

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Problème de commande optimale et principe du maximum de
Pontryagin*

Présentée par :

M^{elle} KAMEL Wassila

Soutenu publiquement le : xx/06/2023.

Devant le jury composé de :

Président : M^r TIAIBA Abdelmoumen

Encadreur : M^r TOUAHRIA Messaoud

Examineur : M^r CHADI khelifa

Prof, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Nos remerciements vont avant tout au ALLAH qui nous a donné le courage et la volonté de travailler consciencieusement pour l'élaboration de ce mémoire. Nos remerciements vont aussi à Mr. Touahria Messaoud, Docteur à l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, d'avoir proposé et accepté de diriger ce travail, pour son aide précieuse, ses remarques constructives, ses conseils, son soutien, et pour son sérieux suivi dans la préparation de ce travail. Nous remercions également les membres de jury pour l'intérêt à mon travail et de l'avoir examiné. Nous exprimons vivement notre gratitude à l'ensemble de nos enseignants qui nous ont suivi inlassablement durant tout notre cursus universitaire. Enfin, nos meilleurs remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, encouragé tout au long de notre parcours universitaire en particulier nos familles et nos amis(es).

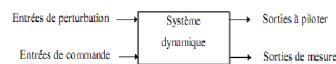
Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités	3
1.1 Généralités sur les équations différentielles	3
1.1.1 Définitions fondamentales	3
1.1.2 Quelques types d'équations différentielles :	4
1.1.3 Problème de Cauchy	6
1.2 Généralité sur la théorie du contrôle	7
1.2.1 Les systèmes dynamiques	8
1.3 Contrôlabilité :	11
1.3.1 Application entrée-sortie	11
1.4 Condition de Kalman :	13
1.5 Stabilisation	14
1.5.1 Bouclage statique	15
1.5.2 Concepts de stabilité	15
1.6 Observabilité	16
1.6.1 Système commandé-observé	16
1.6.2 Critère d'observabilité de Kalman :	16
2 Contrôle Optimale	18
2.1 Quelques rappelles sur les problèmes d'optimisations	18
2.1.1 Un peu de topologie	18
2.1.2 Minimum local ou global	19
2.1.3 Optimisation convexe	20
2.2 Définition de la Commande optimale	21
2.2.1 Quelques définitions	22
2.2.2 Conditions terminales :	22
2.3 Position du problème de la commande optimale	23
2.4 Diffèrent type de problème de commande optimale :	23
2.4.1 Problème de Lagrange :	23
2.4.2 Problème de Mayer :	24

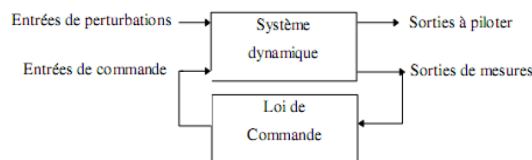
2.4.3	Problème de Bolza (Mayer-Lagrange) :	24
2.5	Version générale du principe du Maximum de Pontryagin (<i>PMP</i>)	24
2.5.1	Principe du maximum de Pontryagin	25
3	Application	26
3.1	Contrôle Linéaire Quadratique	26
3.1.1	Position du problème de contrôle optimal linéaire quadratique	26
3.1.2	Existence de trajectoires optimales	27
3.1.3	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du Maximum dans le cas <i>LQ</i>	28
3.2	Exemples :	29
3.2.1	Application du Principe du Maximum	29
	Conclusion générale	36
	Bibliography	37

Introduction générale

La théorie du contrôle est un domaine de recherche interdisciplinaire, où beaucoup de concepts mathématiques et des méthodes travaillent ensemble pour produire un corps impressionnant des mathématiques appliquées. Les problèmes de contrôle occupent une place importante dans ce domaine, parce que la résolution de ces problèmes, garantissent le fonctionnement sur d'un corps, et pour étudier mathématiquement la propriété de contrôlabilité sur ces corps il faut connaître la modélisation (compréhension) et la commande (contrôle) de certaines composantes de l'environnement humain appelées systèmes. La modélisation est fondée sur l'analyse de la relation entre une cause l'entrée (contrôle, perturbation, incertitude de système) et un effet la sortie (les réponses du système). Cette relation entrée-sortie, traduite pour des besoins de commande en une représentation mathématique appelée modèle, décrit le comportement du système. C'est une phase relativement difficile mais essentielle pour commander tout système réel. La commande en boucle ouverte



est une fonction $t \rightarrow u(t)$ définie sur un intervalle de temps à valeurs dans l'espace des contrôles. La commande en boucle fermée



appelée aussi rétro-action, aussi connue sous sa dénomination anglo-saxonne : feedback, est une fonction $u \rightarrow R(t)$.

L'objectif principal de la théorie du contrôle est de déterminer la commande à appliquer en entrée du système pour obtenir un comportement désiré de celui-ci. Cependant, quelle que soit la nature du système physique, son comportement ne peut être parfaitement représenté par un seul modèle mathématique. En effet, si la loi de commande est calculée sans précaution particulière sur la base d'un seul modèle, il est très probable que l'appli-

cation de cette commande au système réel ne reproduise pas le comportement observé au préalable sur le modèle. Le résultat est alors dans la majorité des cas bien éloigné du résultat escompté.

L'objet de notre mémoire porte sur les problèmes de contrôle.

Elle se compose de trois chapitres.

- **Chapitre 1** : Donnée une généralité sur les équations différentielles et quelques notions concerne la théorie de contrôle.
- **Chapitre 2** : Après un état de l'art sur l'optimisation nous présentons la formulation générale de problème de contrôle optimale et Principe du Maximum de Pontryagin (*PMP*).
- **Chapitre 3** : On applique *PMP* principalement sur un système dynamique linéaire quadratique (*LQ*). pour déterminer la lois de commande optimale en minimisant un coût quadratique et on termine le chapitre par quelques exemples.

Généralités

1.1 Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour résoudre des problèmes en physique et dans plusieurs autres disciplines scientifiques. Elles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.1.1 Définitions fondamentales

Définition 1.1. Soit $x = f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I . Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses premières dérivées une relation de la forme :

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = f(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée équation différentielle d'ordre n .

Le cas particulier de (1.1) le plus usité est de la forme :

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Où g est une fonction réelle.

Définition 1.2. $x = \varphi(t)$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et vérifiant (1.1) en tout point de l'intervalle I est appelée solution ou intégrale de cette équation.

Définition 1.3. Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé arc intégral ou courbe intégrale.

Définition 1.4. *Problème de Cauchy* Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in [a, b] \\ x(t_0) = x_0, t_0 \in [a, b]. \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ce problème est appelée problème de Cauchy et (t_0, x_0) est appelée condition initiale.

