

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option:EDP et Applications

Par

ZOURIG AMAL

THÈME

EDPs et restauration d'image:
étude mathématique

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

Prof. Nourdine Benhamidouche

Année: 2015/2016

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Prof. Nourdine Benhamidouche directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

u_0 :L'image original bruitée.

$G_\sigma(x, y)$:Un noyau gaussien d'écart type σ .

u_σ :L'image lissée avec un noyau gaussien d'écart type σ .

$u_{\eta\eta}$:Représent la dérivée second directionnelle de u dans la direction η orthogonale au gradient ∇u .

$u_{\xi\xi}$:Représent la dérivée second directionnelle de u dans la direction du gradient.

$E(u)$:L'énergie.

Table des figures

Figure(1.1.1) :Exemple d'image.

Figure(1.5.1) :Restauration d'image par diffusion isotrope.

Figure(2.2.1) : Evolution sous la courbure moyenne .

Figure(2.2.2) :Lissage sélectif et détection des contours par diffusion non linéaire.

Figure(2.3.1) :Le resultat de filtre de choc.

Figure(3.2.1) :Restauration d'image bruitée:par la fonction de régularisation.

Figure(3.2.2) :Restauration d'image bruitée.

Table des matières

Introduction	2
1 EDP et diffusion isotrope	3
1.1 Définition de l'image	3
1.1.1 Les Types de l'image	3
1.2 Equation aux dérivées partielles	4
1.2.1 Résolution d'une EDP	4
1.3 Utilisation des EDPs de diffusion en traitement d'images	5
1.4 Restauration d'images	6
1.5 EDP et diffusion isotrope	6
2 Diffusion anisotrope et restauration d'images	13
2.1 Modèle de Perona et Malik	13
2.2 Filtres basés sur la courbure et ensembles de niveaux	16
2.2.1 EMSS(Euclidean Morphological Scale Space) et Equation de diffusion géométrique	17
2.2.2 Modèle de Alvarez et al- lissage de direction des contours par diffusion non linéaire	21
2.3 EDP et filtres de choc	22
3 Formulation variationnelle	26
3.1 Modèle de diffusion anisotrope biaisée de Nordstrom	28
3.2 Une approche variationnelle unificatrice	29

Conclusion générale	36
Bibliographie	38

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) ont prit une grande importance dans le domaine du traitement des images, ces équations nées du principe physique de la diffusion .

En particulier, les domaines d'application liés à la restauration des images, quant à elle, cherche à corriger les distorsions introduites lors des étapes précédentes de l'acquisition ou de la transmission. Un modèle de formation de l'image observée incluant le bruit est généralement supposé et des critères à minimiser sont établis afin de retrouver au mieux l'image originale.

Les premières idées est d'établir une analogie entre la restauration et le phénomène physique, qui est la diffusion de la chaleur. Koenderink[10] a remarqué l'équivalence entre la diffusion de la chaleur à un temps t et la convolution avec un noyau Gaussien d'écart type $\sqrt{2t}$. Cette diffusion rend l'image de plus en plus floue, des idées de diffusion anisotrope ont été proposées par Perona et Malik[14], en 1992 Alvez,Lions et Morel[2] ont développé la méthode de Perona et Malik, ils ont proposé une classe d'équations paraboliques de diffusion fondées sur la notion de courbure moyenne.

En partant de l'équation de Rudin, Osher et Fatemi [16] ont proposé un modèle de lissage fondé sur une minimisation d'énergie.

Parmi les travaux les plus intéressants dans l'utilisation des EDPs , on cite essentiellement les travaux de **Deriche.R, Faugeras.O** [6] , qui constituent la base de notre mémoire.

On s'intéresse dans notre mémoire à l'étude de la restauration d'image par les EDPs. On essaye d'expliquer les différents principes de restauration et les différentes méthodes appliquées.

Cette mémoire est scindée en trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous introduisons la définition de l'image, des EDPs, en particulier celle de diffusion et leurs utilisation, la définition de restauration d'images puis nous expliquons le principe de la diffusion isotrope. Nous donnons également la notion d'existence et de l'unicité de la solution du problème de la diffusion linéaire.

Dans le second chapitre, nous exposons les différents type de restauration que nous avons choisi, qui sont la diffusion anisotrope développée depuis le modèle de Perona-Malik, les filtres basés sur la courbure et ensembles de niveaux (les équations de diffusion géométrique), le Modèle de Alvarez et al (lissage de direction des contours par diffusion non linéaire). Nous présentons à la fin la théorie des filtres de choc.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les liaisons entre les équations aux dérivées partielles et la minimisation d'une énergie. C'est à dire on développe la notion de la formulation variationnelle introduite dans la restauration d'image.

Chapitre 1

EDP et diffusion isotrope

Dans ce chapitre, nous commençons par la définition de l'image et une introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP). Nous présentons par la suite les EDPs en traitement d'images. Puis nous présentons le principe de la diffusion isotrope.

1.1 Définition de l'image

L'image est définie comme étant une fonction $f(x, y)$ à deux dimensions, où x et y sont les coordonnées spatiales, et f l'amplitude à tous points (x, y) correspondant à l'intensité ou au niveau de gris.

1.1.1 Les Types de l'image

1/ Les images en niveaux de gris: En général, les images en niveaux de gris renferment 256 teintes de gris.

Par convention la valeur zéro représente le noir (intensité lumineuse nulle) et la valeur 255 le blanc (intensité lumineuse maximale).

2/ Les images binaires (noir ou blanc)

Exemple: images les plus simples, prendre uniquement les valeurs noir ou blanc.

3/ Les images couleurs

L'espace couleur Rouge, Vert, Bleu (R,V,B), c'est à dire que le mélange des trois composantes (R,V,B).

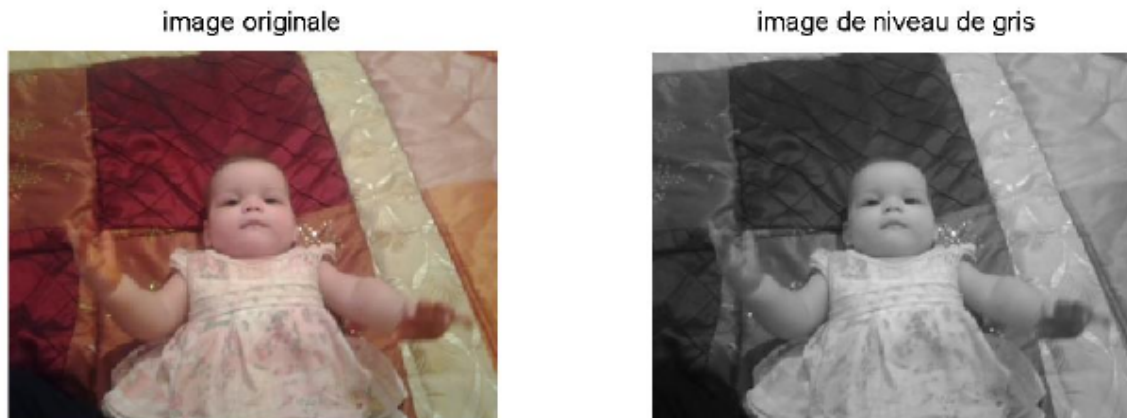


Figure 1.1.1 : Exemple d'image

1.2 Equation aux dérivées partielles

En mathématique, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation mathématique contenant plusieurs variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et une plusieurs dérivées partielles

Définition (Equation aux dérivées partielles)

Une (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x_1, x_2, \dots, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_2}, u_{x_2 x_2}, \dots) = 0$$

Il ya deux types importants d'EDPs : les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

1.2.1 Résolution d'une EDP

On à plusieurs techniques pour résolution d'une EDP:

-Séparation de variables: cette technique consiste à réduire une EDP à n variables à n EDO.

-Changement de coordonnées: L'EDP originale est simplifiée en changeant les coordonnées du problème.

-Méthode numérique: ces méthodes changent une EDP en un système d'équations aux différences qui peuvent être résolues sur le plan informatique par des techniques itératives.

-Méthodes variationnelles: reformule l'équation comme un problème de minimisation. Le minimum de l'équation est alors solution de l'EDP. La résolution d'EDP en traitement d'images s'effectue généralement par des méthodes numériques ou variationnelles.

