

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED MOHAMED BOUDIAF  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Mémoire présenté en mathématiques

Troisième année

Par

**FAKHER SEGHIRI**

**THÈME**

**interpolation numérique  
dans un espace de sobolev**

Soutenu publiquement, le jj/mm/anne devant le jury composé de :

*T. eacher*

*T. eacher*

# *Remerciements*

*Je tiens de remercier **ALLAH** qui me donne la force de faire ce modeste travail.*

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Moussai Madani pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à tous les Professeurs de département de mathématique de l'université de M'sila.*

*Mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères et soeurs pour leur soutien tout au long de mes études .*

# sujet dans un xxx

## Résumé

Nous nous intéressons ici au problème problème problèmevproblème

problème problème problème problème problème problème problème roblème problème  
roblème problème problème

**Mots clés :** mots1, mots1, mots1, mots1s, mots1, mots1.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les EDP du 2<sup>ème</sup> ordre</b>	<b>2</b>
1.1 Généralités . . . . .	2
1.1.1 Dérivées partielles . . . . .	2
1.1.2 Le Gradient et le Laplacien . . . . .	3
1.1.3 Exemples d'EDP . . . . .	3
1.1.4 Exemples de problèmes de Cauchy . . . . .	4
1.1.5 Problème bien posé . . . . .	5
1.1.6 Classification des EDP linéaires du second ordre . . . . .	5
1.1.7 Exemples . . . . .	5
<b>2 Rappel sur les équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre</b>	<b>6</b>
2.1 Equations aux dérivées partielles linéaires du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	6
2.1.1 Intégrales premières . . . . .	6
2.1.2 Equation aux dérivées partielles linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	8
2.1.3 Facteur intégrant ( Exemple d'EDP) . . . . .	10
2.1.4 Problème de Cauchy . . . . .	10
2.2 Equations aux dérivées partielles linéaires du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	11
2.2.1 Equation aux dérivée partielle à deux variable . . . . .	11
2.2.2 Classification des équations aux dérivées partielles du 2 <sup>ème</sup> ordre de $n$ variables . . . . .	13
2.2.3 Solution élémentaire (séparation des variables) . . . . .	15

2.2.4	Les différents types de problèmes aux limites . . . . .	16
2.3	Quelques applications . . . . .	17
2.3.1	Equation des ondes dans $\mathbb{R}^2$ , solution élémentaire . . . . .	17
2.3.2	Equation des Ondes dans $\mathbb{R}^2$ , méthode de Fourier . . . . .	18
2.3.3	Equation de la Chaleur dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Les espaces de Sobolev</b>	<b>21</b>
3.1	Les espaces de Sobolev . . . . .	21
3.1.1	Quelques propriétés . . . . .	21
3.2	Quelques applications . . . . .	23
3.2.1	Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .	24
3.2.2	Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	25
3.2.3	Application aux problèmes aux limites elliptiques . . . . .	27
	<b>Conclusion générale</b>	<b>30</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>31</b>

# Introduction

Dans ce mémoire on étudie les équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre ainsi on traite les espaces de Sobolev et leurs applications.

Ce mémoire se divise en trois parties:

Dans le premier chapitre, on donne des généralités sur les équations aux dérivées partielles ainsi leurs caractéristiques dont nous avons besoin: des définitions, la dérivée totale, Classifications des équations aux dérivées partielles de seconde ordre et des problèmes concernant ce type d'équation.

Dans le deuxième chapitre, nous essayons de représenter les équations aux dérivées partielles de 1<sup>er</sup> et de 2<sup>ème</sup> ordre et quelques exemples de solutions et applications de ces équations dans de différents domaines (comme les intégrales premières, facteur intégrant et problème de Cauchy..etc..).

Le troisième chapitre, est consacré à l'espace de Sobolev dans  $\mathbb{R}^n$  et leurs propriétés ainsi les applications dans des intervalles bornés .

# Chapitre 1

## Généralités sur les EDP du 2<sup>ème</sup> ordre

Dans ce chapitre, nous présentons certaines généralités simples concernant les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

### 1.1 Généralités

Les EDP sont important dans sciences physiques, la mécanique, la chimie et la biologie.

**Notation 1.1.1 :**

Dans tout ce qui suit, soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert.

#### 1.1.1 Dérivées partielles

Soit  $u \in C^1(\Omega)$ . Pour  $x \in \Omega$ , on note la dérivée partielle par:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \\ & \text{ou } \partial_{x_i} u(x) \\ & \text{ou } \partial_i u(x) \\ & \text{ou } u_{x_i}(x). \end{aligned}$$

Si  $u \in C^k(\Omega)$ , alors pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose

$$D^\alpha u(x) := \partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x),$$

où  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k$ .

### 1.1.2 Le Gradient et le Laplacien

Pour  $u \in C^1(\Omega)$ ,

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

est le gradient de  $u$ .

Par  $\Delta u$  on notera,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

le Laplacien de  $u$  en  $x \in \mathbb{R}^n$ .

#### Définition 1.1.1 (EDP)

Soit  $u$  une fonction inconnue définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Toute relation de la forme

$$F(x, u, \partial u, \dots, \partial^\alpha u) = 0$$

est une EDP d'ordre  $k$  si  $|\alpha| = k$ .

En général, on cherche à trouver  $u$  en fonction de  $x$ . Il n'est pas (en général) facile de faire le calcul et arriver au résultat.

Dans certaines méthodes, on applique alors des méthodes, comme la méthode de Fourier de variables séparables.

