République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

DERBAL ASMA

Sujet

Non continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces des multiplicateurs de Besov

Date de soutenance : 19/06/2018

Devant le jury :

Mr. Drihem Douadi	Prof. Univ.	de M'sila	Président
Mr. Djeriou Aissa	M.C.B. Univ.	de M'sila	Rapporteur
Mr. Heraiz Rabah	M.C.B. Univ.	de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciment

Nous voudrions par ces quelques lignes remercier en premier lieu mon dieu le tout puissant pour le soutien et le courage qu'il nous donne.

Et a tous les personnes qui nous prodigué leurs conseils et cruenté dans notre mémoire.

En premier lieu, nous remercions mon encadreur de mémoire monsieur DJRIOU AISSA de nous avoir suivie tout au long de mon travail de ma formation.

Et on deuxième lieu je remercie Mr.DRIHEM DOUADI, pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de ce mémoire.

Et je remercie Mr. HERAIZ RABAH, pour tout les consielle qu'il me fait en examinateur le jury de ce mémoire.

Et on troisième lieu je remercie tous les enseignants de la formation durant les cinque années, et le chef MR. SAADI ABED ALRACHID.

Enfin, nous adressons nos plus sincére remerciement nos parents et mon marie pour leur contribution, leur patience.

Table des matières

Notations

• Tous les espaces dans cette thèse sont définis sur $\mathbb{R}^n$.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$,on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, la dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$ où $f^{(\alpha)}$. Si f une fonction de deux variables (x, y), on note $\partial_x^\alpha f$, $\partial_y^\alpha f$.

• $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ est le produit de convolution des fonctions f et g.

• $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de f.

• $\|f\|_p$ désigne la norme de f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $1 \leq p \leq \infty$, p' est l'exposant conjugué $p/(p-1)$.

• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

• $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,appelé espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

• Pour toute fonction intégrable f on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_0^\infty \Big(\int_{S^{n-1}} f(rx') dx' \Big) r^{n-1} dr,$$

telle que S^{n-1} la sphére unité de $\mathbb{R}^n$

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme classique

$$\Im_M(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq M} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha f|, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

• $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, appelé espace des distributions tempérées.

• $\mathcal{W}_p^m$ est l'espace de sobolev tel que

$$\mathcal{W}_p^m = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L^p, \quad |\alpha| \leq m\}$$

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}$ est une fonction, le support de f est $\mathrm{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

• Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de fourier est

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx$$

et sa transformée de fourier inverse est

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{ix \cdot \xi} f(\xi) \, d\xi$$

- $C, c_1, \ldots$désigneront des constantes strictements positives
- Soit $0 < q \leq \infty$, ℓ_q désigne l'espace des suites $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\left\|\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\varepsilon_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

- Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, $\ell_q^s(L^p)$ qui vérifient

$$\|\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell_q^s(L^p)} = \big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj}\,\|a_j\|_p\right)^q\big)^{1/q} < +\infty$$

- Si $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est sa partie entière.

Introduction

Plusieurs auteurs comme Hörmander, Calderón, Stein, Bourdaud, Moussai, Djeriou,...,ont étudiés la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur des espaces de fonctions, comme les espaces de Lebesgue L^p, Sobolev H^s, Hölder $\mathcal{C}^s$, Besov $B^s_{p,q}$ et autres. Hörmander dans [8] a prouvé que les $o.ps.d$ d'ordre $m = 0$, de symbole $\sigma(x, \xi)$ de classe $S^m_{\rho,\delta}$ i.e

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq \delta < \rho \leq 1,$$

sont bornés sur L^2, et il en est de même pour $\delta = \rho \neq 1$. Dans le cas $\delta = \rho = 1$, un contre-exemple de Ching [4] en 1972 montre que la continuité des $o.ps.d$ sur L^2 n'est pas assurée en général.

Dans ce mémoire nous avons utilisé le contre-exemple donné par Bourdaud et Moussai [3] pour les $o.ps.d$ d'ordre $m = 0$ de symbole de classe de Hörmander $S^m_{1,\delta}$, pour prouver qu'ils ne sont pas bornés sur les espaces des multiplicateurs ponctuels de $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < \frac{n}{p}$.

Notre travail est organisé en trois chapitres :

Dans le premier, on rappelle quelques propriétés sur les séries de Littlewood-Paley et on termine par quelques inégalités qui seront utilisés dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, une premier partie commence par des rappels sur les espaces de Besov et leurs propriétés, et dans la deuxième partie on donne une caractérisation par la fonction maximale de Peetre et par les différences finies pour ces espaces.

Dans le troisième chapitre, on va étudier les espaces des multiplicateurs ponctuels dans les espace de Besov et quelques résultats qu'on utilisera par la suite. On termine ce chapitre par un contre exemple pour les $o.ps.d$ d'ordre 0, ce sont des opérateurs non bornés sur les espaces des multiplicateurs de $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < \frac{n}{p}$.

Chapitre 1

Quelques résultas préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles, dans le cadre générale quelques propriétés sur les séries de Littlewood-Paley, et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire.

1.1 Séires de Littlewood-Paley

Les séries de Littlewood -Paley jouent un rôle important dans la définition des espaces de Besov. Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood -Paley d'une distribution tempérée.

1.1.1 La décomposition de littlewood-paley

Soit $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

* $\text{supp}\gamma \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\}$.

* $\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$.

* $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose $\rho(\xi) = 1 - \sum\limits_{j\geq 1} \gamma(2^{-j}\xi)$, on obtient une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\text{supp}\rho \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\},$$

alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a la partition de l'unité suivante

$$\rho(\xi) + \sum_{j\geq 1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est appellés la partitions de l'unité.
A cette partition on a associe une suite d'opérateurs de convolutions, notés

$$Q_j, S_k \quad : \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

définis par

$$\begin{array}{rcll} Q_j f(x) & = & \mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-j}.\right)\right) * f(x) & j \geq 1 \\ S_k f(x) & = & \mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-k}.\right)\right) * f(x) & k \geq 0 \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}\left(Q_j f\right)(\xi) & = & \gamma\left(2^{-j}.\right)\hat{f}(\xi) \quad \forall j \geq 1 \\ \mathcal{F}\left(S_k f\right)(\xi) & = & \rho\left(2^{-k}.\right)\hat{f}(\xi) \quad \forall k \geq 0,\end{array}$$

avec la notation $Q_0 = S_0$. Si dans la relation (1.1) on change ξ par $2^{-j}\xi$, alors il vient

$$\rho\left(2^{-k}\xi\right) + \sum_{j \geq k+1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = 1,$$

on multiplie par $\hat{f}(\xi)$ on obtient

$$\hat{f}(\xi)\,\rho\left(2^{-k}\xi\right) + \hat{f}(\xi) \sum_{j \geq k+1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = \hat{f}(\xi). \tag{1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.2) on obtient encore

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = f, \qquad (\forall k \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Pour $k = 0$ on trouve

$$S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f = f.$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la décomposition de Littlewood-Paley de f est alors l'identité

$$f = \sum_{j \geq 0} Q_j f. \tag{1.4}$$

La série (1.4) converge au sens des distributions temperées. De (1.3) et (1.4) alors

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f,$$

Donc

$$S_k f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littelwood-Paley de f, est alors l'identité :

$$f = S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f \tag{1.5}$$

La série (1.5) converge au sens des distributions tompérées.