1.3 Utilisation des EDPs de diffusion en traitement d'images

Ces équations sont nées du principe physique de la diffusion qui est basé sur elle qui s'établit dans une matière fluide à savoir que l'équation de diffusion est similaire à celle des concentrations locales d'un fluide qui s'équilibrent et dont la propriété est exprimée par la loi de fick exprimée par l'expression suivante:

$$j = -D \cdot \nabla u \quad (1.3.1)$$

avec j le flux, ∇u le gradient de u et D le tenseur de diffusion lorsque $D = g$ est un scalaire appelé la diffusivité, il s'agit de diffusion isotropique

Dans ce cas, j et ∇u sont parallèles. Sinon, il s'agit de diffusion anisotropique

L'équation de continuité décrivant la conservation de la masse est la suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} j \quad (1.3.2)$$

avec t le temps

À partir des équations (1.3.1) et (1.3.2) nous déduisons l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (D \nabla u) \quad (1.3.3)$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta (u)$$

elle s'appelle l'équation de la chaleur .Dans le traitement d'image,nous pouvons identifier la concentration par la valeur de gris à un certain endroit.Si le tenseur de diffusion D est constant dans un domaine entier d'image ,on parle de la diffusion homogène et dépendent de l'espace s'appelle non linéaire.Souvent le tenseur de diffusion est une fonction de la structure différentielle de l'image en évolution elle-même. La diffusion qui ne dépend pas à l'image en évolution s'appelle linéaire.

1.4 Restauration d'images

La restauration essaie de reconstruire ou de retrouver une image qui a été dégradée en utilisant une connaissance a priori sur le processus de dégradation. Il s'agit donc dans un premier temps de modéliser le processus de dégradation et d'appliquer l'inverse pour retrouver l'image originale.

1.5 EDP et diffusion isotrope

Une approche classique développée dans le domaine de la restauration des images utilise une opération de convolution linéaire (lissage) afin réduire l'effet du bruit,considéré comme étant un signal haute fréquence

$$u(x, y, t) = \int_{\Omega} G(x - \xi, y - \eta, t) u_0(\xi, \eta) d\Omega \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.5.1)$$

où on note par $u_0(x, y)$ une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie sur le rectangle $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.les valeurs de la fonction u_0 représentent par exemple les intensités en niveau de gris de l'image originale bruitée, $u(x, y, t)$ représente l'image restaurée, et t un paramètre qui contrôle l'importance du lissage de l'opérateur $G(x, y, t)$.

Un exemple d'opération souvent utilisé pour ses performances, ses propriétés de séparabilité et d'isotropie est l'opérateur Gaussien G donné par :

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4t}}$$

Koenderink[10] a remarqué le premier qu'une opération de convolution d'une image par un opérateur Gaussien d'une certaine variance (ici $\sigma^2 = 2t$) peut être réécrite sous la forme d'un processus de diffusion de l'intensité image autour des pixels voisins durant un temps t en relation directe avec la variance spatiale σ^2 . Cette équation de diffusion, connue sous le nom d'équation de la chaleur, peut se mettre sous la forme de EDP parabolique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.5.2)$$

la résolution de l'équation de la chaleur

Considérons l'équation de diffusion linéaire (équation de la chaleur) en deux dimensions en coordonnées cartésiennes:

$$u_t = c^2 \Delta u \implies \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.5.3)$$

Considérons les relations intégrales suivantes qui définissent la transformée de Fourier en D-2 en coordonnées cartésiennes. Nous allons appeler la fonction \hat{u} le transformée de Fourier de notre fonction d'origine u :

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi_1, \xi_2, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) e^{-i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ u(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

il existe autres conventions pour la transformée de Fourier. Par exemple, nous pourrions choisir:

$$\hat{u}(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \quad (1.5.4)$$

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2$$

Passons maintenant à la résolution de l'équation (1.5.3) avec la condition initiale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, en utilisant la transformée de Fourier définie par (1.5.4)

Nous avons:

La transformée de Fourier de la dérivée de u par rapport à t est :

$$\begin{aligned}\widehat{u}_t(\xi_1, \xi_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_t(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, t)].\end{aligned}$$

et la transformée de Fourier de la deuxième dérivée par rapport x est :

$$\widehat{u}_{xx}(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx \right] dy$$

L'intégration par partie nous donne:

$$\widehat{u}_{xx}(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[u_x(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi_1 \int_{\mathbb{R}} u_x(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx \right] dy$$

Le terme $u_x(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)}$ se compose d'une fonction f oscillante avec le temps t . Mais si la fonction f est bornée alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, (comme n'importe quel signal physique doit être et même dans notre cas u = l'image = signal bidimensionnel).

Alors, nous obtenons:

$$\widehat{u}_{xx}(\xi_1, \xi_2, t) = i\xi_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_x(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy$$

Intégrons par partie une autre fois, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{xx}(\xi_1, \xi_2, t) &= (i\xi_1)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) u_x(x, y, t) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &= (i\xi_1)^2 \widehat{u}(x, y, t)\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons la transformée de Fourier de la deuxième dérivée par rapport y :

$$\widehat{u}_{yy}(\xi_1, \xi_2, t) = (i\xi_2)^2 \widehat{u}(x, y, t)$$

Maintenant nous remplaçons dans l'équation (1.5.3) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, t)] + c^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \widehat{u}(\xi_1, \xi_2, t) = 0$$

Finalement nous avons obtenu une équation différentielle de 1^{er} ordre en t . La solution générale de cette équation est:

$$\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, t) = A(\xi_1, \xi_2) e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t}$$

où $A(\xi_1, \xi_2)$ est un constant qui dépend de ξ_1 et ξ_2 , mise en $t = 0$ et en utilisant la transformée de Fourier de la condition initiale, nous obtenons:

$$\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, 0) = A(\xi_1, \xi_2) = \widehat{u}_0(\xi_1, \xi_2)$$

par conséquent ,

$$\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, t) = \widehat{u}_0(\xi_1, \xi_2) e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t}$$

Nous observons que \widehat{u} est le produit de deux transformées de Fourier, l'un étant $\widehat{u}_0(\xi_1, \xi_2)$ et l'autre $e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t}$. Rappelons que les produits de transformée de Fourier correspondent aux convolutions, nous voyons que u est le produit de convolution de $u_0(\xi_1, \xi_2)$ avec la fonction dont la transformée de Fourier est $e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t}$.

Nous avons:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t} \right) (x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-c^2 \xi_1^2 t} e^{i \xi_1 x_1} d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-c^2 \xi_2^2 t} e^{i \xi_2 x_2} d\xi_2 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(c\sqrt{t}\xi_1 + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_1 \right)^2} d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(c\sqrt{t}\xi_2 + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_2 \right)^2} d\xi_2 \right) \end{aligned}$$

On fait un changement de variable simple $z_i = \left(c\sqrt{t}\xi_i + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_i \right)$, nous obtenons:

$$\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 t} \right) (x_1, x_2) = \left(\frac{e^{-\frac{x_1^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t}\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_1^2} dz \right) \left(\frac{e^{-\frac{x_2^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t}\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_2^2} dz \right)$$

Et d'après l'intégrale de Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

alors nous obtenons:

$$\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)t} \right) (x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t\pi}} \frac{e^{-\frac{x_2^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t\pi}} = \frac{e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{4ct}}}{4c^2t\pi}$$

Donc la fonction dont la transformée de Fourier est $e^{-c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)t}$ est: $G_t(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{4ct}}}{4c^2t\pi}$ dite le noyau de Gauss en D-2

alors La résolution de cette équation(1.5.3) mène à la convolution d'une gaussienne avec l'image initiale à restaurer

$$u(x, y, t) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x, y)$$

Ou $G_\sigma(x, y)$ est un noyau gaussien d'écart type σ

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}$$

Passons maintenant à la démonstration de l'unicité

Théorème L'unicité de la solution

Soient $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ alors il existe au plus une solution $u \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ du problème de valeurs initiale:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u(x, 0) = g & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Pour démontrer le théorème, nous utilisons le principe du maximum donné par le théorème suivant:

Théorème le principe du maximum pour l'équation de la chaleur

Supposons que $u \in \mathbb{C}_1^2(\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega}_T)$ une solution de (1.5.5) alors $\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$

Preuve: Supposons qu'il existe deux solutions u et v . Soit $w = u - v$, donc w est une solution de :

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0.T] \\ w(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nous notons $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0.T]$, $\Gamma_T = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ et $\bar{\Omega}_T = \Omega_T \cup \Gamma_T$

Par le principe du maximum :

$$\max_{\bar{\Omega}_T} w(x, t) = \max_{\Gamma_T} w(x, t) = 0$$

Par conséquent $w(x, t) \leq 0$ dans $\bar{\Omega}_T$, ce qui implique $u(x, t) \leq v(x, t)$ dans $\bar{\Omega}_T$.