### 1.1.3 Exemples d'EDP

- Equation de la Chaleur:  $u_t - \Delta u = 0$ ;
- Equation des ondes:  $u_{tt} - \Delta u = 0$ ;
- Equation de Laplace:  $\Delta u = f$ .

### 1.1.4 Exemples de problèmes de Cauchy

- **L'équation de la Chaleur:**

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

- **L'équation des ondes:**

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \varphi(x), & x \in \Omega \\ u_t(0, x) = \psi(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

- **L'équation de Laplace:**

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

les conditions de Cauchy servent à trouver de manière plus facile la solution de telle équation.

- **Conditions initiales :**

A partir d'une condition initiale, il est possible de déduire la solution, si  $u$  est fonction de  $(x; t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  on a

$$u(x, t_0) = \varphi(x).$$

- **Condition aux limites :**

Si  $u$  est fonction de  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  on a trois types:

- Condition de Dirichlet où  $u$  est fixé sur le bord de  $\Omega$  :  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ .
- Condition de Neumann où la dérivée normale de  $u$  est fixé :  $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = \varphi$ .
- Condition mixte : il s'agit de condition de Dirichlet et une condition aux bord.

### 1.1.5 Problème bien posé

On dit que le problème est bien posé si on a :

1. existence d'une solution du problème;
2. unicité de cette solution;
3. stabilité de la solution.

### 1.1.6 Classification des EDP linéaires du second ordre

Soit l'EDP suivante:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = F(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) \quad (1.1.1)$$

où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$  on s'intéresse à :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, u, \partial_x u, \partial_y u). \quad (1.1.2)$$

La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de :

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (1.1.3)$$

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation est elliptique,
- Si  $\Delta = 0$ , l'EDP est dite parabolique,
- Si  $\Delta > 0$ , on a une équation hyperbolique.

### 1.1.7 Exemples

- (1)  $\Delta u = f$  sur  $\Omega$ , est une équation elliptique
- (2)  $u_t - \Delta u = f$  sur  $\Omega$ , est une équation parabolique
- (3)  $u_{tt} - \Delta u = f$  sur  $\Omega$ , est une équation hyperbolique.

# Chapitre 2

## Rappel sur les équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre

Nous allons étudier dans ce chapitre les EDP linéaires du 1<sup>er</sup> ordre, quelques exemples et les EDP linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre jouent une rôle considérable en mécanique et en physique, exemple, propagateurs, vibrations, mouvements, potentiels,...

En général, il n'est pas possible de trouver une solution exacte d'une telle équation, ce qui nous ramène à chercher des solutions particulières, que nous allons appellées solutions élémentaires, et a problème est sur tout rencontré lorsqu'il s'agit d'un problème de Cauchy.

### 2.1 Equations aux dérivées partielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre

#### 2.1.1 Intégrales premières

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

**Exemple 2.1.1** *Si  $n = 1$*

$$y' = x^2 y^2 \implies y = \frac{-1}{a + \frac{x^3}{3}}$$

**Exemple 2.1.2** Si  $n = 2$

$$\begin{cases} y'_1 = -2xy_1^2 y_2 \\ y'_2 = 2xy_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = \frac{1}{a_2 \exp(x^2) + a_1} = \varphi_1 \\ y_2 = a_2 \exp(x^2) = \varphi_2 \end{cases}$$

admet une solution

$$y_1 = \varphi_1(x, a_1, \dots, a_n), \dots, y_n = \varphi_n(x, a_1, \dots, a_n) \quad (2)$$

supposons qu'on puisse résoudre le système (2) par rapport à  $(a_1, \dots, a_n)$  :

$$a_1 = F_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, a_n = F_n(x, y_1, \dots, y_n). \quad (3)$$

**Définition 2.1.1** On appelle *intégrale première* du système(1), toute frontière

$F(x, y_1, \dots, y_n)$  qui reste constante quand on remplace  $(y_1, \dots, y_n)$  par une autre solution du système (1). On définit un général l'intégrale première par les équations (3).

**Exemple 2.1.3 :**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}, \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y} \quad (4)$$

Ecrivons (4) sous la forme

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(z-y) + \beta(x-z) + \gamma(y-x)}$$

choisissons  $\alpha, \beta, \gamma$  de façon à

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{0}$$

$$\alpha = x, \beta = y, \gamma = z$$

donc le numérateur doit être nulle, c-à-d

$$x dx + y dy + z dz = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = a.$$

Posons  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , on a  $dx + dy + dz = 0$ , par conséquent  $x + y + z = b$ .

Enfin les intégrales premières de (4) sont 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x + y + z = b. \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (5)$$

Nous avons

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dt}{1} = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{0}$$

prenons  $\alpha = x$ ,  $\beta = y$ ,  $\gamma = 0$

$$\iff xdx + ydy = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 = a \text{ une 1}^{\text{ère}} \text{ intégrale première.}$$

Prenons  $\alpha = -y$ ,  $\beta = x$  et  $\gamma = 0$ , on a :

$$-y \frac{dx}{y^2} = x \frac{dy}{x^2} = \frac{dt}{1} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

d'où  $\arctan \frac{y}{x} = t + b$ , 2<sup>ème</sup> intégrale première .

**Question:**

Sous quelle conditions, une fonction  $g(x, y_1, \dots, y_n) = c^{te}$  représente une itégrale première de (1) ?