Remarque 1.1 *Par l'inégalité de Young pour la convolution, il vient que les suites d'opérateurs $(Q_j)_{j\geq 0}$ et $(S_j)_{j\geq 0}$ sont bornnées uniformément dans $\mathcal{L}(L^p)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Décomposition du produit $f \cdot g$

Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit $f \cdot g$ par :

$$f \cdot g = \lim_{j \to \infty} (Q_j f) \cdot (Q_j g),$$

lorsque la limite existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on combinant (1.4) et (1.5) on trouve

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{j \geq 0} Q_j (f \cdot g) \\ &= \sum_{j \geq 0} Q_j \Big(\sum_{k \geq 0} Q_k f \sum_{t \geq 0} Q_t g \Big) \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{t \geq 0} Q_j (Q_k f Q_t g). \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\mathcal{F}(Q_j(Q_k f Q_t g))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_j(Q_k f Q_t g))(\xi) &= \gamma\left(2^{-j}\xi\right)\left[\mathcal{F}(Q_k f Q_t g)(\xi)\right] \\ &= \gamma\left(2^{-j}\xi\right)\left(\mathcal{F}(Q_k f) * \mathcal{F}(Q_t g)\right)(\xi) \\ &= \gamma\left(2^{-j}\xi\right)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(Q_k f)(\xi - \eta)\,\mathcal{F}(Q_t g)(\eta)\,d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma\left(2^{-j}\xi\right)\gamma\left(2^{-k}(\xi - \eta)\right)\gamma\left(2^{-t}\eta\right)\mathcal{F}(f)(\xi - \eta)\,\mathcal{F}(g)(\eta)\,d\eta, \end{aligned}$$

donc, il ya trois cas où le support de $\mathcal{F}(Q_j(Q_k f Q_t g))$ n'est pas vide

$$\begin{array}{ccc} t \leq j & et & j-2 \leq k \leq j+4, \\ k \leq j & et & j-2 \leq t \leq j+4 \\ t \geq j, k \geq j & et & |t-j| \leq 1, \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} Q_j (f \cdot g) &= \sum_{t;k \geq 0} Q_j (Q_k f Q_t g) \\ &= \left(Q_j^{(1)} + Q_j^{(2)} + Q_j^{(3)}\right)(f \cdot g), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_j^{(1)}(f \cdot g) &= Q_j\left(\tilde{Q}_j f S_{j+1} g\right), \\ Q_j^{(2)}(f \cdot g) &= Q_j\left(S_{j+1} f \tilde{Q}_j g\right), \\ Q_j^{(3)}(f \cdot g) &= \textstyle\sum_{k \geq j} Q_j\left(Q_k f \bar{Q}_k g\right), \end{aligned} \tag{1.6}$$

et

$$\tilde{Q}_j = \sum_{j-2}^{j+4} Q_k \qquad \text{et} \qquad \bar{Q}_j = \sum_{j-1}^{j+1} Q_k.$$

1.2 Quelques inégalités de base

Théorème 1.2 (Riesz-Thorin) *Soient* $(X,\mu),(Y,\upsilon)$ *deux espaces mesurés et* $p_0,p_1,q_0,q_1\in[1,\infty]$ *avec* $p_0\neq p_1, q_0\neq q_1$. *On suppose que* T *est un opérateur envoi* $\ell^{p_0}(X,\mu)$ *dans* $\ell^{q_0}(Y,\upsilon)$ *et* $\ell^{p_1}(X,\mu)$ *dans* $\ell^{q_1}(Y,\upsilon)$ *tel que, pour toute fonction simple* f *on a*

$$\|Tf\|_{q_i}\leq C\,\|f\|_{p_i}, \qquad (i=0,1).$$

Alors T *renvoie* $(\ell^{p_0},\ell^{p_1})_\theta=\ell^p$ *dans* $(\ell^{q_0},\ell^{q_1})_\theta=\ell^q$ *tels que* $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$ *et* $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$, $(0<\theta<1)$ *de plus on a*

$$\|Tf\|_q\leq C_0^{1-\theta}C_1^{\theta}\,\|f\|_p\,.$$

Preuve. Voir [7, page 34] ■

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder) *Soient* $f_i\in\ell^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1\leq p_i\leq\infty$ *et* $i=1,2$. *Alors*

$$\|f_1.f_2\|_r\leq\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\,,$$

telle que $\frac{1}{r}\leq\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$.

Théorème 1.4 (Inégalité de Young) *Pour tout* $f,g\in\ell^p(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$f*g\in\ell^r(\mathbb{R}^n)\ \text{ et }\ \|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q\,.$$

Telle que $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ *et* $p,q,r\in[1,\infty]$.

Preuve. On fixe $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considére l'opérateur $Tf=f*g$. On a

$$\begin{array}{rcl} Tf(x) & = & \int f(y)^{1/q}g(x-y)f(y)^{1/q'}dy \\ |Tf(x)| & \leq & \int |f(y)|^{1/q'}|g(x-y)||f(y)|^{1/q}dy. \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|Tf(x)\|_q\leq\|f\|_1\|g\|_q\,.$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder donne

$$|Tf(x)|\leq\|g\|_q\|f\|_q\,.$$

On applique le théorème 1.2 (théorème d'interpolation)

$$\begin{array}{rcl} T & : & L^1(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \\ & & L^{q'}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)\,. \end{array}$$

Alors pour tout $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, on a

$$T:L^p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)\,.$$

■

Théorème 1.5 (Théorème de Bernstien) *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Il existe* $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$, *telle que pour toute* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *avec* $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < H\}$, *on a*

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq c H^{|\alpha| + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_p$$

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. On pose $\phi_H = \phi\left(\frac{\xi}{H}\right)$. On a $\widehat{f} = \phi_H \widehat{f}$, et

$$f^{(\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\phi_H\right)^{(\alpha)} * f.$$

Par Inégalité de Young, on obtient

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\phi_H\right)^{(\alpha)} \right\|_r \|f\|_p, \text{ avec } 1 + \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\phi_H\right)^{(\alpha)}(x) = H^n \left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)^{(\alpha)}(Hx),$$

il vient

$$\left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\phi_H\right)^{(\alpha)} \right\|_r = H^{n + |\alpha| - \frac{n}{r}} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)^{(\alpha)} \right\|_r.$$

Ce qui donne le résultat. ■

Lemme 1.6 *Soient* $0 < a < 1$ *et* $1 \leq q \leq \infty$, *pour toute suite* $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^q(\mathbb{R}_+)$ *on a :*

$$\left\| \left\{ a^j \sum_{k=0}^{j} a^{-k} \varepsilon_k \right\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell^q} + \left\| \left\{ a^{-j} \sum_{k=j}^{\infty} a^k \varepsilon_k \right\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell^q} \leq \frac{2}{1 - a} \left\| \{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q}. \tag{1.7}$$

Preuve. Pour $1 \leq q \leq \infty$, on a

$$\begin{aligned} a^j \sum_{k=0}^{j} a^{-k} \varepsilon_k &= \sum_{k=0}^{j} a^{j-k} \varepsilon_k \\ &= \sum_{k=0}^{j} a^{(j-k)/q} \varepsilon_k a^{(j-k)q'}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\left(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k} \varepsilon_k \right)^q \leq \left(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k} \varepsilon_k^q \right) \left(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k} \right)^{q/q'}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k} \varepsilon_k \right)^q &\leq \left(\sum_{i=0}^{n} a^i \right)^{q/q'} \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^q \sum_{j=k}^{n} a^{(j-k)} \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n} a^i \right)^q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^q \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\Big\|\Big\{\sum_{k=0}^{j} a^{j-k}\varepsilon_k\Big\}_{j\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q} \leq C\big\|\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell^q}.$$

Pour $0 < q < 1$, on a

$$\Big(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k}\varepsilon_k\Big)^q \leq \sum_{k=0}^{j} a^{(j-k)q}\varepsilon_k^q,$$

ce qui implique

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{j} a^{j-k}\varepsilon_k\Big)^q \leq \Big(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k^q\sum_{j=k}^{n} a^{(j-k)q}\Big).$$

Par conséquent

$$\Big\|\Big\{\sum_{k=0}^{j} a^{j-k}\varepsilon_k\Big\}_{j\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q} \leq C\Big(\frac{1}{1-a^q}\Big)^{1/q}\big\|\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell^q}.$$

De même pour $\Big\{a^{-j}\sum_{k=j}^{\infty} a^k\varepsilon_k\Big\}_{j\in\mathbb{N}}$. ■

Chapitre 2

Définitions et quelques propriétés des espaces de Besov

Nous allons rappeler la définition des espaces de Besov et certaines propriétés.

