# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

**Mémoire**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Option**: Mathématique fondamentale

**Spécialité:** Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

**Par**

**CHETOUH Ahmed**

**Sujet**

*Fréchet différentiabilité des fonctions lipschitziennes entre espaces de Banach*

**Soutenu le : 17 /06/ 2014** **devant le jury compose de .**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **President** | : | DAHMANE Achour | Prof. | Univ M'sila |
| **Rapporteur** | : | MEZRAG lahcène | Prof. | Univ M'sila |
| **Examinateur** | : | SAÂDI Khalil | M.C.A. | Univ M'sila |

**Promotion : 2013/2014**

## ملخص

نتطرق في هذه الرسالة إلى دراسة تفاضل فريشي للتطبيقات ليبتشيزية بين فضاءات باناخ، خاصية رادون نيكوديم، الفضاءات الانعكاسية والفضاءات القابلة للفصل...

## الكلمات المفتاحية:

التطبيقات ليبتشيزية، التحدب المنتظم، الفضاءات الانعكاسية، الفضاءات القابلة للفصل، RNP، تفاضل السهل، تفاضل فريشي، فضاءات اسبلاند

## Resumé

Dans ce mémoire on étudie la différentiabilité au sens de Fréchet des fonctions lipshitziennes entre espaces de Banach, la propriété de Radon-Nikodym dans les espases réflexifs, séparables,...cte.

## Mots-clés:

Les applications lipshitziennes, convexité uniforme, RNP, Gâteaux différentiable, Fréchet différentiable, espace asplund.

## Abstract

In this paper we will study Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces, and Radon-Nikodym property and reflixif space, separable space...cte.

## Key word:

Lipschitz mappings, uniform convexity, RNP, Gâteaux differentiability, Fréchet differentiability, asplund space.

# Table des matières

# Introduction

La notion d'espaces métriques a été formalisée par le français Maurice Fréchet dans sa thèse "Doctorat d'Etat" en 1906 sous la direction de Hadamard, et l'espace de Arens-Eells (libre) a été introduit par ARENS-Eells en 1956 sur une idée de Kantorovich en 1942. La terminalogie ARENS-Eells est due a Weaver (1999), La (RNP) porte le nom de Radon de Johann, qui a prouvé le théorème pour le cas spécial où l'espace fondamental est $\mathbb{R}^N$ en 1913 et par Otto Nikodym qui a prouvé le cas général en 1930.

Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. On dit qu'une fonction $f$ de $X$ dans $Y$ est Lipschitzienne, s'il existe $c > 0$ telle que, $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, la constante $c$ s'appelle la constante Lipshitzienne. On note par $\mathrm{Lip}(X, Y)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes de $X$ dans $Y$.

Pour les fonctions vectorielles ils existes deux versions principales de dérivées.

- Dérivée de Gâteaux (ou faible: généralisation de la dérivée directionnelle). On dit que $f$ est Gâteaux différentiable en $x$ s'il existe un opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T(h), \forall h \in X.$$

  $T(h)$ s'appelle la dérivée de Gâteaux de $f$ au point $h$ de $X$.

- Dérivée de Fréchet (ou forte: généralisation du gradient). On dit que $f$ est Fréchet différentiable en $x$ s'il existe un opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0, \forall h \in X.$$

  $T(h)$ s'appelle le dérivée de Gâteaux de $f$ au point $h$ de $X$.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la Fréchet différentiabilité des fonctions lipschitziennes entre l'espace de Banach.

ce travial est organisé en trois chapitre.

- Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les espaces métriques, les opérateurs de Lipschitz et les espaces de Arens-Eells (espace libre).
- Dans le deuxieme chapitre, on étudie quelques propriétés des espaces réflexifs, séparables et La propriété de Radon-Nikodym (RNP) .
- Dans le troisième chapitre, on étudie les Fréchet et Gâteaux différentiabilité des fonctions lipschitziennes dans l'espace de Banach.

On termine par une conclusion sur les résultats obtenus ainsi que les perspectives de ce travail.

# Conclusion générale

On a etudié dans ce mémoire les Fréchet et Gâtaux différentiablité pour pouvoir approcher les opérateurs de Lipschitz par des opérateurs linéaires. Cela, nous facilite la transposition de quelques propriétés linéaires au cas lipschitziens.

# Bibliographie


[1] F. Albia and N. J. Kalton. "*Topics in Banach space theory*", *233* Springer-Verlag 2006.

[2] N. Aronszajn, "*Differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces*", Studia Math. 57 (1976), 147–190.

[3] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 1, in: Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[4] J. Bourgain "*Vector valued simpler integrals and the H-BMO duality*", Probability theory and harmonic analysis (Chao-Woyczynski ed.) 1-19. Marcel Dekker, New-York 1986.

[5] S. Cobzas, "*Adjoints of Lischitz mappings*", Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, (2003), 49-54.

[6] R. Deville, P Hàjek, "*On the range of the derivative of Gâteaux-smooth functions on separable Banach spaces*, Israel Journal of Mathemmatics. 145, (2005), 257-269.

[7] N. J. Kalton, "*The Nonlinear Geometry of Banach Spaces*", Rev. Mat.Complut. **21** (2008), 7-60.

[8] J. Lindenstrauss, D. Preiss, "*A new proof of Fréchet differentiability of Lipschitz functions*", J. Eur. Math. Soc 2 (2000), 199-216.

[9] D. Preiss D., "*Fréchet differentiability of Lipschitz functions*", J. Functional Anal. 91 (1990), 312-345.

[10] I. Sawashima, "*Methods of Lipschitz duals*", in Lecture Notes Ec. Math. Syst.**419**, Springer Verlag (1975), 247-259.

[11] N. Weaver, "*Lipschitz Algebras*", World Scientific, Singapore 1999.