Ensuite, soit $w' = v - u$. alors w' est aussi une solution de l'équation ci-dessus et nous avons par le principe du maximum:

$$\max_{\bar{\Omega}_T} w'(x, t) = \max_{\Gamma_T} w'(x, t) = 0$$

Par conséquent $w'(x, t) \leq 0$ dans $\bar{\Omega}_T$, ce qui implique $v(x, t) \leq u(x, t)$ dans $\bar{\Omega}_T$.

Finalement, nous obtenons:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq v(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \\ v(x, t) &\leq u(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \end{aligned}$$

Nous concluons que $u = v$ dans $\bar{\Omega}_T$.

Cette équation de diffusion (1.5.3) peut s'écrire avec un opérateur de divergence :

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = \operatorname{div}(\nabla(u(x, y, t))) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.5.6)$$

L'EDP parabolique linéaire(1.5.6) permet une diffusion isotrope .Cette diffusion s'opère ainsi de manière identique dans toutes les directions et ne possède aucune direction privilégiée. Pour des tâches de restauration d'image bruitées, ceci présente clairement des inconvénients .En effet , dans des régions d'intensité homogène, ce processus permettra de réduire effectivement l'effet du bruit mais dans des régions présentant des discontinuités au niveau de l'intensité en niveau de gris.celles-ci seront aussi lissées et le contraste visuel de ces parties sera sensiblement réduit,diminuant en conséquence l'intérêt qualitatif et visuel

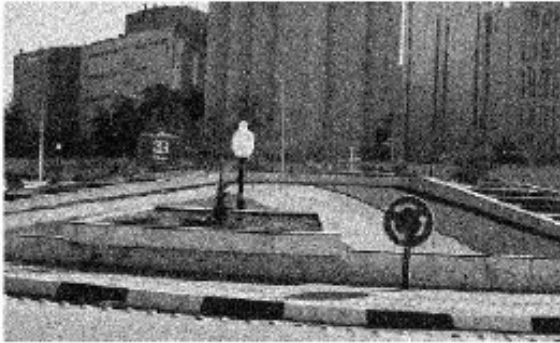


Figure 1.5.1 : Restauration d'image par diffusion isotrope

d'un tel processus .Pour traiter ce problème, des idées de diffusion anisotropique ont été proposées.

Chapitre 2

Diffusion anisotrope et restauration d'images

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux modifications introduites dans l'équation de diffusion de la chaleur pour combiner ses avantages (élimination efficace du bruit, simplification de l'image) avec des objectifs de la restauration d'images.

2.1 Modèle de Perona et Malik

La première idée pour résoudre les problèmes issus d'une diffusion isotrope a été proposée par Perona et Malik[14].

Elle consiste à effectuer une diffusion conditionnelle i.e. forte diffusion dans les zones à faible gradient et faible diffusion dans les zones à fort gradient, où des discontinuités potentiellement "intéressantes" peuvent se trouver. Ce mode de diffusion a été formalisé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div} (c(|\nabla u(x,y,t)|) \nabla u(x,y,t)) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où div et ∇ indiquent les opérateurs de divergence et de gradient par rapport aux variables spatiales respectivement et où la fonction $c(\cdot)$ est une fonction décroissante, dépendante de la norme de vecteur gradient:

$$c(x, y, t) = g(|\nabla u(x, y, t)|)$$

Les fonctions proposées initialement par Perona-Malike sont:

$$g(|\nabla u|) = e^{-(|\nabla u|/k)^2} \quad (2.1.2)$$

et

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2} \quad (2.1.3)$$

Le paramètre k est appelé "seuil ou barrière de diffusion"; comme nous allons voir, il joue un rôle important dans le comportement de la diffusion

En développant la divergence de (2.1.1), celle-ci devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = c(x, y, t) \Delta u(x, y, t) + \nabla c(x, y, t) \cdot \nabla u(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Si $c(x, y, t)$ est une constante, on trouve l'équation de diffusion isotrope (1.5.6)

Il a été prouvé toutefois que cette méthode possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présents de grosses discontinuités. Le second inconvénient est d'ordre théorique pour les fonctions $c(\cdot)$ précédentes car on peut montrer qu'il n'existe pas de solution à l'équation (2.1.1). En effet, pour obtenir en même temps l'existence et l'unicité d'une solution pour une telle EDP, il a été montré que la fonction $c(|\nabla u|)$ doit respecter la condition que $|\nabla u| c(|\nabla u|)$ soit non décroissante [2]. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut observer une solution instable se former, impliquant la génération de résultats qui peuvent être très différents si de petits changements affucent l'image originale. Plus précisément, on peut démontrer que cette méthode agit comme une équation de la chaleur inverse près de très fortes discontinuités ($|\nabla u| \succ k$ pour l'équation (2.1.3) et $|\nabla u| \succ k/\sqrt{2}$ pour l'équation (2.1.2)), ce qui rend le processus instable même si l'image initiale est assez lisse.

Une interprétation directionnelle de (2.1.1) qui permet de saisir plus facilement les différences avec la diffusion isotrope est obtenue en écrivant l'équation en terme de dérivées

secondes directionnelles dans la direction du gradient $\vec{\eta} = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|} \right)^T$ et dans la direction orthogonale $\vec{\xi} = \left(-\frac{u_y}{|\nabla u|}, \frac{u_x}{|\nabla u|} \right)^T$

Pour formuler l'équation de diffusion selon les directions par $\vec{\eta}$ et $\vec{\xi}$ posons $\nabla u = (u_x, u_y)$, le vecteur gradient de u et $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ sa norme

Dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) du système d'axe (x, y) de l'image nous avons les expressions précédentes (2.1.1) et (2.1.4), soit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c \nabla u) = \operatorname{div}(c [u_x, u_y]) = \frac{\partial}{\partial x}(c u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(c u_y)$$

Comme $c = g(|\nabla u|)$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u|) [u_{xx} + u_{yy}] + \left[\frac{\partial}{\partial x} g(|\nabla u|) \right] u_x + \left[\frac{\partial}{\partial y} g(|\nabla u|) \right] u_y$$

avec

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} g(|\nabla u|) \right] u_x = \frac{g'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} (u_{xx} u_x + u_{xy} u_y) u_x \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial}{\partial y} g(|\nabla u|) \right] u_y = \frac{g'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} (u_{yy} u_y + u_{xy} u_x) u_y$$

ce qui donne l'expression (2.1.5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|\nabla u|) [u_{xx} + u_{yy}] + \frac{g'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} (u_{xx} u_x + u_{xy} u_y) u_x \\ &\quad + \frac{g'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} (u_{yy} u_y + u_{xy} u_x) u_y \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Ainsi, dans le nouveau repère $(\vec{\eta}, \vec{\xi})$ du système d'axe (x, y) , la dérivée u_η première et la seconde $u_{\eta\eta}$ de u par rapport à $\vec{\eta}$ sont données par :

$$\begin{aligned} u_\eta &= \nabla u \cdot \vec{\eta} = |\nabla u| \quad \text{et} \quad u_{\eta\eta} = \nabla u_\eta \cdot \vec{\eta} = \frac{1}{|\nabla u|} \left[\frac{\partial}{\partial x} (|\nabla u|) u_x + \frac{\partial}{\partial y} (|\nabla u|) u_y \right] \\ &= \frac{(u_{xx} u_x + u_{xy} u_y) u_x + (u_{yy} u_y + u_{xy} u_x) u_y}{|\nabla u|^2} \\ &= \frac{u_{xx} u_x^2 + 2u_{xy} u_x u_y + u_{yy} u_y^2}{|\nabla u|^2} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Sachant que le laplacien est invariant par rotation, on peut écrire:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \quad (2.1.7)$$

En combinant les expressions (2.1.5) (2.1.6) (2.1.7), l'équation de diffusion s'écrit sous la forme de l'expression (2.1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} (g(|\nabla u|) \nabla u) = g(|\nabla u|) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + |\nabla u| g'(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \\ &= (g(|\nabla u|) + |\nabla u| g'(|\nabla u|)) u_{\eta\eta} + g(|\nabla u|) u_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

En introduisant les notations c_ξ et c_η , on peut réécrire (2.1.8) de la manière suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta} \\ c_\xi = g(|\nabla u|) \\ c_\eta = g(|\nabla u|) + |\nabla u| g'(|\nabla u|) = \phi'(|\nabla u|) \end{cases}$$

La fonction $\phi(s) = s.g(s)$ est appelée fonction flux, elle gère la diffusion selon la direction du gradient.