2.1 Espace de Besov

Définition 2.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{sj}\|Q_j f\|_p\right)^q\right)^{1/q} < +\infty, & \textit{pour } \ 0 < q < +\infty \\ \sup_{j\geq 0}\left(2^{js}\|Q_j f\|_p\right) < +\infty, & \textit{pour } q = +\infty \end{cases}$$

Proposition 2.2 *(i) $B^s_{p,q}$ est un espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$

(ii) Soient $s \in \mathbb{R}$, p, q_0, $q_1 \in]0, \infty)$ tels que $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\mathcal{S} \hookrightarrow B^{s+\varepsilon}_{p,q_0} \hookrightarrow B^s_{p,q_1} \hookrightarrow \mathcal{S}',$$

(iii) Si $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, alors

$$B^s_{p,q_0} \hookrightarrow B^s_{p,q_1}$$

(iv) Soient $p_0 < p$ et $s - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$, alors

$$B^s_{p_0,q} \hookrightarrow B^\alpha_{p,q}$$

(v) Pour tout entier $m > s$ on a

$$\mathcal{W}^m_p \hookrightarrow B^s_{p,q}.$$

Preuve. voir [10, page 47] ■

Définition 2.3 *On dit qu'un espace vectoriel E est une algèbre si il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|f \cdot g\|_E \leq C\|f\|_E \cdot \|g\|_E, \qquad \forall (f,g) \in E$$

Proposition 2.4 *Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $B^s_{p,q}$ est une algébre

(ii) $B^s_{p,q} \hookrightarrow L^\infty$

(iii) $s > \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $0 < q \leq 1$.

Proposition 2.5 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $\eta > 1$. Alors*

(i) Pour tout suite des fonctions $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que supp$g_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^\ltimes : \eta^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \eta 2^j\}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big\| \sum_{j=0}^{\infty} g_j \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sqj} \|g_j\|_p^q \Big)^{1/q}, \qquad c > 0.$$

(ii) Pour tout fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\eta^{-1} \leq |\xi| \leq \eta$ et toute suite de distribution $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}g_{_j}(\xi) = \theta(2^{-j}\xi)\mathcal{F}g(\xi)$, on a

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sqj} \|g_j\|_p^q \Big)^{1/q} \leq c \sup_{|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1} \left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty \|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1}$$

(iii) Si $s > 0$, on peut dans (i) remplacer les couronnes $\eta^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \eta 2^j$ par les boules $|\xi| \leq \eta 2^j$.

Preuve. (i) On a $Q_k\left(\sum_{j\geq 0} g_j\right) = \sum_{j=k-N}^{j=k+N} Q_k g_j$, telle que pour tout $|j-k| \leq N$ on a supp$\gamma\left(2^{-k}.\right) \cap$ supp$\mathcal{F}g_j \neq \phi$, avec $N = 2 + \left[\frac{\ln \eta}{\ln 2}\right]$. Alors

$$\begin{aligned} 2^{ks}\Big\| Q_k\Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \Big) \Big\|_p &\leq \sum_{-N\leq l\leq N} 2^{ks} \|Q_k g_{k+l}\|_p \\ &\leq c \sum_{-N\leq l\leq N} 2^{ks} \|g_{k+l}\|_p . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{ks}\Big\| Q_k\Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \Big) \Big\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} &\leq c_1 \sum_{-N\leq l\leq N} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{ks} \|g_{k+l}\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} \\ &\leq c_2 \Big(\sum_{\acute{k}=0}^{\infty} \Big(2^{\acute{k}s} \|g_{\acute{k}}\|_p \Big)^q \Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

ii) On pose $g_j = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k g_j, \ \forall j \in \mathbb{N}$. D'où

$$g_j = \sum_{k=j-N}^{j+N} 2^{nj} \mathcal{F}^{-1}\theta(2^j\cdot) * Q_k g,$$

telle que pour tout $|j-k| \leq N$, avec supp$\gamma\left(2^{-k}\right) \cap$ supp$\mathcal{F}g_j \neq \phi$, où $N = 2 + \left[\frac{\ln \eta}{\ln 2}\right]$. Nous avons

$$\left(1 + |y|^2\right)^m \mathcal{F}^{-1}\theta(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{ix\cdot y} (I - \Delta_x)^m \theta(x)\, dx,$$

d'aprés l'inégalité de Caushy-Shwarz et l'égalité de Bessel-perseval on a

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\theta\right\|_1 &\leq \Big(\int_{\text{supp}\psi}\left|(I-\Delta_x)^{m/2}\,\theta\,(x)\right|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|y|^2\right)^{-m}dy\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\sup_{|\alpha|\leq m}\left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty, \qquad \text{avec} \qquad m=[\frac{n}{2}]+1\end{aligned}$$

par l'inégalité de Young on déduit que

$$\|g_j\|_p \leq c\sum_{j-N\leq k\leq j+N}\|Q_k g\|_p \leq c\sum_{k=j}^{+\infty}\|Q_{k-N}g\|_p\,,$$

alors on a trois cas :

1) Si $s>0$ on a

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sqj}\,\|g_j\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq c_1\Big(\sum_{k=0}^{\infty}2^{sqk}\,\|Q_{k+N}g\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

2) Si $s<0$ on a

$$\begin{aligned}2^{sj}\,\|g_j\|_p &\leq C\,(\psi)\,2^{sj}\sum_{j-N\leq k\leq j+N}\|Q_k g\|_p\\ &\leq C\,(\psi)\,2^{-sN}2^{s(j+N)}\sum_{0\leq k\leq j+N}2^{-sk}\Big(\|Q_k g\|_p\Big).\end{aligned}$$

3) Si $s=0$ en utilisant l'inégalité de Hölder, alors :

$$\|g_j\|_p \leq c\Big(\sum_{j-N\leq k\leq j+N}1\Big)^{1/q}\Big(\sum_{j-N\leq k\leq j+N}\|Q_k g\|_p^q\Big)^{1/q}, \quad \text{avec} \quad N=2+\left[\frac{\ln\eta}{\ln 2}\right]$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\|g_j\|_p^q\Big)^{1/q} &\leq c\,(2N+1)^{1/p+1/q'}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j-N\leq k\leq j+N}\|Q_k g\|_p^q\Big)^{1/q}\\ &= c\,(2N+1)^{1/p+1/q'}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\|Q_k g\|_p^q\Big)^{1/q}\\ &= c\,\|g\|_{B^0_{p,q}}.\end{aligned}$$

■

Lemme 2.6 *Soient* $1\leq p_0,q_0\leq\infty$ *et* $1\leq p_1,q_1<\infty$*, alors*

$$\Big(B^{s_0,q_0}_{p_0},B^{s_1,q_1}_{p_1}\Big)_\theta = B^{s,q}_p,\ \ s=(1-\theta)\,s_0+\theta s_1$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},\ \ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \ 0<\theta<1.$$

2.2 Normes équivalentes

Le but de ce section est de présenter des normes équivalentes pour les espaces de $B^s_{p,q}$.

