسرعات حرجة أو الحصر بكمونات شديدة على أحد المحورين أين يمكن للجمل الانتقال من النظام ثنائي البعد إلى النظام أحادي البعد. لكن ما نود ان نشير إليه أولا هو عدم امتلاك هذه الكمية الفيزيائية المهمة، أي كثافة الجسيمات في الفضاء الحقيقي، لعبارة تحليلية دقيقة وشاملة، فقد نشرت أعمال سابقة [7-8] اهتمت بدراسة مثل هذا النظام إلا أن ما تمّ التوصل إليه هو مجرد تقريبات للحل في حالة وجود جسيمات الجمل في الحالات المنخفضة للطاقة أين يتم الاعتماد في حساب كثافة الجسيمات المحلية على بعض التوابع المرافقة للحالات الدنيا والاكتفاء بها.

إنّ لا تماثل المناحي لكمون الهزاز التوافقي مقترنا بحقل الدوران يجعل من الحصول على العبارة التحليلية ل $\rho(\mathbf{r})$ أمرا معقدا. لهذا توجب علينا الانتقال الى صورتها في فضاء فورييه والتي رمزنا لها سابقا ب $n(\mathbf{k})$ وهذا لإمكانية حسابها (توزيع الجسيمات) في فضاء فورييه في بعدين وثلاثة ابعاد. ولكن قبل ذلك نتعرض لكيفية اشتقاقها من أجل كمون متمائل المناحي أين تكون كثافة الجسيمات في الحقيقي معروفة [13، 16].

2. عبارة كثافة الجسيمات المحلية من أجل كمون متمائل المناحي في حالة دوران

من خلال العلاقة (36.1) يُمكن كتابة مصفوفة الكثافة لبلوخ، بعد تعويض النشور الخاصة بالدوال الزائدية

(hyperbolic functions) الموجودة في العبارة الأصلية، على الشكل الآتي:

$$(1.2) \quad C(\mathbf{R}, \mathbf{s}; \xi) = \frac{m^* \omega_0}{\pi \hbar} \exp(-A) \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_K^{m+n}(2A) \frac{B^m B^n}{m! n!} \\ \times \exp[-\xi(2K\hbar\omega_0 + (n+m+1)\hbar\omega_0 + (n-m)\hbar\Omega)]$$

أين فُمنّا باستخدام الاختصارات التالية في العبارة اعلاه كما يلي:

$$(2.2) \quad \begin{cases} A = \frac{m^* \omega_0}{\hbar} \left(\mathbf{R}^2 + \frac{\mathbf{s}^2}{4} \right) \\ B = \frac{m^* \omega_0}{\hbar} \left[\left(\mathbf{R}^2 + \frac{\mathbf{s}^2}{4} \right) + i(\mathbf{R} \times \mathbf{s}) \mathbf{e}_z \right] \\ B^* = \frac{m^* \omega_0}{\hbar} \left[\left(\mathbf{R}^2 - \frac{\mathbf{s}^2}{4} \right) - i(\mathbf{R} \times \mathbf{s}) \mathbf{e}_z \right] \end{cases}$$

حيث أن L_K^{m+n} هي كثيرات حدود ذات الدرجة k .

ومن العلاقة (14.1) بين $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ و $c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ نجد:

$$(3.2) \quad \rho(\mathbf{R}, \mathbf{s}, \mu) = \frac{m^* \omega_0}{\pi \hbar} \exp(-A) \times \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_k^{n+m}(2A) \frac{B^m B^{*n}}{m! n!} \Theta[\mu - (2K\hbar\omega_0 + \varepsilon_{n,m})]$$

ان كثافة الجسيمات المحلية تمثل العناصر القطرية لمصفوفة كثافة الجسيمات أي $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{R}, \mathbf{s}, \mu)|_{s=0}$ ، وبالتالي يكون:

$$(4.2) \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-\mathbf{r}^2/\alpha^2)}{\pi\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{r}/\alpha)^{2(m+n)}}{m! n!} L_k^{m+n} \Theta[\mu - (2K\hbar\omega_0 + \varepsilon_{n,m})]$$

وتعطى صورة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه كما يلي:

$$(5.2) \quad n(\mathbf{k}) = \exp(-\alpha_{oh}^2 \mathbf{k}^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n \left(\frac{\alpha_{n0}^2 \mathbf{k}}{4} \right) l_m \left(\frac{\alpha_{oh}^2 \mathbf{k}}{4} \right) \Theta(\mu - E_{n,m})$$

وقد اعتمد عليها في دراسة بعض الخصائص الكمية لهذه الجملة مثل مفعول الطبقات (shell effect) الذي يظهر تأثيره على شكل كثافة الجسيمات في الفضاء الحقيقي [13]، كما تمت دراسة كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ وبعض الخصائص الترموديناميكية المتعلقة بها بما أن عبارتها التحليلية معروفة بصورة دقيقة [11]. في الحقيقة، يمكن الحصول على عبارة $\rho(\mathbf{r})$ مكافئة للعبارة (4.2) وذلك بالاستعمال المباشرة على دوال الموجة للنظام وليس باستخدام مصفوفة بلوخ حيث تم بواسطتها دراسة توزيع كثافة التيار ودراسة خصائصه [6، 16]

ما يهمنا الان هو حالة الكمون اللا تماثل المناحي في العنوان الاتي.

3. عبارة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه من أجل كمون لا تماثل المناحي

من العلاقة ما بين مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}; \xi)$ وكثافة الجسيمات في فضاء فورييه يمكننا إيجاد العبارة التحليلية لهذا المقدار انطلاقا من العلاقة الموالية:

$$(6.2) \quad n(\mathbf{k}) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left[\frac{\tilde{C}(\mathbf{k}; \xi)}{\xi} \right]$$

وكما نعلم من الفصل السابق ان $\tilde{C}(\mathbf{k}; \xi)$ ماهي إلا تحويل فورييه لمصفوفة الكثافة لبلوخ والمعطاة كما يلي:

$$(7.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = \int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r}$$

في البداية سنقوم بحساب $n(\mathbf{k})$ في بعدين ثم التعميم على 3 ابعاد و للاختصار سنقوم بحساب $\tilde{C}(\mathbf{k}; \xi)$ ثم التعويض في علاقة $n(\mathbf{k})$.

أ- في بعدين (2D)

بتعويض العلاقة (49.1):

$$C(\mathbf{r}; \xi) = G(\xi) \exp[4ax^2 + 4by^2]$$

في العلاقة (7.2) نجد:

$$\tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = g(\xi) \int \int \exp[-ik_x x - ik_y y] \exp[4ax^2 + 4by^2] dx dy$$

$$(8.2) \quad = g(\xi) \int dx \exp[-ik_x x + 4ax^2] \int dy \exp[-ik_y y + 4by^2]$$

حيث k_x, k_y مركبتي شعاع الموجة \mathbf{k} في بعدين. لدينا من المرجع [19] التكامل الشهير التالي:

$$(9.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-at^2 - i\beta t] dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-\beta^2}{4a}\right)$$

بتطبيق العلاقة (9.2) على العلاقة (8.2) وبتعويض كل من α و β بما يناسبهما من المعاملات المذكورة في الملحق اخر المذكرة نجد:

$$(10.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = \pi \hbar \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \cdot g(\xi) \exp\left[-\left(\frac{\hbar}{4}\right)(\gamma_1 k_x^2 + \gamma_2 k_y^2)\right]$$

نعوض عبارة $g(\xi)$ في العبارة أعلاه لنجد بعد التبسيط ما يلي:

$$(11.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_+ \Omega_+ \gamma_2}{\mu_- \Omega_- \gamma_1' \sinh(\xi \hbar \Omega_+) \sinh(\xi \hbar \xi)}} \exp\left[\left(-\frac{\hbar}{4}\right)(\gamma_1 k_x^2 + \gamma_1 k_y^2)\right]$$

والتي يمكن كتابتها أيضا باستخدام عبارات كل من γ_2 و γ_1 بالإضافة الى القيام ببعض الحسابات الرياضية نجد:

$$(12.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}, \xi) = \frac{1}{4} \frac{\exp \left[\frac{-\hbar}{4\mu_+\Omega_+} (k_y^2 + \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2 k_x^2) \coth \left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2} \right) \right]}{\sinh \left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2} \right)} \\ \times \frac{\exp \left[\frac{-\hbar}{4\mu_+\Omega_+} (k_x^2 + \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2 k_y^2) \coth \left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2} \right) \right]}{\sinh \left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2} \right)}$$

إذا استخدمنا النشور التالية المعطاة ادناه والتي تمثل الدالة المولدة لكثيرات حدود لاغير (Laguerre):

$$(13.2) \quad \frac{\exp \left[-x \coth \left(\frac{\xi \hbar \omega}{2} \right) \right]}{\sinh \left(\frac{\xi \hbar \omega}{2} \right)} = 2 \exp(-x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2x) \exp \left[-\xi \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$$