Par dérivation par rapport à  $x$ , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x} = 0$$

d'après (1),  $\frac{dy_j}{dx} = f_j$ , donc, on a

**Remarque 2.1.1 :**

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g}{\partial y_j} = 0. \quad (6)$$

Admet une système caractéristique (1), dans  $g$  est une intégrale première ,avec  $\frac{dy_j}{dx} = f_j$ .

## 2.1.2 Equation aux dérivées partielles linéaire du 1<sup>er</sup> ordre

**Définition 2.1.2** On appelle EDP linéaire du 1<sup>er</sup> ordre, toute équation du type

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + g(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \quad (7)$$

$f_j$  et  $g$  sont des fonctions à  $(n + 1)$  variables,  $u$  est à  $n$  variables.

D'après (6), il vient que (7) admet comme système caractéristique :

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{dx_n}{du} = \frac{f_n}{g}$$

i.e.

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{g}.$$

En effet, il suffit d'écrire  $F(x_1, \dots, x_n, u) = 0$ , puis en remplaçant

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

dans (7), on a:  $g \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$  (Eq. du type (6)).

**Remarque 2.1.2** Comme le système caractéristique (1)

admet  $n$  intégrales premières  $F_1, \dots, F_n$ , alors la solution de l'EDP (7), s'écrit sous la forme  $u = \varphi(F_1, \dots, F_n)$ .

**Remarque 2.1.3** Si dans  $g = 0$  dans (7),

le système caractéristique est  $\frac{dx_1}{f_1} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}, du = 0$ .

Nous avons alors  $n - 1$  intégrales premières  $F_1, \dots, F_{n-1}$  et la solution de l'EDP s'écrit  $u = \varphi(F_1, \dots, F_{n-1})$ .

**Exemple 2.1.4 :**

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

S.C.  $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$  ou  $x dx + y dy = 0$

intégrale première :  $x^2 + y^2 = C$ .

La solution de (8) :  $z = \varphi(x^2 + y^2)$ .

$$\sum x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = m u, \quad m = C^{ets} \tag{9}$$

S.L. ( $m \neq 0$ )

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

intégrales premières:  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}$ .

La solution de (9) :  $u = x_1^m \varphi \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$

$(m = 0) \implies u = \varphi \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$ .

### 2.1.3 Facteur intégrant ( Exemple d'EDP)

Soit la forme différentielle  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

cherchons  $\omega(x, y)$ , telle que  $\frac{\partial(\omega P)}{\partial y} = \frac{\partial(\omega Q)}{\partial x}$ , c'est à dire :

$$Q \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \frac{\partial \omega}{\partial y} = \omega \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

Écrivons son système caractéristique  $\frac{dx}{Q} = -\frac{dy}{P} = \frac{d\omega}{\omega \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}$ .

**Exemple 2.1.5 :**

$$x dy - y dx \tag{11}$$

Comme dans (10), on a  $x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2\omega = 0$

S.C.  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d\omega}{-2\omega}$ .

Intégrales premières  $\frac{y}{x} = a, x^2 \omega = b$

d'ou  $\omega = \frac{1}{x^2} \varphi \left( \frac{y}{x} \right)$  est la facteur intégrant de (11).

### 2.1.4 Problème de Cauchy

Etudions le cas  $n = 3$ . Soit l'EDP

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R \tag{12}$$

où  $P, Q, R$  sont trois fonctions en  $(x, y, z)$ . Le système caractéristique de (12) est

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (\text{si } R \neq 0)$$

ou  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$  et  $dz = 0$  (si  $R = 0$ )

ou obtient alors deux intégrales premières

$$F_1(x, y, z) = C_1$$

$$F_2(x, y, z) = C_2$$

étudier le problème de Cauchy de (12), c'est-à-dire qu'il s'agit de trouver les surfaces qui passent par une courbe  $\Gamma$  donnée.

**Exemple 2.1.6 :**

$$\left\{ \begin{array}{l} y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ x^2 + (y - a)^2 = R^2, z = my \end{array} \right.$$

$$\text{S.C. } \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, dz = 0$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = C_1, z = C_2$$

$$\text{ce qui donne } C_1^2 + a^2 - R^2 = 2ay, C_2 = my$$

$$\text{i.e. } C_1^2 + a^2 - R^2 = \frac{2a}{m} C_2.$$

$$\text{Les surfaces solutions sont : } x^2 + y^2 + a^2 - R^2 = \frac{2a}{m} z.$$

## 2.2 Equations aux dérivées partielles linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre

### 2.2.1 Equation aux dérivée partielle à deux variable

**Définition 2.2.1** Une équation aux dérivée partielle du 2<sup>ème</sup> ordre à deux variables sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est de la forme

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

où  $u$  est en fonction de  $(x, y)$ ;  $(x, y) \in \Omega$ .

$$\text{Posons } p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

il vient que

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = r dx + s dy$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = s dx + t dy.$$

Ce qui donne trois équations du 1<sup>er</sup>- degré en  $r, s, t$  :

$$\begin{cases} rdx + sdy & = dp \\ & sdx + tdy = dq \\ ar + bs + ct & = -f \end{cases} \quad (2)$$

le système (2) admet une solution (par  $r, s, t$ ) sauf si leur déterminant est nul,

$$\text{i.e } \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & b & c \end{vmatrix} = a(dy)^2 - bdx dy + c(dx)^2 = 0, \text{ d'où :}$$

**Remarque 2.2.1** Si

$$a(dy)^2 - bdx dy + c(dx)^2 = 0 \quad (3)$$

alors (2) n'admet pas de solution, sauf si  $adpdy + cdqdx + f dxdy = 0$ .