2.2.1 Caractérisation par la fonction maximale de Peetre

Nous commencerons par les définitions suivantes.

Définition 2.7 *Soient $a > 0, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Les fonctions maximales de Peetre sont définies par*

$$Q_j^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a}, \quad S_j^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|S_j f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Théorème 2.8 *Soient $s \in \mathbb{R}, \geq 0, 0 < p, q < \infty$ et $a > \max(n/p, n/q)$. Alors*

$$\|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}} = \left\| \left\{ Q_j^{*,a} f \right\}_{j\geq 0} \right\|_{\ell^s_q(L^p)},$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}$.

Preuve. Voir [10]. ■

Théorème 2.9 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $0 < p, q < \infty$ et $a > \max(n/p, n\tau)$. Alors*

$$\|f\|^{(2)}_{B^s_{p,q}} = \left\| \left\{ S_j^{*,a} f \right\}_{j\geq 0} \right\|_{\ell^s_q(L^p)},$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}$.

Preuve. Voir [10]. ■

2.2.2 Caractérisation par la différence finies

Pour définir les normes sous forme continue d'une fonction f appartenant à l'espace fonctionnel de Besov, nous aurons besoin de l'opérateur de différences finies.

Définition 2.10 *Soient $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), x, h \in \mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur de différences finies est noté par Δ_h^m tel que*

$$\Delta_h f(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} (-1)^k f(x+(m-k)h),$$

où

$$\binom{k}{m} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

on a

$$\begin{array}{rcl} \Delta_h^1 f(x) & = & f(x+h) - f(x) \\ \Delta_h^2 f(x) & = & \Delta_h^1 \left(\Delta_h^1 f\right)(x) \\ . & = & \\ . & = & \\ . & = & \\ \Delta_h^m f(x) & = & \Delta_h^1 \left(\Delta_h^{m-1} f\right)(x) \end{array}$$

Théorème 2.11 ([9]) *Soient* $1 \leq p, q \leq \infty, M \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *et* $s \geq 0$. *Alors*

$$\|f\|_{B^s_{p;q}}^{(3)} = \|f\|_p + \Big(\int_0^1 \Big(2^{sj} \sup_{|h|<t} \left|\Delta_h^M f\right|_p\Big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}$.

Preuve. Etape 1. Nous prouvons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq c\,\|f\|_{B^s_{p,q}}^{(3)}, \tag{2.2}$$

posons

$$\delta(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \Big(\exp^{ix.h'} - 1\Big)^M dh', (\forall x \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{N}),$$

telle que S^{n-1} la sphére unité de $\mathbb{R}^n$. $\delta(x) \neq 0$ si $x \in \operatorname{supp}\gamma$ ou $x \in \operatorname{supp}\rho$, et comme

$$\mathcal{F}\left(\Delta_h^M f\right)(\xi) = \left(\exp^{i\xi \cdot h} - 1\right)^M (\mathcal{F}f)(\xi),$$

on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta \mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \Delta_{h'}^M f(x)\, dh'.$$

De plus

$$\begin{aligned}
Q_j f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\gamma(2^{-j}.)}{\delta(2^{-j}.)} \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\delta\left(2^{-j}.\right)\mathcal{F}f\right)\right)\Big)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\gamma(2^{-j}.)}{\delta(2^{-j}.)}\Big)(y)\, \mathcal{F}^{-1}\left(\delta\left(2^{-j}.\right)\mathcal{F}f\right)(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\gamma(2^{-j}.)}{\delta(2^{-j}.)}\Big)(y)\, \Delta_{2^{-j}h'}^M f(x-y)\, dy dh'.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|Q_j f\|_p &\leq \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \left\|\Delta_{2^{-j}h'}^M f\right\|_p dh' \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\gamma(2^{-j}.)}{\delta(2^{-j}.)}\Big)(y)\, dy \\
&\leq C_1 \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |u| \leq 2^{-j}} \left|\Delta_u^M f\right|_p.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
C_2\Big(\int_0^1 \Big(t^{-s} \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |u| \leq t} \left\|\Delta_u^M f\right\|_p\Big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q} &\geq C_3\Big(\sum_{j \geq 0} \Big(2^{js} \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |u| \leq 2^{-j}} \left\|\Delta_u^M f\right\|_p\Big)^q \\
&\times\ 2^{-sqt} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} t^{-sq-1}\Big)^{1/q} \\
&\geq C_4 \|f\|_{B^s_{p,q}}
\end{aligned}$$

Etape 2. Nous prouvons l'assertion inverse de (2.2).

Pour tout $0 < t < 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\int_0^1 \left(t^{-s} \sup_{|s|\le t} \left\| \Delta_u^M f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \le \tag{2.3}$$

$$\le \quad C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-sk} 2^{sk} \sup_{|u|\le 2^{-k}} \left\| \Delta_u^M f \right\|_p^q \right) \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} t^{-sq-1} dt$$

$$\le \quad C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \sup_{|u|\le 2^{-k}} \left\| \Delta_u^M f \right\|_p \right)^q .$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $|u| \le 2^{-k}, r > 0$ et $j \in \{0, ..., k\}$, alors il existe une constante $C_4 > 0$, telle que

$$\left\| \Delta_u^M (Q_j f) \right\|_p \le 2^M 2^{d(j-k)} \sup_{|y|\le 2^{-k}} \frac{|Q_j f(x+y)|}{1+|2^j y|^d} \le C_4 2^{d(j-k)} \left\| Q_j^{*,d} f \right\|_p , \tag{2.4}$$

si $d > (n \backslash \min(p,q))$ alors on décomposé $\Delta_u^M f$ en

$$\Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \Big) \Delta_u^M (Q_j f) = A_k + B_k .$$

Nous estimons chacun des deux termes. Choisissez deux nombres reéls r et t tels que $0 < r < s < t$, et en utilisant (2.4), on remplace d par r et t dans l'estimation des A_k et B_k respectivement, on obtient

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \left\| A_k \right\|_p \right)^q \Big)^{1/q} \le C_5 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{-(t-s)k} \sum_{j=0}^{k} 2^{(t-s)j} 2^{sj} \left\| Q_j^{*,t} f \right\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} \tag{2.5}$$

et

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_s \left(2^{-k} \right) \left\| B_k \right\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} \le C_6 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{(s-r)k} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-(s-r)j} 2^{sj} \left\| Q_j^{*,r} f \right\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} . \tag{2.6}$$

Nous appliquons le lemme 1.6 et l'estimation élémentaire $\left\| Q_j^{*,d} f \right\|_p \le \left\| Q_j f \right\|_p$ ($d = r$ ou t) à (2.5) et (2.6), et si on pose $0 < r < \gamma$, alors on trouve

$$C_7 \sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{-(M-\gamma)k} \sum_{j=0}^{k} 2^{(M-\gamma)} 2^{j\gamma} \left\| Q_j f \right\|_p \Big)^q + C_8 \sum_{k=0}^{\infty} \Big(2^{(\gamma-r)k} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-(\gamma-r)j} 2^{j\gamma} \left\| Q_j f \right\|_p \Big)^q .$$