فان عبارة $\tilde{C}(\mathbf{k}; \xi)$ تصبح بالشكل الاتي:

$$(14.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = \exp \left[\frac{-\hbar(1 + \mu_+\Omega_+\mu_-\Omega_-B^2)(\mu_+\Omega_+k_x^2 + \mu_-\Omega_-k_y^2)}{4\mu_+\Omega_+\mu_-\Omega_-} \right] \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n \left\{ \left(\frac{\hbar}{2\mu_+\Omega_+} \right) (\mu_+^2 \Omega_+^2 B^2 + k_y^2) \right\} L_m \left\{ \left(\frac{\hbar}{2\mu_-\Omega_-} \right) (k_x^2 + \mu_-^2 \Omega_-^2 k_y^2) \right\} \exp[-\xi E_{n,m}]$$

حيث L_m و L_n هي كثيرات حدود لاغير ذات الدرجة n و m على الترتيب . اذا استخدمنا الاطوال $\lambda_{\pm} = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_{\pm}\Omega_{\pm}}}$

فإن العلاقة (14.2) تصبح بالشكل الاتي:

$$(15.2) \quad \tilde{C}(\mathbf{k}; \xi) = \exp \left[-\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_+^2 \lambda_-^2} \right) (\lambda_-^2 k_x^2 + \lambda_+^2 k_y^2) \right] \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_+^2} + \frac{\lambda_+^2 k_y^2}{2} \right) L_m \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_-^2} + \frac{\lambda_-^2 k_x^2}{2} \right) \exp(-\xi E_{n,m})$$

يمكننا الان تعويض هذه النتيجة في العبارة (6.2) مع استخدام المتطابقة (10.1) لتتصل في النهاية على:

$$n(\mathbf{k}) = \exp \left[-\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_+^2 \lambda_-^2} \right) (\lambda_-^2 k_x^2 + \lambda_+^2 k_y^2) \right]$$

$$(16.2) \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_+^2} + \frac{\lambda_+^2 k_y^2}{2} \right) L_m \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_-^2} + \frac{\lambda_-^2 k_x^2}{2} \right) \Theta(\mu - E_{n,m})$$

إنّ تأثير لا تماثل مناحي كمون الأسر يبدو واضحا في عبارة $n(\mathbf{k})$ وذلك في الفصل بين المقادير المتعلقة بكل من المحورين (Ox) و (Oy) إذا ما قارنا هذه العبارة بالعبارة الخاصة بالكمون متماثل المناحي.

يمكن أن نتأكد أيضا من صحة هذه العبارة بمعرفة ما اذا كانت ستؤول الى العبارة (5.2) عندما يصبح كمون متماثل المناحي.

في الحقيقة، لدينا من أجل: $\omega_x = \omega_y = \omega_0$ المعاملات التالية:

$$(17.2) \quad \begin{array}{l} \Omega_- = \omega_0 - \Omega \qquad \qquad \qquad \Omega_+ = \omega_0 + \Omega \\ \mu_- = 2m^* \omega_0 / \omega_0 - \Omega \qquad \qquad \mu_+ = 2m^* \omega_0 / \omega_0 + \Omega \\ B = 1/2m^* \omega_0 \qquad \qquad \lambda_+ = \lambda_- = \sqrt{\hbar/2m^* \omega_0} = \left(1/\sqrt{2} \right) a_{oh} \end{array}$$

وبتعويض هاته المعاملات في العبارة (16.2) يسهل لنا التأكد و التنقل من عبارة كمون لا تماثل المناحي الى كمون

متماثل المناحي (5.2). حيث a_{oh} هو الطول المميز لكمون الهزاز التوافقي عبارته كالتالي: $a_{oh} = \sqrt{\hbar/m^* \omega_0}$.

ب- التعميم في 3 ابعاد (3D)

باتباع نفس الخطوات كما في حالة بعديين يمكن ايجاد عبارة $n(\mathbf{k})$ في 3 ابعاد أين يحدث تغيير طفيف في

عبارتها بإضافة البعد الثالث حيث يستخدم في هذه الحالة علاقة $C(\mathbf{r}; \xi)$ المعطاة التي تستخرج من العبارة (43.1)

فتصبح عبارتها كما يلي :

$$(18.2) \quad C(\mathbf{r}; \xi) = G(\xi) \exp[4ax^2 + 4by^2 + 4dz^2]$$

باتباع نفس الخطوات كما في الفقرة السابقة نجد:

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{k}) = & \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_+^2 \lambda_-^2} \right) (\lambda_-^2 k_x^2 + \lambda_+^2 k_y^2) + \lambda_z^2 k_z^2 \right] \right\} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ L_n \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_+^2} + \frac{\lambda_+^2 k_y^2}{2} \right) L_m \left(\frac{\lambda_-^2 k_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_-^2} \right) \right. \\
& \left. \times L_\ell \left(\frac{\lambda_z^2 k_z^2}{2} \right) \Theta(\mu - E_{nm\ell}) \right\}
\end{aligned}
\tag{19.2}$$

حيث تم إدخال الطول الجديد $\lambda_z = \sqrt{\hbar/2m^* \omega_z}$ للاختصار أيضا.

الفصل الثالث

دراسة ومناقشة نتائج كثافة الجسيمات في فضاء فورييه ومعامل التشتت المرن $s_e(k)$

Study and discussions of the particle density in Fourier space and elastic scattering factor

1. مقدمة

اهتمنا في الفصلين السابقين بالجانب الرياضي من الاشكالية المطروحة إذ كنا قد وجدنا عبارة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ التي ستمكنا من دراسة بعض خصائص النظام الفيزيائي كمعرفة سلوكه عند القيام بتدويره بتردد سرعات مختلفة مع إخضاعه لكمون حصر لا تماثل المناحي . كما تعتبر هذه الكمية كنتيجة تحليلية تساعدنا في حساب معامل التشتت المرن للضوء المشتت بواسطة سحابة الغاز الفيرميونية المشكلة لنظامنا المدروس بصفة خاصة ولمسائل التشتت المرن بصفة عامة حيث أن هذا المعامل الأخير ما هو إلا مربع كثافة الجسيمات في فضاء فورييه . إن لهذا المعامل أهمية في معرفة تحديد التوزيع الزاوي للضوء المشتت عبر سحابة الغاز الدري فائق البرودة ومقارنته مع نظيره الذي يصف التشتت غير المرن كما سنرى من خلال الدراسة التي سنقوم بها.

سنقدم في هذا الفصل دراسة تحليلية لكثافة الجسيمات في فضاء فورييه وكذلك معامل التشتت المرن للضوء من الناحية الفيزيائية وذلك عن طريق مناقشة بعض الأشكال البيانية التي تم إيجادها مع تقديم التفسيرات اللازمة لها، بالإضافة الى مقارنة هذه النتائج مع ما تم التوصل اليه من نتائج تقريبية في أعمال سابقة [8-9].

2. دراسة الجملة في فضاء فورييه من أجل قيم مختلفة لسرعة الدوران ونسبة لا تماثل مناخي كمون الحصر

لقد أشرنا في الفقرة الخامسة من الفصل الأول إلى أن طيف طاقة الجملة في حالة الدوران السريع تكون مشابهة لطيف مستويات لانداو الخاصة بجملة جسيمات مشحونة خاضعة لحقل مغناطيسي شديد. لكن ما نود الإشارة إليه هنا هو دراسة تطور سلوك الجملة من أجل قيم مختلفة للسرعة الزاوية الخاصة بالدوران. كما أن خضوع الجملة لكمون حصر لا تماثل المناخي مع/أو بدون زيادة سرعة الدوران يسمح بعبور الجملة من النظام ثنائي البعد إلى أحادي البعد (نفس الشيء في ثلاثة ابعاد فالنظام يتطور من ثلاثي البعد الى ثنائي البعد). ومن الملاحظ أن هذا العبور يكون أسرع في حالة الجملة الدوارة المحصورة بشدة. وبما أن الدراسة ستكون في فضاء فورييه فإن صورة هذا العبور تكون منعكسة في الفضاء الحقيقي. ولدراسة أوضح نستغل عبارة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه لجملة خاضعة لكمون هزاز توافقي لا تماثل المناخي في حالة دوران والمعطاة بالعلاقة (16.2) والتي يمكن كتابتها أيضا على النحو التالي:

$$n(\mathbf{k}) = \exp \left[-\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_+^2 \lambda_-^2} \right) (\lambda_-^2 k_x^2 + \lambda_-^2 k_y^2) \right] \times \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} L_n \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_x^2}{2\lambda_+^2} + \frac{\lambda_+^2 k_y^2}{2} \right) L_m \left(\frac{\hbar^2 B^2 k_y^2}{2\lambda_-^2} + \frac{\lambda_-^2 k_x^2}{2} \right) \quad (1.3)$$

أين n_{max} و m_{max} العددين بإدخال العددين في العلاقة أعلاه وذلك لاحتساب المستويات المشغولة فقط والتي طاقتها اقل أو تساوي طاقة مستوى فيرمي E_F (حيث $\mu = E_F$). إن هذا سمح لنا بإزالة دالة القفزة لهيفيزايد من العبارة (16.2)

حيث أن n_{max} هي القيمة القصوى المسموح بها للعدد الكمي n و m_{max} القيمة القصوى المسموح بها للعدد الكوانتي m من أجل قيمة ما ل n . لذلك يتوجب علينا البحث عن كل القيم الممكنة لكل n و m والتي تحقق الشرط التالي:

$$(2.3) \quad \mu - E_{nm} \geq 0$$

أي أن $\mu \geq E_{nm}$. وبتعويض عبارة الطاقة المعطاة بالعلاقة (52.1) في (2.3) نجد:

$$(3.3) \quad \hbar\Omega_+ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_- \left(m + \frac{1}{2}\right) \leq \mu$$

من أجل $m = 0$ فإن القيمة القصوى ل n هي كالتالي:

$$(4.3) \quad n_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_+} \right]$$

ومن أجل قيمة معينة ل n يكون:

$$(5.3) \quad m_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_-} \right]$$

حيث $\text{int}[x]$ هو الجزء الصحيح للعدد x .

