



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Option: Mathématique fondamentale

Spécialité: Géométrie des espaces de Banach et analyse
harmonique

Par

CHETOUH Ahmed

Sujet

*Fréchet différentiabilité des fonctions lipschitziennes
entre espaces de Banach*

Soutenu le : 17 /06/ 2014

devant le jury compose de .

President	:	DAHMANE Achour	Prof.	Univ M'sila
Rapporteur	:	MEZRAG Iahcène	Prof.	Univ M'sila
Examineur	:	SAÂDI Khalil	M.C.A.	Univ M'sila

Promotion : 2013/2014

ملخص

نتطرق في هذه الرسالة إلى دراسة تفاضل فريشي للتطبيقات ليبشيتزية بين فضاءات باناخ، خاصية رادون نيكوديم، الفضاءات الانعكاسية والفضاءات القابلة للفصل...

الكلمات المفتاحية:

التطبيقات ليبشيتزية، التحدب المنتظم، الفضاءات الانعكاسية، الفضاءات القابلة للفصل، RNP، تفاضل السهل، تفاضل فريشي، فضاءات اسبلاند

Resumé

Dans ce mémoire on étudie la différentiabilité au sens de Fréchet des fonctions lipshitziennes entre espaces de Banach, la propriété de Radon-Nikodym dans les espaces réflexifs, séparables,...cte.

Mots-clés:

Les applications lipshitziennes, convexité uniforme, RNP, Gâteaux différentiable, Fréchet différentiable, espace asplund.

Abstract

In this paper we will study Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces, and Radon-Nikodym property and reflexif space, separable space...cte.

Key word:

Lipschitz mappings, uniform convexity, RNP, Gâteaux differentiability, Fréchet differentiability, asplund space.

2.4.1	Théorème de Hôlder	22
2.4.2	La propriété de Radon-Nikodym (RNP)	23
3	Fréchet et Gâteaux de différentiabilité	26
3.1	Dérivées	26
3.1.1	Gâteaux	26
3.1.2	Fréchet différentiabilité	27
3.2	Propriétés	30
	Notation générale	33
	Notation	1
	Introduction	2
1	Les applications lipschitziennes et les espaces libres	4
1.1	Espace métrique	4
1.2	Les applications lipschitziennes	5
1.2.1	Définitions	5
1.2.2	Propriétés	7
1.3	Espaces rétractés	8
1.4	Espaces de Lipschitz	10
1.5	Espaces de Arens-Eells (prédual de $Lip_0(X)$)	11
1.5.1	Construction	11
1.5.2	Propriétés	11
1.6	Opérateur lipschitzien adjoint	13
2	La propriété de Radon-Nikodym (RNP)	17
2.1	Les espaces réflexifs	17
2.2	Les espaces séparables	18
2.3	Convexité uniforme et uniformément lisse	19
2.3.1	Convexité uniforme	19
2.3.2	Uniformément lisse	20
2.4	La propriété de Radon-Nikodym (RNP)	21

2.4.1	Théorème de Bochner	22
2.4.2	La propriété de Radon-Nikodym (RNP)	23
3	Fréchet et Gâteaux de différentiabilité	26
3.1	Dérivées	26
3.1.1	Gâteaux différentiabilité	26
3.1.2	Fréchet différentiabilité	27
3.2	Propriétés	30
	• $Lip(X, Y)$: l'espace des fonction lipschitziennes muni de la norme $\ f\ _{Lip(X, Y)}$	
	• $Lip(X) = Lip(X, \mathbb{R})$	
	• $Lip_0(X, Y)$: l'espace des fonction lipschitziennes tel que $f(e) = 0$, muni de la norme $Lip(f)$	
	• $X^* = Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X)$ muni de la norme $Lip(x^*)$	
	• $\mathcal{E}(X)$: l'espace de Aronson-Eells	
	• $\mathcal{E}^*(X) = Lip_0(X)$	
	• S_X : la sphère d'unité de X .	
	• L_p : est l'espace des fonction mesurables f telles que,	
	$\ f\ _{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$	
	• ℓ_p : est l'espace des suites $(a_k)_k$ telle que,	
	$\ (a_k)\ = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k ^p \right)^{\frac{1}{p}}$	
	• X^* : dual de X .	
	• $C(K)$: $\{f : K \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continue et } K \text{ compact}\}$.	
	• H : l'espace de Hilbert.	
	• \mathcal{E} : tribu borélienne sur \mathbb{R} .	

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la Fréchet différentiabilité des fonctions lipschitziennes entre l'espace de Banach.

ce travail est organisé en trois chapitres.

• Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les espaces métriques, les opérateurs de Arens-Eells (espace libre).

• Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques propriétés des espaces réflexifs, séparables et la propriété de Radon-Nikodym (RNP).

Introduction

La notion d'espaces métriques a été formalisée par le français Maurice Fréchet dans sa thèse "Doctorat d'Etat" en 1906 sous la direction de Hadamard, et l'espace de Arens-Eells (libre) a été introduit par ARENS-Eells en 1956 sur une idée de Kantorovich en 1942. La terminologie ARENS-Eells est due à Weaver (1999), La (RNP) porte le nom de Radon de Johann, qui a prouvé le théorème pour le cas spécial où l'espace fondamental est \mathbb{R}^N en 1913 et par Otto Nikodym qui a prouvé le cas général en 1930.

Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. On dit qu'une fonction f de X dans Y est Lipschitzienne, s'il existe $c > 0$ telle que, $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, la constante c s'appelle la constante Lipschitzienne. On note par $\text{Lip}(X, Y)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes de X dans Y .

Pour les fonctions vectorielles ils existent deux versions principales de dérivées.

- Dérivée de Gâteaux (ou faible: généralisation de la dérivée directionnelle). On dit que f est Gâteaux différentiable en x s'il existe un opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T(h), \forall h \in X.$$

$T(h)$ s'appelle la dérivée de Gâteaux de f au point h de X .

- Dérivée de Fréchet (ou forte: généralisation du gradient). On dit que f est Fréchet différentiable en x s'il existe un opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0, \forall h \in X.$$

$T(h)$ s'appelle la dérivée de Gâteaux de f au point h de X .

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la Fréchet différentiabilité des fonctions lipschitziennes entre l'espace de Banach.

ce travail est organisé en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les espaces métriques, les opérateurs de Lipschitz et les espaces de Arens-Eells (espace libre).
- Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques propriétés des espaces réflexifs, séparables et la propriété de Radon-Nikodym (RNP).
- Dans le troisième chapitre, on étudie les Fréchet et Gâteaux différentiabilité des fonctions lipschitziennes dans l'espace de Banach.

On termine par une conclusion sur les résultats obtenus ainsi que les perspectives de ce travail.

La notion d'espaces métriques a été formalisée par le français Maurice Fréchet dans sa thèse "Docteurat d'Etat" en 1906 sous la direction de Hadamard. Il a dirigé parmi d'autres les thèses de Nachman Aronszajn et Ky Fan. Il est élu membre de l'Académie polonaise des sciences en 1929, de la Société royale d'Édimbourg en 1947 et de l'Académie des sciences de Paris en 1956.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 Soit X un ensemble non vide. On dit que d est une distance sur X si et seulement si d est une application de X^2 dans \mathbb{R}^+ telle que pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a :

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation),
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Notation 1.1.1 Soit (X, d_X, e) un espace métrique métrisé (i.e. e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par :

$\mathcal{M}_2 = \{\text{espaces métriques complets de diamètre au plus 2}\}$ i.e.

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} d_X(x, y) \leq 2$$

Conclusion générale

On a étudié dans ce mémoire les Fréchet et Gâteaux différentiabilité pour pouvoir approcher les opérateurs de Lipschitz par des opérateurs linéaires. Cela, nous facilite la transposition de quelques propriétés linéaires au cas lipschitziens.

- [1] J. Lindenstrauss, "On Lipschitz mappings between Banach spaces", *Studia Math.* 57 (1976), 147-190.
- [2] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 1, in: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [3] J. Bonami, "Vector valued simpler integrals and the H -BMO duality", *Probability theory and harmonic analysis* (Chao-Woyczynski ed.) 1-19, Marcel Dekker, New York 1988.
- [4] S. Cobzas, "Aspects of Lipschitz mappings", *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica*, (2003), 43-54.
- [5] H. Deville, P. Hájek, "On the range of the derivative of Gâteaux-smooth functions on separable Banach spaces", *Israel Journal of Mathematics*, 145, (2005), 257-269.
- [6] N. J. Kalton, "The Nonlinear Geometry of Banach Spaces", *Rev. Mat. Complut.* 21 (2008), 7-60.
- [7] J. Lindenstrauss, D. Preiss, "A new proof of Fréchet differentiability of Lipschitz functions", *J. Eur. Math. Soc* 2 (2000), 199-216.
- [8] D. Preiss D., "Fréchet differentiability of Lipschitz functions", *J. Functional Anal.* 91 (1990), 312-345.

- [10] I. Isacsolescu, "Methods of Lipschitz duals", in Lecture Notes in Math. Syst. 419, Springer-Verlag (1975), 247-259.
- [11] N. Wazwaz, "Separable Algebras", World Scientific, Singapore 1999.

Bibliographie

- [1] F. Albia and N. J. Kalton. "Topics in Banach space theory", 233 Springer-Verlag 2006.
- [2] N. Aronszajn, "Differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces", Studia Math. 57 (1976), 147-190.
- [3] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 1, in: Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [4] J. Bourgain "Vector valued simpler integrals and the H -BMO duality", Probability theory and harmonic analysis (Chao-Woyczynski ed.) 1-19. Marcel Dekker, New-York 1986.
- [5] S. Cobzas, "Adjoints of Lipschitz mappings", Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, (2003), 49-54.
- [6] R. Deville, P. Hájek, "On the range of the derivative of Gâteaux-smooth functions on separable Banach spaces, Israel Journal of Mathematics. 145, (2005), 257-269.
- [7] N. J. Kalton, "The Nonlinear Geometry of Banach Spaces", Rev. Mat. Complut. 21 (2008), 7-60.
- [8] J. Lindenstrauss, D. Preiss, "A new proof of Fréchet differentiability of Lipschitz functions", J. Eur. Math. Soc 2 (2000), 199-216.
- [9] D. Preiss D., "Fréchet differentiability of Lipschitz functions", J. Functional Anal. 91 (1990), 312-345.

- [10] I. Sawashima, "*Methods of Lipschitz duals*", in Lecture Notes Ec. Math. Syst.419, Springer Verlag (1975), 247-259.
- [11] N. Weaver, "*Lipschitz Algebras*", World Scientific, Singapore 1999.