■

Définition 2.12 *Nous dirons qu'une distribution Θ est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, si*

$$\Theta(tx) = t^{\alpha} \Theta(x), \qquad (\forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n).$$

Lemme 2.13 ([1]) *Soient $\tau > -\frac{n}{p}$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et Θ une fonction homogène de degré 0, C^{∞} en dehors de l'origine, alors la fonction $|x|^{\tau} \Theta(x) \phi(x)$ appartient à $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$.*

Preuve. Soit $g(x) = |x|^\tau \Theta(x) \phi(x)$, pour prouver que $g \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ on va montrer par récurrence sur $m = -[-\tau - \frac{n}{p}] - 1$, $(m \in \mathbb{N})$ que $g^{(\alpha)} \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}(\mathbb{R}^n)$ où $|\alpha| \leq m$.
1. Le cas $m = 0$, $\sigma = \tau + \frac{n}{p} < 1$, posons $(\Delta_h g)(x) = g(x+h) - g(x)$, on a

$$\|\Delta_h g\|_p^p \leq \left(\int\limits_{|x| \leq 2|h|} + \int\limits_{|x| \geq 2|h|} \right) |\Delta_h g(x)|^p \, dx$$

dans la première intégrale, on majore $|\Delta_h g(x)|$ par $|g(x+h)| + |g(x)|$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x| \leq 2|h|} |\Delta_h g(x)|^p \, dx &\leq 2^p \int\limits_{|x| \leq 3|h|} |g(x)|^p \, dx \\ &\leq c \int\limits_{|x| \leq 3|h|} |x|^{\tau p} \, dx \\ &\leq c' |h|^{\sigma p} \end{aligned}$$

dans la deuxième intégrale, le théorème des accroissements finis donne

$$|\Delta_h g(x)| \leq c |h| |x|^{\tau - 1}$$

d'où

$$\int\limits_{|x| \geq 2|h|} |\Delta_h g(x)|^p \, dx \leq c |h|^p \int\limits_{|x| \geq 2|h|} |x|^{p(\tau-1)} \, dx = c' |h|^{\sigma p}$$

ainsi $\|\Delta_h g\|_p \leq c |h|^\sigma$.
2. Le cas $m = 0$, $\sigma = 1$.
Pour évaluer $\|g\|_{B_{p,\infty}^1}$, l'éstimation porte sur la différence seconde

$$\Delta_h^2 g(x) = g(x+h) - 2g(x) + g(x-h).$$

De manière analogue au (1), on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x| \leq 2|h|} \left|\Delta_h^2 g(x)\right|^p \, dx &\leq 3^p \int\limits_{|x| \leq 3|h|} |g(x)|^p \, dx \\ &\leq c |h|^p \end{aligned}$$

et la formule de taylor à l'ordre 2, permet d'obtenir

$$\left|\Delta_h^2 g(x)\right| \leq c |h|^2 |x|^{\tau-2} \quad (\text{pour } |x| \geq 2|h|)$$

d'où

$$\int\limits_{|x| \geq 2|h|} \left|\Delta_h^2 g(x)\right|^p \, dx \leq c |h|^{2p} \int\limits_{|x| \geq 2|h|} |x|^{p(\tau-2)} \, dx = c' |h|^p$$

finalement $\|\Delta_h^2 g\|_p \leq c |h|$.
3. La récurrence sur m.

Fixons α dans$\mathbb{N}^n$, tel que $|\alpha| \leq m$, la fonction $g^{(\alpha)}$ est une combinaison linéaire de fonctions da la forme

$$g_j(x) = |x|^{\tau-j} \Lambda(x) \psi(x), \quad (j = 0, \ldots.. |\alpha|),$$

où Λ est homogène de degré 0, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \diagdown 0$ et $\psi \in \mathcal{D}$.
On a $m < \frac{n}{p} + \tau$ entraîne $j < \tau + \frac{n}{p}$, donc

$$\int |g_j(x)|^p \, dx \leq c \int_{x \in \mathrm{supp}\psi} |x|^{p(\tau-j)} \, dx,$$

ce qui prouve que $g_j \in L^p$.
Il reste à montrer que pour $|\alpha| = m$, $g_j \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$.

- Si $j \neq 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique et donne

$$g_j \in B_{p,\infty}^{\tau-j+\frac{n}{p}} \hookrightarrow B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$$

- Si $j = 0$, on a $1 \leq m < \tau + \frac{n}{p} < 1 + m$, d'où

$$g_j \in W_p^1 \hookrightarrow B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$$

Conclusion : toutes les dérivées de g d'ordre α, $(|\alpha| \leq m)$, sont dans $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$, d'où $g \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$. ■

Chapitre 3

Non continuité des o.ps.d sur les espaces des multiplicateurs de Besov

Dans ce chapitre on va étudier la multiplicateur ponctuels dans les espaces de Besov $B^s_{p;q}(\mathbb{R}^n)$. Avant cette étude nous rappelons quelques notions essentielles sur l'espace des multiplicateur $M(E)$

3.1 Espaces des multiplicateurs.

3.1.1 Multiplicateurs ponctuels

Définition 3.1 *Soit E un espace de Banach de distribution $(E.B.D)$, on dit que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un multiplicateur ponctuel de E, s'il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute $\psi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$, on a*

$$\|f \cdot \psi\|_E \leq C \|\psi\|_E .$$

L'espaces linéaire des multiplicateurs sera noté $M(E)$ définie par la norme

$$\|f\|_{M(E)} = \sup_{\|\psi\|_E = 1} \|f \cdot \psi\|_E , \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty \cap E.$$

Remarque 3.2

1. *Si E contient $\mathcal{C}^\infty \cap E$ comme un sous-espace dense ; on dit tout simplement, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$f \cdot \psi \in E, \qquad et \qquad \|f \cdot \psi\|_E \leq c \|\psi\|_E .$$

2. *$\left(M(E), \|.\|_{M(E)}\right)$ est un espace de Banach.*
3. *Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset M(E)$ alors $M(E)$ est un algébre (i. e. si $f, g \in M(E) \Longrightarrow f \cdot g \in M(E)$).*
4. *$M(E) = M(E')$ telle que E' est le dual de E.*

3.1.2 Multiplicateurs de Besov

Théorème 3.3 ([2]) *si $1 \leq p \leq \infty$ alors*

$$M(L^p) = L^\infty.$$

Proposition 3.4 *Soient* $p, q \in [1, \infty)$ *et* $s \in \mathbb{R}$, *alors*

i) $\left(B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)' = B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $M\left(B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right) = M\left(B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)\right)$

(iii) $M\left(B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right) \hookrightarrow L^\infty$.

Preuve. La preuve de (i). Soient $f \in B^{s}_{p,q}$ et $g \in B^{-s}_{p',q'}$.