كما يمكننا إيجاد قيمة طاقة مستوى فيرمي μ انطلاقاً من العلاقة التي تربط ما بين كثافة الجسيمات في فضاء فورييه وعدد الجسيمات $n(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = N$ ممّا يُوصلنا إلى العبارة التالية:

$$(6.3) \quad N = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} 1$$

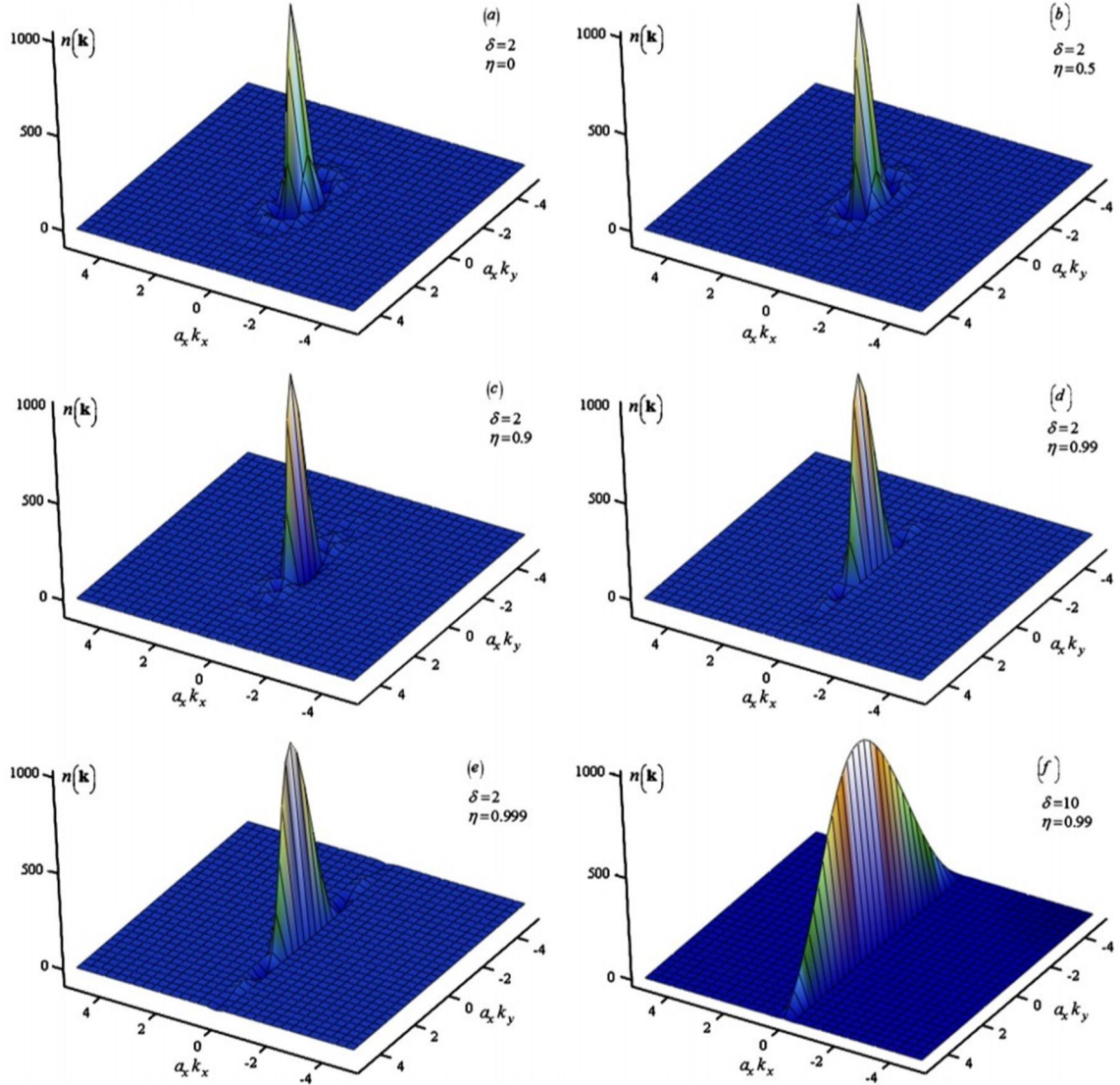
إذن يمكننا بالحساب المباشر إيجاد العبارة التقريبية لعدد الجسيمات N :

$$(7.3) \quad N \approx \frac{1}{2\Omega_+\Omega_-} \left[\frac{1}{\hbar^2} \mu^2 + \frac{\Omega_+}{\hbar} \mu - \frac{1}{4} (\Omega_+ - \Omega_-)(\Omega_+ - 3\Omega_-) \right]$$

إنّ هذه العبارة التقريبية لعدد الجسيمات تمكّننا من إيجاد قيمة جيدة لطاقة مستوى فيرمي بدلالة N .

يُمكننا الآن دراسة تطور سلوك النظام مع تغير الوسائط δ و η التي تم تعريفها في الفصل الأول بالعلاقات (41.1) و (42.1) على الترتيب. سنصف حالات الجُملة المكونة من $N = 1000$ جسيم من الفيرميونات غير المتفاعلة

فيما بينها خاضعة لأسر توافقي لا تماثل المناحي، وباستخدام بيانات تطور كثافة الجسيمات في فضاء فورييه المعطاة بالأشكال (a-f) المبينة أدناه. أين سنلاحظ مدى تأثير سرعة زاوية الدوران و شدة تباين الكمون على النظام.



الشكل (1) : كثافة الجسيمات في فضاء فورييه لنظام ثنائي الأبعاد يحتوي على $N=1000$ من الفيرميونات غير متفاعلة خاضعة لفخ توافقي لا تماثل المناحي، لقيم مختلفة من نسبة الدوران η (من نظام غير الدوراني إلى نظام الدوران فائق السرعة) عند لا تماثل المناحي ثابت الأشكال (a-e) و لا تماثل المناحي قوي δ مع دوران سريع الشكل (f). يتم التعبير عن المركبتين ω_x و ω_y من شعاع الموجة المحول \mathbf{k} بوحدات معكوس الطول $1/\alpha_x$ حيث $\alpha_x = \sqrt{\hbar/m^* \omega_x}$ (هو طول الاهتزاز على طول المحور (ox)).

- من أجل نسبة لا تماثل مناحي صغير $\delta = 2$ و تردد الدوران معدوم أو ضعيف ($\eta = 0$ أو $\eta = 0.5$) فإن كثافة الجسيمات في فضاء فورييه تأخذ شكل بيضوي على المستوى (oxy).

• عند تزايد سرعة الدوران من السرعات الصغيرة إلى السرعات الحرجة مع الحفاظ على نفس نسبة لا تماثل مناحي الكمون نلاحظ بداية انتقال او عبور الجملة من نظام ذي بعدين إلى نظام ذي بعد واحد حيث كلما زادت سرعة الدوران زاد تسارع العبور (الشكل 1 من a إلى e) والموافقة لبداية ظهور مستويات لاندر المشغولة كما رأينا في الفقرة الخامسة من الفصل الأول.

• الحالة (f) من الشكل (1) التي توافق شدة تباين كبيرة $\delta = 10$ فإننا نرى عبور النظام ذو البعدين إلى النظام ذو بعد واحد أين نرى الاستطالة وفق المحور k_y والتي توافق كثافة الجسيمات موزعة على طول المحور (ox) في الفضاء الحقيقي وذلك بسبب قوة الارجاع الكبيرة وفق المحور (oy) كما تبينه شدة التباين δ . لكن ما نراه في فضاء فورييه هو عكس ذلك فنرى امتداد (استطالة) على طول محور الاحداثيات k_y وانكماش على طول محور الاحداثيات k_x .