1.1.2 Quelques types d'équations différentielles :

Équations différentielles à variable séparable

On appelle une équation différentielle à variable séparée une équation de la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x)f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt;$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient :

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt \quad (1.3)$$

Exemple 1. soit $\dot{x} = x^2$ avec la condition initiale $x(1) = 1$ pour $x \neq 0$, on écrit $\frac{dx}{x^2} = dt$, ce qui donne en intégrant

$$\frac{-1}{x} = t + c$$

la condition initiale impose $c = -2$ d'où la solution $x = \frac{1}{(2-t)}$ définie sur l'intervalle $] -\infty, 2[$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont de la forme :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (1.4)$$

Où $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions de la variable réelle t , continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction $a(t)$ ne s'annule pas. On associe à l'équation différentielle (1.4), l'équation sans second membre

$$a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (1.5)$$

(1.5) s'appelle aussi " équation différentielle homogène " associée à (1.4).

Les solutions de l'équation (1.5) sont données par :

$$t \longrightarrow k \exp \int \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

Où k est une constante réelle quelconque.

On obtient les solutions de l'équation (1.4) en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème 1.1.1. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (1.4) est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre (1.5) et d'une intégrale particulière de l'équation complète (1.4).*

Remarque 1. *Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de Bernoulli :*

$$\dot{x} = p(x)x + q(x)x^\alpha \quad (1.6)$$

$p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire. Sinon en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t)$$

C'est aussi le cas de l'équation de Riccati :

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

On sait résoudre cette équation dès que l'on connaît une solution particulière $x_1(t)$, cela conduit à une équation de Bernoulli pour $\alpha = 2$.

En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de le remplacer dans l'équation de Riccati, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante :

$$\dot{y} = (2a(t)x_1(t) + b(t))y + a(t)y^2(t).$$

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n et d'inconnue y est donc de la forme :

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = a_{(n+1)}$$

Où $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{(n+1)}$, sont des fonctions numériques.

Remarque 2. *Les équations différentielles d'ordre n se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1.*

Soit : $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ une équation différentielle d'ordre n

on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1 \\ x'(t) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

On aura alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1 \\ x'_1(t) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

de plus $x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. On peut écrire cela sous la forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. D'où l'équation différentielle d'ordre n : $x^n(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{n-1}(t))$ est équivalente à l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 suivante : $x'(t) = F(t, x(t))$ avec :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

On obtient $x'(t) = F(t, x(t))$

1.1.3 Problème de Cauchy

La résolution d'un problème de Cauchy consiste à trouver la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire où vectorielle satisfaisante les conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant le point t_0 , le problème associé à une EDO de premier ordre permet de trouver une fonction réelle

$x(t) \in C^1(I)$ solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $f(t, x(t))$ est une fonction à valeurs réelles dans $I \times]-\infty, +\infty[$ et continue par rapport aux deux variables.

Si f ne dépend pas de t (i.e $f(t, x(t)) = f(x(t))$), l'équation est dite autonome.

Théorème 1.1.2 (Cauchy-Lipschitz). *Si f est une application de classe C^1 de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R} alors, pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le problème (1.7), admet une solution unique de classe C^1 dans un intervalle de la forme $]t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0[$ pour un $\epsilon_0 > 0$.*

Existence et unicité de solution

Soit le problème de Cauchy (1.7) tel que $t \in [a, b]$.

Résoudre ce problème consiste à déterminer un couple (φ, I) où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et φ une fonction dérivable de I . On obtient en intégrant l'équation différentielle de problème de Cauchy entre t_0 et t et tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds;$$

De plus, si f est une fonction continue dans $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport $K \in [0, \infty]$ suivante :

$$\forall t \in [a, b], \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\| f(t, x_2) - f(t, x_1) \| \leq K \| x_2 - x_1 \|$$

alors le problème avec la condition initiale (t_0, x_0) admet $\varphi(t)$ comme solution unique dans $[a, b]$.

Définition 1.5. *Soit $\dot{x} = f(t, x)$ et $(t, x) \in \Omega$ (ouvert) une équation différentielle sous forme normale et m_0 un point quelconque de Ω .*

On dit que m_0 est un point d'unicité global où simplement un point d'unicité, s'il existe une solution maximale et une seule de l'équation donnée qui passe par m_0 .

1.2 Généralité sur la théorie du contrôle

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle t de façon à conduire l'état $x(t)$ de ce système à un état donné à un instant donné

Un système contrôle (où commande) est un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t) \in M, u(\cdot) \in \mathcal{U} \quad (1.8)$$

En général le vecteur des états $x(t)$ appartient à un ensemble M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n), et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles \mathcal{U} , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, le système (1.8) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty)$. On notera cette solution par $x_f(t, x_0, u(\cdot))$. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on pourra omettre dans cette notation le champ f , la condition initiale x_0 , ou bien le contrôle $u(\cdot)$. Le système (1.8) est dit en boucle ouverte.

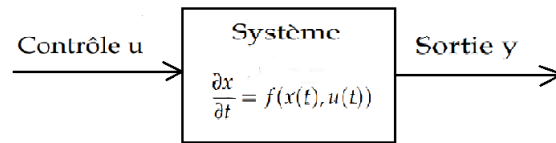


FIGURE 1.1 – Schéma d'un système de contrôle (Boucle ouverte).

Définition 1.6 (système de contrôle). *est un système dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système par le biais d'un contrôle (où commande).*

On considère un système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

où $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne l'état et $u : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ le contrôle, n et m étant deux entiers naturels non-nuls.

Définition 1.7 (Trajectoire). *On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière $t \in \mathbb{I} \rightarrow (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait (1.9) sur un intervalle \mathbb{I} de \mathbb{R} non vide*

Définition 1.8. *On appelle point équilibre du système (1.9) un couple $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant*

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Les objectifs principaux de la théorie du contrôle que on va aborder dans la suite sont les notions de contrôlabilité, stabilité et observabilité. Nous allons aussi aborder brièvement la notion de contrôle optimal

1.2.1 Les systèmes dynamiques

Lors de la conception d'un système de commande, la première étape, qui conditionne le succès d'une telle réalisation et la modélisation, l'obtention d'une description mathématique convenable, qui reproduit de manière aussi fidèle que possible le comportement du

système à commander dans un contexte donné, est nécessaire. Les modèles des systèmes dynamiques peuvent être classés en plusieurs catégories :

- linéaires / non linéaires
- invariants dans le temps / variants dans le temps
- déterministes / stochastiques
- à paramètres localisés / à paramètres répartis
- mono variables / multi variables
- à temps continu / à temps discret

Bien que la plupart des systèmes physiques soient essentiellement non linéaires, variants dans le temps, de dimension infinie et que leur représentation mathématique se traduise donc par des équations aux dérivées partielles non linéaires ou par des équations ordinaires. En effet, il existe plusieurs techniques pour approcher le comportement des systèmes physiques par des modèles linéaires invariants de dimension finie. On peut par exemple linéariser un modèle non-linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement et obtenir ainsi une famille de modèles linéaires. Dans notre étude, on considère des systèmes dynamiques modélisés par des Équations différentielles sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

telle que $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état de système, et le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée (ou commande). Pour calculer l'évolution future d'un système, il faut connaître le vecteur $t \rightarrow u(t)$ aussi que la condition initiale de l'état. étant donné l'évolution du système on s'intéresse souvent à un certain nombre de vecteurs qu'on nomme sorties ou mesures.