1. Le cas $s > 0$, on utilisons la décomposition suivante

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_j f(x) \cdot S_j g(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_k \tilde{f}(x) \cdot S_{k-1}\tilde{g}(x)\, dx,$$

telle que $\tilde{f}(x) = f(-x)$ et $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Par l'inégalité de Hölder dans L^p, nous avons,

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_j f(x) \cdot S_j g(x)\, dx\Big| &\leq c_1 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{js} \left\|Q_j f(x)\right\|_p \times \\ &\times\ 2^{-js} \sum_{k=0}^{j} 2^{sk} \left(2^{-sk} \big\|S_k g(x)\big\|_{p'}\right) dx \\ &\leq c_3 \left\|f\right\|_{B^{s}_{p,q}} \left\|g\right\|_{B^{-s}_{p',q'}}. \end{aligned}$$

La derniére estimation est obtenue par l'inégalité de Hölder et le lemme 1.6. De même

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_k \tilde{f}(x) \cdot S_{k-1}\tilde{g}(x)\, dx\Big| \leq c_1 \big\|\tilde{f}\big\|_{B^{s}_{p,q}} \big\|\tilde{g}\big\|_{B^{-s}_{p',q'}},$$

et comme $\Delta^N_h \tilde{f}(x) = \Delta^N_{-h} f(x)$ et le theoreme 2.11, on obtient

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1Qk}^{\infty} \tilde{f}(x) \cdot S_{k-1}\tilde{g}(x)\, dx\Big| \leq c_2 \left\|f\right\|_{B^{s}_{p,q}} \left\|g\right\|_{B^{-s}_{p',q'}},$$

2. Le cas $s < 0$, nous utilisons la décomposition

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_j f(x) \cdot Q_j g(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_{k-1} \tilde{f}(x) \cdot Q_k\tilde{g}(x)\, dx,$$

alors nous avons

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_j f(x) \cdot Q_j g(x)\, dx\Big| \leq c \left\|f\right\|_{B^{s}_{p,q}} \left\|g\right\|_{B^{-s}_{p',q'}}.$$

Le cas $s = 0$, on remarquons pour tout j et x, il existe $y_{j,x} \in \mathbb{R}^n$ telle que $|x - y_{j,x}| \leq 2^{-j}$. On choisissons $d > (n/\min(p, q))$, d'où

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_j f(x) \cdot S_j g(x)\, dx\Big| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\|Q_j f(x)\right\|_p \Big(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|Q_k g(x)\right\|_{p'}}{1 + \left(2^k |x - y_{j,x}|\right)^d} dx \\ &\times\ \left(1 + \left(2^k |x - y_{j,x}|\right)^d\right)\Big). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Alors le dernier terme de (3.1) est borné par

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\|Q_j g\|_p^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{j}2^{d(k-j)}\left\|Q_k^{*,d}g(x)\right\|_{p'}\Big)^{q'}\Big)^{1/q'}.$$

Par l'inégalité de Hölder ces cas impliquent que $B_{p',q'}^{-s}\hookrightarrow\left(B_{p,q}^{s}\right)'$.

On montrons que l'inverse, soit $g\in\left(B_{p,q}^{s}\right)'$ et on considére l'application $f\in B_{p,q}^{s}\to g(f)=\langle f,g\rangle$.

Par le théoréme de Hahn-Banach et [10, Proposition 2.11.1/(i)], on obtient

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(2^{-sk}\|S_k g\|_{p'}\Big)^{q'}\Big)^{1/q'}\sim\|g\|$$

(ici $\|g\|$ désigne la norme de l'application linéaire continue g), ce qui donne $g\in B_{p',q'}^{-s}$.

La preuve de (ii), Soient $a\in M\left(B_{p,q}^{s}\right)$ et $f\in B_{p',q'}^{-s}$, $g\in B_{p,q}^{s}$, Le produit $\langle a\cdot f,g\rangle$ peut étre écrit comme :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}Q_jf(x)\cdot S_j(a\cdot g)(x)\,dx+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}Q_{k-1}\tilde{f}(x)\cdot S_k(\widetilde{a\cdot g})(x)\,dx\qquad(\text{si } s>0),$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}S_jf(x)\cdot Q_j(a\cdot g)(x)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}S_{k-1}\tilde{f}(x)\cdot Q_{k-1}(\widetilde{a\cdot g})(x)\,dx\qquad(\text{si } s<0),$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}Q_jf(x)\cdot S_j(a\cdot g)(x)\,dx\Big| &\leq c\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{j}2^{d(k-j)}\|S_k^{*,d}f\|_{p'}\Big)\\ &\times\ \|S_j(a\cdot g)\|_p\qquad(\text{si } s=0,\ \text{voir } (3.1)).\end{aligned}$$

L'estimation

$$|\langle a\cdot f,g\rangle|\leq c\|f\|_{B_{p',q'}^{-s}}\|a\cdot g\|_{B_{p,q}^{s}},$$

peut étre obtenue de la méme maniére que (i).
Il s'ensuit que, (pour tout $s\in\mathbb{R}$),

$$\begin{aligned}\|a\cdot f\|_{B_{p',q'}^{-s}} &\leq \sup_{\|g\|_{B_{p,q}^{s}}}|\langle a\cdot f,g\rangle|\\ &\leq c\|f\|_{B_{p',q'}^{-s}}.\end{aligned}$$

Les inclusions inverses seront obtenus par la même technique.
La preuve de (i), comme

$$\left(B_{p_0,q_0}^{s_0},B_{p_1,q_1}^{s_1}\right)_\theta=B_{p,q}^{s},$$

en particulier

$$\left(B^s_{p,q}, B^{-s}_{p',q'}\right)_2 = B^0_{2,2}. \tag{3.2}$$

Donc si $b \in M\left(B^s_{p,q}\right)$ on considére l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T_b & : & \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}' \\ & & g \longrightarrow b \cdot g \end{array}$$

on a T_b est borné de $B^s_{p,q}$ dans $B^s_{p,q}$ (car $b \in M\left(B^s_{p,q}\right)$), et T_b est borné de $B^{-s}_{p',q'}$ dans $B^{-s}_{p',q'}$(car $b \in M\left(B^s_{p,q}\right) = M\Big(B^{-s}_{p',q'}\Big)$). Donc par (3.2) on trouve que T_b soit borné de L^2 dans L^2 c'est-à–dire $b \in M\left(L^2\right) = L^\infty$. Alors

$$M\left(B^s_{p,q}\right) \hookrightarrow L^\infty.$$

■

Théorème 3.5 ([9]) *Soient* $1 \leq p, p_1, q \leq \infty,\ r > 0$ *et* $-r < s < \min(r, \frac{n}{p})$.
Alors

$$B^r_{p_1,\infty} \cap L^\infty \hookrightarrow M\left(B^s_{p,q}\right).$$

Preuve. Soient $f \in B^s_{p,q}$ et $g \in B^r_{p,\infty} \cap L^\infty$. D'aprés la décomposition de $f \cdot g$, on obtient

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} Q^{(i)}_k (f \cdot g),$$

on calcule $f \cdot g$ dans la norme de $B^s_{p,q}$, et on estime respectivement $Q^{(1)}_k (f \cdot g)$, $Q^{(2)}_k (f \cdot g)$, $Q^{(3)}_k (f \cdot g)$ en norme de $B^s_{p,q}$

$$\|f \cdot g\|_{B^s_{p,q}} \leq C \sum_{i=1}^{3} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(i)}_k (f \cdot g) \right\|_{B^s_{p,q}}.$$

Estimation de $\left\{Q^{(1)}_k (f \cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. On observe que

$$\begin{aligned} \left\|Q^{(1)}_k (f \cdot g)\right\|_p &= \left\|Q_k\left(\tilde{Q}_k f S_{k+1} g\right)\right\|_p \\ &\leq c \|S_k g\|_\infty \left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_p. \end{aligned}$$

Puisque

$$\|S_{k+1} g\|_\infty = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-k}.\right)\right) * g\right\|_\infty \leq \|\rho\|_1 \|g\|_\infty,$$

comme supp $\mathcal{F}\left(Q^{(1)}_k (f \cdot g)\right) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^j \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^j\}$, alors la proposition 2.5 donne