Auquel le problème admet une infinité de solution. L'équation (3) s'appelle équation canonique de (1).

L'équation (3) "canonique" admet deux solutions: du type

$$\frac{dx}{dy} = \varphi_1(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x, y) \quad (4)$$

**Définition 2.2.2** Les équation (4) représentent les courbes caractéristiques de (1), et il ya trois formes de caractéristiques:

- **Réelles (ou hyperboliques):** On dit que (1) est EDP hyperbolique sur  $\Omega$ ,

$$\text{si } \forall (x, y) \in \Omega \implies b^2 - 4ac > 0.$$

- **Imaginaires (ou elliptiques):** on dit que (1) est EDP elliptique sur  $\Omega$ ,

$$\text{si } \forall (x, y) \in \Omega \implies b^2 - 4ac < 0.$$

- **Doubles (ou paraboliques):** On dit que (1) est parabolique sur  $\Omega$ ,

$$\text{si } \forall (x, y) \in \Omega \implies b^2 - 4ac = 0.$$

**Exemple 2.2.1 :**

a. Equation des cordes vibrantes(hyperbolique)

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (k = c^{te})$$

equation canonique  $k^2 (dx)^2 - (dy)^2 = 0$

soit  $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{k} \implies y = \frac{x}{k} + c_1, y = -\frac{x}{k} + c_2$

b. Equation de Laplace(elliptique)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

c. Equation de la Chaleur (parabolique)

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

d. L'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  est hyperbolique dans le demi plan  $x > 0$  et elliptique

dans  $x < 0$ . ( $x = 1$  équation des ondes).

e.  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

Equation canonique  $x^2 (dy)^2 - y^2 (dx)^2 = 0$

soit  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  et  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  donc  $y = c_1 x$  et  $y = c_2 x$  sont deux caractéristiques .

(e) est hyperbolique sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2.2 Classification des équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre de $n$ variables

**Définition 2.2.3** Une EDP du 2<sup>ème</sup> ordre à  $n$  variables sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

est de la forme

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad x \in \Omega \quad (5)$$

où  $a_{jk} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  avec  $a_{jk} = a_{kj}$ .

On écrit la matrice  $A(x) = (a_{jk})$ ,  $A(x)$  est symétrique, en effet si  $a_{jk} \neq a_{kj}$ , on pose  $a'_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$  et  $a''_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} - a_{kj})$  et on a:

$$(5) \iff \sum_{j,k=1}^n (a'_{jk} + a''_{jk}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f = 0$$

**Remarque 2.2.2**  $A(x)$  est symétrique et toutes ses valeurs propres sont réelles.

En effet, soit  $A\nu = \lambda\nu$ ,

alors

$$\langle A\nu, \nu \rangle = \langle \lambda\nu, \nu \rangle = \lambda |\nu|^2$$

or

$$\langle A\nu, \nu \rangle = \langle \nu^t, \nu \rangle = \langle \nu, A\nu \rangle = \bar{\lambda} \langle \nu, \nu \rangle = \bar{\lambda} |\nu|^2.$$

Pour  $x \in \Omega$ , soit  $\lambda_j$  la valeur propre de  $A(x)$ ; on pose  $\nu_+, \nu_-$  et  $\nu_0$  successivement le nombre des valeurs propres positives, négatives et nulles.

**Définition 2.2.4** L'équation (5) est dite :

Elliptique en  $x$  si ( $\nu_+ = n$  ou  $\nu_- = n$ ),

hyperbolique en  $x$  si ( $\nu_+ = n - 1$  et  $\nu_- = 1$ ), ( ou  $\nu_+ = 1, \nu_- = n - 1$ )

parabolique en  $x$  si ( $\nu_+ = n - 1, \nu_- = 0, \nu_0 = 1$ ), ( ou  $\nu_+ = 0, \nu_- = n - 1, \nu_0 = 1$ ).

L'équation (5) est de tel type sur  $\Omega$ , si elle est en tout  $x$  de  $\Omega$ .

**Exemple 2.2.2 :**

a.  $\Delta u = f$ ,  $\left( \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ laplacien} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \cdot \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_j = 1 > 0. \text{ L'équation (a) est elliptique sur } \mathbb{R}^n.$$

b. Operateur de D'Alembert  $\square u = f$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \det(A - \lambda I) = (-\lambda - 1)^{n-1} (\lambda - 1) \text{ donc } \nu_+ = 1, \nu_- = n - 1,$$

$\square$  est hyperbolique .

c. Equation de la Chaleur  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{n-1}u = f$

on écrit  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = t$ , et on a  $A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ,

d'où  $\lambda_j = -1$ , ( $j = 1, \dots, n - 1$ ) et  $\lambda_n = 0$  est donné parabolique .

d. Equation de Tricomi  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = x.$$

L'équation (d) est elliptique sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , hyperbolique sur  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et parabolique sur  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

e. L'équation (1) à étudier :

$$(1) \iff a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}b \frac{\partial u}{\partial y \partial x} + \dots etc = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \text{ on obtient les resultats du paragraphe.}$$

### 2.2.3 Solution élémentaire (séparation des variables)

Nous nous limiterons à des équation de la forme

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j} + cu = f \quad (6)$$

et nous cherchons des solutions de la forme

$$u(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)$$

voyons le cas  $n = 2$  :

**Exemple 2.2.3 :**

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + eu = 0$$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ . Posons  $u(x, y) = f(x)g(y)$ ,

alors

$$af''g + bfg'' + cf'g + dfg' + efg = 0$$

on divise par  $(fg)$  :

$$a \frac{f''}{f} + b \frac{g''}{g} + c \frac{f'}{f} + d \frac{g'}{g} + e = 0$$

ou  $\left\{ a \frac{f''}{f} + c \frac{f'}{f} \right.$  et  $\left. b \frac{g''}{g} + d \frac{g'}{g} \right.$  ne dépend que  $x$  ou  $y$ , alors on a forcément

$$\begin{cases} af'' + cf' = \lambda f, & (\lambda \in \mathbb{R}) \\ bg'' + dg' + (c - \lambda)g = 0 \end{cases}, \text{ finalement;}$$

$f$  et  $g$  sont les solutions de deux équations différentielles ordinaires d'ordre 2.