Le comportement de l'équation de diffusion est maintenant plus facile à interpréter:

–dans la direction orthogonale au gradient, la diffusion anisotrope induit un lissage modulé par la norme du vecteur gradient

–la diffusion anisotrope peut également rehausser les contours. Pour des valeurs du gradient $|\nabla u| > k$ (pour la fonction rationnelle) et $|\nabla u| > \frac{k}{\sqrt{2}}$ pour la fonction gaussienne, la fonction flux devient décroissante, sa dérivée est négative conduisant à un rehaussement dans la direction $\vec{\eta}$.

2.2 Filtres basés sur la courbure et ensembles de niveaux

Nous nous intéressons dans cette section au lissage des images par l'utilisation d'un terme de diffusion qui dépend de la courbure des lignes de niveau. La motivation principale de ce type de filtre est la construction d'un opérateur de diffusion non-linéaire agissant de manière préférentielle dans la direction parallèle aux objet significatifs.

Soit l'équation de diffusion isotrope de la chaleur (2.1.1) et son expression en terme de dérivées secondes directionnelles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \quad (2.2.1)$$

L'idée fondamentale de ces approches est de remplacer (2.2.1) par une EDP agissant dans la direction orthogonale au vecteur gradient:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi} = \Delta u - u_{\eta\eta} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2}{|\nabla u|^2} \\ \quad = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{|\nabla u|^2} \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

L'équation (2.2.2) a été introduite comme méthode de lissage sélectif par Alverz, Lions et Morel[2]; plusieurs chercheurs se sont penchés plus récemment sur son interprétation géométrique et ses liaisons avec la théorie de la déformation des courbes, notamment avec l'équation de diffusion géométrique euclidienne.

2.2.1 EMSS(Euclidean Morphological Scale Space) et Equation de diffusion géométrique

Alverz, Guichard, Lions et Morel formalisent les principes de à travers plusieurs axiomes. Ils montrent que la seule analyse continue qui respecte les principes de causalité et fidélité (axiome de comparaison locale et de structure pyramidale), invariante par isométrie (axiome d'invariance euclidienne) et qui commute avec toute redistribution croissante des niveaux de gris (axiome d'invariance morphologique) est obtenue à l'échelle t par l'EDP suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| F(k, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

où $k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ désigne la courbure des lignes de niveaux et $F(s, t)$ est une fonction non décroissante par rapport à s . Pour des applications pratiques, la condition initiale est parfois remplacée par une version lissée de l'image originale $u(x, y, 0) = G_\sigma * u_0(x, y)$ afin de garantir un cadre mathématique robuste en assurant la continuité et dérivabilité.

La forme sous laquelle cette équation intervient le plus souvent dans le traitement des images correspond au cas particulier:

$$F(s, t) = s.t$$

Dans ce cas (2.2.3) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= t |\nabla u| k = t |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ &= t |\nabla u| \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \right] \\ &= t |\nabla u| \frac{u_{xx} (u_x^2 + u_y^2) - u_x (u_x u_{xx} + u_y u_{xy}) + u_{yy} (u_x^2 + u_y^2) - u_y (u_x u_{xy} + u_y u_{yy})}{|\nabla u|^{3/2}} \\ &= t |\nabla u| \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{|\nabla u|^{3/2}} \\ &= t \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{|\nabla u|^2} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Si $t = 1$, nous retrouvons l'équation (2.2.2) .

Cependant l'équation est très proche de celle de la diffusion anisotrope, correspondant à un lissage unidirectionnel l'absence de paramètre de contraste assure l'invariance morphologique son interprétation directionnelle peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c_\xi u_{\xi\xi} \\ c_\xi = 1 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Le lissage agit seulement dans la direction orthogonale au contour avec une vitesse constante, l'absence du terme de pondération par la norme du vecteur gradient l'arrondissement des structures, l'apparition des structures fausses du fait des directions erronées des vecteurs gradients.

La même équation peut être obtenue par des moyens géométriques. Soit $c(x, y, t)$ une courbe plane fermée décrite par le vecteur de position \vec{c} , en adoptant, par convention, pour le vecteur unitaire normale $\vec{N} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, la déformation de c sous l'équation de diffusion

géométrique euclidienne correspond à une déformation de cette courbe en tout point dans la direction normale avec une vitesse proportionnelle à la courbure k :

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = k \vec{N} \quad (2.2.6)$$

avec la condition initiale $c(x, y, 0)$ cette équation devenue classique dans la cadre de la théorie des déformation des courbes à été minutieusement étudiée par plusieurs auteurs.

L'équation de diffusion géométrique peut être aussi étendue à l'évolution des isocontours d'image, pour tout point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et pour $t \geq 0$, un isocontour $c(x_0, y_0, t)$ de la fonction luminance u à l'instant t , est une courbe implicite composée de points $(x, y) \in \Omega$ qui vérifient

$$u(x, y, t) = u(x_0, y_0, t)$$

la courbe $c(x_0, y_0, t)$ peut être paramétrée par l'ensemble des points

$$c(x_0, y_0, t) = (X(p, t), Y(p, t)) \quad (2.2.7)$$

Ce qui conduit à une représentation de l'isocontour sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t) &= u(c(x_0, y_0, t), t) \\ &= u(X(p, t), Y(p, t)) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Une différentiation de (2.2.8) par rapport au temps t donne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot (k \vec{N}) = 0 \quad (2.2.9)$$

Entenant compte de l'expression de vecteur unitaire normale et de l'expression de la courbure des lignes de niveaux ;(2.2.9) peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

nous retrouvons donc (2.2.2) .Ces liaisons avec la théorie de déformation des courbes permettent de donner une interprétation géométrique à (2.2.2) : tous les isocontours de l'image se déforment dans leur direction orthogonale avec une vitesse proportionnelle à la

courbure moyenne (courbure dans l'espace 2D). L'équation est connue dans la littérature sous le nom de mouvement sous la courbure moyenne.

Nous nous intéressons ici à l'application directe de (2.2.2) pour les images.

L'utilisation de cette équation pour le lissage directionnel des images, ils montrent de manière théorique et pratique que chaque isocontour de l'image originale u_0 évolue de manière indépendante aux autres, en respectant les propriétés de l'équation de diffusion géométrique.

La figure (2.2.1) permet d'illustrer les résultats obtenus avec ce type de diffusion sur l'image standard de triangle. (la figure (2.2.1), a) est l'image originale, (la figure (2.2.1), b) est l'image bruitée unifor, (la figure (2.2.1), c), (la figure (2.2.1), d), représente la résultat de courbure moyenne.

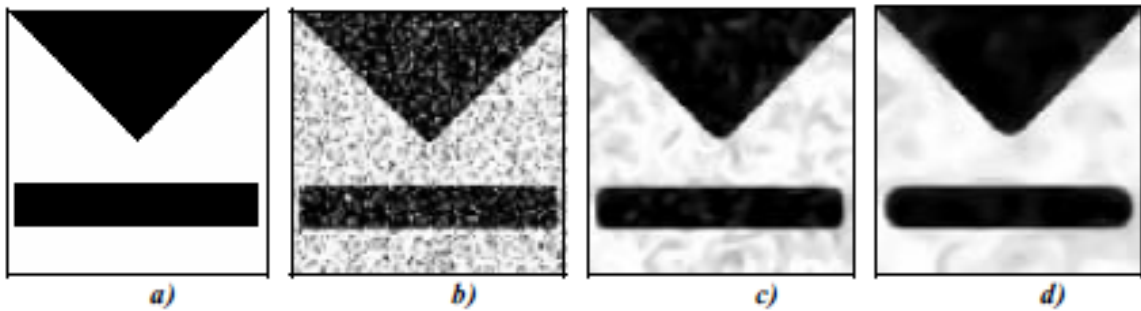


Figure 2.2.1 : Evolution sous la courbure moyenne

La méthode est capable d'éliminer le bruit de manière efficace ; les zones bruitées étant caractérisées par des fortes courbures, le lissage est fort.