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(1)}_k (f \cdot g) \right\|_{B^s_{p,q}} \leq c \|g\|_\infty \|f\|_{B^s_{p,q}}.$$

■

Estimation de $\left\{Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Nous considérons d'abord $p\le p_1$. D'après l'inégalité de Bernstein on a

$$\|Q_j f\|_{p_2}\le c\,2^{jn/p_1}\,\|Q_j f\|_p\,,\qquad (\text{où } \tfrac{1}{p_2}=\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p_1}),$$

par conséquent, par l'inégalité de Hölder

$$2^{ks}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_p\le c\left\|\widetilde{Q}_k g\right\|_{p_1}\,2^{ks}\sum_{j=0}^{k+1}2^{jn/p_1}\,\|Q_j f\|_p\,,$$

si on suppose que $r\le\frac{n}{p_1}$, alors on a

$$\begin{aligned}2^{ks}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_p&\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\left\{2^{sk}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-rk}2^{jr}2^{-sj}\left(2^{sj}\,\|Q_j f\|_p\right)\right\}\\&\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\left(2^{(s-r)k}\sum_{j=0}^{k+1}2^{(r-s)j}\left(2^{sj}\,\|Q_j f\|_p\right)\right).\end{aligned}$$

On calcule $2^{ks}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_p$ en norme de ℓ^q on trouve

$$\left\|\left\{2^{ks}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_p\right\}_{k\ge0}\right\|_{\ell^q}\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\left\|\left\{2^{(s-r)k}\sum_{j=0}^{k+1}2^{(r-s)j}\left(2^{sj}\,\|Q_j f\|_p\right)\right\}_{k\ge0}\right\|_{\ell^q}.$$

En utilisant la proposition 2.5 (car $\operatorname{supp}\mathcal{F}(Q_k^{(2)}(f\cdot g))\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n: 2^j\le|\xi|\le 3\cdot 2^j\}$) et le lemme 1.6 (car $s<r$) on obtient

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_{B^s_{p,q}}\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\,\|f\|_{B^s_{p,q}}\,.$$

Nous étudions maintenant le cas $p>p_1$. Soit $d>0$ tel que $\frac{1}{d}<\min\left(\frac{1}{p},\frac{1}{p}-\frac{s}{n}\right)$. Nous fixons $\frac{1}{t}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{d}$ et $\beta=s-\frac{n}{p}+\frac{n}{d}$. Alors l'inégalité de Hölder donne

$$\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_t\le c\left\|\widetilde{Q}_k g\right\|_{p_1}\|S_{k+1}f\|_d\,.$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned}2^{(\frac{n}{t}-\frac{n}{p})k}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_t&\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\,2^{(\beta-s)k}\sum_{j=0}^{k+1}2^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{d})j}2^{-sk}2^{sk}2^{-sj}\left(2^{sj}\,\|Q_j f\|_p\right)\\&\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\,2^{-sk}\left\{2^{\beta k}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-\beta j}\left(2^{sj}\,\|Q_j f\|_p\right)\right\}.\end{aligned}$$

Puisque $\beta<0$, alors par le lemme 1.6 on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left\{2^{(\frac{n}{t}-\frac{n}{p})k}2^{sk}\left\|Q_k^{(2)}(f\cdot g)\right\|_t\right\}^q\right)^{1/q}\le c\,\|g\|_{B^r_{p_1,\infty}}\,\|f\|_{B^s_{p,q}}\,.$$

Aussi, puisque $t < p$, alors par l'inégalité de Bernstein on obtient le résultat désiré.

Estimation de $\left\{Q_k^{(3)}(f \cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \geq 0$ on a

$$Q_k^{(3)}(f \cdot g) = \sum_{j=k}^{\infty} Q_k\left(\overline{Q}_j g \cdot Q_j f\right),$$

telle que le support de $\mathcal{F}\left(Q_k\left(\overline{Q}_j g \cdot Q_j f\right)\right) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3 \cdot 2^j\}$, alors d'aprés la proposition 2.5 on a

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(3)}(f \cdot g)\right\|_{B_{t,q}^{s+r}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s+r)qj} \sum_{j=k}^{\infty} \left\|Q_k\left(\overline{Q}_j g \cdot Q_j f\right)\right\|_t^q\right)^{1/q},$$

soit $\frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}$, alors par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(3)}(f \cdot g)\right\|_{B_{t,q}^{s+r}} &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{(s+r)k}\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\overline{Q}_j g\right\|_{p_1}\left\|Q_j f\right\|_p\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{(s+r)k}\sum_{j=k}^{\infty}2^{rj}2^{-rj}\left\|\overline{Q}_j g\right\|_{p_1}2^{sj}2^{-sj}\left\|Q_j f\right\|_p\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \|g\|_{B_{p_1,\infty}^r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{(s+r)k}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-(s+r)j}\left(2^{sj}\left\|Q_j f\right\|_p\right)\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \|g\|_{B_{p_1,\infty}^r}\|f\|_{B_{p,q}^s},
\end{aligned}$$

mais $B_{t,q}^{s+r} \hookrightarrow B_{p,q}^s$ alors

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(3)}(f \cdot g)\right\|_{B_{t,q}^{s}} \leq \left\|\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(3)}(f \cdot g)\right\|_{B_{t,q}^{s+r}} \leq \|g\|_{B_{p_1,\infty}^r}\|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

3.2 Opérateurs Pseudo-differentiels

Définition 3.6 *Les transformations de Riesz d'une fonction complexe f sur $\mathbb{R}^n$ sont définis par*

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+1}} g(y)\,dy$$

pour $j = 1, 2, ..., n$. La constante c_n est donnée par $c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$.

Remarque 3.7

1. *Les transformées de Riesz sont données par un multiplicateur de Fourier. En effet, la transformée de Fourier de R_j est donnée par*

$$\mathcal{F}(R_j f)(x) = -i\frac{x_j}{|x|}(\mathcal{F}f)(x).$$

2. *La transforms de Riesz est bornée sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, voir [12, § 3, 1.2, p. 56].*

Définition 3.8 (Classe de Hörmander) *On appelle $S^m_{\rho,\delta}$, la classe des symboles $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ pour tout α et β dans $\mathbb{N}^n$, tels que $|\beta| \leq N$ de degré m et de type (ρ, δ), définie par les inégalités suivantes. Ils existe $C_1 = C_{\alpha,\beta} > 0$ tels que :*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{3.3}$$

Exemple 3.9 *Si $\beta(\xi)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, homogène de degré m, et si $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 autour de 0. Alors $(1-(\xi))\beta(\xi)$ est un symbole de degré m du type $(1,0)$.*
En effet par la formule de Leibniz, on a

$$\partial^\alpha(1-(\xi))\beta(\xi) = \sum_{\alpha \geq \gamma \geq 0} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}\partial^\alpha(1-(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\beta(\xi),$$

la fonction $\xi \mapsto (1-(\xi))\beta(\xi)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, pour $\xi = 0$ elle est définie car $(0) = 1$, donc l'homogénéité de β donne

$$\mu^{-|\alpha-\gamma|}\partial^{\alpha-\gamma}\beta\left(\mu^{-1}x\right) = \mu^{-m}\partial^{\alpha-\gamma}\beta(x),$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\left|\partial^\alpha(1-(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\beta(\xi)\right| &= (1+|\xi|)^{m-|\alpha-\gamma|}\left\|\partial^\alpha(1-(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\beta(\frac{\xi}{1+|\xi|})\right\| \\
&\leq (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}\sup_{|\gamma|\leq|\alpha|}((1+|\xi|)^{|\gamma|})\left\|\partial^\alpha(1-(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\beta(\frac{\xi}{1+|\xi|})\right\| \\
&\leq \Im_{|\alpha|}((1-(\xi))\beta(\frac{\xi}{1+|\xi|}))(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $c = \Im_{|\alpha|}((1-(\xi))\beta(\frac{\xi}{1+|\xi|}))$.