- un système dynamique est décrit par une équation qui modélise l'évolution d'une grandeur physique par rapport au temps, qui est munie d'une donnée initiale
- un système dynamique est dit continue s'il écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

On suppose qu'on peut agir sur le système par une fonction u , alors le système dynamique continue devient

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Le système dynamique est dit discrète s'il écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x(k) = f(k, x(k), u(k)), k = t, k \in \mathbb{N} \\ x(k_0) = x_{k_0} \end{cases} \quad (1.12)$$

L'espace vectoriel auquel appartient $u(t)$ noté U s'appelle l'espace des contrôles. Généralement la fonction de contrôle $u(\cdot)$ est non continue, et peuvent être choisies certaines contraintes objectives

- Amener le système d'un certain état à un autre état c'est la *contrôlabilité*
- Maintenir l'état d'un système dynamique très proche d'une position donnée c'est la *stabilisation*.
- Minimiser une certaine fonction coût c'est l'*optimisation*.

Exemple 01 :Le système masse - ressort

Le système masse - ressort avec contrôle $u(\cdot)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = u(t), t > 0 \\ x(t_0 = 0) = x_0, x'(t_0 = 0) = x_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

C'est une équation différentielle ordinaire du seconde ordre à coefficients constants De manière plus générale, nous considérons des systèmes de contrôle sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in \mathbb{I} \text{ un intervalle de } \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.14)$$

où

- $x : t \in \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^n, n \geq 1$, décrit l'état du système
- $u : t \in \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^m, m \geq 1$, est le contrôle
- $f : t \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, décrit la dynamique du système

1.3 Contrôlabilité :

1.3.1 Application entrée-sortie

Considérons pour le système (1.14) le problème de contrôle suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u , solution de (1.14) vérifie

$$x_u(0) = x_0, x_u(T) = x_1$$

. Ceci conduit à la définition suivante.

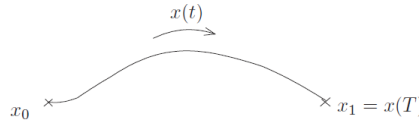


FIGURE 1.2 – Problème de Contrôlabilité

Définition 1.9. Soit $T > 0$. L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé (1.14) initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto x_u(T) \end{aligned}$$

où \mathcal{U} est l'ensemble des contrôles admissibles, i.e. l'ensemble de contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u .

Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc

Pour donner une forme de f dans l'équation (1.14), on définit deux fonctions à valeurs matricielles.

$$A : [0, T] \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R}); \quad A(t) = (a(t)_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$$

et

$$B : [0, T] \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R}); \quad B(t) = (b(t)_{i,j})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

Alors f sera sous la forme $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec

$$f(t, x, u) \mapsto A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$\forall (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Donc le système de commande (1.14) s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

On supposera que A, B sont des fonctions continues, ce que veut dire que chacune des

composantes de A, B sont des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}

D'après les théorèmes d'existence de solution des équations différentielles pour tout commande u le système (1.15) admet une solution unique $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

où $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est résolvante du système linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Exemple 2. Soit le système différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \\ x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02} \end{cases}$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

D'où on obtient un système de contrôle sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

1. Ensemble accessible

Définition 1.10. L'ensemble accessible en temps T pour le système (1.14), noté $Acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps T .

Théorème 1.3.1. Considérons le système de contrôle (1.14) où la fonction f est C^1 sur \mathbb{R}^{1+n+m} , et les contrôles u appartiennent à l'ensemble \mathcal{U} des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. On suppose que

- il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[0, T]$, i.e.

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, T], \|x_u\| \leq b \quad (1.16)$$

- pour tout (t, x) , l'ensemble des vecteurs vitesses

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in \Omega\} \quad (1.17)$$

est convexe.

Alors l'ensemble $Acc(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[0, T]$.

Démonstration [9]

2. Résultats de contrôlabilité

Définition 1.11. Le système (1.14) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} \text{Acc}(x_0, T)$$

Il est dit contrôlable en temps T si $\mathbb{R}^n = \text{Acc}(x_0, T)$.

Par des arguments du type théorème des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de contrôlabilité locale du système de départ.

Définition 1.12 (Contrôlabilité locale). Soit $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point d'équilibre du système de contrôle (1.9). On dit alors que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre (x_e, u_e) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{B}_\eta(x_e) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_e| < \eta\}$, il existe une application mesurable $u : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$|u(t) - u_e(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \epsilon]$$

$$(\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0) \Rightarrow x(\epsilon) = x_1$$

Définition 1.13 (Système linéarisé). Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre du système (1.9). Le système de contrôle linéarisé au point (x_e, u_e) du système $\dot{x} = f(x, u)$ est le système de contrôle linéaire

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u(t)$$

Théorème 1.3.2. On considère le système (1.9) avec $f(x_e, u_e) = 0$. On note :

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$ On suppose que

$$\text{rg}([B, AB, \dots, A^{n-1}B]) = n$$

Alors le système est localement contrôlable en (x_e, u_e) .

On introduit la notion d'intégrale première qui donne une condition sur la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

1.4 Condition de Kalman :

On considère le système linéaire suivant :

$$\forall t \in \mathbb{I} \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

où A est de taille $n \times n$ et B de taille $n \times m$

Si A et B ne dépendent pas du temps t , on a une caractérisation algébrique de la contrô-

labilité

Définition 1.14. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par

$$\text{Acc}(x_0, T) = \{x_u(T), u \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \Omega)\}$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système associée au contrôle u .

Autrement dit $\text{Acc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u . Pour la cohérence on pose $\text{Acc}(x_0, 0) = x_0$.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 1.4.1 (Matrice de Kalman). L'espace $\text{Acc}(0, T)$ est égal à l'image de la matrice

$$C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n, nm}(\mathbb{R})$$

, appelée matrice de Kalman.