L'utilisation de ce type d'EDP reste par contre limitée, particulièrement pour des temps de diffusion grands, dans ce cas les structures sont réduites à des courbes convexes, devenant de plus circulaires. La méthode peut conserver les coins, mais seulement pour des valeurs de t faibles. Le rehaussement est interdit par l'action de la diffusion, toujours parallèle aux contours.

2.2.2 Modèle de Alvarez et al- lissage de direction des contours par diffusion non linéaire

Le type d'EDP étudié par Alvarez, Lions et Morel[2] est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u_\sigma|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.2.10)$$

avec des conditions aux frontières de type Neuman , u_σ est l'image lissée avec un noyau Gaussien d'écart type σ .

(2.2.10) est une version modifiée de l'équation de mouvement sous la courbure moyenne; le terme supplémentaire $g(\cdot)$, similaire à la fonction qui contrôle la diffusion anisotrope, pénalise le processus de diffusion dans la direction orthogonale aux contours.

Les auteurs indiquent que ce terme est utilisé pour le "rehaussement" des contours :si la moyenne des normes des vecteurs gradients est petite dans le voisinage d'un pixel, la diffusion unidirectionnelle est fort , le point étant considéré comme appartenant à une zone homogène.

Par contre si la moyenne est grand le point appartient à un contour et la diffusion est abaissée. Notons que le sens du terme rehaussement n'est pas le même que celui utilisé pour la diffusion anisotrope; un contour est lissé d'un coté et de l'autre sans être pour autant modifié de manière forte, cela conduit à une augmentation apparente du contraste.

En [2] l'auteurs ajoutent à (2.2.10) un terme de diffusion conditionnelle:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(|\nabla u_\sigma|) \left[1 - h(|\nabla u|) \Delta u + h(|\nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] \quad (2.2.11)$$

La fonction floue $h(s)$ introduite en (2.2.11) est une fonction lisse non décroissante telle que $h(s) = 0$ pour $s \leq e$ et $h(s) = 1$ pour $s \geq 2e$. Le paramètre e n'est pas véritablement un paramètre supplémentaire,

mais dépend plutôt directement du paramètre de contraste qui intervient dans la fonction $g(\cdot)$.

L'équation permet aussi une interprétation directionnelle; en écrivant le laplacien et le terme de diffusion directionelle en fonction des dérivées secondes de la direction du gradient et dans la direction orthogonal:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(|\nabla u_\sigma|) [1 - h(|\nabla u|) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + h(|\nabla u|) u_{\xi\xi}] \quad (2.2.12)$$

En identifiant les coefficients:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta} \\ c_\xi = g(|\nabla u_\sigma|) \\ c_\eta = g(|\nabla u_\sigma|) [1 - h(|\nabla u|)] \end{cases} \quad (2.2.13)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont montrées à travers la théorie des solutions de viscosité [4].

En ce qui concerne la fonction $g(\cdot)$, les auteurs ne mentionnent pas de choix particulier. Cependant $g(\cdot)$ doit être une fonction décroissante dépendant d'un paramètre de contraste, choisi de manière à correspondre à la limite supérieure de l'intervalle de diffusion isotrope.

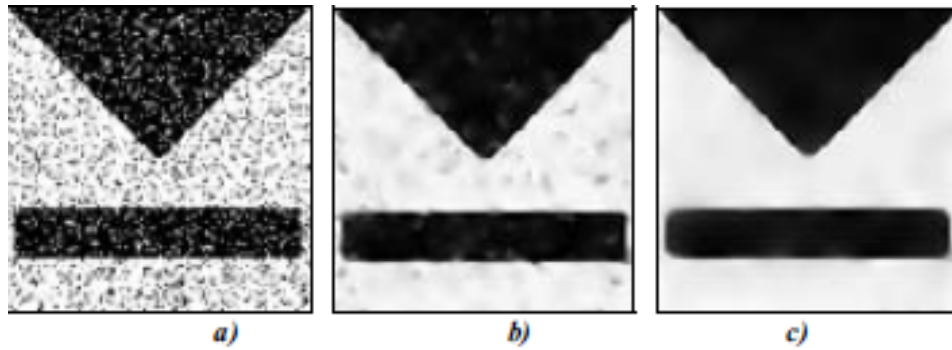


Figure 2.2.2 : Lissage sélectif et détection des contours par diffusion non linéaire

2.3 EDP et filtres de choc

Dans ce paragraphe, on présente d'autres approches développées dans le cadre du problème de la restauration d'images et qui font appel à un schéma aux EDP plus directement inspiré des travaux menés dans le domaine de la mécanique des fluides. La solution $u(x, y, t)$, qui a comme condition initiale l'image à restaurer $u_0(x, y)$, développe des discontinuités assimilées à des chocs.

L'utilisation de concepts et de techniques développés dans le cadre des solution d'EDP hyperbolique non-linéaires pour des problèmes de traitement des images a été proposée par L.Rudin[15], qui a été le premier à introduire dans ce domaine la notion de filtre de choc. Ces filtres sont des opérateurs dont l'application permet le développement dans le signal restauré de phénomènes analogues aux ondes de choc connues en mécanique des fluides.

Le premier modèle 1D que Rudin a considéré est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(u_{xx}(x, t)) |u_x(x, t)| = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

la fonction F joue le rôle d'un détecteur des contours ;elle doit respecter les conditions $F(0) = 0$ et $F(s) \cdot \text{signe}(s) \geq 0$. Du choix de F dépend la qualité du rehaussement obtenu. En prenant $F(u_{xx}(x, t)) = u_{xx}(x, t)$ l'interprétation du (2.3.1) est immédiate :dans le voisinage d'un point d'inflexion du signal (2.3.1) devient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -|u_x| u_{xx} \quad (2.3.2)$$

A une constante près , (2.3.2) représente l'équation de diffusion inverse de la chaleur dans le cas 1D (équation de diffusion avec le temps inversé). Par analogie avec la diffusion de la chaleur qui introduit du flou au fur et à mesure de son évolution, l'évolution inverse supprime le flou en rehaussant les contours.

L'équation classique des filtres de choc s'obtient en prenant $F(u_{xx}) = \text{signe}(u_{xx})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{signe}(u_{xx}) |u_x| \quad (2.3.3)$$

la généralisation pour les cas 2D, en termes des dérivées secondes directionnelles [12] est:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{signe}(u_{\eta\eta}) |\nabla u| \quad (2.3.4)$$

(2.3.4) introduit des discontinuités tout en gardant les points d'inflexion de l'image originale ($u_{\eta\eta} = 0$), le résultat est une image constante par morceaux séparés par des discontinuités aux points d'inflexions.

Une implantation discrète directe les équations (2.3.2) à (2.3.4), avec les techniques utilisées pour les équation paraboliques type diffusion, n'est pas envisageable dans la mesure où elle correspond à l'inversion de l'équation de la chaleur connue pour son instabilité.

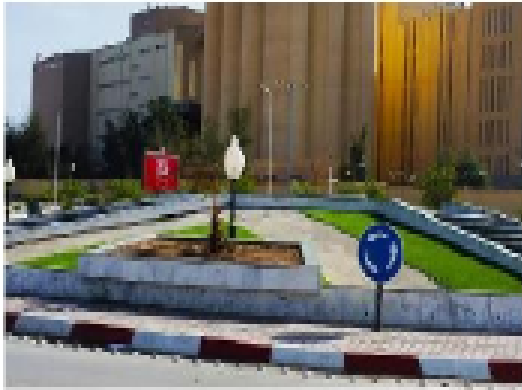
Les équations des filtres de choc, telle qu'elles ont été proposées par Osher et Rudin, sont efficaces pour l'élimination du flou, dans les cas des images bruitées, le bruit peut introduire une infinité de point d'inflexion, perturbant le processeur de rehaussement. La sensibilité au bruit limite l'utilisation de ces filtres de choc pour des applications pratiques, une des solutions consistant à utiliser une convolution de la dérivée second avec un moyen gaussien dans la direction du gradient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{signe}(G * u)_{\eta\eta} |\nabla u| \quad (2.3.5)$$

Cependant (2.3.5) pose également des problème : l'utilisation d'un noyau de dimension trop faible conduit à une élimination seulement partielle du bruit dans l'estimation de la dérivée seconde; une taille de noyau plus grande conduit à une élimination plus efficace de bruit mais conduit à introduire un flou important (par analogie avec la diffusion isotrope), qui déplace les positions des points d'inflexions, ceci se traduisant par la détection de faux contours.