Définition 3.10 *Soit $\sigma(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, l'opérateur pseudo-differentiel de symbole $\sigma(x,\xi)$ est noté $\sigma(x,D)$, telle que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$op(\sigma)f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\mathcal{F}f(\xi)d\xi.$$

L'ensemble des opérateurs pseudo-differentiel d'ordre m, associé à la classe $S^m_{\rho,\delta}$ sera noté $OP^m_{\rho,\delta}$.

Remarque 3.11 *L'espace des symboles verifiant 3.3 est un espace de Fréchet pour les semi normes $P_{\alpha,i}$:*

$$P_{\alpha,i}(\sigma) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\beta|\leq i} \frac{\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right|}{(1+|\xi|)^{n-|\alpha|+\gamma|\beta|}},$$

Théorème 3.12 ([3]) *Soient $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. Si $0 < s < \frac{n}{p}$, alors tout opérateur $op(\sigma) \in OP^0_{1,0}$, n'est pas borné de $M(B_p^{s,q})$ dans $M(B_p^{s,q})$.*

Preuve. On supose que $op(\sigma) \in OP^0_{1,0}$, est borné de $M(B^{s,q}_p)$ dans $M(B^{s,q}_p)$.
Soit la fonction

$$g(x) = \Theta(\frac{x}{|x|})\phi(x),$$

où Θ est $\mathcal{C}^\infty$ sur la sphère unité S^{n-1}, et positive et à support contenu dans l'ouvert

$$V = \left\{y \in S^{n-1} \ , \ y_1 < -\left|y\right|/2\right\}$$

et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et $\phi(x) = 1$ sur la boule unité $|x| \leq 1$. Puisque on a démontré dans le lemme 2.13 que $g \in B^{\frac{n}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty$, et d'après le théorème 3.5, alors $g \in M\left(B^{s,q}_p\right)$ pour $s \in]-\frac{n}{p}, \frac{n}{p}[$.
Soit $op(\sigma) \in OP^0_{1,0}$ de symbole

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi_1}{|\xi|}\left(1 - \widehat{\beta}(\xi)\right),$$

et $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 ou voisinage de 0.
Pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur $op(\sigma)$ est défini par

$$op(\sigma)(g) = R_1 g - \beta * R_1 g,$$

où R_1 est la transformation de Riez associée à la premiére composante, puisque $R_1 g$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, nons avons obtenons par Young

$$\left\|\beta * (R_1 g)\right\|_\infty \leq c\left\|g\right\|_2\left\|\beta\right\|_2,$$

de ce qui précède, il suffit de montrer que $R_1 g \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent $op(\sigma) g \notin M\left(B^{s,q}_p\right)$.
Soit, en effet, l'ouvert

$$U = \left\{x \in S^{n-1} \ , \ \ x_1 > |x|/2\right\}$$

alors, quelques soients x et y dans $\mathbb{R}^n \diagdown 0$, tels que

$$\frac{x}{|x|} \in U, \ \frac{y}{|y|} \in V \quad \text{entraine} \quad x_1 - y_1 > \frac{1}{2}|x-y|$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $\dfrac{x}{|x|} \in U$, on a

$$\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^{n+1}} g(y)\, dy \geq \frac{1}{2}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} |x-y|^{-n} g(y)\, dy,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} R_1 g(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^{n+1}} g(y)\, dy \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{|x|\leq|y|\leq 1} 2^{-n}|y|^{-n}\,\Theta\Big(\frac{y}{|y|}\Big)dy \\ &\geq 2^{-n-1}\left\|\Theta\right\|_{L^1(S^{n-1})}\left|\log|x|\right|, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $R_1 g$ n'appartient pas à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
Alors $op(\sigma) g \notin L^\infty$ et puisque $M\left(B^{s,q}_p\right) \hookrightarrow L^\infty$, (d'après la proposition 3.4) alors $op(\sigma) g \notin M\left(B^{s,q}_p\right)$ ce qui contredit que l'operateur $op(\sigma)$ est borné. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudier la non continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces des multiplicateurs de $B^s_{p,q}$ pour $0 < s < \frac{n}{p},$ comme un cas particulier du la résultat qui obtenu par G. Bourdaud et M. Moussai dans [3].

Bibliographie

[1] G. Bourdaud. Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers. PhD thesis, 1983.

[2] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. Pub. Math. Uni. Paris 7. N 29 (1987).

[3] G. Bourdaud, M. Moussai. *Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Besov localisés*. Bull. Sci.Math. 112, 419–432 (1988).

[4] C.-H. Ching. *Pseudo differential operators with non regular symbols. J. Differential Equations* 11 (1972), 436–447.

[5] A. Djeriou. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels, Université Hadj Lakhdar de Batna, 2011.

[6] D. Drihem et M. Moussai. *On the pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Int.J.M.M.S. Vol. 2006, Article ID 76182, Pages 1–18 21.

[7] L. Grafakos. Classical Fourier Analysis. Missouri, Columbia 2008.

[8] L. Hörmander. *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, in Proc. Symp. Pure math. X 1965, 138–183.

[9] M. Moussai. *On the Continuity of Pseudo-differential Operators on Besov Spaces.* Analysis, 26 (2006), 491–506. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München 2006.

[10] H. Triebel. Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[11] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press. 1970.

[12] E. M. Stein. Harmonic Analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Press, Princeton New Jersey, 1993.

[13] M. W. Wong. An Introduction to Pseudo-Differential operators. York, Canada, 1987-1988.

Résumé

Nous étudions la non-continuité des opérateurs pseudo-différentiels du symbole $\sigma(x,\xi)$ dans la classe de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}$ i.e.

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \textbf{for} \quad 0 \leq \delta < \rho \leq 1,$$

sur les espaces des multiplicateurs ponctuels de Besov $M\left(B^s_{p,q}\right)$ pour $0 < s < n/p$.

Mot-clés : Opérateurs Pseudo-differentiels, espace de Besov, espace de Sobolev, décomposition de Littlewood-Paley.

ملخص

نتطرق في هذه المذكرة الى دراسة عدم الاستمرارية للمؤثرات الشبه تفاضلية ذات النواة $\sigma(x,\xi)$ التي تنتمي الى صنف هرموندار $S^m_{\rho,\delta}$ المعرف ب

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

مع $0 \leq \delta < \rho \leq 1$، على الفضاءات لضربيلفضاء بيزوف $M\left(B^s_{p,q}\right)$ حيث $0 < s < n/p$.

كلمات مفتاحية: **المؤثرات الشبه تفاضلية، فضاءات بيزوف، فضاءات سوبولاف، تجزئة لتلوود بيلي.**

Résumé

we study the non-continuity of the pseudo-differential operators of the symbol $\sigma(x,\xi)$ in the class of Hörmander $S^{m}_{\rho,\delta}$ i.e.

$$\left|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \textbf{for} \quad 0 \leq \delta < \rho \leq 1,$$

on pointwise multipliers Besov space $M\left(B^{s}_{p,q}\right)$ for $0 < s < n/p$.

Key words : Pseudo-differential operators, Besov spaces, Sobolev spaces, Littlewood-Paley decomposition.