Démonstration [3]

Exemple 3. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\dim A = 2$, Est ce que le rang $(B, AB) = 2$

$(B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ pas que $\det \neq 0$ donc la matrice est commandable (contrôlable)

Corollaire 1 (Critère de contrôlabilité de Kalman). On suppose que $\omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle). Le système linéaire (1.18) est contrôlable en temps T (quelconque) si, et seulement si, la matrice de Kalman est de rang n (i.e $\text{rg}C = n$ est appelée condition de Kalman.).

Remarque 3. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

1.5 Stabilisation

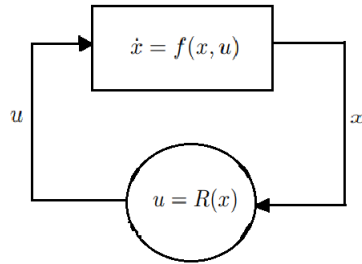
Un contrôle (où une commande) en boucle ouverte est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, où un bouclage, où encore un feedback, est une application $u \rightarrow \mathbb{R}(x)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

1.5.1 Bouclage statique

Définition 1.15 (Bouclage statique). On dit que u est un bouclage statique du système (1.9) si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction. Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x} = f(x, R(x)) \quad (1.19)$$

Il est représenté par le diagramme suivant. Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste



à maintenir le système près d'un équilibre x^* . Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que x^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (1.19).

1.5.2 Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.20)$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.16. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.20) on ait

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable

Définition 1.17. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

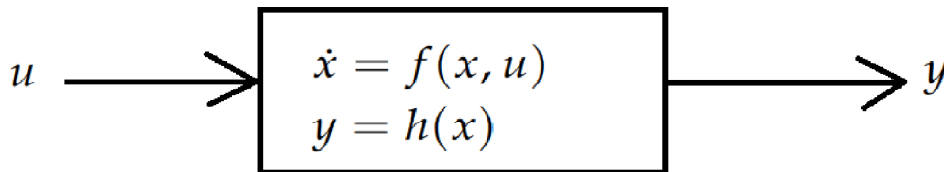
1.6 Observabilité

1.6.1 Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie où la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.21)$$

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant. Le système non linéaire sera dit ob-



servable si la sortie $y(t)$ permet de retrouver l'état $x(t)$. Un observateur pour le système (1.21) est un système

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}(t), y(t), u(t)) \quad (1.22)$$

ayant comme entrées $u(t)$ et $y(t)$ (la sortie du système (1.21)) et tel que l'erreur

$$e(t) = x - \hat{x}$$

tende vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. L'équation de l'erreur est

$$\dot{e} = f(x, u) - g(x - e, h(x), u)$$

Selon que $e = 0$ est un équilibre GAS, globalement asymptotiquement stable.

1.6.2 Critère d'observabilité de Kalman :

Considérons le système linéaire commandé-observé

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^k \end{cases} \quad (1.23)$$

Définition 1.18. On dit que le système linéaire (1.23) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$. tel que la connaissance de $y(t)$ pour $t \in [0, T]$ permet de déterminer x_0 .

Remarque 4. Le système (1.23) est dit observable si la matrice d'observabilité

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n

Exemple 4. si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0),$$

Alors

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et de rang 2 car $\det \neq 0$

Donc le système est observable

Chapitre 2

Contrôle Optimale

2.1 Quelques rappelles sur les problèmes d'optimisations

2.1.1 Un peu de topologie

Soit n un entier non nul. L'ensemble \mathbb{R}^n est un espace vectoriel normée de dimension n . Un vecteur x de \mathbb{R}^n a n coordonnées et est notée

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est un scalaire défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La norme euclidienne du vecteur x est définie par

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Ouvert et fermée

Une boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ est définie par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < r\}$$

Une boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ est définie par

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| \leq r\}$$

Un ouvert non vide de \mathbb{R}^n est tel que

$$\forall x \in \Omega, \exists r > 0, B(x, r) \subset \Omega$$

Un fermée K de \mathbb{R}^n est tel que son ensemble complémentaire est un ouvert.

L'ensemble \mathbb{R}^n est à la fois ouvert et fermée, ainsi que l'ensemble vide.

Les intervalles ouverts de \mathbb{R} sont des ensembles ouverts, les intervalles fermés de \mathbb{R} sont des ensembles fermés.

Exemple 5.

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

L'ensemble K_1 est un ouvert de \mathbb{R}^n .

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

L'ensemble K_2 est un fermée de \mathbb{R}^n .

2.1.2 Minimum local ou global

Soit un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction scalaire à plusieurs variables de Ω dans \mathbb{R} . Soit K un sous-ensemble non vide de Ω . Un problème de minimisation consiste à trouver un point x^* dans K tel que la valeur $f(x^*)$ soit minimale dans K . L'ensemble K est appelée ensemble admissible et la fonction f est l'objectif où le coût.

Définition 2.1. Le point $x^* \in K$ est un point de minimum global dans K , et la valeur $f(x^*)$ est le minimum global de f dans K , si et seulement si

$$\forall x \in K, f(x) \geq f(x^*)$$

Définition 2.2. Le point $x^* \in K$ est un point de minimum local dans K , et la valeur $f(x^*)$ est un minimum local de f dans K si et seulement s'il existe une boule ouverte $B(x^*, r)$ telle que

$$\forall x \in B \cap K, f(x) \geq f(x^*)$$

Dans ce cours, on s'intéresse au problème de minimisation :

$$\min_{x \in K} f(x) \tag{2.1}$$

Un problème de minimisation, local ou global, peut n'avoir aucune solution, une solution unique, plusieurs solutions. S'il existe un point de minimum global, sa valeur est unique. Par contre, il peut y avoir plusieurs valeurs de minima locaux.

Si la fonction g admet un maximum local en x^* , alors la fonction $f = -g$ admet un minimum

local en x^* . Donc la recherche d'un maximum peut se faire en cherchant le minimum de la fonction opposée.

Dans la suite du cours, on l'étudie l'existence et l'unicité de solutions. Le cas convexe est important car les résultats sont plus nombreux.

On étudie ensuite les conditions nécessaires d'existence dans le cas différentiable. Celles-ci permettent de construire des algorithmes de calcul.

2.1.3 Optimisation convexe

Lorsque l'ensemble admissible est convexe et que la fonction est convexe, le problème d'optimisation est nettement plus simple.