## 2.2.4 Les différents types de problèmes aux limites

Chercher une solution d'une telle EDP est souvent défficiel et encore plus compliquée lorsque on associé à cette EDP une condition.

- **Problème de Cauchy (ou conditions initiales)**

On le pose à l'instant  $t = 0$  pour les EDP paraboliques ou hyperboliques :

$$\begin{cases} \text{Eq.parabolique (exemple: } \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u = f \text{ )} \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ \text{Eq.hyperbolique (exemple: } \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = f \text{ )} \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

- **Condition au bord:**

On le pose pour les EDP elliptiques, i.e.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $\partial\Omega = \Gamma$  le bord

$$\begin{cases} \text{Eq. elliptique ( exemple: } \Delta u = f \text{ )} \\ u|_{\Gamma} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} \text{ sont données} \end{cases}$$

rappelons, ici, la formule de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla \Delta u = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} v \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, \nu_k) d\Gamma$$

$$\text{où } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, \nu_k)$$

- **Problèmes mixte**

On le pose par les EDP paraboliques et hyperboliques avec les conditions initiales et aux bord.

## 2.3 Quelques applications

vous allons étudier quelques exemples des EDP du 2<sup>ème</sup> d'ordre linéaires, en l'occurrence l'équation des ondes et de la Chaleur .

### 2.3.1 Equation des ondes dans $\mathbb{R}^2$ , solution élémentaire

Considérons l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

elle représente les vibrations d'une corde tendue.

a. Cherchons une solution élémentaire: on pose  $u(t, x) = f(x) . g(t)$  et on remplace

dans (1), alors  $\frac{f''}{f}(x) = \frac{g''}{g}(t)$ .

Comme  $\frac{f''}{f}$  (resp.  $\frac{g''}{g}$ ) dépend de  $x$  (resp. de  $t$ ), il y a donc qu'une seule possibilité:

$$\frac{f''}{f}(x) = \frac{g''}{g}(t) = k, (k = c^{te} \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

ce qui donne que  $f$  et  $g$  sont solutions des équations différentielles ordinaires

$$f'' - kf = 0 \quad \text{et} \quad g'' - kg = 0 \quad (3)$$

b. Voyons maintenant le problème mixte pour (1): on considère alors l'équation (1) pour  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, l]$ , avec le problème de Cauchy

- Conditions initiales  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x)$ ,  $x \in [0, l]$
- Conditions aux bord  $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**Remarque 2.3.1** On peut choisir  $k < 0$  (c'est à dire  $k = -\theta^2$ ).

Nous avons  $f(0) = f(l) = 0$  (C.L).

De (3), il résulte que

$$\begin{cases} f(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x \\ g(x) = C \cos \theta t + D \sin \theta t \end{cases} \quad (4)$$

comme  $f(0) = f(l) = 0$ , c'est à dire  $A = 0$  et  $\sin \theta l = 0$  i.e.  $\theta_k = \frac{k\pi}{l}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 2.3.2 Equation des Ondes dans $\mathbb{R}^2$ , méthode de Fourier

Choisissons  $B = 1$ , dans (4), la solution élémentaire de (1), s'écrit alors

$$u_k(t, x) = \left( C_k \cos \frac{k\pi}{l}t + D_k \sin \frac{k\pi}{l}t \right) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

et on peut représenter la solution:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t, x). \quad (5)$$

Alors (5) est une série de Fourier par rapport à  $x$ , ( $2l$  - périodique), et par rapport à  $t$ , ( $2l$  - périodique).

Utilisons maintenant les conditions initiales;

on a

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{l} x \\ \psi(x) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \sin \frac{k\pi}{l} x \end{cases} \quad (6)$$

Il est clair que (6) est le développement en série de Fourier de  $\Phi$  et  $\Psi$  définies par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0, l[ \\ -\varphi(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases} \quad (\text{impaires})$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0, l[ \\ -\psi(-x), & x \in [-l, 0[ \end{cases}$$

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad , \quad D_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (7)$$

### 2.3.3 Equation de la Chaleur dans $\mathbb{R}^2$

çait le problème mixte (parabolique)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, l] \\ \varphi(x) = u(0, x) \\ a = u(t, 0), b = u(t, l) \quad , (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (8)$$

cherchons une solution élémentaire de la forme  $u(t, x) = f(x) \cdot g(t)$ ,

alors on a  $\frac{g'}{g}(t) = \frac{f''}{f}(x)$ .