3. المقارنة بين النتائج المحصل عليها بواسطة كثافة الجسيمات في فضاء فورييه $n(\mathbf{k})$ و كثافة الجسيمات في فضاء الفيزيائي $\rho(\mathbf{r})$

يُمكن مقارنة هذه النتائج المتحصل عليها في فضاء فورييه مع نتائج أعمال سابقة [7-8] أين تمّ الاعتماد فيها عند حساب كثافة الجسيمات على دوال الموجة. إذ تُعطى علاقتها في الفضاء الفيزيائي كالاتي:

$$(8.3) \quad \rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y) = \sum_{nm} |\phi_{nm}(x, y)|^2 \Theta(\mu - E_{nm})$$

حيث ϕ_{nm} تمثل دالة الموجة غير المتعلقة بالزمن (حل معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن)، و E_{nm} مستويات الطاقة المكافئة لها و μ الكمون الكيميائي. إذ تمّ إيجاد عبارة $\rho(x, y)$ كالاتي بعد تعويض عبارة دالة الموجة من أجل إشغال كل جسيمات النظام لمستويات لاندر المنخفضة والتي تعطى كما يلي [7]:

$$(9.3) \quad \rho(x, y) = \sum_{m=0}^N |\phi_{0m}(x, y)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{c}{2}\right)^m H_m\left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{2c}}\right) H_m\left(\frac{\xi}{\sqrt{2c}}\right) \times \frac{1}{\pi \alpha_x \alpha_y} e^{-x^2/a_x^2 - y^2/a_y^2}$$

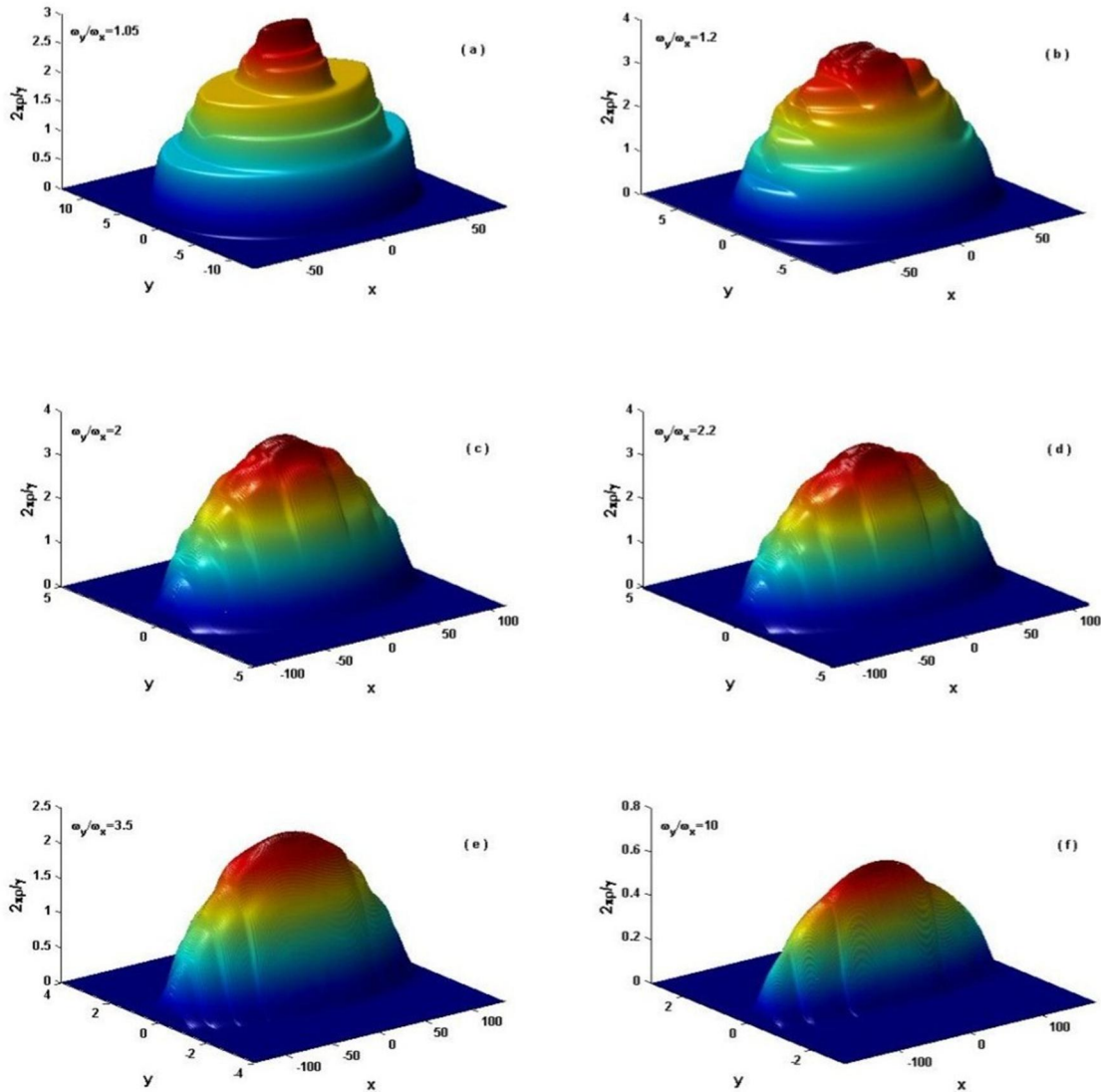
لمعرفة هذه العوامل (c, ξ, a_y, a_x) يمكن الرجوع إلى المرجع المذكور أعلاه. كما أن طيف الطاقة المتحصل عليه في هذا العمل والمستخرج من حلول معادلة القيم الذاتية للهاملتوني مطابقة للعبارة التي وجدناها هنا.

دراسة الجملة في الفضاء الفيزيائي بسرعة دوران ثابتة و قيم مختلفة لنسبة لا تماثل مناحي كمون الحصر

في هذه الفقرة سنقوم بدراسة مُختصرة لكثافة الجسيمات في الفضاء الفيزيائي لجملة جسيمات فيرميونية عددها

$N=1000$. من أجل تردد دوران ثابت $\left(\frac{\Omega}{\omega_x}\right)$ و نسب مختلفة لِلا تماثل مناحي كمون الحصر $\left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right)$. إذ نلاحظ أن

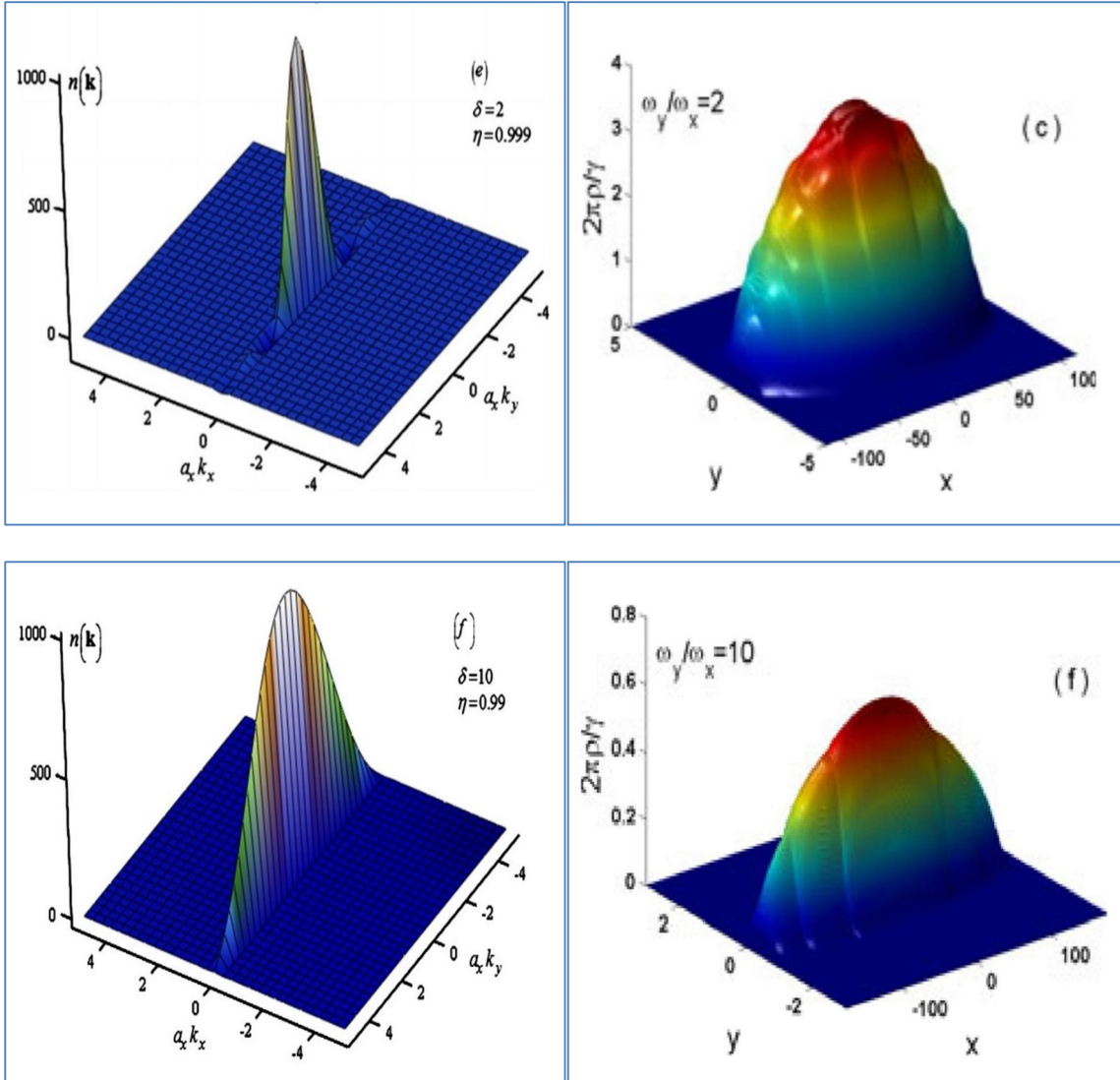
السلوك العام للكثافة عند تَوزع الجسيمات على مستويات لاندو السفلى أين نجد عند القيم المنخفضة لشدة تباين كمون الحصر هضاب بيضوية الشكل تُمثل كل هضبة بمستوى لاندو. أما بالنسبة لشدة تباين كبيرة فالنظام يتطور لتُصبح كثافة الجسيمات ذات شكل غاوسي Gaussian في اتجاه الحصر القوي.



الشكل 2. كثافة الجسيمات في الفضاء الحقيقي لجملة مكونة من فيرميونات عددها $N=1000$ من أجل قيم مختلفة لنسبة لا تماثل مناحي

كمون الحصر وتردد الدوران الثابت $0.999 = \eta$ [7].

تمت دراسة هذه الكثافة بالنسبة لنظام مكون من فيرميونات غير متفاعلة فيما بينها عددها $N=1000$ من أجل نسبة سرعة دوران ثابتة $\eta = 0.999$ و تم التّغيير في نسبة لا تماثل مناحي كمون الحصر، أي تغيير شدة تباينه. للمقارنة بين صورتَي الكثافة في الفضاء الحقيقي والفضاء المعكوس أخذنا شكلاهما عند نفس النسب المستعملة في مذكرتنا والعمل [7] فجاءت كما تبينه الصور أدناه حيث نلاحظ ما يمكن أن نعطيه لنا صورة الكثافة في فضاء فورييه من معلومات حول تطور النظام. نشير فقط إلى أن اعتمادنا كان على عبارة تحليلية دقيقة ل $n(\mathbf{k})$ بينما الكثافة في الفضاء الفيزيائي تم حسابها باستخدام تقريبات مستويات لاندو السفلى LLL.



4. معامل التشتت المرن $s_e(\mathbf{k})$

أ- التوزيع الزاوي لتشتت الضوء

إنّ نظرية تشتت الضوء عبر أنظمة ذرية فائقة البرودة خاضعة لكمون حصر شديد تمت دراستها من قبل بواسطة تقنية التصوير المباشر للسحابة الذرية بعد تحريرها. لكن في الحقيقة إنّ إتباع مثل هذه الطريقة في جمع معلومات النظام الفيزيائي المدروس تستلزم تخريب النظام بسبب تصويره عند لحظة حذف كمون الحصر و إيقاف الدوران مما يوافق ما يسمى بالتصوير بعد التمدد الباليستيكي الحر للغاز فقط. وللحصول على معلومات عن النظام وهو في حالة تفاعله تستعمل طريقة بديلة للدراسة ألا و هي دراسة تشتت الضوء بواسطة كثافة توزيع النظام عند تطبيق كمونات الحصر والدوران في نفس الوقت (in situ)، مثل ما يتم عند حساب كثافة الشحنة للاكترونات الموجودة في جسم صلب عن طريق التشتت المرن لأشعة X.

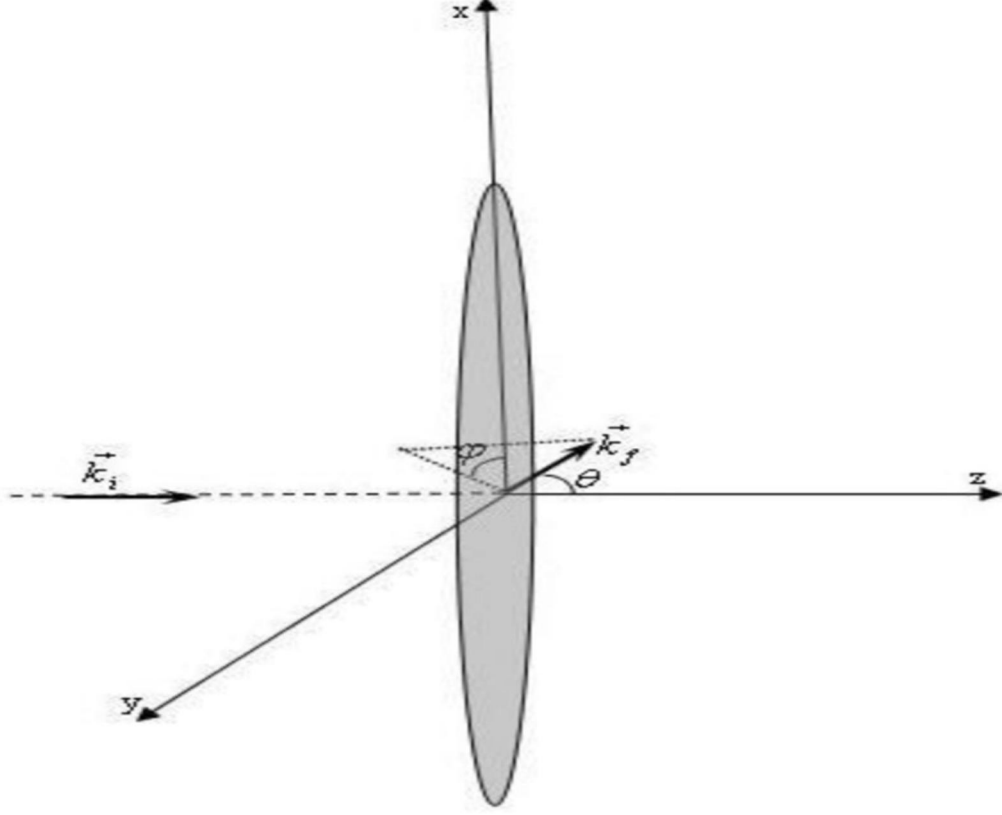
يدخل في عملية التشتت عاملان أساسيان هما:

- التشتت المرن: وهو انعراج الضوء بواسطة كثافة جسيمات النظام (أي بكثافة الجسيمات الموزعة في الفضاء الفيزيائي) وذلك دون إحداث إثارة في الحالة الأساسية لذراته.
 - التشتت غير المرن: وفي هذا النوع من التشتت تحدث إثارة ذرات الغاز بواسطة الضوء المُسلط على الغاز أين تتبادل الجسيمات والضوء الطاقة فيما بينهم ويمكن أن تبت الذرات فوتونات أخرى بعودتها إلى حالتها الأساسية إن كان تواتر الضوء المستعمل يوافق حالة التجاوب.
- إذا كان تردد الضوء المستعمل في استقصاء حالة السحابة بعيدا عن رنين إثارة الحالات الكمية الداخلية لذرات الغاز فإن الانتشار المرن يحدد شدة التوزيع الزاوي خاصة من أجل الزوايا الصغيرة للانتشار. في الحقيقة سنلاحظ ان زيادة سرعة دوران الجملة أو زيادة شدة تباين كمون الحصر سيؤدي ظهور ما يسمى تأثير حجب باولي الذي يرجع لمبدأ استبعاده في حظر الانتقال بين الحالات النهائية المحتملة والذي يظهر كإلغاء لتشتت الفوتون الموافق لهذه الانتقالات، أي ذلك الفوتون الذي يمنح الذرة اندفاعا غير مسموح به لأنه يوافق حالة مشغولة وبالتالي لا يمكن أن نكتشفه مشنّتا في الاتجاه الموافق للاندفاع المحول المفترض.
- إنّ إسهام الانتشار المرن في التوزيع الزاوي لشدة الضوء المشتت بواسطة النظام تُحدد بواسطة عامل التشتت المرن المعطى بالعلاقة الاتية [8]:

$$(10.3) \quad s_e(\mathbf{k}) = |n(\mathbf{k})|^2$$

اين \mathbf{k} يرمز للاندفاع المحول للذرة بحيث $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ ، أين \mathbf{k}_i هو شعاع الموجة القادمة و \mathbf{k}_f هو شعاع الموجة المشتتة.

لنفترض أنّ شعاع الضوء القادم ينتشر على طول المحور (oz)، إذن $\mathbf{k}_i = k_i \mathbf{e}_z$. عندئذ تكون فوتونات الضوء المشتتة لها اتجاه آخر معرف بواسطة الزوايا الكروية (θ و φ) ذات شعاع الموجة النهائي \mathbf{k}_f كما هو مبين في الشكل (3).



الشكل 3. الرسم التمثيلي لعملية التشتت المرن للضوء عبر سحابة فيرميونية موزعة على المستوى (oxy) ذات الشكل البيضاوي على طول المحور (oz) بسبب فخ لا تماثل مناحي قوي.

من أجل التشتت المرن فإنه لدينا $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_0|$. إذن إحداثيات أشعة الموجة المحولة على الذرة على طول المحاور (ox), (oy) و (oz) هي على الترتيب:

$$(11.3) \quad \begin{cases} k_x = -k_0 \cos \varphi \sin \theta \\ k_y = -k_0 \sin \varphi \sin \theta \\ k_z = k_0(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

في هذه الحالة، نستخرج عبارة $s_e(\mathbf{k})$ بدلالة الزوايا الكروية، حسب علاقة $n(\mathbf{k})$ المعطاة ب (19.2) وحسب الشروط السابقة تأخذ الشكل كالآتي :

$$\begin{aligned}
S_e(\mathbf{k}) = & \left| \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\hbar^2 B^2}{\lambda_+^2 \lambda_-^2} \right) (\lambda_-^2 \cos^2 \varphi + \lambda_+^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + \lambda_z^2 (1 - \cos \theta)^2 \right] k_0^2 \right\} \right. \\
& \times \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \left\{ L_n \left[\left(\frac{\hbar^2 B^2 \cos^2 \varphi}{2\lambda_+^2} + \frac{\lambda_+^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) k_0^2 \sin^2 \theta \right] \right. \\
(12.3) \quad & \left. \times L_m \left[\left(\frac{\lambda_-^2 \cos^2 \varphi}{2} + \frac{\hbar^2 B^2 \sin^2 \varphi}{2\lambda_-^2} \right) k_0^2 \sin^2 \theta \right] L_\ell \left[\frac{\lambda_z^2 k_0^2 (1 - \cos \theta)^2}{2} \right] \right\} \Big|^2
\end{aligned}$$

حيث n_{max} و m_{max} و ℓ_{max} نتحصل عليها كما فعلنا في الفقرة الثانية من هذا الفصل:

$$(13.3) \quad \begin{cases} n_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar \Omega_+} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\Omega_+} \right] \\ m_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar \Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\Omega_-} \right] \\ \ell_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar \omega_z} - \frac{\Omega_+}{\omega_z} n - \frac{\Omega_-}{\omega_z} m - \frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_z}{2\omega_z} \right] \end{cases}$$

ب- دراسة وتفسير مساهمة التشتت المرن في التوزيع الزاوي للضوء المنتشر

باعتبار أنّ دالة التوزيع الزاوي للتشتت هي دالة لمتغير زاوية الانتشار θ ومن أجل قيمتين محددتين للزاوية السميتية (الاستوائية) φ azimuthal لدينا الشكلان الموضحان أدناه (4 و 5) إذ أخذنا أربع حالات مختلفة لتردد سرعة الدوران ونسبة لا تماثل مناحي الحصر. تتمثل أهمية هذه الزوايا في تحديد مواقع الكواشف المستخدمة في التقاط الضوء المشتت.

أولا بالنسبة لشكل (4) الموافق ل $(\varphi = 0)$

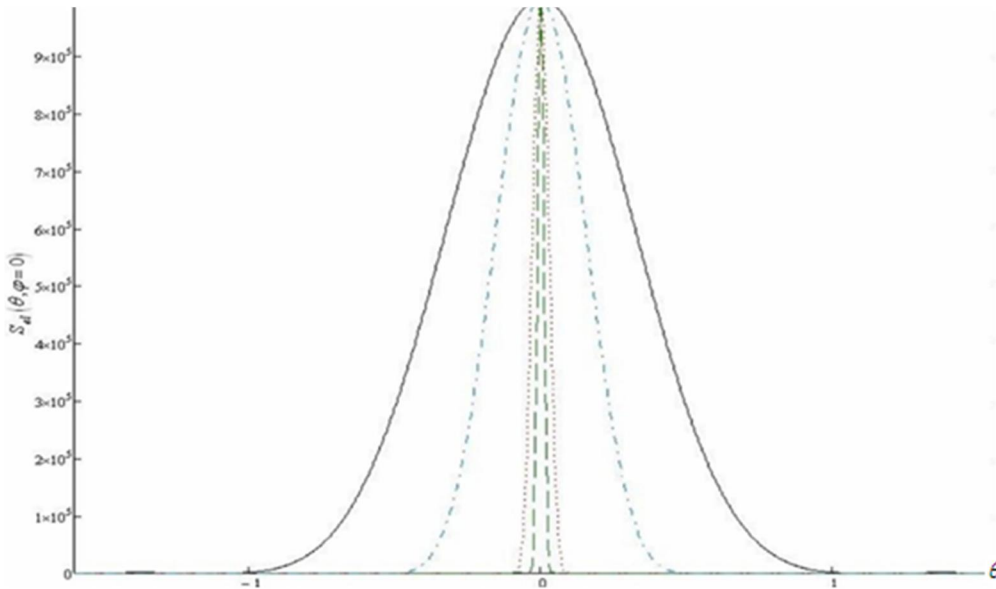
نلاحظ أنّه من أجل أنظمة ذات الدوران السريع (الخط الأخضر و الأحمر) والتي توافق عملية انتشار الفوتونات وفق الزاوية $\varphi = 0$ التي تصاحبها الاندفاعات الصغيرة المحولة للفيرميونات بواسطة فوتونات الضوء هذه فهو في هذه الحالة يملك مركبة واحدة عبر المحور (ox) حيث نلاحظ تناقص مساهمة التشتت المرن بزيادة سرعة الدوران بشكل واضح لصالح التشتت غير المرن الي يمنح طاقة للذرات للانتقال الى مستويات أعلى متاحة نظرا لأن الفيرميونات تجد أكثر حرية للانتقال على هذا المحور الذي يكون أثر الدوران فيه هو تخفيض قوة ارجاع كمون الحصر فيه، وبالتالي فهي قابلة للتفاعل مع الفوتونات التي تمنحها اندفاعات كبيرة مرافقة للتغير في قيمة طاقتها.

من جهة أخرى، إذا تذكرنا مبدأ بابينييه (Babinet) الذي ينص على ان تشتت الضوء عبر شق في لوح يعترض مسار الضوء الوارد مكافئة لعملية تشتتته على جسم مصمت له نفس الأبعاد، أي أنه يعطي نفس صورة الانعراج، وأن

قيمة زاوية انفتاح شدة الضوء عند منتصف قيمتها، أي قيمة شدة الضوء المشتت، متناسبة عكسا مع أبعاد الشق أو عرض الجسم المصمت R ، فإننا نستطيع إذن أن نقدم تفسيراً إضافياً لهذا التناقص في مساهمة التشتت المرن. في الحقيقة، إذا علمنا أن:

$$(14.3) \quad \Delta\theta \propto R^{-1}$$

نستطيع أن نلاحظ أن هذا التناقص في معامل التشتت المرن وسرعة انعدامه بجوار الزوايا الصغيرة θ الموافقة للزاوية $\varphi = 0$ (أي المحور (Ox)) يعود أساساً لاستطالة النظام وفق هذا المحور وبالتالي كبر قيمة البعد المميز R وفق هذا المحور نظراً لتزايد سرعة الدوران حتى في غياب نسبة تباين كبيرة في شدة الكمون اللامتائل المناحي.



الشكل 4. التوزيع الزاوي لضوء المشتت من أجل جملة مكونة من فرميونات عددها $N=1000$ بزاوية azimuthal $\varphi = 0$. الفوتونات الملتقطة هي تلك الفوتونات المرتدة على المحور (Ox) التي نقلت اندفاعها إلى الفرميونات. حيث الزاوية θ مقاسة بالريديان.