Ensemble convexe

Définition 2.3. Un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in K.$$

Exemple 6. Une boule ouverte $B(x, r)$, une boule fermée $B(x, r)$ sont des ensembles convexes. Il est facile de caractériser les ensembles convexes dans \mathbb{R}

Théorème 2.1.1. Les sous-ensembles convexes de \mathbb{R} sont les intervalles de \mathbb{R} .

Un pavé K de \mathbb{R}^n est un produit d'intervalles : soit I_1, I_2, \dots, I_n des intervalles de \mathbb{R} . Le pavé K associée est défini par

$$K = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_n \in I_n$$

Théorème 2.1.2. Les pavées de \mathbb{R}^n sont des ensembles convexes.

Fonction convexe

Une fonction peut être convexe, strictement convexe, où fortement convexe.

Définition 2.4. Soit $K \subset \Omega$ un sous-ensemble convexe de Ω .

La fonction f est convexe dans K si et seulement si

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La fonction f est strictement convexe dans K si et seulement si

$$\forall x, y \in K, x \neq y, \forall t \in]0, 1[, f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La fonction f est fortement convexe dans K si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) - \alpha t(1 - t)\|y - x\|^2.$$

Toute fonction fortement convexe est strictement convexe et toute fonction strictement convexe est convexe.

Une fonction constante dans K est convexe dans K mais n'est pas strictement convexe.

La convexité locale est utile en optimisation.

Définition 2.5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction de Ω dans \mathbb{R} et x^* . La fonction f est localement convexe au voisinage de x^* si et seulement si f est convexe dans une boule ouverte $B(x^*, r)$ incluse dans Ω .

Le problème de la commande optimale a été développé pour guider un système vers un objectif de manière optimale pour atteindre un optimum de production, bien améliorer et obtenir, selon un ensemble de critères d'une chose ou d'une situation. Cette théorie de contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en respectant certains critères, les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruits, systèmes avec retard, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologique, chimique et économique. L'objectif peut être de stabiliser le système pour rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation) ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal, ou commande optimale). Dans ce chapitre, nous abordons la formulation générale d'un problème de la commande optimale et nous présentons les différentes méthodes pour résoudre un problème de la commande optimale et nous terminons en exposant un exemple avec sa solution.

2.2 Définition de la Commande optimale

La commande optimale consiste à chercher une commande admissible $u^*(t)$ qui permet de transférer le système d'un état initial à l'état final tout en respectant des contraintes physiques et en minimisant des fonctions objectives (critères ou indices de performances). Le problème de la commande optimale d'un système est formulé en précisant les éléments suivants :

- Modèle du système à commander.
- Condition terminal (états initiaux et états finaux).
- Contraintes.
- Critère de performance à optimiser (minimiser ou maximiser).

Pour un système dynamique, on cherche une commande permettant de transférer le système d'un état initial vers un état final. La commande optimale est en général soumise à diverses contraintes liées à sa réalisation (accélération limitée, vitesse de montée en puissance bornée).

2.2.1 Quelques définitions

Définition 2.6. (Commande bang-bang) Un contrôle $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$

Définition 2.7. (commande borné) La commande $u_j(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorer et majorer par des constantes a et b , par la forme suivante :

$$a \leq u_j(t) \leq b, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T]$$

Définition 2.8. L'ensemble $U = \{u(t), t \in [0, T]\}$ est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non bornées, bornée ou du type bang-bang.

Définition 2.9. On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression

$$\min_u (g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u) dt)$$

Définition 2.10. On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f^0(t, x, u) = 1$, $g(T, x(T)) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression de

$$\min_u \int_0^T 1 dt$$

Remarque 5. • Un contrôle en boucle ouverte est une application $t \mapsto u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles.

- Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, est une application $u \mapsto g(t)$ définie sur les variables d'état du système.

2.2.2 Conditions terminales :

Soit la trajectoire d'un système dynamique de la Figure suivant :

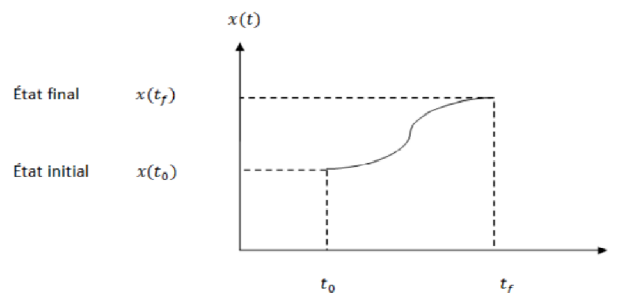


FIGURE 2.1 – La trajectoire d'un système dynamique à l'état initial et à l'état final.

Les conditions terminales sont l'état initial et l'état final

1. État initial :

C'est l'état du système à l'instant t_0 où on commence à agir sur le processus. Il caractérise les valeurs des variables d'états à l'instant initial t_0 , elle est notée $x(t_0) = x_0$.

Comme il est indiqué dans la Figure (2.2).

2. État final :

C'est l'état du système à l'instant t_f après l'action de la commande. Il caractérise les valeurs des variables d'états à l'instant final t_f , Il est noté : $x_f = x_{t_f}$ Comme il est indiqué dans la Figure (2.2)[6].

2.3 Position du problème de la commande optimale

Les problèmes de contrôle optimal sont de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \min_u C(u) = (g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u)dt) & (1) \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0 & (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1 & (4) \\ u \in U, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.2)$$

Où M_0 (ensemble de départ) et M_1 (ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de \mathbb{R}^n , $[0, T]$ intervalle de \mathbb{R} , $x(x) = x_0$ est la position initiale du système (2.2), $x(T)$ est la position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(.)$ est la commande du système (2.2). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur $[0, T]$ à valeurs dans $U \subseteq \mathbb{R}^m$

- L'équation (2) modélise le système dynamique du contrôle optimal.
- L'équation (1) est La fonction cout où objectif, cette fonction cout a deux parties : l'une $g(T, x(T))$ est le cout terminal, il a du poids quand le temps final est libre sinon il est constant et l'autre $\int_0^T f^0(t, x, u)dt$ est le cout intégral.

L'objectif est de minimiser le cout : $g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u)dt$

2.4 Différent type de problème de commande optimale :

Il existe trois types de problèmes de commande optimale

2.4.1 Problème de Lagrange :

Pour ce problème, le critère est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t)dt \quad (2.3)$$

où les contrôles $u(t)$ sont des fonctions définies de $[t_0, t_f]$ dans \mathbb{R} .

2.4.2 Problème de Mayer :

Ici, le critère à minimiser est différent de celui de l'équation précédente. Il dépend uniquement la valeur terminale de l'état de contrôle du système. On définit critère à optimiser comme suit :

$$J(u(t)) = \theta(x(t_f), t_f) \quad (2.4)$$

2.4.3 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange) :

Le problème de Bolza regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer. On définit le critère comme suit :

$$J(u(t)) = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (2.5)$$

2.5 Version générale du principe du Maximum de Pontryagin (PMP)

Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle.