Nous montrons ces effets sur l'image originale de niveau de gris (la figure ((2.3.1), a)), et ensuite image bruitée (la figure ((2.3.1), b)), l'image est rendue floue, en opérant une convolution avec un noyau gaussien (la figure ((2.3.1), c)), en (la figure ((2.3.1), d)) nous avons représenté, le résultat de filtre de choc.

image originale



a



b



c



d



Figure 2.3.1 : Le resultat de filtre de choc

Chapitre 3

Formulation variationnelle

Dans cette chapitre , nous présentons les liaisons entre les équation aux dérivées partielles et la minimisation d'une énergie. L'évolution d'une image selon une EDP donnée peut être interprétée comme la solution d'un problème variationnel.

Nous nous intéresserons, particulièrement, au modèle de Nordstrom et sa liaison avec l'équation de diffusion anisotrope. Nous terminerons par l'approche variationnelle unificatrice .

L'idée fondamentale de toutes ces méthodes est la construction d'une d'énergie \mathbf{E} à travers une fonction \mathbf{F} , imposée par le problème à traiter. Pour une image $2D$ définie sur $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ la forme générale de l'énergie est définie par :

$$E = \iint_{\Omega} F(U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y) dx dy \quad (3.0.1)$$

Classiquement, le problème consistant à trouver un extremum pour E peut se réduire à une équation différentielle. Si nous supposons que $U_0(x, y)$ est un extremum de U la fonction $U(x, y)$ peut s'écrire :

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \varepsilon \eta(x, y) \quad (3.0.2)$$

Où $\eta(x, y)$ est une fonction différentiable continûment dérivable.

La condition d'extremum est vérifiée pour $\varepsilon = 0$; les conditions aux limites sont $\eta(0, y) = \eta(a, y) = \eta(x, 0) = \eta(x, b) = 0$

En tenant compte que U est une fonction de x et y ; l'intégrale (3.0.1) est une fonction de ε :

$$E(\varepsilon) = \iint_{\Omega} F(U, \partial U/\partial x, \partial U/\partial y) dx dy \quad (3.0.3)$$

et son extremum est atteint pour $E'(\varepsilon) = 0$

$$E'(\varepsilon) = \iint_{\Omega} \frac{dF}{d\varepsilon} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial U} \eta + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.0.4)$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \eta \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.0.5)$$

et en tenant compte de la relation similaire pour y , (3.0.4) devient:

$$E'(\varepsilon) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \eta dx dy + \iint_{\Omega} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \eta \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \eta \right) \right] dx dy \quad (3.0.6)$$

Les conditions aux limites imposent l'annulation de la dernière intégrale

Pour que (3.0.6) soit valable quelque soit $\eta(x, y)$, on obtient l'équation différentielle de Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \quad (3.0.7)$$

(3.0.7) représente une condition nécessaire à respecter par la minimum de (3.0.1) .

Dans la plupart des applications une résolution directe de l'équation de Euler-Lagrange n'est pas possible, une solution numérique s'obtient en déterminant l'état stable de l'EDP

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} \quad (3.0.8)$$

La minimum des énergies construites correspondant à cet état stable, est déterminé par l'application de l'équation d'Euler-Lagrange suivant plusieurs modèles.

3.1 Modèle de diffusion anisotrope biaisée de Nordstrom

Nordstrom[11] propose de minimiser l'énergie :

$$E_{U_0}(U, w) = \iint_{\Omega} [\beta (U - U_0)^2 + w |\nabla U|^2 + \lambda^2 (w - \ln w)] dx dy \quad (3.1.1)$$

Tel que:

β et λ sont deux réels positifs, w définie sur $\Omega \rightarrow [0, 1]$, est une fonction représentant les contours .

$w \approx 0$, aux voisinages du contour

$w \approx 1$, à l'intérieure d'une région homogène .

Cette énergie est composée de trois termes .Le premier terme $\beta (U - U_0)^2$ pénalise la déviation de la solution U par rapport à U_0 , le tout pondéré par un coefficient β

Le deuxième terme $w |\nabla U|^2$ contrôle le lissage dans les régions homogènes. Le troisième terme $\lambda^2 (w - \ln w)$, pénalise les contours.

La fonction F à minimiser est donnée par:

$$F(U, U_x, U_y, w) = [\beta (U - U_0)^2 + w |\nabla U|^2 + \lambda^2 (w - \ln w)] \quad (3.1.2)$$

Le système d'équation d'Euler-Lagrange associée à U et w est :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \\ \frac{dF}{dw} = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} 2\beta (U - U_0) - 2 \frac{d}{dx} (w U_x) - 2 \frac{d}{dy} (w U_y) = 0 \\ |\nabla U|^2 + \lambda^2 (1 - \frac{1}{w}) = 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Cette relation conduit à:

$$\begin{cases} \beta (U - U_0) - \text{div} (w \nabla U) = 0 \\ |\nabla U|^2 + \lambda^2 (1 - \frac{1}{w}) = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Avec les conditions aux limites de type Neuman:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0$$

D'après (3.1.5) :

$$w = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla U|^2}{\lambda^2}} \quad (3.1.6)$$

ceci correspond bien à la fonction de diffusion de Perona et Malik. De plus la relation (3.1.6) présente une preuve théorique des fonctions de diffusions (2.1.2) et (2.1.3) données précédemment l'expression (3.1.5) peut être obtenue en recherchant l'état d'équilibre de l'équation suivant:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \beta (U - U_0) - \operatorname{div} (g |\nabla U| \nabla U) \quad (3.1.7)$$

L'expression (3.1.5) est de plus obtenue par la méthode de descente appliquée à la fonctionnelle ci-dessous :

$$F(U, U_0) = \int_{\Omega} \left(\beta (U - U_0)^2 + \lambda^2 \left(1 + \frac{|\nabla U|^2}{\lambda^2} \right) \right) d\Omega \quad (3.1.8)$$

L'expression (3.1.7) est une équation de diffusion de type Perona et Malik avec un terme additionnel ($\beta (U - U_0)$) appelé biais.

La principale motivation de Nordstrom dans l'introduction du biais est de s'affranchir du problème du temps d'arrêt posé par la modèle de Perona et Malik.

3.2 Une approche variationnelle unificatrice

Deriche et Faugeras proposent une approche variationnelle unificatrice .

Son principe consiste à unifier dans un même formalisme le modèle proposé par Perona et Malik ainsi que celui proposé par Alvarez et celui proposé par Rudin pour donner les conditions pour lesquels on peut construire des schémas stables et convergents, pour résoudre le problème de restauration tout en maintenant les discontinuités entre régions si U est la fonction de \mathbb{R}^2

dans \mathbb{R} définie sur domaine $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, on cherche à trouver l'image d'origine sans le bruit à partir de l'image bruitée v qui est modélisé par l'équation suivante:

$$v = PU + n \quad (3.2.1)$$

où P est un opérateur linéaire comme la convolution par exemple et n , un bruit généralement considéré comme gaussien de moyenne nulle.

Le problème de retrouver U à partir de v est alors formulé comme celui de retrouver U tel que l'ènergie $E(U)$ suivante: soit minimum par rapport à U

$$E(U) = \frac{1}{2} \|v - PU\|^2 + \lambda \iint_{\Omega} \Phi(|\nabla U|) d\Omega \quad (3.2.2)$$

où le premier terme de $E(U)$ est un terme d'attache aux données et le second terme lié à la contrainte de régularisation. On s'intéresse aux conditions qui doit remplir la fonction $\Phi(s)$ de la variable s qui représente la norme du gradient, afin que la minimisation de cette fonctionnelle puisse se faire avec un processus stable et convergent tout en préservant les discontinuités éventuellement présentes dans la solution $U(x, y)$.