حيث يمثل كل خط من البيان الحالة التالية:

لا تماثل مناخي ضعيف و دوران بطيئ حيث : $\eta = 0.05, \delta = 1.1$

لا تماثل مناخي ضعيف و دوران فائق السرعة حيث : $\eta = 0.999, \delta = 1.1$

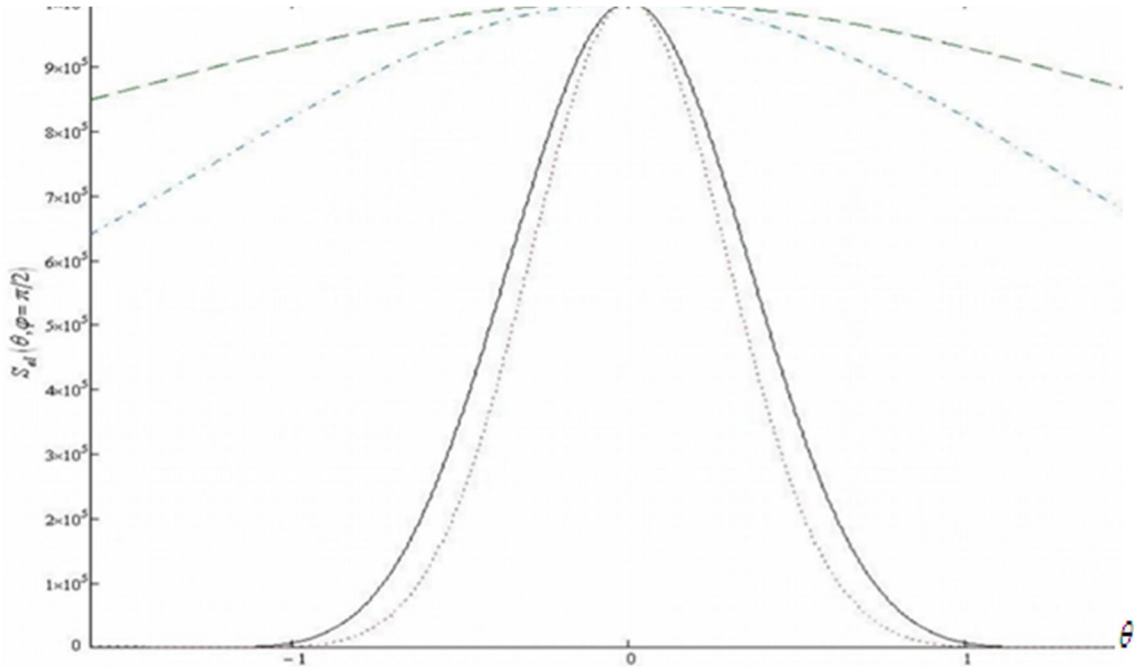
لا تماثل مناخي قوي و دوران بطيئ حيث : $\eta = 0.05, \delta = 10$

لا تماثل مناخي قوي و دوران فائق السرعة حيث : $\eta = 0.999, \delta = 10$

ثانياً بالنسبة لشكل (5) الموافق ل $(\varphi = \pi/2)$

نلاحظ في هذه الحالة التي توافق عملية تحويل الاندفاعات في اتجاه المحور (Oy) ، وباعتماد نفس وجهة نظر التفسير المقدمة في الحالة السابقة، فإنه عند مرور النظام الى حالة الدوران السريع أو بزيادة نسبة لا تماثل مناحي كمون الحصر فإن مساهمة الانتشار المرن في عملية الانتشار الكلية تزداد بشكل كبير في هذا الاتجاه بحيث تكون مهيمنة على عملية التشتت الكلية أين تكون مساهمة التشتت غير المرن مهمله أمام التشتت المرن. في الحقيقة إن التشتت اللأمرن للجسيمات بحيث يصاحبها طاقة سيكون غير مسموحاً نظراً لمبدأ الاستبعاد لباولي، فإن الاندفاعات المحولة في هذه الحالة تقابل حالات مشغولة لا تسمح بانتقالات إليها خاصة مع ازدياد شدة كمون الحصر.

إن المقاربة الأخرى لتفسير هيمنة التشتت المرن في عملية انتشار الضوء تعتمد على مبدأ بابينييه المذكور أعلاه بحيث تعود المساهمة الكبيرة للتشتت المرن، وبالتالي زيادة زاوية الانفتاح $\Delta\theta$ إلى التضييق (الانحسار) الذي يعانیه النظام في هذا الاتجاه سواء بازدياد سرعة الدوران أو بازدياد نسبة تباين شدة كمون الأسر كما تبينه العلاقة (14.3). إن الانفتاح الكبير $\Delta\theta$ الملاحظ في شدة الضوء المشتت عند الحالات الحدية يقابله نقصان في البعد R المميز لعرض النظام وفق هذا الاتجاه.



الشكل 5. التوزيع الزاوي لضوء المشتت من أجل جملة مكونة من فرميونات عددها $N=1000$ بزواية azimuthal $\varphi = \frac{\pi}{2}$. الفتونات الملتقطة هي تلك الفتونات المرتدة على المحور (Oy) التي نقلت اندفاعها الى الفرميونات .

حيث يمثل كل خط من البيان حالة:

لا تماثل مناحي ضعيف و دوران بطيئ حيث : $\eta = 0.05, \delta = 1.1$

لا تماثل مناحي ضعيف و دوران فائق السرعة حيث : $\eta = 0.999, \delta = 1.1$

لا تماثل مناحي قوي و دوران بطيئ حيث : $\eta = 0.05, \delta = 10$

لا تماثل مناحي قوي و دوران فائق السرعة حيث : $\eta = 0.999, \delta = 10$

الخاتمة العامة

General conclusion

إن الفكرة الأساسية من هذا البحث هو تقديم دراسة نظرية وعددية عن نوع خاص من الأنظمة الفيزيائية التي تنتمي إلى ميدان الغازات فائقة البرودة والتي حظيت بالاهتمام الكبير والمتزايد من طرف العلماء وخاصة في العشريتين الأخيرتين بعد التحقّق التجريبي لتكاثف بوز-اينشتاين وكذا الوصول الى عتبة الانحلال الكوانتي للغازات الفيرميونية حيث أضحى من الممكن نمذجة ومحاكاة الظواهر التي تحدث في الأجسام الصلبة وهي إحدى أهم مميزات هذا الميدان. لقد تمكن العاملون فيه من محاكاة العديد من التفاعلات التي تخضع لها مكونات الأجسام الصلبة، سواء كانت إلكترونات تتحرك في الكمونات الدورية داخل الجسم الصلب أو الايونات المحصورة داخل بنية بلورية تخضع لكمون حصر معين.

يتمثل النظام الفيزيائي المدروس في هذه المذكرة من جملة غاز فائق البرودة مكون من ذرات فيرميونية محايدة كهربائيا خاضعة لعملية دوران سريع تحت تأثير كمون أسر لا متمائل المناحي. إن سبب الاهتمام في الأساس تعود إلى حقيقة أن عملية تدوير الغازات فائقة البرودة، سواء كانت بوزونات أو فيرميونات، تقدم لنا فيزياء غنية بالظواهر الكمية التي تم التأسيس للجانب النظري لها قبل التحقّق التجريبي لها بداية من 2000م والتي أتت النتائج التجريبية مدعمة للنظريات التي بقيت لمدة حبيسة الأطر الأكاديمية لتفتح بذلك بابا من البحث يتزايد اتساعا واتصالا بالفيزياء المعالجة في الميادين الأخرى وخاصة ميدان الموائع الفائقة.

لقد عالجتنا نظريا مسألة كثافة الجسيمات في الفضاء الفيزيائي (الحقيقي) ونظيرتها في فضاء فورييه (المعكوس) بحيث حصلنا على العبارة التحليلية الدقيقة لهذه الأخيرة، لعلمنا أن العبارة الدقيقة للكثافة في الفضاء الفيزيائي ليست متاحة الان، بل تتم معالجتها بصورة تقريبية من أجل بعض الحالات الحدية. كما أجرينا أيضا دراسة عن تعلق تطور النظام بالوسائط الخاصة بسرعة الدوران وشدة الأسر بحيث أمكننا ملاحظة عبوره من بعدين إلى بعد واحد وكيفية حصوله في الحالات الحدية الموافقة لسرعات دوران كبيرة وكذا كمون الحصر الشديد. وقد قدمنا مقارنة بين نتائجنا الدقيقة في فضاء فورييه وبين النتائج التقريبية المتحصل عليها في الفضاء الفيزيائي وكانت النتائج متوافقة.

في الفصل الأخير من هذه المذكرة عالجتنا حالة تشتت الضوء المستعمل لتقصّي حالة السحابة الغازية المدروسة وبيّنا أهمية معامل التشتت المرن ومدى مساهمته في عملية التشتت الكلي للضوء بواسطة النظام مقارنة بمساهمة التشتت اللامرّن كما قدمنا بشكل خاص تفسيرات ملائمة لصور التشتت المتوقعة في الوضعيات المختلفة للكواشف المخصصة لالتقاط الضوء في حالة تغيير الوسائط المسؤولة عن شدة الدوران وكمون الأسر.

إن دراسة تجريبية لتشتت الضوء ستكون جيدة لتأكيد المقاربة النظرية المنتهجة في هذه المذكرة.