On considère le système contrôlé dans \mathbb{R}^n de l'équation (??). où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, T[$ de \mathbb{R}_+ et à valeurs dans $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Par ailleurs on définit la fonctionnelle de coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(T, x(T))$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (1.9) associée au contrôle u . On considère le problème suivant : soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

Problème de contrôle optimal :

déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 (autrement dit telle que $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$) minimisant le coût. Le temps final peut être fixé où non.

Mathématiquement, ce problème se récrit

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ 0 < T < T_e(u)}} C(T, u) \quad (2.6)$$

où \mathcal{U} désigne l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $T(u) < T_e(u)$.

Définition 2.11. On définit le Hamiltonien H du système de contrôle optimal (1.9) - (2.6) sur

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ par

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u).$$

2.5.1 Principe du maximum de Pontryagin

les contrôles $u(\cdot) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$; le problème est de minimiser un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.7)$$

où T est fixé.

Associons au système (2.2) le système augmenté suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \dot{x}^0(t) = f^0(t, x(t), u(t)), \end{cases} \quad (2.8)$$

et notons $\tilde{x} = (x, x_0)$, $\tilde{f} = (f, f^0)$. Le problème revient donc à chercher une trajectoire solution de (2.8) joignant les points $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ et $\tilde{x}_1 = (x_1, x^0(T))$, et minimisant la dernière coordonnée $x^0(T)$. L'ensemble des états accessibles à partir de \tilde{x}_0 pour le système (2.8) est $\tilde{Acc}(\tilde{x}_0, T) = \bigcup_{u(\cdot)} \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, u)$.

Le lemme crucial est alors le suivant.

Lemme 1. *Si le contrôle u associé au système de contrôle (2.2) est optimal pour le coût (2.7), alors il est singulier sur $[0, T]$ pour le système augmenté (2.8).*

Théorème 2.5.1. *Si le contrôle u associé au système de contrôle (2.2) est optimal pour le coût (2.7), alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (2.9)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0 \quad (2.11)$$

où H est le Hamiltonien associé au système (2.2) et au coût (2.7)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u). \quad (2.12)$$

Dans le chapitre suivant on va utiliser le PMP pour résoudre un problème de commande optimale

Application

Dans ce chapitre, nous présentons les commande linéaire quadratique et des exemples du principe de maximum de Pontryagin au calcul du contrôle optimal de quelques systèmes.

3.1 Contrôle Linéaire Quadratique

Le contrôle optimal linéaire-quadratique a fait l'objet de nombreuses investigations, depuis l'article publiée par Kalman en 1960. Dans ce type de problème le système est linéaire et le cout quadratique. Les systèmes de contrôle linéaire quadratique sont d'une grande importance dans la pratique, en effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème.

3.1.1 Position du problème de contrôle optimal linéaire quadratique

Considérons un système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \\ t \in I = [0, t_f] \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $A(t)$ et $B(t)$ sont des applications localement intégrables sur $I = [0, t_f]$ à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

On lui associé un coût quadratique du type :

$$C(u) = x^T(t_f)Qx(t_f) + \int_0^{t_f} (x^T(t)W(t)x(t) + u^T(t)U(t)u(t))dt, \quad (3.2)$$

Où $t_f > 0$ est fixé et où, pour tout $t \in [0, t_f]$, $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et $Q(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

On suppose que les dépendances en t de A, B, W, U sont L^∞ sur $[0, t_f]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m)$.

- $x^T(t_f)Qx(t_f)$ est le coût terminal.
- $\int_0^{t_f} (x^T(t)W(t)x(t) + u^T(t)U(t)u(t))dt$ est le coût intégrale.

Donc on aura le système linéaire-quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C(u) = x^T(t_f)Qx(t_f) + \int_0^{t_f} (x^T(t)W(t)x(t) + u^T(t)U(t)u(t))dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_f, \\ t \in I = [0, t_f]. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{fonction coût quadratique,} \\ \text{système dynamique,} \\ \text{condition initiale,} \\ \text{condition finale,} \\ \text{intervalle du temps.} \end{array}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point initial fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires partant de x_0 et qui minimisent le coût $C(u)$.

On n'impose aucune contrainte sur le point final $x(t_f)$. Maintenant, on pose :

$$\|x(t)\|_W^2 = x^T(t)W(t)x(t), \|u(t)\|_U^2 = u^T(t)U(t)u(t) \text{ et } g(x) = x^T Q x$$

On aura :

$$C(u) = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt,$$

Avec Q, W, U sont des matrices de pondération.

Remarque 6. 1. Par hypothèse les matrices Q et W sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.

2. Pour alléger les notations, on suppose que le temps initial est égale à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[t_0, t_f]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$.

3.1.2 Existence de trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse suivante sur U :

Proposition 3.1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m)$:

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^{t_f} u(t)^T u(t) dt. \quad (3.3)$$

Cette hypothèse est vérifiée si l'application $t \mapsto U(t)$ est continue sur $[0, t_f]$ et $t_f < +\infty$, où encore s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, t_f]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on ait $v^T U v \geq c v^T v$. On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.1.1. Sous l'hypothèse (3.3), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.

Lemme 2. *La fonction C est strictement convexe.*

Preuve.

Tout d'abord nous remarquons que pour tout $t \in [0, t_f]$, la fonction $u^T U(t) u$ définie sur \mathbb{R}^m , est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive.

Ensuite, notons $x_u(\cdot)$ la trajectoire associée à un contrôle u . On a pour tout $t \in [0, t_f]$:

$$x_u(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

L'application qui à une commande u associe $x_u(t)$ est convexe, ceci pour tout $t \in [0, T]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle u associe $x(t)^T W(t) x(t)$. On raisonne de même pour le terme $x^T(T) Q x(T)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u .

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement.

Remarque 7. *(Extension du théorème (3.1.1))*

Si la fonction $g = x(T)^T Q x(T)$, apparaissant dans le coût est une fonction continue quelconque de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , bornée inférieurement où convexe, et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

3.1.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du Maximum dans le cas LQ

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

Le problème est de minimiser le coût quadratique de la forme :

$$C(u) = x^T(t_f) Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (x^T(t) W(t) x(t) + u^T(t) U(t) u(t)) dt,$$

Où t_f est fixé. Maintenant introduisons l'hamiltonien :

$$H(t, x, u, p) = -\frac{1}{2} (x^T(t) W(t) x(t) + u^T(t) U(t) u(t)) + p^T (Ax(t) + Bu(t)).$$

Théorème 3.1.2. *La trajectoire x , associée au contrôle u , est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, t_f]$:*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t)A(t) + x^T(t)W(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

et la condition finale :

$$p(t_f) = -\frac{\partial g(t_f)}{\partial x(t_f)} = -x^T(t_f)Q \quad (3.7)$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$u(t) = U^{-1}(t)B^T(t)p^T(t) \quad (3.8)$$

Remarque 8. Dans le cas d'un intervalle infini ($t_f = +\infty$) la condition finale sur le vecteur adjoint devient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$$

Remarque 9. le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée.

3.2 Exemples :

On considère le problème d'un véhicule se déplaçant en ligne droite modélisé par le système de commande suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

On souhaite pendant un temps T fixé, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit donc le critère suivant :

$$C(u) = -x(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt$$

3.2.1 Application du Principe du Maximum

Soient $x = x_1$: La position du véhicule.

$\dot{x} = x_2$: La vitesse du véhicule.

En faisant un changement de variables on aura le système suivant qui est équivalent au système précédent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Introduisons l'Hamiltonien pour le nouveau système, qui est le suivant :

$$H(x, p, u, t) = p^0 f^0 + \langle p, f \rangle$$

$$= -u^2 + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

On obtient les équations suivantes :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \text{ donc } p_1(t) = \text{cste} = c_1$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, \text{ donc } p_2(t) = -c_1 t + c_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{ donc } -2u + p_2(t) = 0 \text{ donc } u(t) = \frac{1}{2} p_2(t)$$

On trouve les conditions de transversalité suivantes :

$$p_1(T) = 2x_1, \quad p_2(T) = 0$$

En intégrant on trouve la commande :

$$u(t) = x(T)(T - t)$$

et la distance parcourue égale à : $x(T) = \frac{T^3}{3T^3 - 6}$

Exemple 7. On considère le problème linéaire sans contraintes sur le contrôle :

$$\begin{cases} \min_u J(T, u) = -x(1) - y(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt, \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 1, y(0) = 3, \\ u(t) \in \mathcal{U}, t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système (3.9) est de type $\dot{X} = AX + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- étude de la contrôlabilité du système (3.9)

On a la matrice de Kalman est $K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Et le rang de la matrice de Kalman est $\text{rang} K = 2$ D'où la contrôlabilité du système (3.9)

- La hamiltonien associé au système (3.9) est :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p^0 \frac{u^2(t)}{2}$$

Où $p^0 \leq 0$ et $p = (p_x, p_y)$ est le vecteur adjoint. Les composantes p_x et p_y sont les solutions du

système :

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial y} = -p_x, \end{cases} \quad (3.10)$$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} p_x = C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\ p_y = -C_1 t + C_2, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.11)$$

Posons $p^0 = -1$, alors le Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u - \frac{u^2(t)}{2}$$

• Les conditions de transversalité sont :

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

Alors $C_1 = 1$, et $C_2 = 3$. Ainsi

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = -1 + 3, \end{cases} \quad (3.13)$$

La condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p_x, p_y, t) = 0$$

D'où

$$p_y(t) - u(t) = 0 \Rightarrow p_y(t) = u(t)$$

Donc le contrôle optimale est

$$u^*(t) = -t + 3$$

il reste à déterminer la trajectoires $x^*(t)$ associées au contrôle $u^*(t)$. On a

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \Rightarrow y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3$$

et

$$\dot{x}(t) = y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3 \Rightarrow x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$$

En utilisant les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 3$, on obtient

$$C_3 = 3, C_4 = -\frac{10}{3}$$

Donc la solution du problème de contrôle (3.9) est

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 3 \\ x^*(t) = -\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + 3t - \frac{10}{3} \\ y^*(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + 3 \end{cases} \quad (3.14)$$

Exemple 8. On considère le système de contrôle linéaire avec contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + u, \\ |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Le but est de joindre en temps minimal la droite $x = 0$, puis de rester sur cette droite. On remarque que si une trajectoire reste dans $x = 0$, cela implique que

$$y(t) = -u(t) \text{ et donc } |y| \leq 1$$

Réciproquement de tout point $(0, y)$ avec $|y| \leq 1$ part une trajectoire restant dans le lieu

$$x = 0, |y| \leq 1$$

il suffit de choisir

$$u(t) = -ye^{-2t}$$

Par conséquent la cible est

$$M_1 = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}$$

C'est un compact Le système (3.15) peut s'écrire sous la forme matricielle $\dot{X} = AX + Bu$ Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Étude de la contrôlabilité du système (3.15)

Le système est linéaire et les deux matrices A et B sont indépendantes de la variable du temps t donc le système linéaire (3.15) est autonome la matrice de Kalman est

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice de Kalman est :

$$\text{rang}K = \text{rang}[B, AB] = 2 = n$$

Par ailleurs propres de la matrice A sont 0 et -1 Donc le système linéaire (3.15) est contrôlable

- Calcul du contrôle optimal :

En calculant les trajectoires optimales joignant M_1 à tous point final. Les système extrémal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - u, \\ \dot{y} = y - u, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = p_x - p_y \end{cases} \quad (3.16)$$

Où $u(t) = -\text{signe}(p_x(t) + p_y(t))$ Par intégration, on obtient

$$\begin{cases} p_x(t) = cste = p_x \\ p_y(t) = p_x + (p_y(0) - p_x)e^{-t} \end{cases} \quad (3.17)$$

En particulier $p_x + p_y$ est strictement monotone et donc le contrôle admet au plus une commutation. Par ailleurs la condition de transversalité impose que si $x(0) = 0, |y(0)| < 1$. Alors

$$p_x(0) = \pm 1 \text{ et } p_y(0) = 0$$

Mais $p_x(t) + p_y(t) = \pm(1 - e^{-t})$ et une commute pas sur \mathbb{R}_+ Calculons maintenant les extrémales partant du point $(0, 1)$ La condition transversalité est :

$$p_x(0) = \cos \alpha, p_y(0) = -\sin \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < \pi$$

Par conséquent

$$u(t) = -\text{signe}(2 \cos \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)e^{-t})$$

et l'on a une commutation si et seulement si il existe $t \geq 0$ tel que

$$e^{-t} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

- Si $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} > 1$ donc l'équation ci-dessus n'a pas de solution. Donc $u(t) = +1$ sur \mathbb{R}_+
- Si $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, l'équation a une solution $t(\alpha) > 0$, et l'on voit que $t(\alpha)$ est strictement croissante de $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ dans $[0, +\infty[$. Alors, le contrôle vaut -1 sur $[0, t(\alpha)[$ et $+1$ ensuite
- Si $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \pi$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R}_+ et on trouve

$$u(t) = -1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

Exemple 9. Considérons le système dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + u(t) \\ |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Le système (3.18) est de type $\dot{X} = AX + Bu$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Étude de la contrôlabilité du système (3.18)