Les conditions nécessaires sur les minima de l'énergie $E(U)$ sont données par l'équation d'Euler-Lagrange donnée par:

$$E(U(x, y)) = \iint_{\Omega} F(x, y, U, U_x, U_y) dx dy \quad (3.2.3)$$

l'extremum est donne par

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, U, U_x, U_y) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial U_x}(x, y, U, U_x, U_y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial U_y}(x, y, U, U_x, U_y) \right] \quad (3.2.4)$$

$$P^*(v - PU) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial U_x} \Phi(|\nabla U|) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial U_y} \Phi(|\nabla U|) \right) \right) = 0 \quad (3.2.5)$$

alors

$$P^*(v - PU) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_x}{|\nabla U|} \Phi'(|\nabla U|) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_y}{|\nabla U|} \Phi'(|\nabla U|) \right) \right) = 0 \quad (3.2.6)$$

Cette expression n'est autre que:

$$\begin{cases} P^* (v - PU) + \lambda \operatorname{div} \left(\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} \nabla U \right) = 0 & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} \nabla U \cdot \vec{n} = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Où P^* représente l'opérateur adjoint de P et n représente le vecteur unitaire normale à la frontière de Ω et λ un paramètre de régularisation

L'équation (3.2.7) peut être réécrite en fonction des dérivées directionnelles $U_{\eta\eta}$ et $U_{\xi\xi}$, ce qui permet d'aboutir à l'expression suivante:

$$P^* (v - PU) + \lambda \left[\Phi''(|\nabla U|) U_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} U_{\eta\eta} \right] \quad (3.2.8)$$

Les deux coefficients de pondérations, $\Phi''(|\nabla U|)$ et $\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}$ de l'expression (3.2.8) permettent de régler l'anisotropie du processus de diffusion

Dans le cas où la fonction $\Phi(|\nabla U|)$ est choisi de manière à avoir les deux coefficients de pondérations égaux, le processus de diffusion se réduit à une diffusion isotrope de l'équation de la chaleur suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} \quad (3.2.9)$$

Dans le cas où la fonction $\Phi(|\nabla U|)$ est choisi de manière à avoir les deux coefficients de pondérations positifs ou nuls, le processus de diffusion se réduit à un lissage anisotrope dans les deux directions tangente et orthogonale au gradient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi''(|\nabla U|) U_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} U_{\eta\eta} \quad (3.2.10)$$

Mais dans le cas où les coefficients sont négatifs, le processus devient celui de l'équation inverse de la chaleur, instable, rehaussant les structures floues. L'équation d'évolution (3.2.10) est assimilée à un processus de descente de gradient sur la surface d'énergie représentée par l'expression (3.2.3). La forme de l'énergie $E(U)$ influence les conditions de stabilité et de convergence de l'expression (3.2.10), c'est-à-dire, si $E(U)$ est convexe, le processus de minimisation est stable et converge vers le minimum globale quelles que soient les conditions initiales.

Dans le cas $E(U)$ possède plusieurs minimax locaux, les conditions initiales doivent être proche du minimum global, sinon les solutions seront très différentes pour des conditions initiales différentes pour assurer la convexité de $E(U)$, il faut que la fonction $\Phi(|\nabla U|)$ soit convexe avec :

$$1 : \Phi''(|\nabla U|) \geq 0 \quad (3.2.11)$$

$$2 : \Phi'(|\nabla U|) \geq 0 \quad (3.2.12)$$

La première condition correspond au cas où la fonction $|\nabla U| \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}$ est strictement croissante. Cette condition dans la cas $\left(\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}\right)$ vérifie la fonction de diffusion $g_1(|\nabla U|)$ donnée par Perona et Malik afin le processus soit stable autrement dit $|\nabla U| g_1(|\nabla U|)$ doit être strictement croissante. La première condition est nécessaire .Il faut ajouter à cela,la deuxième condition pour avoir une condition suffisante de stabilité.

le choix de $\Phi(|\nabla U|)$ doit permettre un lissage le long des contours sans altérer les discontinuités. Cela correspond à ce que $\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}$ ne doit pas s'annuler. Ce choix est fait par Rudin en proposant la fonction $\Phi(|\nabla U|) = |\nabla U|$ qui permet un lissage le long des contours et non le long du gradient .

Finalement,pour préserver les discontinuités et une diffusion isotrope dans les zones homogene (faible gradient), et garantir le stabilité et la convergence, il faut imposer les conditions suivantes sur $\Phi(|\nabla U|)$:

$$\lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} = \lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} \Phi''(|\nabla U|) = \Phi''(0) \geq 0 \quad (3.2.13)$$

et dans les zones de fort gradient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} \Phi''(|\nabla U|) = 0 \\ \lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} = 0 \\ \lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} \frac{\Phi''(|\nabla U|)}{\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

Les conditions (3.2.13) et (3.2.14) représentent les conditions suffisantes pour restaurer les images dégradées tout en préservant les discontinuités.

Tableau 1

Auteur	$\Phi(s)$	$\Phi'(s)/s$	$\Phi''(s)$
Perona et Malik	$\frac{-k^2}{2} \left(e^{-(s/k)^2} - 1 \right)$	$e^{-(s/k)^2}$	$\left(1 - 2 \left(\frac{s}{k} \right)^2 \right) e^{-(s/k)^2}$
Perona et Malik	$\frac{k^2}{2} \log \left(1 + (s/k)^2 \right)$	$\frac{1}{1+(s/k)^2}$	$\frac{k^2(k^2-s^2)}{(k^2+s^2)^2}$
Geman et Reynolds	$\frac{(s/k)^2}{1+(s/k)^2}$	$\frac{2 k^2}{(k^2+s^2)^2}$	$-\frac{2 k^2(-k^2+3s^2)}{(k^2+s^2)^3}$
Alvarez	...	$g(s)$	$(1 - h(s)) g(s)$
Tikhonov	$s^2/2$	1	1
Green	$\log \cosh(s/k)$	$\frac{\tanh(s/k)}{ks}$	$k^{-2} \left(\cosh \left(\frac{s}{k} \right) \right)^{-2}$
Rudin	s	$\frac{1}{s}$	0
Aubert	$\sqrt{1 + (s/k)^2} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2+s^2}{k^2}}} k^{-2}$	$\frac{ k }{(k^2+s^2)^{3/2}}$

Comme un certain nombre de fonctions ont déjà proposées dans la littérature afin de prendre en complet le problème des discontinuités, le tableau 1(ci-dessus) permet de passer en revue un certain nombre d'entres elles.

Il est facile de vérifier les 3 premières fonctions du tableau sont non convexes alors que les 3 dernières fonctions le sont. Les conditions de stabilité pour les 3 première fonctions sont données par:

$$s^2 \leq \frac{k^2}{2} \text{ pour la première fonction de Perona et Malik.}$$

$$s^2 \leq k^2 \text{ pour la seconde fonction de Perona et Malik.}$$

$$s^2 \leq \frac{k^2}{2} \text{ pour la fonction de German et Reynolds.}$$

La quatrième fonction vérifie bien les conditions de stabilité car Alvaraz a choisi les fonctions $g(s)$ et $h(s)$ telle que:

$$h(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 2e \\ 0 & \text{si } s \leq e \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} 1 & s \rightarrow 0 \\ 0 & s \rightarrow \infty \end{cases}$$