Comme dans le paragraphe 1, on obtient  $\frac{g'}{g}(t) = -k^2 et \frac{f''}{f}(x) = -k^2$ ,

d'où

$$g(t) = Ae^{-k^2 t} \quad f(x) = B \cos kx + C \sin kx.$$

Introduisons les conditions initiales:

**Remarque 2.3.2**  $v(t, x) = u + \frac{a-b}{l} - a$  est solution de (1) avec  $v(t, 0) = v(t, l) = 0$ .

Nous avons alors

$$v(t, x) = Ae^{-k^2 t} (B \cos kx + C \sin kx)$$

$$v(t, 0) = 0 = v(t, l) \implies B = 0, k = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui donne

$$v = \sum_{n \geq 0} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

or pour  $t = 0$  on a

$$v(0, x) = \varphi(x) + \frac{a-b}{l}x - a,$$

donc

$$u(t, x) = \frac{b-a}{l}x + a + \sum_n C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

et

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \varphi(s) + \frac{a-b}{l}s - a \right) \sin \frac{n\pi}{l} s ds.$$

# Chapitre 3

## Les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre nous donnons quelques notions sur les espaces Sobolev et leurs propriétés, finalement nous discutons quelques applications.

### 3.1 Les espaces de Sobolev

**Définition 3.1.1** Pour  $s \in \mathbb{R}$ , l'espace de Sobolev, noté  $H^s$  est l'ensemble :

$$\left\{ f/f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### 3.1.1 Quelques propriétés

Les espaces de Sobolev ont une propriété de monotonie:

**Proposition 3.1.1**  $H^s \subset C^k$  si  $s > \frac{n}{2} + k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ )

**Remarque 3.1.1** La proposition (3.1.1) est connue sous le nom de l'injection de Sobolev.

**Preuve.** Soit  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ . Dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  on a  $\partial^\alpha f = \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}(\partial^\alpha f)]$ .

On a

$$|\overline{\mathcal{F}}(\partial^\alpha f)| = |\xi^\alpha \widehat{f}| = |\xi^\alpha| (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int |\overline{\mathcal{F}}(\partial^\alpha f)(\xi)| d\xi \leq \left( \int |\xi^\alpha|^2 (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$|\xi^\alpha|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|} \leq (1 + |\xi|^2)^k$$

car  $|\alpha| \leq k$  on a  $\int \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{s-k}} < +\infty$  si  $2(s - k) > n$ , c'est-à-dire.  $s > \frac{n}{2} + k$ . ■

**Proposition 3.1.2**  $H^{s_1} \subset H^{s_2}$  si  $s_1 \geq s_2$ .

**Preuve.** Comme  $1 + |\xi|^2 \geq 1$  donc

si  $s_1 \geq s_2$  on a

$$(1 + |\xi|^2)^{s_2} \leq (1 + |\xi|^2)^{s_1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

donc  $H^{s_1} \subset H^{s_2}$  et l'injection est continue. ■

\* Les espaces de Sobolev possèdent une propriété de multiplication:

**Proposition 3.1.3** Si  $f \in H^s$  et  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n) \implies f\varphi \in H^s, \forall s > 0$ .

Pour démontrer la proposition (3.1.3), on a besoin de la proposition suivante:

**Proposition 3.1.4** Pour  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 4^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{|s|}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

**Preuve.** Tous d'abord  $\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\xi - \eta|^2} \leq 2(1 + |\eta|^2)$ .

En effet  $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$

d'où

$$|\xi|^2 \leq |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + 2|\xi - \eta| \cdot |\eta| \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)$$

car  $2ab \leq a^2 + b^2$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\xi - \eta|^2} &\leq \frac{1 + 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2}{1 + |\xi - \eta|^2} \leq 2 \frac{1 + |\xi - \eta|^2}{1 + |\xi - \eta|^2} + 2 \frac{|\eta|^2}{1 + |\xi - \eta|^2} \\ &\leq 2 + 2|\eta|^2 = 2(1 + |\eta|^2) \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'inégalité pour  $s > 0$ . Pour  $s < 0$  on raisonne avec  $1 + |\xi - \eta|^2$  au lieu de  $1 + |\xi|^2$ . ■

**Preuve. de proposition (3.1.3)**

Soit  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$  et  $f \in H^s \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\widehat{\varphi f} = \widehat{\varphi} * \widehat{f}$ ; ici  $\varphi \in S$  donc  $\widehat{\varphi} \in L^1$ ,  $\widehat{f} \in L^2$  et la convolution a un sens. De plus

$$\begin{aligned} \|\varphi f\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \widehat{\varphi f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\eta) \widehat{f}(\xi - \eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ \|\varphi f\|_{H^s} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| d\eta \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| \cdot \left| \widehat{f}(\xi - \eta) \right|^2 d\eta \right] d\xi \end{aligned}$$

(On a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la fonction  $|\widehat{\varphi}(\eta)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{\varphi}(\eta)|^{\frac{1}{2}} \left| \widehat{f}(\xi - \eta) \right|$ ).

D'où

$$\|\varphi f\|_{H^s}^2 \leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} 2^s \int \int (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| \left| \widehat{f}(\xi - \eta) \right|^2 d\eta d\xi$$

Donc

$$\|\varphi f\|_{H^s}^2 \leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} \left( \int (1 + |\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| \right) \left( \int (1 + |\xi - \eta|^2)^s \left| \widehat{f}(\xi - \eta) \right|^2 d\xi \right) d\eta$$

d'où

$$\|\varphi f\|_{H^s}^2 \leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} \left( \int (1 + |\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| d\eta \right) \|f\|_{H^s}^2 .$$

■

**Proposition 3.1.5** *L'espace  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*

La preuve est vraiment classique. (Voir [4] p.27).

## 3.2 Quelques applications

**Théorème 3.2.1** *L'application linéaire  $-\Delta + k^2$  est un isomorphisme de  $H^{s+2}$  dans  $H^s$ .*

$$\text{ou } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Pour la preuve ( Voir [5] p.205 ).

**Proposition 3.2.1** *L'espace  $S^{(k)}$ , des distributions à support compact d'ordre  $\leq k$ , est contenu dans  $H^s$*

**Théorème 3.2.2** *où  $s < -\frac{n}{2} - k$ .*

**Preuve.** Si  $T$  est à support compact et  $\widehat{T}$  est une fonction  $C^\infty$  on a  $\widehat{T}(\xi) = \langle T, e^{-2i\pi(x,\xi)} \rangle$ , comme  $T$  est d'ordre fini  $\leq k$ ,

$$\exists K(\text{compact}) \in \mathbb{R}^n, \exists C > 0 \implies \left| \widehat{T}(\xi) \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha e^{-2i\pi(x,\xi)}| \leq C_\alpha \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|$$

Or

$$|\xi^\alpha|^2 = \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n} \leq (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^k$$

car  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$  On en déduit que

$$\left| \widehat{T}(\xi) \right|^2 \leq C \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha| \right)^2 \leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq C'' (1 + |\xi|^2)^k$$

et

$$(1 + |\xi|^2)^s \left| \widehat{T}(\xi) \right|^2 \leq C'' (1 + |\xi|^2)^{s+k}$$

La fonction  $(1 + |\xi|^2)^{s+k}$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$  si  $-2(s+k) > n$ , c'est-à-dire si  $s < -\frac{n}{2} - k$ . ■

### 3.2.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Dans cette section nous allons faire une applications sur un ouvert borné  $\Omega$ .

**Définition 3.2.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On pose*

$$H^1(\Omega) = \left\{ f, f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\},$$

et que l'on note par  $H^1(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  ayant des dérivées au sens des distributions dans  $L^2(\Omega)$ .

où les dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sont prises au sens des distributions. Il est clair que  $H^1(\Omega)$  est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \langle f, f \rangle_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 3.2.1** Les fonctions à dérivées non continues sur  $\overline{\Omega}$  ne sont pas nécessairement dans  $H^1(\Omega)$ .

**Exemple 3.2.1 :**

- Toute fonction de  $C^1([-1, 1])$  est dans  $H^1(]-1, 1[)$ .
- Soit  $f$  définie sur  $]-1, 1[$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Alors  $f \notin H^1(]-1, 1[)$ . En effet  $f \in L^2(]-1, 1[)$  mais  $f' = \delta$  qui ne peut pas être identifiée avec une fonction de  $L^2(]-1, 1[)$ .

-La fonction  $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{4}} & \text{si } 0 < x < 1, \\ (-x)^{\frac{3}{4}} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

est dans  $H^1(]-1, 1[)$  (mais elle n'est pas dérivable en  $x = 0$ ).

### 3.2.2 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  désigne la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 3.2.2**  $H_0^1(\Omega)$  est le sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions  $f$  de  $H^1(\Omega)$  telle que  $f = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

**Proposition 3.2.2** Si  $f \in H_0^1(\Omega)$  alors le prolongement de  $f$  par 0 en dehors de  $\Omega$  est un élément de  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . C'est à dire  $\forall f \in H_0^1(\Omega)$ , on a  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } C\Omega \end{cases}$

avec la fonction  $\tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 3.2.2** Si  $f \in H^1(\Omega)$  alors le prolongement de  $f$  par 0 en dehors de  $\Omega$  n'est pas toujours un élément de  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . C'est à dire  $\exists f \in H^1(\Omega)$ , telle que  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } C\Omega \end{cases}$

avec la fonction  $\tilde{f} \notin H^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 3.2.2** Soit  $\Omega$  un ensemble borné inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f$  la fonction qui vaut 1 sur l'ensemble  $\Omega$  alors, la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } C\Omega \end{cases}$ ,

n'est pas un élément de  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , voir que  $\tilde{f}(x) \notin H^1(\mathbb{R}^n)$ .

En effet, soit  $\Omega = ]-1, 1[$  et  $\tilde{f}(x)$  la fonction définie par  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } ]-1, 1[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ ,

il aisé de voir que la fonction  $\tilde{f}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , par contre la fonction dérivée  $\frac{d\tilde{f}}{dx}$  n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R})$  car, on a  $\frac{d\tilde{f}}{dx} = \delta_{-1} - \delta_1 \notin L^2(\mathbb{R})$  d'ou le résultat voulu  $\tilde{f}(x) \notin H^1(\mathbb{R})$ .

\*Les espaces de Sobolev sont des espaces très naturels pour les solutions des équations aux dérivées partielles.

**Proposition 3.2.3** Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace  $D(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^1(\Omega)$ .

**Preuve.** Si  $M$  un sous espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$  il est dense dans  $H$  si son orthogonal est réduit au sous espace nul,

$$\overline{M} = H \iff M^\perp = \{0\}.$$

on démontrer que  $D(\Omega)^\perp \neq 0$ .

Soit  $f \in D(\Omega)^\perp$  alors, on a

$$f \in D(\Omega)^\perp \iff \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = 0, \forall g \in D(\Omega),$$

nous donne

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} f(x) g(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) g(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} g(x) dx. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega} \left( f(x) - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \right) g(x) dx = \langle -\Delta f + f, g \rangle, \forall g \in D(\Omega).$$

ce qui implique que la relation d'orthogonalité nous mène à la relation

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \implies \langle -\Delta f + f, g \rangle = 0 \implies -\Delta f + f = 0, \forall g \in D(\Omega).$$

Cette équation admet des solutions différentes de la solution triviale si le domaine  $\Omega$  est borné, c'est à dire, il existe une fonction  $f \in H^1(\Omega)$  solution du problème  $-\Delta f + f = 0$ , avec  $f \neq 0$  et  $\Omega$  borné.