ملحق

المعاملات المذكورة في العبارتين (38.1) و (43.1) في الفصل الأول و الثاني

$$S = \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)} \quad (\text{A.1})$$

$$\mu_{\pm} = \frac{2MS}{S + (\omega_y^2 - \omega_x^2) \pm 4\Omega^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 \pm S) \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_1 = \frac{\coth(\xi\hbar\Omega_-/2)}{\mu_- \Omega_-} + \mu_+ \Omega_+ B^2 \coth(\xi\hbar\Omega_+/2) \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma'_1 = \frac{\tanh(\xi\hbar\Omega_-/2)}{\mu_- \Omega_-} + \mu_+ \Omega_+ B^2 \tanh(\xi\hbar\Omega_+/2) \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_2 = \frac{\coth(\xi\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+ \Omega_+} + \mu_- \Omega_- B^2 \coth(\xi\hbar\Omega_-/2) \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma'_2 = \frac{\tanh(\xi\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+ \Omega_+} + \mu_- \Omega_- B^2 \tanh(\xi\hbar\Omega_-/2) \quad (\text{A.7})$$

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{\mu_+ \Omega_+}{\mu_- \Omega_-} \right)^{1/2} \left[\gamma_1 \gamma'_1 \sinh(\xi\hbar\Omega_+) \sinh(\xi\hbar\Omega_-) \right]^{-1/2} \quad (\text{A.8})$$

$$G(\xi) = \left(\frac{M \omega_z}{2\pi\hbar \sinh(\xi\hbar\omega_z)} \right)^{1/2} g(\xi) \quad (\text{A.9})$$

$$a = -(4\hbar\gamma_1)^{-1}; \quad a' = -(4\hbar\gamma'_1)^{-1}; \quad b = -(4\hbar\gamma_2)^{-1}; \quad b' = -(4\hbar\gamma'_2)^{-1} \quad (\text{A.10})$$

$$A = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2 + S}{2S}; \quad B = \frac{2\Omega}{MS}; \quad c = \frac{i \coth(\xi\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_- \Omega_- B \hbar \gamma_1}; \quad c' = \frac{i \tanh(\xi\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_- \Omega_- B \hbar \gamma'_1} \quad (\text{A.11})$$

$$d = -\frac{m^* \omega_z}{4\hbar} \tanh(\xi\hbar\omega_z/2); \quad d' = -\frac{m^* \omega_z}{4\hbar} \coth(\xi\hbar\omega_z/2) \quad (\text{A.12})$$

قائمة المراجع

References

- [1] M. H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995); C. C. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995); K. B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [2] B. DeMarco et al., Science **285**, 1703 (1999). B. DeMarco et al., Phys. Rev. Lett. **86** 5409, (2001).
- [3] I. Bloch et al., Nature **8**, 267 (2012).
- [4] F. Dalfovo et al., Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999); A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
- [5] J.R. Abo-Shaeer et al., Science **292**, 476 (2001); M.R. Matthews et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999); A.E. Leanhardt et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002); K.W. Madison et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000); P.C. Haljan et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001); E. Hodby et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2001).
- [6] I. Saidi, *Densité de Particules et de Courant d'un Gaz Fermionique Ultra Froid en Rotation Rapide*, Mémoire Master, Université de M'sila, Algerie, 2018.
- [7] N. Ghazanfari and M. Ö. Oktel, Eur. Phys. J. D **59**, 435 (2010).
- [8] Z. Akdeniz, P. Vignolo and M.P. Tosi, Physica B **365** 208 (2005).
- [9] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Frontiers in Physics, vol.96, Westview, Boulder, 2003)
- [10] M. Brack et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 1574 (2001); M. Brack et al., J. Phys. A **36**, 1111 (2003); B.P. van Zyl et al., Phys.Rev. A **67**,023609 (2003); P. Shea et al., J. Phys. A **40**, 10589 (2007); P. Shea et al., J. Phys. A. **41**, 135305 (2008); B.P. van Zyl et al., Phys. Rev. B **69** 024520 (2004); K. Bencheikh et al., Phys. Rev. A **78** 053614 (2008).
- [11] P. Shea et al., Phys. Rev. B **74**, 205334 (2006)
- [12] N. H. March and M. P. Tosi, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, L643-L645 (1985).
- [13] H. Naidja et al., Phys. Rev. A **83**, 053631 (2011).
- [14] K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn **22**, 264 (1940); E. H. Sondheimer et al., Proc. R. Soc. A, **210**, 173 (1951); N H March et al., Phys. Rev. **120** 830 (1960); N. H. March et al., J. Phys. A: Math. Gen. **18** L643 (1985); J. M. Manoyant, Phys. A: Math. Gen. **19**. 3013 (1986); M. A. Habeeb, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 5549-5554 (1987); R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill) (1965). ch 10.
- [15] K. Yonei, J. Phys. A: Math. Gen. **22**. 2415 (1989).
- [16] S. Medjedel. *Calcul des densités de courants dans les systèmes quantiques confinés en dimensions réduites*. Thèse de Doctorat en physique théorique. Université Ferhat Abbas-Sétif 1 (2016). Algérie.
- [17] K. Bencheikh et al., Phys. Rev. A **89**, 063620 (2014).
- [18] S. Medjedel, K. Bencheikh, Physics Letters A **383**, 1915–1921 (2019).
- [19] I S Gradshteyn and I M Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 5th edition, 1994).
- [20] P. Ring, P. Schuck, *the Nuclear Many-Body Problem* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980).

ملخص:

يتمثل النظام الفيزيائي المدروس في هذه المذكرة من جملة غاز فائق البرودة مكون من ذرات فيرميونية محايدة كهربائيا خاضعة لعملية دوران سريع تحت تأثير كمون أسر لا متمائل المناحي. لقد عالجنا نظريا مسألة كثافة الجسيمات في الفضاء الفيزيائي (الحقيقي) ونظيرتها في فضاء فورييه (المعكوس) بحيث تحصلنا على العبارة التحليلية الدقيقة لهذه الأخيرة، لعلمنا أن العبارة الدقيقة لكثافة الجسيمات في الفضاء الفيزيائي ليست متاحة لحد الان، بل تتم معالجتها بصورة تقريبية من أجل بعض الحالات الحدية. كما أجرينا أيضا دراسة عن تعلق تطور النظام بالوسائط الخاصة بسرعة الدوران وشدة كمون الأسر بحيث أمكننا ملاحظة عبوره من نظام ذي بعدين إلى بعد واحد وكيفية حصوله في الحالات الحدية الموافقة لسرعات دوران كبيرة وكذا كمون الحصر الشديد. وقد قدمنا مقارنة بين نتائجنا الدقيقة في فضاء فورييه وبين النتائج التقريبية المتحصل عليها في الفضاء الفيزيائي في أعمال أخرى وكانت النتائج متوافقة.

عالجنا أيضا حالة تشتت الضوء المستعمل لتقضي حالة السحابة الغازية المدروسة وبيّنا أهمية معامل التشتت المرن ومدى مساهمته في عملية التشتت الكلي للضوء بواسطة النظام مقارنة بمساهمة التشتت اللامرّن كما قدمنا بشكل خاص تفسيرات ملائمة لصور التشتت المتوقعة في الوضعيات المختلفة للكواشف المخصصة لالتقاط الضوء في حالة تغيير الوسائط المسؤولة عن شدة الدوران وكمون الأسر.

إن دراسة تجريبية لتشتت الضوء على مثل هذا النظام ستكون جيدة لتأكيد المقاربة النظرية المنتهجة في هذه المذكرة.

الكلمات المفتاحية:

الكثافة في فضاء فورييه، غاز فيرمي فائق البرودة، معامل التشتت المرن، مصفوفة الكثافة لبلوخ

Abstract

The physical system studied in this memory consists of a rotating ultra-cold neutral fermi gas trapped by an anisotropic harmonic potential. The subject treated here is the particle density in real physical space and its counterpart in the reciprocal Fourier space. Knowing that the exact analytical expression of the single particle density in the physical space is not yet available in the literature and is being processed with approximations in limit situations, we have managed to theoretically address the exact analytical expression of the particle density in Fourier space. We also studied the evolution of the system by varying the different parameters related to the angular velocity and the anisotropy of the rotating anisotropic harmonic trap where we observed the crossover of the system from the two-dimensional regime to a the one-dimensional regime and we have shown how this crossover is reflected in the shapes of the density in Fourier space. Comparison of our exact results in Fourier space with the approximate results in real physical space, obtained in an earlier a paper, proved to be consistent.

We also addressed the issue of the light scattering used to probe the properties of the ultra-cold gases and showed the importance of the elastic scattering factor and its contribution to the total dispersion of the incident light beam by the system. We also provided appropriate explanations for the expected dispersion images in the different positions of the detectors if one changes the rotation ratio or/with the anisotropy if the rotating trap.

An experimental study will be a good confirmation of our results.

Keywords:

Density in Fourier space, Ultra-cold Fermi gas, elastic scattering factor, Bloch density matrix