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le rang de la matrice K est : $\text{rang}K = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

Donc le système (3.18) est contrôlable

- Calcul du contrôle optimal du système (3.18)

On se pose le problème de relier en temps minimal le point origine $(0,0)$ à tout point $(a,0)$, où $a \in \mathbb{R}$, sans perte de généralité on peut supposer que $a > 0$

Application du Principe du Maximum

- Le Hamiltonien du système (3.18) s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_1 y + p_2(2y + u) + p^0$$

Par ailleurs le système adjoint s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial y} = -p_1 - 2p_2 \end{cases}$$

Notons que puisque le vecteur adjoint (p_1, p_2) doit être non trivial, $2p_2$ ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également $p_1 = p_2 = 0$).

D'autre part, la condition de maximisation nous donne

$$p_2 u = \max_{|v| \leq 1} p_2(v)$$

Comme p_2 ne s'annule aucune intervalle, on en déduit que, presque partout le contrôle extrémal est $u = \text{signe}(p_2)$.

On a

$$p_1 = \text{cste}, p_2(t) = -\frac{1}{2}p_1 + Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}$$

En particulier $p_2(t)$ est strictement monotone, donc le contrôle a au plus une commutation.

En posant $u = \varepsilon = \pm 1$, puis en intégrant, il vient :

$$x(t) = -\frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}(y(t_0) + \frac{\varepsilon}{2})(e^{2(t-t_0)} - 1) + x(t_0)$$

$$y(t) = -\frac{\varepsilon}{2} + (y(t_0) + \frac{\varepsilon}{2})e^{2(t-t_0)}$$

Exemple 10 (Contrôle optimale d'un ressort non linéaires). Ce système est modélisé par le système de contrôle non linéaire avec constraints sur le contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x} = y(t) \\ \dot{y} = -x(t) - 2x^3 + u(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

où on a comme contrôles toutes fonctions $u(t)$ continues par morceaux telles que $|u(t)| \leq 1$ L'objectif est d'amener le ressort d'une position initiale quelconque $(x_0, y_0 = \dot{x}_0)$ à sa position d'équilibre

$(0,0)$ en temps minimal t^*

Application du Principe du Maximum

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_x y + p_y(-x - 2x^3 + u) + p^0$$

et si (x, p, u) est extrémal alors on doit avoir :

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y(1 + 6x^2) \text{ et } \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{p}_x$$

Notons que puisque le vecteur adjoint (p_x, p_y) doit être non trivial, p_y ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également $p_x = -\dot{p}_y = 0$). Par ailleurs la condition de maximisation nous donne

$$p_y u = \max_{|v| \leq 1} p_y v$$

Comme p_y ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout,

$$u(t) = \text{signe } p_y(t)$$

En particulier les contrôles optimaux sont successivement égaux à ± 1 , le vecteur adjoint au temps final t^* tant défini à scalaire multiplicatif près, on peut affirmer.

$u(t) = \text{signe } p_y(t)$ où p_y est la solution de :

$$\begin{cases} \ddot{p}_y(t) + p_y(t)(1 + 6x^2(t)) = 0, \\ p_y(t^*) = \cos \alpha, \dot{p}_y(t^*) = -\sin \alpha \end{cases}$$

le paramètre $\alpha \in [0, 2\pi[$ étant indéterminé. En inversant le temps ($t \rightarrow -t$), il est clair que notre problème est équivalent au problème du temps minimal pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2x^3(t) - \text{signe}(p_y(t)) \\ \dot{p}_x(t) = p_x(t) \\ \dot{p}_y(t) = -p_y(t)(1 + 6x^2) \end{cases}$$

Avec $x(0) = y(0) = 0, x(t^*) = x_0, y(t^*) = y_0, p_x(0) = \sin \alpha, p_y(0) = \cos \alpha$ où $\alpha \in [0, 2\pi[$ est à déterminer.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté les théorèmes et les définitions de contrôlabilité (commandabilité) et du contrôle optimale du système dynamique (physique, chimie, biologie astronomie, informatique, médecine, ...etc.

D'abord, nous avons étudié le problème de contrôlabilité des ces systèmes, nous avons utilisé par exemple le critère de Kalman qui joue un rôle fondamentale dans cette théorie. Ensuite nous avons étudié le problème de contrôle optimale en utilisant le *PMP* particulièrement donne le cas *LQ*. Nous terminent notre travail par des exemples illustratifs.

Bibliographie

- [1] M. Bergounioux, Optimisation et controle des systèmes linéaires. Dunod collection Sciences sup, 2001.
- [2] K.Khaldi, controle optimal des systèmes dynamiques, Université Dahlab-Blida 1, 2019-2020.
- [3] J.Legrand, Introduction à la théorie du contrôle, Étude du pendule inversé, ENS Rennes, 2017
- [4] C.Lobry, T.Sari Hassane Alla , Introduction à la théorie du contrôle, Université de Grenoble Tlemcen du 26 avril au 8 mai 2003.
- [5] B. J. Macki, A. Strauss, Introduction to optimal control theory. Springer, 1982.
- [6] A. Maldi. Cours de la théorie d'optimisation et de la théorie de la commande optimale, Département d'automatique, UMMTO, 2005.
- [7] M. Touahria, Stabilisation robuste des systèmes controlés, mémoire magister, université de sétif, 2012.
- [8] E.tréla, contrôle optimale : Théorie et Application, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2005.
- [9] E.tréla, contrôle optimale, Univercité d'Orléans, 2007.

الغرض من هذا العمل هو دراسة مشكلة تخص نظرية التحكم اين ناثر على النظام بواسطة دالة تحكم . الهدف هو نقل النظام من حالة ابتدائية معينة الى حالة نهائية بحترام معايير معينة .

الكلمات المفتاحية

نظرية التحكم ، مبدأ الحد الاقصى ، التحكم الامثل.

Résumé :

Le but de ce travail est étudier un problème de la théorie du contrôle sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (où contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Mots clés : Théorie de contrôle , Principe de Maximum , Contrôle optimale

Abstract :

The subject of this work is to study the problem of control theory on which can act pay means of commande function. The goal is then to bring the system from a given initial state to a certain final state, possibly respecting certain criteria. **Keys Words :** Control theory , Maximum Principal , Optimal control.