Soit  $\Omega = ]a, b[$  alors l'équation devient

$$-f'' + f = 0,$$

qui admet une solution de la forme

$$f = Ae^{-x} + Be^x, \text{ où } A, B \text{ deux constantes.}$$

■

### 3.2.3 Application aux problèmes aux limites elliptiques

**Formule de Green généralisée:**

$$\text{Si } f \in H^1(\Omega), \Delta f \in L^2(\Omega), \text{ alors } \frac{\partial f}{\partial \eta} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left( H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)',$$

$$\text{on a } \int_{\Omega} \Delta f g dx = - \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \eta}, g \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \text{ avec } \gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

**Problème de Dirichlet**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\Gamma$ , et soit  $h$  une fonction de l'espace  $L^2(\Omega)$ , on considère le problème suivant. Trouver une fonction  $f$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta f = h \text{ sur } \Omega & (1.1) \\ f = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega & (1.2) \end{cases}$$

Où  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ , supposons que  $f$  est suffisamment régulière et on multiplie l'équation (1.1) par une fonction  $g \in H_0^1(\Omega)$ , et on intègre sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} -\Delta f g dx = \int_{\Omega} h g dx$$

après utilisation de la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} g d\sigma = \int_{\Omega} h g dx$$

d'où

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx = \int_{\Omega} h g dx, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega)$$

Soit  $f$  un élément de  $H^2(\Omega)$ , car  $f$  est suffisamment régulière et en vertu de (1.2)  $f|_{\Gamma} = 0 \implies f \in H_0^1$ .

Si  $f$  est solution du problème (1.1)-(1.2), alors  $f$  est solution du problème:

Trouver  $f \in H_0^1(\Omega)$ , telle que  $\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx = \int_{\Omega} h g dx, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega)$

si  $f \in H_0^1(\Omega)$  est suffisamment régulière, en appliquant la formule de Green a

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx = \int_{\Omega} h g dx,$$

on aura

$$\int_{\Omega} -\Delta f g dx = \int_{\Omega} h g dx, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega)$$

d'où  $\langle -\Delta f - h, g \rangle = 0, \quad \forall g \in D(\Omega) \implies -\Delta f = h$  dans  $D'(\Omega)$

$f \in H_0^1(\Omega) \implies f|_{\Gamma} = 0$ , d'où  $f$  est solution du problème(1.1)-(1.2).

### Problème de Neumann

Soit  $h \in L^2(\Omega)$ , trouver la fonction  $f$  telle que 
$$\begin{cases} -\Delta f + g = h \text{ sur } \Omega & (1.3) \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega & (1.4) \end{cases}$$

on suppose que  $f$  est régulière, on multiplie par  $g \in H^1(\Omega)$  l'équation (1.3) et on intègre sur  $\Omega$ ,

on obtient

$$\int_{\Omega} -\Delta f g dx + \int_{\Omega} f g' dx = \int_{\Omega} h g dx$$

par la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} f g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} g d\sigma = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in H^1(\Omega)$$

d'où

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} f g dx = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in H^1(\Omega)$$

si  $f$  est solution du problème (1.3)-(1.4), alors  $f$  est solution du problème variationnel suivant

Trouver  $f \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} f g dx = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in H^1(\Omega)$$

alors  $f$  vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} f g dx = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in D(\Omega)$$

d'où

$$\int_{\Omega} -\Delta f g dx + \int_{\Omega} f g dx = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in D(\Omega)$$

d'où  $\langle -\Delta f + f - h, g \rangle = 0, \forall g \in D(\Omega) \implies -\Delta f + f = h$  dans  $D'(\Omega)$ , par multiplication de  $g \in H^1(\Omega)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} -\Delta f g dx + \int_{\Omega} f g dx = \int_{\Omega} h g dx$$

par la formule de Green, on aura

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} f g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} g d\sigma = \int_{\Omega} h g dx, \forall g \in H^1(\Omega)$$

on obtient  $\int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} g d\sigma = 0 \forall g \in H^1(\Omega) \implies \left\langle \frac{\partial f}{\partial \eta}, g \right\rangle = 0 \quad \forall g \in H^1(\Omega) \implies \frac{\partial f}{\partial \eta|_{\Gamma}} = 0$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons rappeller quelques propriétés sur les EDP du 2<sup>ème</sup> ordre en particulier la classification, ainsi que quelques propriétés des espaces de Sobolev.

# Bibliographie

- [1] **R.A.Adams**: Sobolev spaces, Academic press, 1978.
- [2] **F.Boyer**: Equations différentielles ordinaires, Equations aux dérivées partielles, Analyse théorique et numérique. Université de provence-Université paul Cézanne 17 décembre 2010.
- [3] **S.D.Chatterji**: Cours d'analyse 3 equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, presses polytechniques et universitaires romandes 1998.
- [4] **T.Lelièvre**: Equations aux dérivées partielles,2009-2010.
- [5] **A.Maunier**<sup>1</sup>: Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles,Institut Élie cartan 2007-2008.
- [6] **C.Zuily**: Distributions et EDP,exercices corrigés,1986 Hermann.

# Bibliographie

[1]

[2]