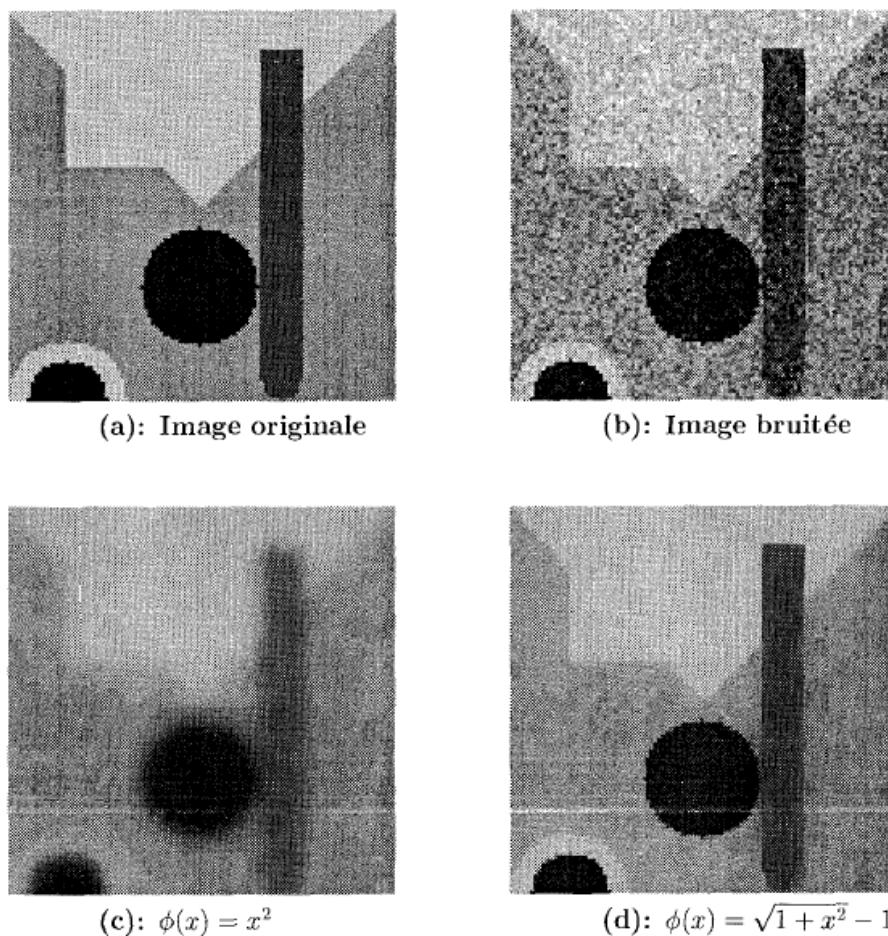


Figure 3.2.1 : Restauration d'image bruitée:par la fonction de régularisation

La figure (3.2.1) illustre les résultats obtenus en mettant en oeuvre cette méthode de restauration et en comparant les performances obtenues par l'utilisation des fonctions de Tikhonov et celle dite d'Aubert dans le tableau présenté.

L'image originale en (a) est bruitée par blanc Gaussien de moyenne nulle afin d'obtenir l'image illustrée en (b), qui sert d'image initiale $u_0(.,.)$ à l'EDP de restauration. Cette EDP converge vers la solution (c) pour le cas de la fonction de Tikhonov et vers la solution illustrée en (d) pour le cas de la fonction dite d'Aubert. On peut remarquer combien les discontinuités sont effectivement mieux préservées dans l'image (d) que dans l'image (c).

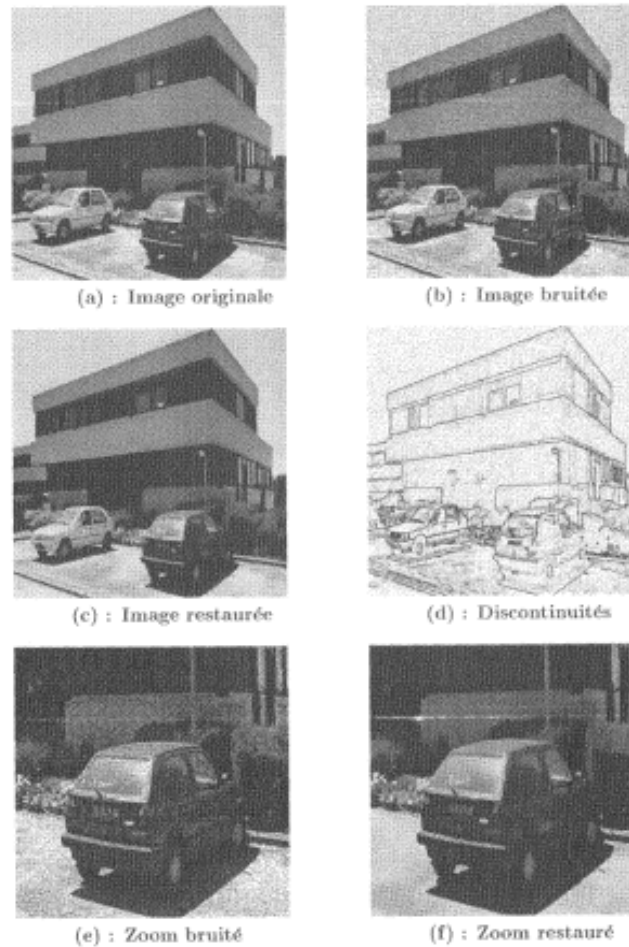


Figure 3.2.2 : Restauration d'image bruitée

La figure (3.2.2) illustre les résultats obtenus dans le cas d'une image réelle, auquel on a rajouté du bruit Gaussien de moyenne nulle.

L'image (c) illustre le résultat de la restauration obtenue à l'aide de la fonction de régularisation $\Phi(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ alors que l'image (d) illustre le poids de diffusion $\frac{\Phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}$ (i.e l'image qui servira de contrôle pour la diffusion anisotrope). On peut observer la qualité de l'image restaurée en (c), ainsi que la bonne localisation des discontinuités à ne pas détruire lors du processus de diffusion en (d). Afin de mieux percevoir les effets du lissage anisotrope permettant de préserver les discontinuités, un zoom d'une partie de l'image est donnée en (e) et (f).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié la restauration d'image en utilisant les équations aux dérivées partielles , on présenté les différentes méthodes utilisées, en partant du modèle de diffusion isotrope en passant par les modèles de diffusion anistropes dont le modèle de Perona-Malik , Alvares. Lions. Morel et Rudin on a présenté les avantages et les inconvénientsque modèle avec une petite étude mathématique. Enfin nous avons développé la notion de formulation variationelle appliquée dans la restauration d'image, on a détaillé tous les calculs concernant cette technique avec des exemples pratiques.

Dans ce domaine il y'a toujours la possibilité de développer de nouveaux modèles basés sur les EDPs d'où l'importance des EDPs dans la pratique.

Bibliographie

- [1] **Abed.S**, *Image Processing by the Partial derivative equations*, Memoire de magister, université de El Hadj Lakhdar Batna, 23 February 2012.
- [2] **Alvarez.L, Lions.P.L, Morel.J.M**, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol.29, no 3, pp 845-866, 1992.
- [3] **Aujol.J.F** , *Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles* , Avril 2005.
- [4] **Crandall.M, Ishii.H, Lions.P.L**, *User guide to viscosity solutions of second order partial equations*, Bulletin of American Mathematical society, vol 27, no 1, pp 1-67, 1992
- [5] **Deriche.R, Faugeras.O**, *Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur*, INRIA Sophia-Antipolis, november 1995.
- [6] **Deriche.R, Faugeras.O**, *Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur*, Traitement du signal, vol 13,n 6,1996.
- [7] **Gage.M**, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, Inventiones Mathematicae, vol.76, pp 357-364, 1984.
- [8] **Gage.M, Hamilton.R.S**, *The heat equation shrinking convex plan curves*, Journal of differential Geometry, vol 23, pp 69-96, 1986.

-
- [9] **Hacini.M**, *Filtrage anisotropique et segmentation par Level Sets:Application aux images médicales*, Thèse de magiste, Université Mentouri – Constantine, 2009.
- [10] **Koenderink.J.J**, *The structure of images*, Biological Gybernetics, vol.50,n° 5, pp 363-370, 1984.
- [11] **Nordstrom.N**, *Biased anisotropic diffusion :a unified regularization and diffusion approach to edge detection*.*Image and vision computing*. vol 8, n 11, pp 237-318, 1990.
- [12] **Osher.S, Rudin.L**, *Feature doriented image enhancement using shok filters*, SIAMJ on numerical analysis (27), pp 919-940, 1990.
- [13] **Perona.P, Malik.J**, *Scale space and adge detection using anisotropic diffusion*, *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.12,n 7, pp 629-639, 1990.
- [14] **Perona.P, Malik.J**, *Scale space and adge detection using anisotropic diffusion*,*IEEE computer society press,washington*, 1987.
- [15] **Rudin.L**, *Shok fltters*, Rockwell international science center annual DARPA T.R., 1984.
- [16] **Rudin.L, Osher.S, Fatemi.E**, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, *Physical.D* vol 60, 1992.
- [17] **Terebes.R**, *Diffusion directionnelle,application à la restauration et à lamélioration d'images de documents enciens*, Thèse de doctorat, Université de Tecknique de cluj NAPOCA(Roumanie) 2004.
- [18] **Weickert.J**, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, Thèse de doctorat à l'université Kaiserslautern, Allemangne 1996.
- [19] **Weickert.J**, *Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision*. *Acta Math. univ. Comenianae*. Vol. LXX, pp. 33-55. January 2001.
- [20] **Yesli.Y**, *Filtrage par Diffusion Anisotropique Appliquée aux Images IRM*, Memoire de magister, université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou