

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Technologies

Département de Génie électrique

N° : / Dept, Electricité/2025



Domaine : Science et Technologie

Filière : Automatique

Option : Automatique et systèmes

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention Du diplôme de Master Académique

Par :

IDIR Hidaya

Intitulé

**Etude comparative entre la commande 'PI classique'
et la commande 'PI d'ordre fractionnaire' d'une
classe de systèmes linéaires**

Soutenu publiquement en juin 2025 devant le jury composé de :

Toufik ROUBACHE	Prof. Univ. De M'sila	Président
Khatir KHETTAB	Prof. Univ. De M'sila	Encadreur
Abdelhakim DJALAB	MCA. Univ. De Msila	Examinateur

Année universitaire 2024/2025

بسم الله الرحمن الرحيم

"وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا"

(سورة طه، الآية 114)

"يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ"

(سورة المجادلة، الآية 11)

Dédicaces

❖ À ma chère famille

À mes parents, source inépuisable d'amour, de patience et de prières.

Merci pour votre soutien, vos sacrifices et votre confiance tout au long de mon parcours.

❖ À ma mère « Fatiha » et mon frère « Nasser »

Merci pour votre présence et vos encouragements constants, même dans les moments difficiles.

❖ À ma famille chère, dans toutes ses composantes et À mon oncle bien-aimé

❖ À mes amis fidèles

À ceux qui ont partagé avec moi les longues nuits d'étude, les doutes, les éclats de rire et les réussites. Votre amitié a rendu ce chemin plus doux et plus fort.

❖ À mon encadrant

Merci pour votre accompagnement et vos précieux conseils. Ce travail n'aurait pas vu le jour sans votre soutien.

❖ À tous ceux qui ont contribué à ce travail.

❖ À moi-même

Pour ma persévérance et mes efforts malgré les difficultés

Un hommage simple, avec respect et humilité

Remerciements

Je rends grâce à **Dieu Tout-Puissant**, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, **Prof. KHETTAB Khatir**, pour son accompagnement avisé, ses conseils éclairés et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je le remercie sincèrement pour sa patience, son sérieux et la confiance qu'il a toujours manifestée à mon égard.

Je remercie également très chaleureusement les membres du jury, **Dr. DJALAB Abdelhakim** ainsi que **Prof. ROUBACHE Toufik**, pour leur présence, leurs remarques pertinentes et leur soutien précieux lors de l'évaluation de ce travail.

La réussite de ce mémoire n'aurait pas été possible sans leur implication, leurs encouragements et leur bienveillance.

Je tiens également à remercier du fond du cœur ma **chère famille**, en particulier mes parents, pour leur amour inconditionnel, leur patience et leurs prières qui m'ont soutenu tout au long de ce parcours.

Ma reconnaissance va aussi à mes **amies** et **collègues**, pour leur soutien moral, leur encouragement constant et leur présence bienveillante.

Enfin, un grand merci à toute personne ayant contribué, de près ou de loin, à la réussite de ce travail.

SOMMAIRE

SOMMAIRE.....	i
Table des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	v
I. Introduction Générale	1

Chapiter I

Etude théorique des calculs et systèmes d'ordre fractionnaire

I.1. Introduction	3
I.2 Historique.....	3
I.3 Applications du Calcul Fractionnaire.....	4
I.4.1 Définitions fondamentales du calcul fractionnaire.....	5
A. fonction Gamma	5
B. Fonction de Mittag-Leffe	5
I.4.2 Dérivée et intégrale fractionnaire.....	6
I.4.2 .1 Définition de Grünwald-Letnikov (G-L)	6
I.4.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)	6
I.4.2.3 Définition de Caputo.....	7
I.5 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	7
I.5.1 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	8
II.5.1.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	8
II.5.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	9
A. Définition de Riemann-Liouville.....	9
B. Définition de Caputo	9

C. Définition de Grünwald-Letnikov	9
I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	10
I.6.1 Méthodes fréquentielles	10
I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues d'interpolation	10
I.6.1.1.2 Méthode de Carlson.....	11
I.6.1.1.3 Méthode de Matsuda.....	11
I.6.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification	12
I.6.1.2.1 La Méthode d'Oust loup	12
I.6.1.2.2 Méthode de Charef : Fonction de singularité	13
Conclusion.....	17

Chapiter II

Principes généraux et théories des régulateurs PI classiques et PI d'ordre fractionnaires

II.1 PI classique	18
II.1 Introduction.....	18
II.2 Commande PI Classique	18
II.2.1 Structure mathématique.....	19
A. Contrôleur Proportionnel.....	19
B. Contrôleur Intégral.....	19
C. Expression mathématique du contrôleur PI.....	20
I.3 Rappel des principes fonctionnement.....	22
II.4 Réglage du Contrôleur PI.....	23
II.5 Domain d'application	24

II.3 PI D'ordre fractionnaire	25
II.3.1 INTRODUCTION	25
II.3.2 Historique	26
II.3.3 Domaines d'application des systèmes fractionnaires	27
II.3.3.4 Calcul fractionnaire	27
II.4. Théorie de la commande PID d'ordre fractionnaire	31
Conclusion.....	34

Chapiter III

Résultats de simulation et études comparatives

III .1Introduction	35
III.2 Outils utilisés pour la simulation	36
III.2.1 la commande PI d'ordre entier.....	36
III.2.2 commande PIFO	36
III.3 Application à la commande de vitesse d'un moteur à Courant continu	37
III.3.1 Modélisation du moteur à courant continu	37
A. Mise en équations.....	38
b. Hypothèses	38
 III.4 SIMULATION ET RESULTATS.....	 43
<u>Cas 1</u> : PI classique.....	43
<u>Cas 2</u> : PI fractionnaire pour différentes valeurs de λ	43
III.5. Comparaison et commentaires.....	45
Conclusion.....	47
Conclusion générale	48
Références bibliographique	

Table des figures

Figure II.1. Schéma fonctionnel de commande avec régulateur PI.....	18
Figure II.2 : Schéma de commande utilisant la structure PI.....	21
Figure II.3 : Commande PI et PI Fractionalisé d'un système 3ème ordres.....	29
Figure II.4. Commande PI et PI Fractionalisé d'un four.....	30
Figure II .5: structure interne du correcteur d'ordre fractionnaire	32
Figure II .6 : $PI^\lambda D^\mu$ et PID, (a) : ordre entier, (b) : ordre fractionnaire.....	33
Figure III.7. Moteur CC	37
Figure III.8 : Différent types de moteurs Mcc.....	37
Figure III.9 :schéma simplifié d'un MCC	38
Figure III.10 : le schéma block du MCC.....	39
Figure. III.11 : la réponse à l'échelon system 2 ème order	40
Figure III. 12: Réponse à l'échelon system instable (pôle réel positif)	41
Figure III.13: Présenter le système instable (pôles complexes divergents)	41
Figure III.14 : Système fractionnaire d'ordre 0.86.....	42
Figure. III.15 : Système du 2ème order fractionnaire.....	42
Figure. III.16 : Commande PIOE	43
Figure. III.17 : commande PI^λ pour $\lambda=1.8$	43
Figure III.17 : commande PI^λ pour $\lambda=1.85$	44
Figure III.17 : commande PI^λ pour $\lambda=1.90$	44
Figure III.17 :commande PI^λ pour $\lambda=1.95$	44
Figure III.17 :commande PI^λ pour $\lambda=1.99$	45

Liste des tableaux

Tableau. I.1 : Comparaison des régulateurs P, PI, PD et PID: structure et comportement	25
---	----

Tableau II.2. Les caractéristiques d'un PI et PI fractionalisé de système 3 ^{ème} ordres	29
Tableau II.3 : Caractéristiques du régulateur PI et PI fractionalisé pour le four	31
Tableau II.4 : caractéristiques mcc	39

Introduction générale

Introduction générale

Avec le développement des technologies intelligentes, la commande des systèmes dynamiques est devenue essentielle pour améliorer les performances industrielles. Les systèmes linéaires sont souvent utilisés car ils sont simples à modéliser, notamment par linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

Le régulateur PI classique est largement utilisé pour sa simplicité et sa capacité à stabiliser les systèmes, mais ses performances peuvent être limitées face à des perturbations ou des variations de paramètres.

Pour dépasser ces limites, des approches basées sur le **calcul fractionnaire** ont émergé, notamment le régulateur PI^λ , qui introduit un degré de liberté supplémentaire en ajustant l'ordre d'intégration λ , offrant ainsi une meilleure dynamique et plus de flexibilité.

Un moteur à courant continu (MCC) a été retenu comme modèle linéaire simple et largement utilisé, idéal pour évaluer les performances des régulateurs dans des applications pratiques telles que la commande électrique et la robotique.

Ce présent travail vise comme objectif réduire les différences entre les performances du régulateur PI classique et du régulateur fractionnaire PI dans le système, par l'analyse des principaux indicateurs temporels qui sont (Le temps de stabilisation - Le dépassement - Erreur en régime permanent - Réponse aux perturbations).

Ce travail est séparé en trois chapitres majeurs comme suit:

Le premier chapitre : traite des concepts de base du calcul des fractions, présentant ses définitions de base (comme celles de Riemann-Liouville et Caputo), ses propriétés mathématiques, ainsi que sa signification dans le domaine des systèmes de contrôle.

Le deuxième chapitre : est dédié à l'analyse comparative des régulateurs classiques de type PI et PID et de leurs versions fractionnaires. Il présente les distinctions en matière de structure, de fonctions de transfert et des approches de réglage, tout en soulignant les avantages offerts par l'utilisation du contrôle fractionnaire.

Le troisième chapitre : garantit la modélisation du moteur à courant continu (MCC) et la simulation numérique à des fins de passer à une comparaison pratique entre les régulateurs étudiés. Les résultats sont débattus et analysés d'une liste d'indicateurs, à fin de tirer des conclusions et des recommandations appropriées.

But et objectif :

La mission de cette étude est de revoir et de mieux comprendre le comportement de la commande des systèmes dynamiques linéarisés, en particulier de celui d'un moteur à courant continu (MCC), par une comparaison entre deux régulateurs : le régulateur PI classique et le régulateur fractionnaire $PI\lambda$. La tâche principale est d'envisager la capacité dans l'organisation du calcul fractionnaire, à travers l'adjonction d'un degré de liberté par le biais de l'ordre d'intégration λ , pour obtenir une meilleure dynamique de réponse, une réduction du dépassement, du temps de stabilisation, de l'erreur en régime permanent et une meilleure robustesse face aux perturbations.

La présente recherche dédie pour mettre en place des solutions de commande plus flexibles et plus performantes en fonction des exigences du système industriel contemporain.

Chapitre1 :

**Etude théorique des calculs et
systèmes d'ordre fractionnaire**

Chapitre1 :

Etude théorique des calculs et systèmes d'ordre fractionnaire

I.1 Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont attiré une attention considérable dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes se caractérisent généralement par des équations aux dérivées fractionnaires et sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles dans le domaine des fréquences. La complexité des fonctions irrationnelles associées à ces systèmes a limité leur étude approfondie. En raison de l'absence fréquente de solutions analytiques, des méthodes numériques et approximatives sont souvent employées pour leur analyse et leur mise en œuvre. Ce chapitre présente la définition du calcul et des opérateurs fractionnaires, les propriétés essentielles, ainsi que la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et des intégrales. De plus, diverses techniques d'approximation des opérateurs seront abordées, de même que l'analyse des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. [1]

I.2 Historique:

Dans une lettre du 30 septembre 1695, L'Hôpital écrit à Leibniz pour lui demander une notation particulière qu'il avait utilisée dans son publication pour la n -ième dérivée d'une fonction dans le cas où $n = 1/2$. La réponse de Leibniz fut : « **Elle sera égale à $\frac{d^{0.5}x}{dt^{0.5}}$ un paradoxe apparent dont un jour des conséquences utiles seront tirées.** » .[1]

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été formulé au 19 siècle par Riemann et Liouville. Leur objectif était de prolonger les notions de dérivation et d'intégration d'ordre entier en les étendant à des ordres non entiers [2]. L'histoire du calcul fractionnaire débute avec une question fondamentale posée par Leibniz, à qui l'on doit l'idée de la dérivation fractionnaire [3]. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n , soit $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ Où n est un entier positif. Ce fut peut-être une réflexion sur les symboles qui incita L'Hospital à

s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans Q . Il posa alors la question : et si $n=\frac{1}{2}$ =? En 1695, dans une lettre adressée à L'Hospital, Leibniz écrivit de manière prémonitoire: « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $\sqrt{dx:x}$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles Conséquences. Un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences». Ces dernières années, un intérêt croissant a été porté au calcul fractionnaire, notamment en raison de son application dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Cette approche a permis des avancées significatives dans les travaux théoriques, offrant des bases solides pour de nombreuses applications pratiques dans ces secteurs. En conséquence, d'importants efforts ont été déployés pour appliquer les résultats théoriques déjà établis, et des recherches intensives sont toujours en cours dans plusieurs branches de l'ingénierie pour intégrer les concepts d'ordre fractionnaire dans des solutions concrètes.[4]

I.3 Applications du Calcul Fractionnaire :

Le calcul fractionnaire est de plus en plus présent dans presque tous les domaines de la science, de l'ingénierie et des mathématiques. Depuis la seconde moitié du 20^e siècle, l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire et du calcul d'ordre fractionnaire a 1993 ; Kiryakova, 1994 ; Gorenflo et Mainardi, 1997 ; Podlubny, 1999 ; Kilbas et al. 2006). Grâce à ces avancées, la différenciation fractionnaire a été appliquée dans divers domaines, tels que la **viscoélasticité** et la **rhéologie** (identification du comportement des matériaux, propriétés viscoélastiques), le **génie électrique** (modélisation des moteurs, modélisation des transformateurs), l'**électrochimie** (modélisation des batteries, des piles à combustible), la **biologie** et la **biophysique** (conductivité électrique des systèmes biologiques, conductivité fractionnaire, modélisation des neurones, modélisation musculaire, modélisation pulmonaire), l'**électronique** et les **télécommunications** (boucles à verrouillage de phase), le **traitement du signal** (filtrage, restauration, reconstruction, analyse du bruit fractal), le **traitement d'image** (modélisation de l'environnement fractal, reconnaissance de formes, reconnaissance de contours, détection), la **mécanique** et la **mécatronique** (isolement vibratoire, suspension), la **physique** (analyse et modélisation du phénomène de diffusion), la **robotique** (modélisation, suivi de trajectoire, planification de trajectoire, évitement d'obstacles) et le **contrôle automatique** (PID d'ordre fractionnaire contrôlerobuste, identification on du système, observation et contrôle des systèmes fractionnaires) .

Ces applications sont mentionnées à titre d'exemple uniquement, et la liste n'est pas complète.

I.4.1 Définitions fondamentales du calcul fractionnaire:

La fonction **Gamma** et **Mittage-Lefer** jouent un rôle fondamentale dans la définition des dérivées et intégrales fractionnaires, ainsi que dans la résolution des **équations différentielles fractionnaires**.

A. fonction Gamma :

La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions fondamentales utilisées dans le calcul fractionnaire. Sa définition intégrale est donnée par [5] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{z-1}) dt, z > 0 \quad (I.1)$$

L'intégration par parties de l'équation (I.1) permet d'obtenir la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z * \Gamma(z) \quad (I.2)$$

Étant donné que $\Gamma(1)=1$, en utilisant la relation (I.2), on obtient pour ($z=1,2,3,\dots$)

$$\Gamma(n + 1) = n * \Gamma(n) = n * (n - 1) = n! \quad (I.3)$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour ($z=0,-1,-2,\dots$). Son expression est donnée par :

$$\Gamma(z + 1) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \dots \quad (I.4)$$

Il est clair, à partir de cette équation, que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend vers l'infini.

B) Fonction de Mittage-Leffe :

Une autre fonction fondamentale dans le calcul fractionnaire est la fonction de Mittage-Leffe. La forme standard de cette fonction à un paramètre est donnée par :

$$E_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (I.5)$$

Pour $\alpha=1$, on retrouve la fonction exponentielle classique : [6]

$$E1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!} \quad (I.6)$$

I.4.2 Dérivée et intégrale fractionnaire :

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui étudie les dérivées et intégrales d'ordres fractionnaires, pouvant être exprimées par des nombres réels ou complexes. En d'autres termes, il s'agit d'une généralisation du calcul différentiel et intégral traditionnel. En utilisant la transformée de Laplace appliquée à ces équations, on obtient des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire (FOTF). Des chercheurs tels que Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo ont proposé des définitions acceptées pour la dérivée et l'intégrale fractionnaires (Samko, Kilbas et Marichev, 1993). Grâce à ces travaux, les méthodes numériques et l'application du calcul fractionnaire ont fait des progrès significatifs, et l'intérêt pour cette discipline a considérablement augmenté.

I.4.2 .1 Définition de Grünwald-Letnikov (G-L) :

Cette définition peut être considérée comme une généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathbb{R}$, qui prend la forme suivante :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (I.7)$$

Où :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (I.8)$$

En remplaçant le nombre entier n par $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut réécrire (I.8) comme suit :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \quad (I.9)$$

2.4.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L) :

Définition 1 : Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ respectivement les anneaux des nombres complexes et réels. Le symbole $\Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z

Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). [7]

$$1) I^\alpha f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.10)$$

Définition 2: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel, où α est compris entre $n-1$ et n , avec n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction f sur cet intervalle est définie par :

$$2) {}_{\text{RI}}D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.11)$$

où n est l'entier tel que $(n-1) < \alpha < n$

Remarque1 : Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite $I^\alpha f(t)$ pour la fonction $f(t)$ elle-même, et I_0^∞ pour la dérivée ordinaire de f .

Remarque2 : pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^α pour I_0^α et D^α pour D_0^α

I.4.2.3 Définition de Caputo

Caputo a proposé une autre formulation pour la dérivée d'ordre fractionnaire, qui est définie par :

$$3) {}_{\text{CD}}D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (I.12)$$

où n est un entier tel que $(n-1) < \alpha < n$, et $f^{(n)}(\tau)$ représente la dérivée entière d'ordre n de la fonction $f(\tau)$. [7]

I.5 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire:

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [4,7] :

1- Si $f(z)$ est une fonction analytique de z alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .

2- pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier.

3- pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$

4- la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérateurs linéaires :

$$D^\alpha (af(z) + bg(z)) = a D^\alpha f(z) + b D^\alpha g(z) \quad (I.13)$$

5- la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z) \quad (I.14)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$ [1]

I.5.1 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire :

I.5.1.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire : [4]

Nous commencerons par examiner la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, définie par l'équation (I.13). Celle-ci peut être exprimée comme une convolution des fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$:

$$I^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.15)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) S^{-\alpha} \quad (I.16)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution :

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de **Riemann-Liouville** et de **Grunwald-Letnikov** [4] :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = S^{-\alpha} F(s) \quad (I.17)$$

I.5.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire :

Nous présentons ci-après la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire .[11]

A. Définition de Riemann-Liouville :

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (I.18)$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire selon **Riemann-Liouville** est bien connue et est donnée par l'équation suivante (I.24), avec $(n-1) < \alpha < n$. Cependant, son applicabilité pratique est restreinte en raison de l'absence d'une interprétation physique claire des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t=0$.

B. Définition de Caputo :

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{k-\alpha-1} f(0) \quad (I.19)$$

Avec $(n-1) < \alpha < n$.

Remarque :

La définition de **Caputo** présente un avantage majeur par rapport à celle de **Riemann-Liouville**, car elle permet de tenir compte de conditions initiales classiques qui sont faciles à interpréter, telles que...etc. De plus, la dérivée de **Caputo** d'une constante tend vers une limite (qui est égale à 0), tandis que la dérivée de **Riemann-Liouville** d'une constante ne possède pas de limite en $t=0$. Si le point de départ est $t=-\infty$ dans la définition de **Riemann-Liouville**, il n'y a qu'une seule exception. Cependant, lorsqu'il s'agit de processus transitoires, il est difficile d'accepter de fixer le point de départ à $-\infty$; dans ce contexte, la définition de Caputo semble plus appropriée en comparaison avec les autres [4].

C. Définition de Grünwald-Letnikov: [1]

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) \quad (I.20)$$

I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire :

Dans les sections suivantes, nous présenterons plusieurs méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, que l'on peut diviser en deux catégories (fréquentielles et numériques). Nous nous concentrerons particulièrement sur la méthode de la fonction singulière, qui sera étudiée en détail dans ce chapitre.[1]

I.6.1 Méthodes fréquentielles :

Il existe différentes manières d'estimer les opérateurs d'ordre fractionnaire standard à l'aide de fonctions rationnelles. Les approximations en domaine de Laplace (domaine s) sont qualifiées d'approximations fréquentielles ou d'approximations analogiques. Une bonne synthèse de ces approches est donnée dans la littérature. Parmi les méthodes les plus célèbres, on trouve :

- ❖ La méthode de Carlson
- ❖ La Méthode de Matsuda
- ❖ La Méthode de Charef
- ❖ La méthode d'Oust loup

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus couramment utilisées dans la littérature. [8]

I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation :

La méthode d'évaluation des fonctions, connue sous le nom d'expansion en fractions continues, est généralement beaucoup plus rapide que le développement en série de puissances et converge sur un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle $G(s)$ peut être exprimé sous la forme :[4]

$$G(S) \cong a_0 + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (I.21)$$

$$G(S) = \frac{b_1(s)b_2(s)b_3(s)}{a_1(s)a_2(s)a_3(s)} \quad (I.22)$$

Où $a_i(s)$ et $b_i(s)$ sont des fonctions rationnelles de la variable s ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle, qui est un $\hat{G}(s)$ et une approximation de la fonction irrationnelle $G(s)$. Par ailleurs, en ce qui concerne l'interpolation, il arrive que les fonctions rationnelles demeurent supérieures aux polynômes, car elles offrent la possibilité de modéliser les fonctions à l'aide de pôles. Ces méthodes reposent sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(s)$ par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variables :[1]

$$G(s) \cong R_{i(i+1) \dots (i+m)} = (s_i G(s_i)), \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$$

I.6.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégral-différentiels d'ordre fractionnaire :

En général, une approximation rationnelle de la fonction $G(s)=s^\mu$ tel que $0 < \mu < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenues utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :[4]

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s.T)^\mu} \quad (I.23)$$

$$G_l(s) = (1 + \frac{1}{s})^\mu \quad (I.24)$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($W_T \gg 1$), et $G_l(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($W_T \ll 1$). $G_l = (1 + \frac{1}{s})^\mu$

I.6.1.1.2 Méthode de Carlson:

La méthode proposée par Carlson, dérivée du processus itératif de Newton utilisé pour l'approximation de la racine d'ordre α , peut être classée parmi les méthodes de ce groupe . Elle repose sur l'hypothèse suivante [4]:

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (I.25)$$

I.6.1.1.3 Méthode de Matsuda:

La méthode de Matsuda repose sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à l'aide d'une fonction rationnelle, en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain.

Ce gain est calculé en identifiant M fréquences réparties dans une bande de fréquence où l'approximation est réalisée. Pour un ensemble de points sélectionnés, l'approximation s'exprime sous la forme suivante :[1]

$$\widehat{G}(s) = \frac{s^{-\omega_0} s^{-\omega_1} s^{-\omega_2}}{a_1 a_2 a_3} \dots = \left[a_0, \frac{s^{-\omega_{i-1}}}{a_i} \right]_{i=0}^M \quad (I.26)$$

Où

$$a_i = f(\omega_i). f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s^{-\omega_i}}{f_i(s) - a_i} \quad (I.27)$$

En remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation, on obtient le modèle approximatif.

I.6.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :

En général, toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être utilisées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle d'origine. Par exemple, cela peut inclure la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$J = \int w(s) |G(w) - \widehat{G}(w)|^2 dw \quad (I.28)$$

Où W(s) est une fonction de pondération, Original G(w) est la réponse fréquentielle originale, et $\widehat{G}(w)$ est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée. Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef.[4]

I.6.1.2.1 La Méthode d'Oustaloup:

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre l'ensemble de l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin de garantir un comportement à phase minimale) [18] . Dans le cadre d'une synthèse pratique fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il est nécessaire de restreindre le comportement différentiel généralisé à un intervalle fréquentiel spécifique, choisi en fonction des exigences de l'application [21]

Ainsi, l'approximation de l'opérateur s^α , $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$, est donnée par une fonction rationnelle :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.29)$$

En appliquant les formules de synthèse suivantes :

$$w_0 = \alpha^{0.5} w_u; w_0 = \alpha^{0.5} W_u; \frac{w'_{k+1}}{w_k}; \frac{w'_{k+1}}{w_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 \quad (I.30)$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)}, \mu = \frac{\log \alpha}{\log \alpha \cdot \eta} \quad (I.31)$$

Soit W_u le gain fréquentiel unitaire et la fréquence centrale d'une bande de fréquences réparties géométriquement autour de celle-ci. Ainsi, $W_u = \sqrt{W_h \cdot W_b}$ · où W_h et W_b représentent respectivement les fréquences haute et basse. [7]

I.6.1.2.2 Méthode de Charef : Fonction de singularité :

Pour intégrer des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans cette étude, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité", développée par Charef et al. , qui est détaillée dans cette section. La méthode d'approximation variera en fonction du fait que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.[1]

- **System du premier ordre fractionnaire**

$$G(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{p_T})^\beta} \quad (I.32)$$

La fonction (I.34) peut être réécrite de la manière suivante [4] :

$$G(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{p_T})^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{z_{i+1}})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \quad (I.33)$$

Le nombre total des singularités peut être déterminé à partir de la bande de fréquences du système, où $(N + 1)$ représente le total. L'équation (I.33) peut être tronquée à un nombre fini, ce qui conduit à l'approximation suivante :[1]

$$(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{p_T})^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{z+i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \quad (I.34)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus de la manière suivante :

$$p_i = (ab)^i p_0 = 1, 2, 3, \dots, N \quad (I.35)$$

$$p_i = (ab)^i a p_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (I.36)$$

Avec,

$$p_0 = p_T 10^{\frac{\epsilon_p}{20\beta}} \quad (I.37a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\beta)}} \quad (I.37b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\beta}} \quad (I.37c)$$

$$\beta = 10^{\frac{\log a}{\log(ab)}} \quad (I.38d)$$

où représente l'erreur tolérée en dB. La pente est approximativement calculée à l'aide de segments de droite en zig-zig, chaque segment ayant une pente de et 0.

Système du second ordre fractionnaire :

Selon l'équation (I.39), un système du second ordre est défini comme suit :[1]

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta} \quad (I.39)$$

Lorsque β est un nombre réel positif, comme $0 < \beta < 1$, deux situations distinctes peuvent être observées :

- Cas où $0 < \beta < 0.5$: **(sous-amorti)**

La fonction (I.41) peut être réécrite de la manière suivante :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_n} + 1\right)^n}{\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1} \quad (\text{I.40})$$

Avec $\alpha = \eta^\beta$ et $\beta = 1 - 2\beta$, ce qui peut également être approximé par la fonction :

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.41})$$

Les formules suivantes permettent de déterminer les singularités (p_i pôles et zéros z_i) :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 1, 2, 3 \dots N - 1 \quad (\text{I.42})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 2, 3 \dots N - 1 \quad (\text{I.43})$$

Avec,

$$z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.44})$$

$$a = 10 \frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)} \quad (\text{I.45b})$$

$$b = 10 \frac{\epsilon_p}{10\eta} \quad (\text{I.45c})$$

$$\eta = \frac{\log a}{\log ab} \quad (\text{I.45d})$$

Où ϵ_p L'erreur tolérée est donnée en dB.

L'ordre d'approximation N est déterminé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par $w_{\max}$ telle que : $p_{N-1} < w_{\max} < p_N$, ce qui conduit à la valeur suivante :

$$N = \text{partie entière de} \left\lceil \frac{\log\left(\frac{w_{\max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} \right\rceil \quad (\text{I.46})$$

La fonction $G_e(s)$ peut alors être exprimée sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N+2$:

$$G_e(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m0}s^{N+1} + \dots + a_{mN}} \quad (I.47)$$

Les coefficients a_{mi} et b_{mi} sont calculés à partir des singularités P_i , Z_i , ainsi que des paramètres α et w_n

- **Pour** $0: 5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit : [4]

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2 + 2\alpha + 1}\right)\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)^\eta} \quad (I.48)$$

Où $\alpha = \zeta^\beta$, et $1-2\beta$. Cette fonction est développée en utilisant les valeurs singulières suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 1, 2, 3 \dots N \quad (I.49)$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 2, 3 \dots N - 1 \quad (I.50)$$

Avec :

$$z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (I.51a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \quad (I.51b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \quad (I.51c)$$

$$\eta = \frac{\log a}{\log ab} \quad (I.51d)$$

ϵ_p L'erreur tolérée, en dB

La fonction $G_e(s)$ peut alors s'écrire sous la forme d'une fonction paramétrique. (I.48)[4]

Conclusion:

Ce chapitre présente les concepts de base du calcul fractionnaire. Il fournit plusieurs définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires, ainsi que leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Deux types de méthodes d'approximation de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire sont également abordés : les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques.

Chapitre2 :

Principes généraux et théories des régulateurs PI classiques et PI d'ordre fractionnaires

II.1 Introduction :

Le contrôleur proportionnel, également appelé contrôleur PI, joue un rôle crucial dans les systèmes d'automatisation et de contrôle industriel. C'est un mécanisme de régulation à boucle fermée qui ajuste la variable de processus en fonction de l'écart entre la consigne et la valeur réelle de la variable. Il cherche à équilibrer une réponse rapide aux fluctuations tout en minimisant les erreurs à long terme. Le paramétrage de ce contrôleur permet d'ajuster le système afin d'atteindre la valeur cible souhaitée. [12]

II.2 Commande PI Classique :

Dans de nombreux processus industriels, notamment pour les moteurs électriques, il est essentiel de contrôler certains paramètres physiques (vitesse, position, angle, etc.). Ainsi, l'utilisation d'une commande devient souvent nécessaire. La commande Proportionnelle Intégrale (PI) est une méthode éprouvée qui offre d'excellents résultats, grâce à l'action proportionnelle qui optimise la rapidité et à l'action intégrale qui assure une grande précision. [13]

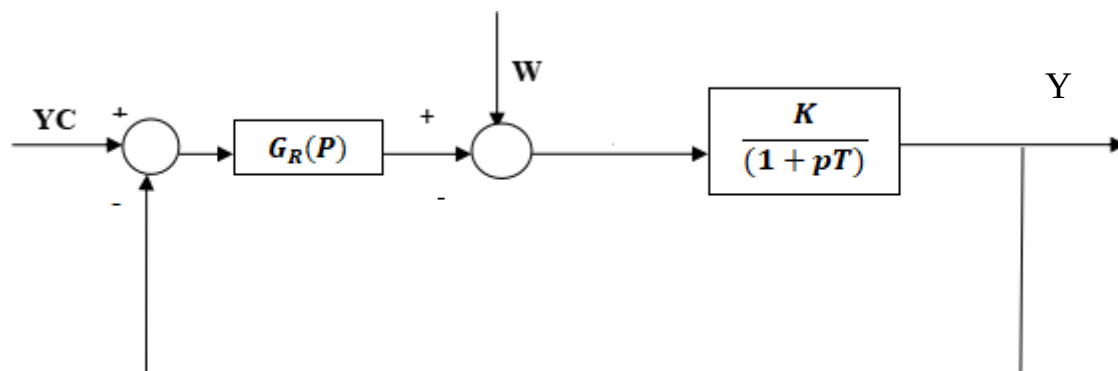


Figure II.1. Schéma fonctionnel de commande avec régulateur PI

Yc : Signal de référence (entre de consigne)

Gr : Régulateur

W : Perturbation

$\frac{K}{(1+pT)}$: Model de système

Y : Signal de sortie

II.2.1 Structure mathématique :

Jusqu'à présent, nous avons étudié la définition d'un contrôleur Proportionnel-Intégral (PI). Il est désormais temps d'examiner la formule mathématique qui le sous-tend, Nous pouvons représenter un contrôleur PI par une expression mathématique dérivée de sa définition suivant:

Le contrôleur PI, ou contrôleur Proportionnel-Intégral, est une combinaison des actions d'un contrôleur Proportionnel et d'un contrôleur Intégral :

A. Contrôleur Proportionnel : Le contrôleur proportionnel en ingénierie électronique ajuste en continu la sortie en fonction de l'erreur actuelle du signal. Le terme P ou terme proportionnel calcule l'erreur actuelle en comparant le point de consigne et la sortie du variable manipulée. Il génère un signal de commande pour réguler cette erreur.

$$Co(t) \propto e(t)$$

$$Co(t) = K_p \cdot e(t) \quad (II.52)$$

Où:

- **Co(t)** : sortie du contrôleur à l'instant t
- **e(t)** : erreur à l'instant tt (SP - PV),
- **Kp** : facteur de réglage pour l'action proportionnelle.

B. Contrôleur Intégral : Dans un contrôleur intégral, le terme I ou terme intégral prend en compte l'erreur passée au fil du temps et génère une action de contrôle visant à éliminer l'erreur statique accumulée. Il garantit que même les petites erreurs seront corrigées avec le temps. Il élimine les décalages (offsets) mais peut entraîner des réponses lentes et des dépassements (overshoot) si l'action intégrale est trop agressive. [12]

Cela peut être représenté comme suit :

Mathématiquement, cela s'écrit : $Co(t) \propto \int e(t) dt$

$$Co(t) = K_i \int e(t) dt \quad (II.53)$$

Où:

- **Ki** : facteur de réglage pour l'action intégrale,
- Les autres termes sont identiques à ceux de l'équation.[13]

C. Expression mathématique du contrôleur PI :

En combinant les équations (i) et (i), nous pouvons écrire :

$$Co(t) = Kp \cdot e(t) + Ki \cdot \int e(t) dt \quad (II.54)$$

Cette équation montre que le contrôleur PI fonctionne comme un contrôleur PI simplifié sans action dérivative.

En appliquant la transformée de Laplace des de

$$L\left\{\int f(x)dx\right\} = \frac{1}{s} L\{f(x)\} \quad (II.55)$$

En appliquant cette propriété à l'équation précédente :

$$L\{Co(t)\} = Kp \cdot L\{e(t)\} + Ki \cdot \frac{1}{s} \cdot L\{e(t)\} \quad (II.56)$$

Dans le domaine de Laplace, C(s) représente la sortie transformée, soit

L{Co(t)}, et E(s) représente le signal d'erreur transformé, soit L{e(t)}. Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation comme suit :

$$C(s) = Kp \cdot E(s) + Ki \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s) \quad (II.57)$$

Ce qui peut être simplifié à :

$$C(s) = Kp \left(1 + \frac{Ki}{sKp}\right) \cdot E(s) \quad (II.58)$$

Cette équation montre comment la sortie du contrôleur PI est liée au signal d'erreur transformé dans le domaine de Laplace, avec les termes proportionnel et intégral agissant sur l'erreur.

On peut dire que :

$$\frac{K_p}{K_i} = T_i \text{ Ou } \frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T_i} \quad (\text{II. 59})$$

Ainsi, l'équation dévient:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) E(s) \quad (\text{II. 60})$$

En réarrangeant, nous options:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (\text{II. 61})$$

Où K_p est le gain proportionnel et T_i est la constante de temps intégrale.

Nous pouvons maintenant exprimer $C(s)$ sous la forme $M(s)$. L'équation dévient alors:[14]

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (\text{II. 62})$$

Chaque boucle de régulation est équipée d'un régulateur PI (Proportionnel-Intégral) classique, illustré à la figure (II.1). Ce régulateur combine une action proportionnelle, qui ajuste la rapidité de la réponse du système, et une action intégrale, qui corrige l'erreur statique entre la valeur mesurée et la consigne [14]. [13]

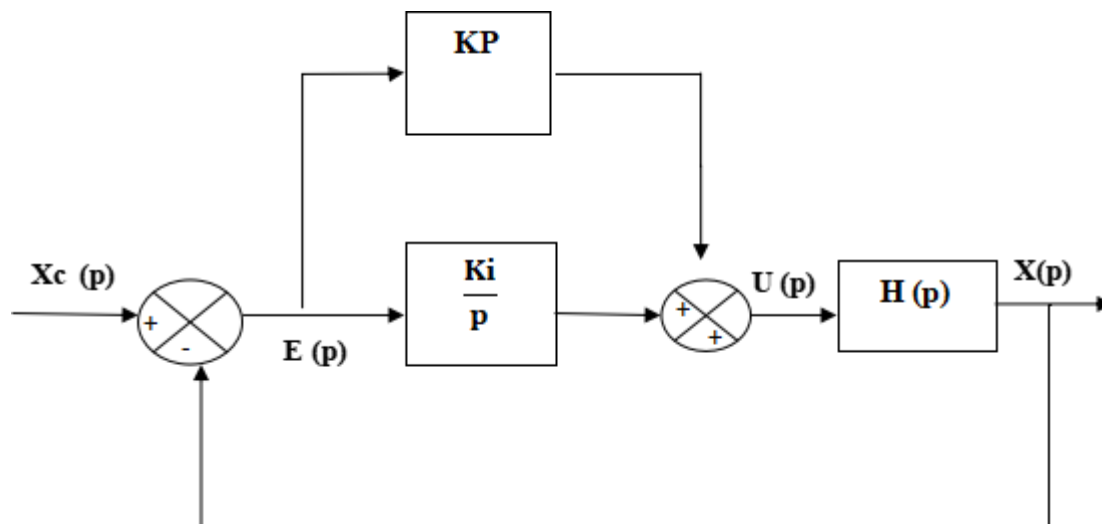


Figure II.2 : Schéma de commande utilisant la structure PI

Soit $H(p)$ un système de premier ordre peut être donné par une des fonctions suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_p \\ \end{array} \right. = \frac{\frac{H_1}{s+\tau s}}{\frac{H_0}{1+\tau s}} \quad (II.63)$$

Avec :

$$\tau = \frac{1}{\tau_1}$$

II.3 Rappel des principes de fonctionnement:

Le correcteur de type PI est une régulation proportionnelle P à laquelle on ajoute un terme intégral. Il génère ainsi une commande exprimée par la relation suivante :

$$C(t) = K_p e(t) + k_i \int e(t) dt \quad (II.64)$$

Sa fonction de transfert peut être représentée par :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (II.65)$$

Le correcteur intégral est rarement utilisé seul. Le terme intégral vient compléter l'action proportionnelle en compensant l'erreur statique et en améliorant la précision en régime permanent. L'idée est d'intégrer l'erreur depuis le début et de l'ajouter à la consigne. À mesure que l'on se rapproche de la valeur cible, l'erreur devient de plus en plus faible.

L'idée est d'ajouter cette erreur à la consigne, de sorte que, à mesure que l'on se rapproche de la valeur cible, l'erreur diminue progressivement.

Cela correspond à l'association en série d'un intégrateur avec le correcteur proportionnel. La loi de commande d'un correcteur PI est la suivante : [14]

$$U(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (II.66)$$

Où T_i est la constante de temps intégrale exprimée en S^{-1}

Cette Méthode permet de:

- Éliminer l'erreur en regime permanent
- Améliorer la précision
- rendre le système instable

Il introduit un dépassement, une réponse lente et un temps de monter diminue.[13]

II.4 Réglage du Contrôleur PI :

Le réglage d'un contrôleur PI consiste à ajuster les termes K_p et K_i pour obtenir une sortie de contrôleur optimisée, en minimisant l'erreur tout en évitant les dépassements (overshoot) et les oscillations. Il existe quelques règles à suivre pour régler un contrôleur PI.

Le réglage du contrôleur implique l'ajustement des valeurs de K_p et K_i pour un contrôle optimal du système. Voici les étapes typiques :

1. **Commencer par des valeurs initiales pour K_p et K_i :** Choisir des valeurs approximatives de K_p et K_i pour démarrer le réglage.
2. **Fixer K_i à '0' :** Commencer par désactiver l'action intégrale en réglant K_i à zéro.
3. **Augmenter progressivement K_p :** Augmenter lentement la valeur de K_p pour obtenir une réponse rapide, tout en évitant un dépassement excessif.
4. **Introduire K_i :** Et augmenter progressivement K_i pour éliminer l'erreur à l'état stationnaire.
5. **Ajuster continuellement K_p et K_i :** En tenant compte de leur impact sur le dépassement, le temps de réglage et l'erreur à l'état stationnaire.
6. **Tester le contrôleur dans différentes conditions :** Afin de vérifier la stabilité du système dans divers scénarios.
7. **Le réglage est un processus itératif :** Les paramètres optimaux peuvent varier selon les systèmes, nécessitant pratique et expérience pour obtenir un contrôle stable et efficace.
8. **Ajuster continuellement K_p et K_i :** Affiner les valeurs de K_p et K_i , en prenant en compte leur impact sur le dépassement, le temps de réglage et l'erreur à l'état stationnaire, jusqu'à obtenir une performance optimale.

Ce processus permet d'atteindre un compromis entre rapidité de réponse, minimisation de l'erreur, et stabilité du système sans provoquer de comportements indésirables tels que des oscillations ou des dépassements trop importants.

II.5 Domain d'application:

Applications du contrôleur Proportionnel-Intégral (PI) :

1. **Systèmes de contrôle de température** : Les contrôleurs PI sont souvent utilisés dans des systèmes tels que les fours, les chaudières et les systèmes de chauffage, ventilation et climatisation (CVC).
2. **Contrôle des moteurs** : Les contrôleurs PI sont utilisés dans des applications de contrôle des moteurs pour réguler la vitesse et la position.
3. **Robotique** : Les contrôleurs PI sont utilisés pour contrôler les mouvements et les positions des bras de robots et des manipulateurs.
4. **Systèmes de contrôle de vol** : Les contrôleurs PI sont une composante essentielle des systèmes de contrôle de vol dans les avions.
5. **Systèmes audio** : Les contrôleurs PI peuvent être utilisés dans les systèmes audio pour des applications telles que l'annulation de bruit.
6. **Dispositifs médicaux** : Les contrôleurs PI sont utilisés dans des dispositifs médicaux comme les pompes à perfusion et les respirateurs pour réguler des paramètres tels que les taux de délivrance de médicaments ou la ventilation des patient

TableauII.1 : Comparaison des régulateurs P, PI, PD et PID structure et comportement

Type de contrôleur	Contrôleur proportionnel Intégral(PI)	Contrôleur proportionnel (P)	Contrôleur proportionnel derive (PD)	Contrôleur proportionnel intégral dérivé (PID)
Termes	Termes proportionnels et intégraux	Mandate proportionnel uniquement	Terme proportionnel et derive	terme proportionnel, intégral et dérivé
But	Élimine les erreurs en régime permanent	Corrige l'erreur en régime permanent	Améliore la réponse transitoire, réduit le dépassement	équilibre entre l'état stable et la réponse transitoire
Dépasser	Réduit Généralement	Peut conduire à un dépassement	Dépend des paramètres de réglage	Dépend des paramètres de réglage
Temps de montée	Généralement court	temps de montée long	s'améliore grâce à l'action dérivée	Peut être ajusté en fonction des paramètres de réglage.
Application	Régulateur de vitesse, processus industriel	Contrôle de la température, contrôle du niveau	Robotique, contrôle de mouvement	Système d'automatisation

II.3 'PI' d'ordre fractionnaire :

II.3.1 Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont des systèmes définis par des équations différentielles d'ordre non entier (fractionnaire). Le calcul d'ordre fractionnaire (COF) est un

domaine des mathématiques qui étudie les dérivées et les intégrales d'ordres non entiers. Autrement dit, il s'agit d'une généralisation du calcul traditionnel qui mène à des concepts et des outils similaires, mais avec une application beaucoup plus large. Au cours des deux dernières décennies, le calcul fractionnaire a été redécouvert par les scientifiques et les ingénieurs, et son utilisation s'est étendue à de nombreux domaines, notamment dans le domaine de la théorie du contrôle.[15]

Les systèmes d'ordre fractionnaire suscitent un intérêt croissant dans plusieurs domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ils sont généralement modélisés par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ces systèmes sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. En raison de la complexité de ces fonctions, l'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est restée relativement limitée .[16]

II.3.2 Historique :

Le calcul fractionnaire a été introduit il y a plus de 300 ans.

En 1960, la première application réussie de ce calcul a eu lieu. Au cours des dernières décennies, il a été largement développé et utilisé dans divers domaines scientifiques et techniques.

Jusqu'au milieu du siècle dernier, de nombreux mathématiciens tels que N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grunwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H.J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz,

A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué au développement de cette discipline .

En 1974, le premier ouvrage entièrement dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié par K.B. Oldham et J. Spanier , après plusieurs années de collaboration entamée en 1968. En 1993, l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichel a rassemblé une série de définitions et de théories importantes sur ce domaine.

Aujourd'hui, l'intérêt pour le calcul d'ordre fractionnaire et ses applications continue de croître dans de nombreux secteurs. .

II.3.3 Domaines d'application des systèmes fractionnaires :

Les systèmes fractionnaires trouvent une application croissante dans divers domaines de la recherche. L'intérêt croissant pour ces systèmes réside dans leurs applications tant en sciences fondamentales qu'en sciences appliquées.

- En Automatique
- En Physique
- En Électronique
- En Chimie
- En Mécanique
- En Acoustique

II.3.4 Calcul fractionnaire :

Le calcul fractionnaire, qui inclut les opérateurs fractionnaires d'intégration et de différentiation, constitue un cas général des opérateurs d'intégration et de différentiation d'ordre non entier.

Les opérateurs d'intégration et de différentiation peuvent être généralisés en un seul opérateur fondamental ${}_aD_t^\alpha$, où α représente l'ordre de l'opération et t et a sont les limites de l'opération.

L'opérateur intégral-différentiel continu est défini comme suit :

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

Ou :

$${}_aD_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & R(q) > 0 \\ 1, & R(q) = 0 \\ \int_a^t (dt)^{-q}, & R(q) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Ainsi, a et t représentent respectivement les bornes de l'opération et l'ordre de l'opération. Un ordre avec une valeur négative indique une intégration, tandis qu'un ordre avec une valeur positive indique une différenciation. La théorie de la dérivée d'ordre fractionnaire a été principalement développée au 19^{ème} siècle. Il existe plusieurs définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire. Parmi elles, deux définitions importantes et largement utilisées sont celles de **Grunwald-Letnikov**, qui est peut-être la plus connue en raison de sa plus grande aptitude à la réalisation d'algorithmes de contrôle discrets.[17]

Où α représente l'ordre de l'opération, généralement $\alpha \in \mathbb{R}$. Les définitions les plus courantes et fréquemment utilisées de l'opérateur fractionnaire sont celles de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov. Avant d'exposer ces définitions, nous commencerons par présenter quelques fonctions en calcul fractionnaire, afin de faciliter la compréhension de ces définitions. [14]

Exemples :

1. Commande PI et PI fractionnaire :

1.1: Commande PI et PI fractionnaire d'un système 3ème ordres :

On prend comme exemple d'application un système dont la fonction de transfert est donnée par l'équation suivante :

$$G(s) = \frac{-2s^2 + 2s + 10}{s^3 + 10s^2 + 10s + 5}$$

Les paramètres de réglage obtenus à l'aide de la méthode de **Hrones-Reswick** sont les suivants : $K_P=0.75$, $\tau=3.1$

La figure II.3 montre la réponse du système après l'utilisation d'un correcteur PI et d'un correcteur PI fractionnaire.

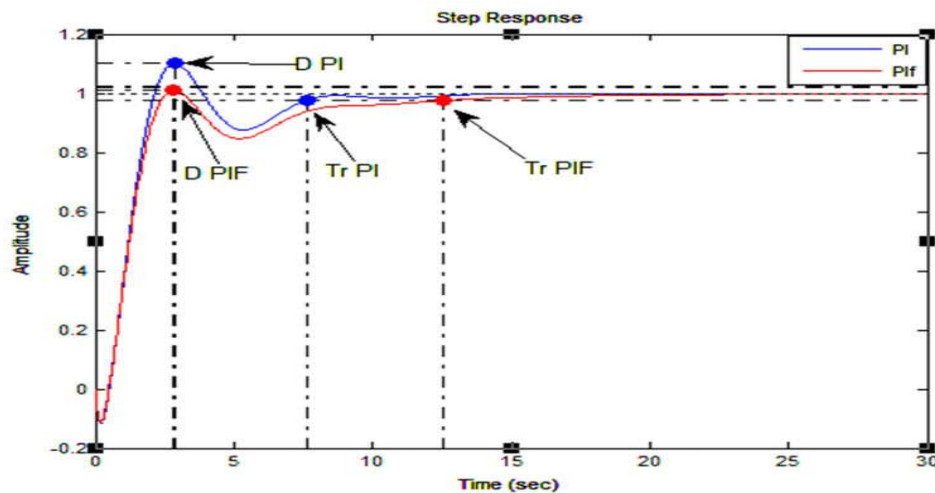


Figure II.3 : Commande PI et PI fractionnaire d'un système 3ème ordres

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques d'un correcteur PI et d'un correcteur PI fractionnaire pour différentes valeurs de α :

Correcteur ($\alpha, \alpha - 1$)	PI	PI fractionnaire
(0.1, 0.9)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 12.7s D : 0.091
(0.2, 0.8)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 12.9s D : 0.094
(0.3, 0.7)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.1s D : 0.099
(0.4, 0.6)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.3s D : 0.098
(0.5, 0.5)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.4s D : 0.094

Tableau II.2. Les caractéristiques d'un PI et PI fractionnaire de système 3ème ordres

1.2 Commande d'un four :

La fonction de transfert du four, telle que donnée par [18], est la suivante :

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2 + 531s + 1.5 \cdot 10^4}$$

La figure II.4 montre la sortie du système après l'application des commandes PI classique et PI fractionnaire.

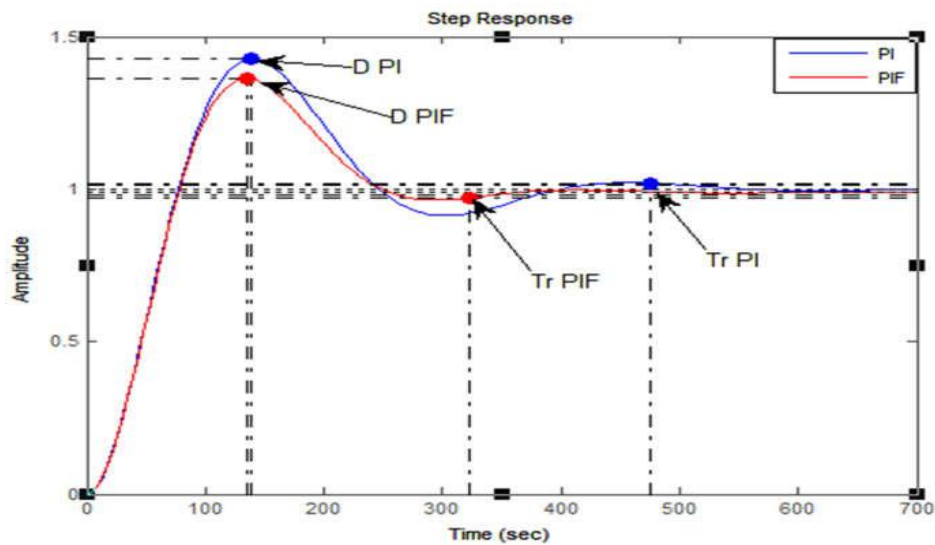


Figure II.4. Commande PI et PI fractionnaire d'un four

Le réglage effectué selon la méthode de **Hornes-Reswick** donne les valeurs suivantes :

$K_p=5.25$ et $\tau_i= 2.1$

Le tableau II.3 présente un résumé des caractéristiques du régulateur PI et du régulateur PI fractionnaire pour différentes valeurs de α .

Tableau II.3 : Caractéristiques du régulateur PI et du régulateur PI fractionnaire pour le four

contrôleur ($\alpha, \alpha - 1$)	PI	PI fractionnaire
(0.1, 0.9)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 355s D : 0.37
(0.2, 0.8)	Tr : 480s D : 0.43	Tr : 326s D : 0.37
(0.3, 0.7)	Tr : 480s D : 0.43	Tr : 242s D : 0.36
(0.4, 0.6)	Tr : 480s D : 0.43	Tr : 243s D : 0.36
(0.5, 0.5)	Tr : 480s D : 0.43	Tr : 244s D : 0.36

Commentaires :

D'après les tableaux II.2 et II.3, on peut observer que :

- La stabilité est garantie dans les deux cas, que ce soit pour le régulateur entier ou fractionnaire.
- L'utilisation de la commande PI fractionnaire a permis d'améliorer le temps de réponse (Tr) et de réduire le dépassement (D). [12]

II.4. théorie de la commande PID d'ordre fractionnaire :

Le contrôleur PID, en raison de sa simplicité, est largement utilisé dans l'industrie. Cependant, ses performances peuvent devenir insuffisantes, notamment en raison de la présence d'un retard significatif dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on se tourne vers d'autres algorithmes de régulation tels que le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage par régime glissant, et λ c.

Récemment, Podlubny a proposé une amélioration du comportement du contrôleur PID en introduisant le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Ce dernier comprend un intégrateur d'ordre α et un différenciateur d'ordre μ , où λ et μ appartiennent à l'ensemble des nombres

réels. L'équation de sortie du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel est exprimée sous la forme suivante :

$$u(t) = K_p[e(t) + 1/T_i D^{-\lambda} (e(t)) + T_d D^\mu (e(t))] \quad (II.69)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (II.68) avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimée sous la forme suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p = \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (II.70)$$

Où les paramètres d'intégration K_i et de dérivation K_d sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$k_i = \frac{k_p}{T_i} \quad (II.71)$$

$$K_d = k_p T_d \quad (II.72)$$

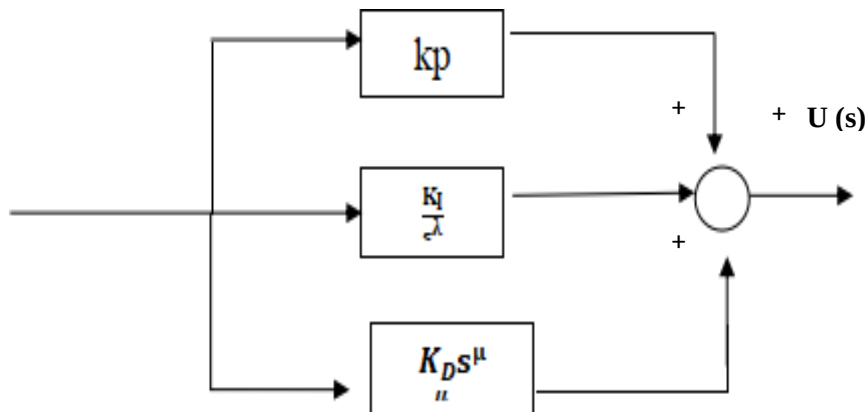


Figure II.5 : structure interne du correcteur d'ordre fractionnaire

Ainsi, la fonction de transfert du correcteur devient :

$$c(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s^{-\lambda}} + T_d s^\mu) \quad (II.73)$$

En choisissant $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ dans l'équation (II.72), on obtient le correcteur PID classique.

$\lambda = 1$, $\mu = 0$ et $\lambda = 0$, $\mu = 1$ donnent respectivement les correcteurs PI et PD

Classique,

$\lambda = 0$ et $\mu = 0$ donnent un correcteur proportionnel.

Tous ces types de correcteur PID classique sont des cas particuliers du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Fractionnaire donné par l'équation (II.73), comme le montre la figure (II.2)

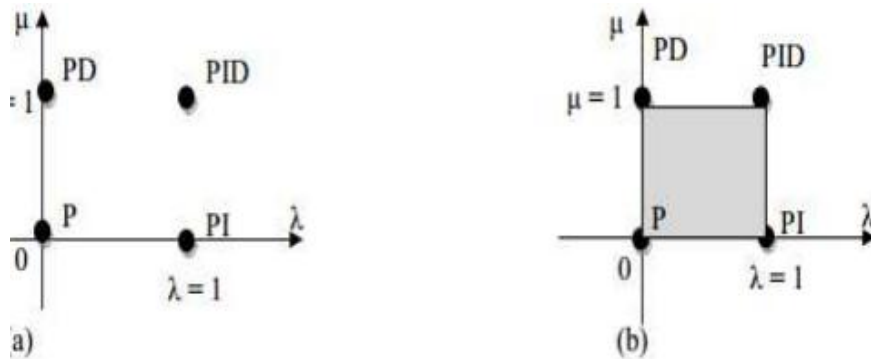


Figure II.6 : $PI^\lambda D^\mu$ et PID, (a) : ordre entier, (b) : ordre fractionnaire

L'avantage principal du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire réside dans sa capacité à bien contrôler la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage notable est que ces correcteurs sont moins sensibles aux variations des paramètres d'un système commandé, ce qui améliore la robustesse du système. Cela s'explique par le fait que les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire disposent de deux degrés de liberté supplémentaires, permettant un meilleur ajustement des propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire.

De plus, étant donné que les ordres λ et μ sont des nombres réels arbitraires, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ offre une grande flexibilité et permet un réglage plus précis des propriétés dynamiques des systèmes.[14]

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons revu les principes fondamentaux du correcteur PI, en mettant l'accent sur son rôle dans l'amélioration de la réponse des systèmes de régulation et l'augmentation de leur précision. Nous avons également présenté quelques-unes de ses applications pratiques, illustrant son importance dans le domaine industriel. En outre, avons cité les contrôleurs fractionnaires PI et PID, qui ont manifesté plus de flexibilité et meilleure capacité d'adaptation aux systèmes à dynamique complexes, bien que leur réalisation soit plus raffinée.

Chapitre3 :

**Résultats de simulation et
études comparatives**

III.1 Introduction :

Dans cette partie nous faisons une simulation comparative entre le régulateur PI classique et le régulateur PI d'ordre fractionnaire en utilisant une classe de systèmes linéaires.

Dans la première partie nous allons définir le logiciel MATLAB et sa boîte FOMCON Toolbox.

Ainsi dans la deuxième partie nous allons modéliser le moteur à courant continu avec une Fonction de transfert et nous allons utiliser la méthode élaborée dans le troisième chapitre Pour identifier les paramètres des régulateurs PI et PI^λ [18]. Puis à l'aide du logiciel MATLAB on fera une simulation.

Enfin nous ferons une comparaison entre les deux correcteurs.

Le but est de comparer et d'analyser le comportement des deux régulateurs avec divers consignes de test (réponse à une consigne en pas de perturbations, variation paramétrique, etc.) sous Matlab.

III.2 Outils utilisés pour la simulation :

MATLAB est une plateforme de programmation créée pour les scientifiques et les ingénieurs, fondée sur un langage matriciel qui est approprié aux mathématiques computationnelles.

Avec MATLAB, il est possible :

- 1- À analyser des données
- 2- À développer des algorithmes
- 3- À créer des modèles et des applications

MATLAB permet de faire passer des idées en applications concrètes, en facilitant :

Le passage de la recherche à la production

Le déploiement sur des systèmes embarqués ou d'entreprise

L'intégration avec Simulink to the model-based design (Model-Based Design)

III.2.1 Commande PI d'ordre entier :

La méthode de réponse à l'échelon de Ziegler–Nichols repose sur l'idée d'ajuster les paramètres des régulateurs à partir de caractéristiques simples de la réponse indiquée du système. Dans cette étude, cette approche est analysée sous l'angle de la synthèse robuste en boucle fermée. Les résultats obtenus offrent une meilleure compréhension des propriétés des régulateurs PI et PID, ainsi que des règles de réglage simples permettant d'assurer des performances robustes, notamment pour les systèmes dont la réponse à l'échelon est essentiellement monotone.[19]

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (\text{III. 74})$$

On exprime alors le signal d'entrée de commande (t) dans le domaine temporel par [20] :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt \quad (\text{III.75})$$

Le régulateur **PI** fait partie des différentes variantes des systèmes de commande, comme le **PI** classique, le **PI** incrémental ou encore celui qui sépare la partie intégrale des autres composantes le choix du type dépend de la nature du système à contrôler et des exigences de performance.

Dans un régulateur **PI**, l'action intégrale est combinée dans une seule commande. En revanche, dans la version fractionnaire appelée **PI $^\lambda$** on utilise un intégrateur d'ordre fractionnaire (λ), ce qui permet plus de flexibilité dans l'ajustement et l'amélioration des performances du système de commande. La section suivante abordera le contrôleur **PI $^\lambda$** fractionnel.

III.2.2 Commande PIFO :

Pour la famille de tous les systèmes stables du premier ordre avec retard temporel (FOPTD), il est possible de concevoir un contrôleur proportionnel - intégral d'ordre fractionnaire (FOPI) ou un contrôleur proportionnel - intégral - dérivé d'ordre entier (IOPID) de telle manière qu'une contrainte de phase plate et deux spécifications de conception, à savoir la fréquence de croisement du gain et la marge de phase, soient satisfaites simultanément. [21]

Le contrôleur PI d'ordre fractionnaire **PI $^\lambda$** peut être utilisé non seulement pour la commande de systèmes d'ordre fractionnaire, mais également pour celle de systèmes d'ordre entier.[1]

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} \quad (\text{III.76})$$

On exprime alors le signal d'entrée de commande (t) dans le domaine temporel

Par [20] :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i D^{-\lambda} e(t) \quad (\text{III.77})$$

Les gains proportionnel et intégral sont notés respectivement k_p et k_i . Le signal de commande $u(t)$ correspond à la sortie du contrôleur, tandis que $r(t)$ représente la consigne à suivre. Désigne la sortie du système. La fonction de transfert du contrôleur PI d'ordre fractionnaire est notée $C(s)$, et celle du procédé à commander est notée $G(s)$. [1]

III.3. Application à la commande de vitesse d'un moteur à courant continu :

Un moteur à courant continu (MCC) est un convertisseur électromécanique permettant de transformer l'énergie électrique reçue en énergie mécanique [14]romécanique permettant.

L'application proposée à cette méthode est le contrôle de vitesse d'un moteur à courant continu [22]. La conception de la commande et les résultats sont simulés dans l'environnement Matlab Simulink. [1]



Figure III.7. Moteur CC

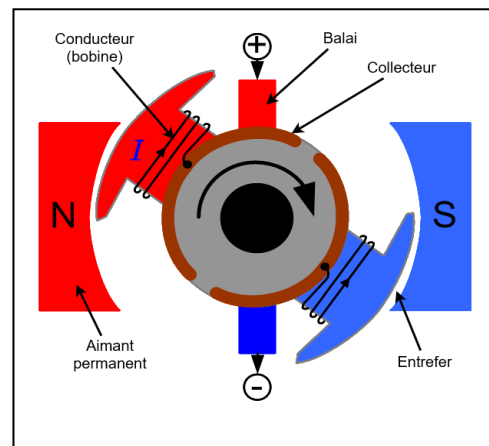


Figure II.8. Différent types de moteurs MCC

3.1 Modélisation du moteur à courant continu :

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape essentielle est exigée soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou pour le développement d'une procédure de diagnostic.

Nous considérons un moteur à courant continu alimenté par un hacheur.

A. Mise en équations :

Le schéma équivalent d'un moteur à courant continu est donné à la figure suivante :[14]

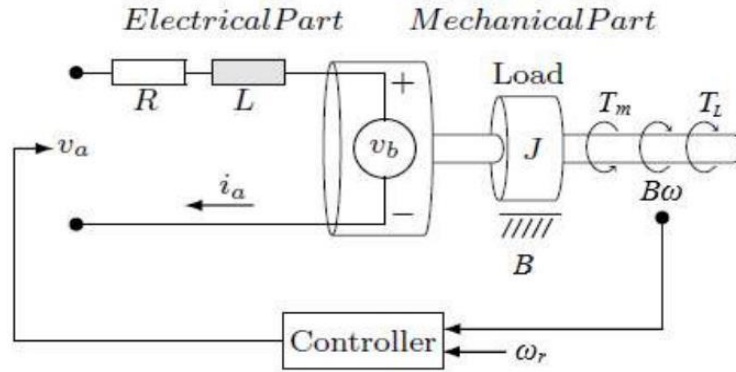


Figure. III.9: Schéma simplifié d'un MCC

Par le convertisseur et le moteur est régi par les équations différentielles suivantes :[4]

1) Équation électrique :

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{ke}{L}u(t) \leftrightarrow u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + key(t) \quad (\text{III.78})$$

2) Équation mécanique :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{ke}{L}i(t) - \frac{f}{J}y(t) + \frac{1}{J}Cr(t) \leftrightarrow J\frac{dy(t)}{dt} = ke.i(t) - f.y(t) - Cr(t) \quad (\text{III.79})$$

Où

i(t) : le courant d'induit

Y(t) : la vitesse angulaire du moteur

U(t) : la tension de commande

Cr(t) : le couple résistant (perturbation).

b). Hypothèses :

Cr(t)=0 (cas sans couple résistance pour simplifier)

$\frac{Y(s)}{U(s)}$, avec y(t) la vitesse angulaire et u(t) la tension appliquée.

En appliquant la transformée de Laplace on obtient la fonction de transfert Suivante :[1]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_e}{(R+sL)(Js+f)+k_e^2} = \frac{\Omega(s)}{V(s)} \quad (\text{III.80})$$

Selon l'équation (III.80), la vitesse de rotation Ω représente la sortie mécanique du système, tandis que le courant d'armature V .

Ainsi, le schéma bloc représentant le système peut être illustré comme suit :

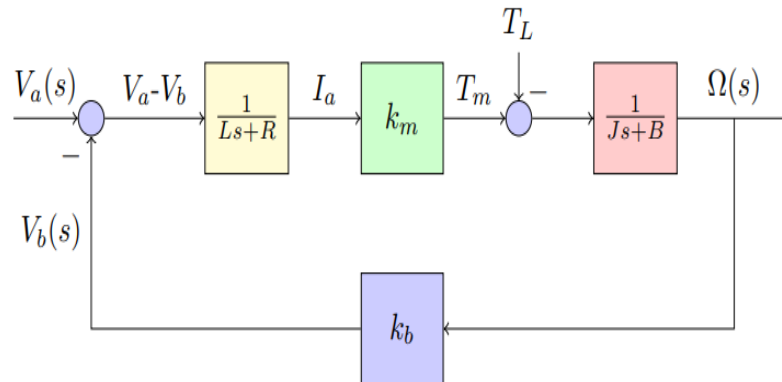


Figure III. 10: le schéma block du MCC

Ce moteur est à faible puissance, ses caractéristiques sont :

Tableau II.4 : caractéristiques mcc

Paramètre	Valeur
Moment d'inertie	, $J=0.018 \text{ kg. M}^2$
Coefficient de d'amortissement	$f=0.0055 \text{ nn / rad.s}$
Constant d'amplification	$K_b = 0.05 \text{ V/rad-1}$
Constant de couple moteur	$k_e = 1$
Résistance du moteur	$R=6.25 \text{ } \Omega$
Inductance du moteur	$L=0.024 \text{ H}$

Exemples et Simulation:

1-La commande PI d'ordre entier :

Exemple 1 :fonction de transfert d'un système typique : un système du 2ème ordre, utilisé très souvent en automatisme et contrôle des systèmes.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ω_n : pulsation propre (rad/s)
- ξ : facteur d'amortissement (sans unité)

Les parameters:

- ✓ $\omega_n=4$ rad/s
- ✓ $\xi=0.5$

La figure III.11. représente la réponse à l'échelon system 2 éme order:

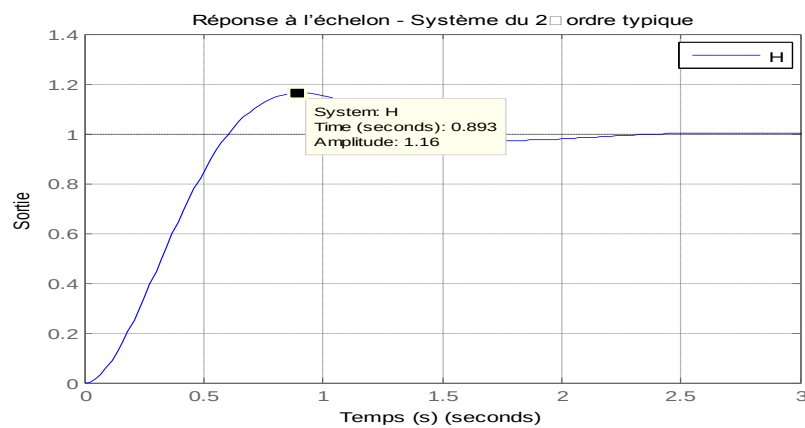


Figure III.11: la réponse à l'échelon system 2 éme order

Exemple 2 :On considère comme un exemple d'application un système de fonction de transfert d'une ' système instable (pôle réel positif)''

$$H(s) = \frac{1}{s-2}$$

La courbe suivante représente laréponse à l'échelon system instable (pôle réel positif)

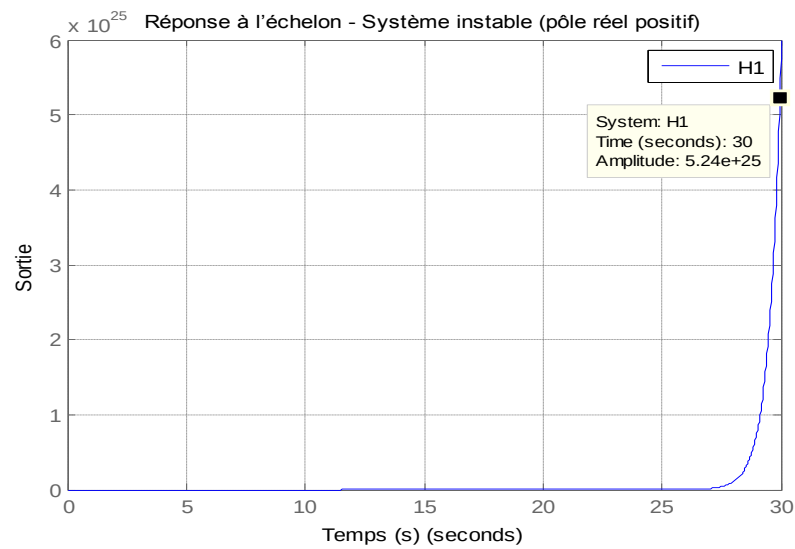


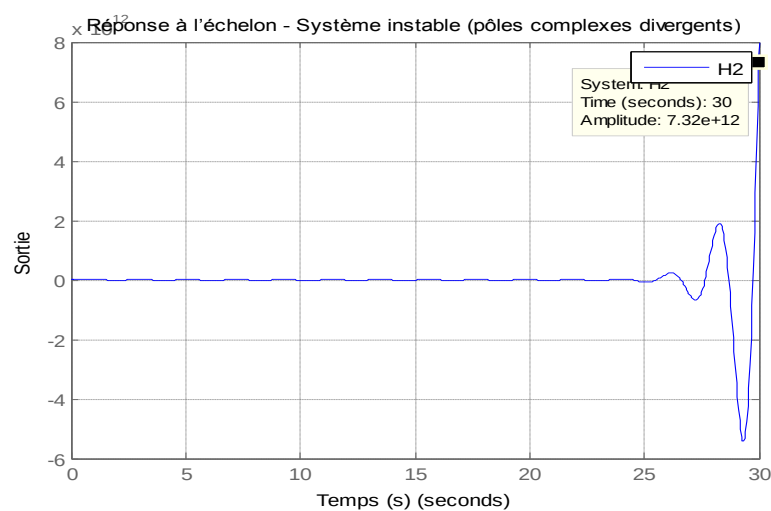
Figure III.12 : Réponse à l'échelon system instable (pôle réel positif)

Exemple 3 : Deux pôles complexes instables

La fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{10}{10s^2 - 2s + 10}$$

La figure III.13. Système instable (pôles complexes divergents)



La figure III.13. Système instable (pôles complexes divergents)

+ Commande PI d'ordre fractionnaire :

Exemple1: Fonction de transfert typique d'ordre fractionnaire

Un système simple du **1^{er}d'ordre fractionnaire** est donné par la fonction de Transfer suivante :

$$\frac{1}{1.5s^{0.86} + 1}$$

La courbe suivante représente la Réponse à l'échelon - Système fractionnaire d'ordre 0.86

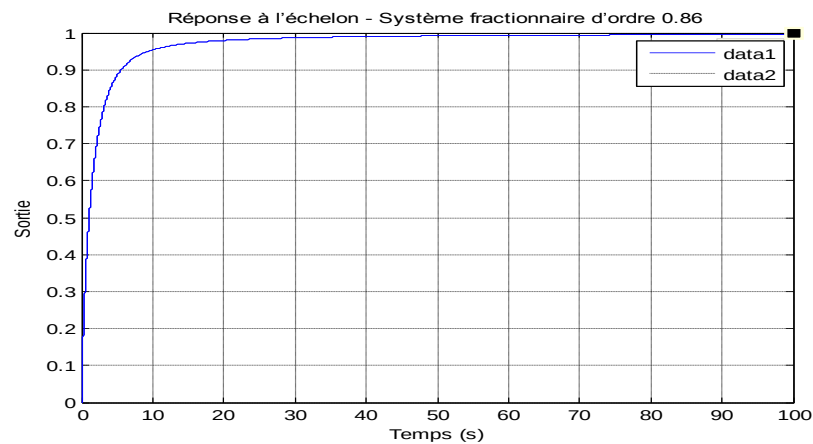


Figure. III.14Système fractionnaire d'ordre 0.86

Exemple 2 : Système du 2^{ème} ordre fractionnaire :

La fonction transfer d'un système est :

$$\frac{25}{s^{1.6} + 3s^{0.8} + 25}$$

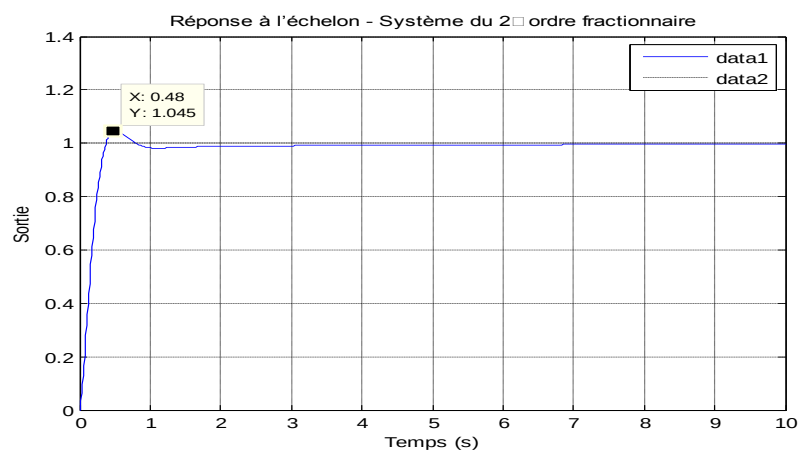


Figure. III.15 : Système du 2^{ème} ordre fractionnaire

III.5 : Simulation et Résultats

✚ Cas 1 : PI classique

La fonction de transfert du MCC d'ordre entier pour $L = 0.5; K = 0.01; J = 0.01; b = 0.1$; est donnée comme suit :

$$F(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001}$$

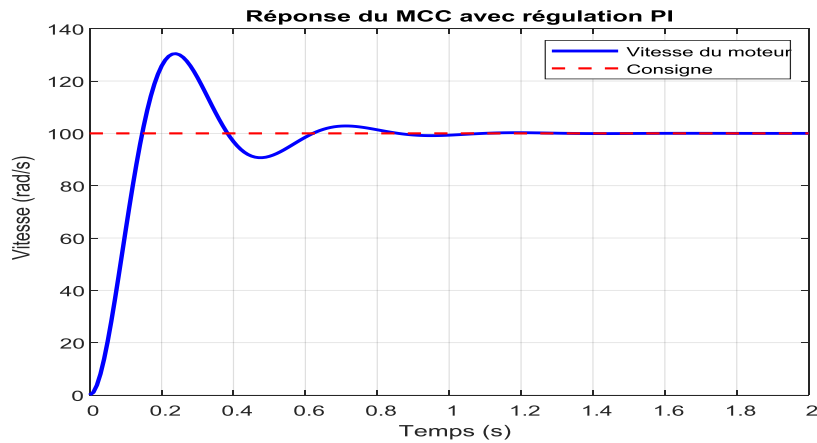


Figure. III.16 : Commande PIOE

✚ Cas 2 : PI fractionnaire pour différentes valeurs de λ

Pour la même fonction de transfert avec un PI fractionnaire (PI^λ)

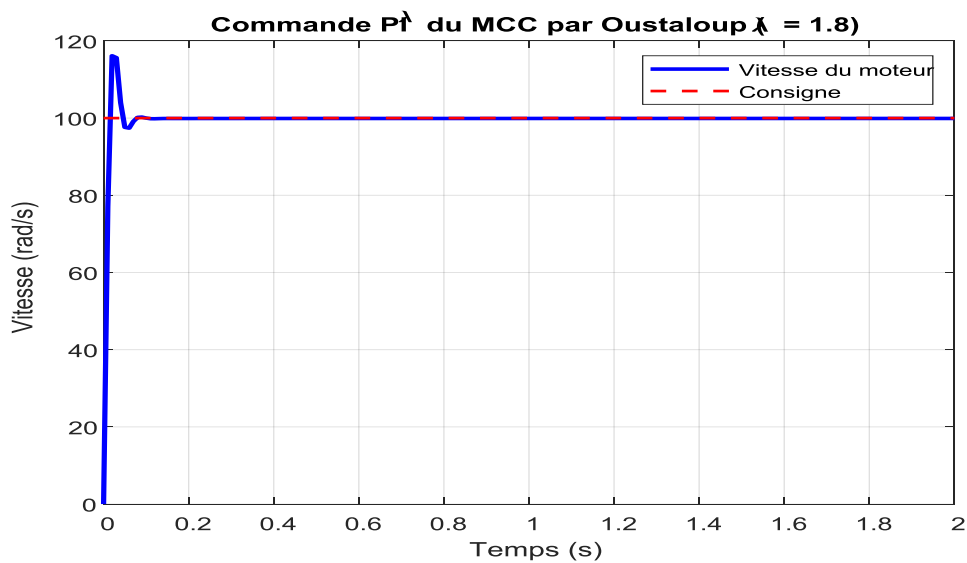


Figure III.17 : commande PI^λ pour $\lambda=1.8$

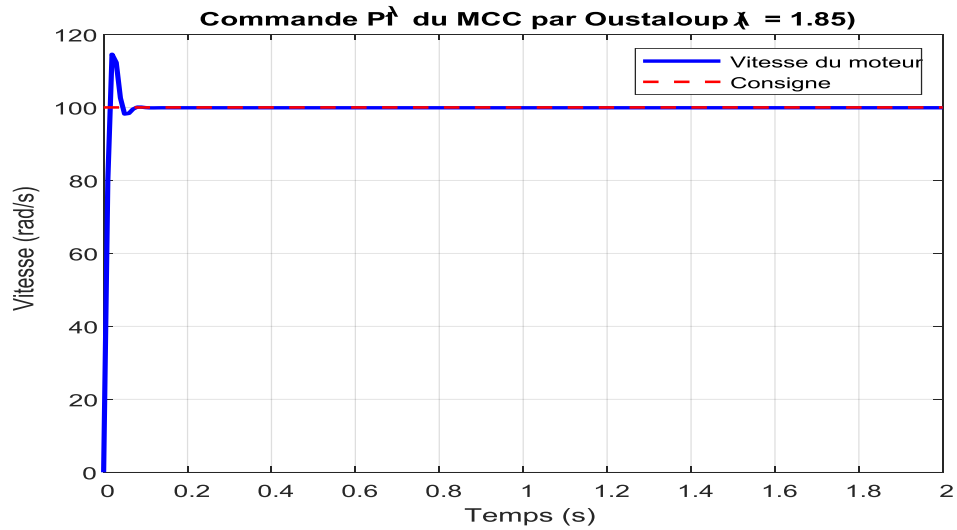


Figure III.17 commande P^{λ} pour $\lambda=1.85$

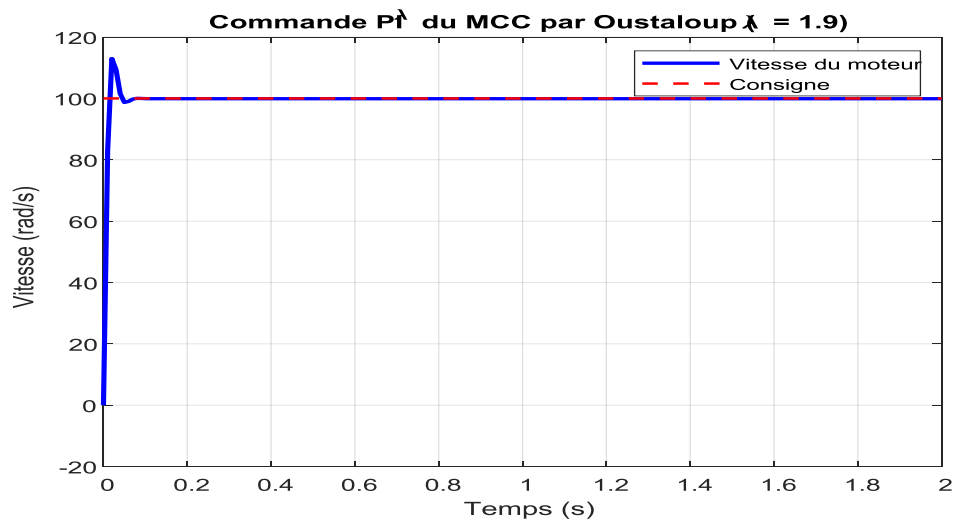


Figure III.17 commande P^{λ} pour $\lambda=1.90$

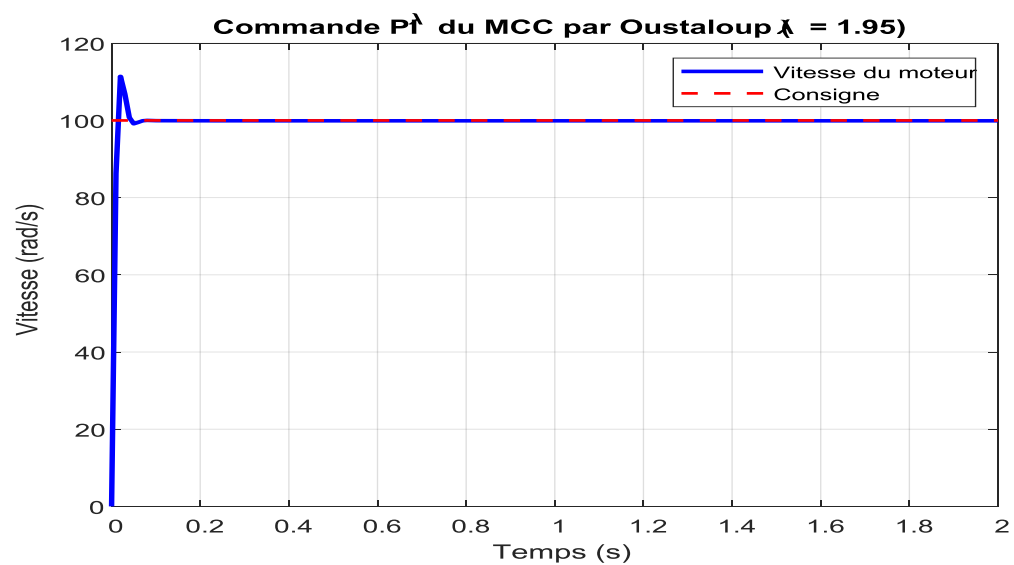


Figure III.17 commande P^{λ} pour $\lambda=1.95$

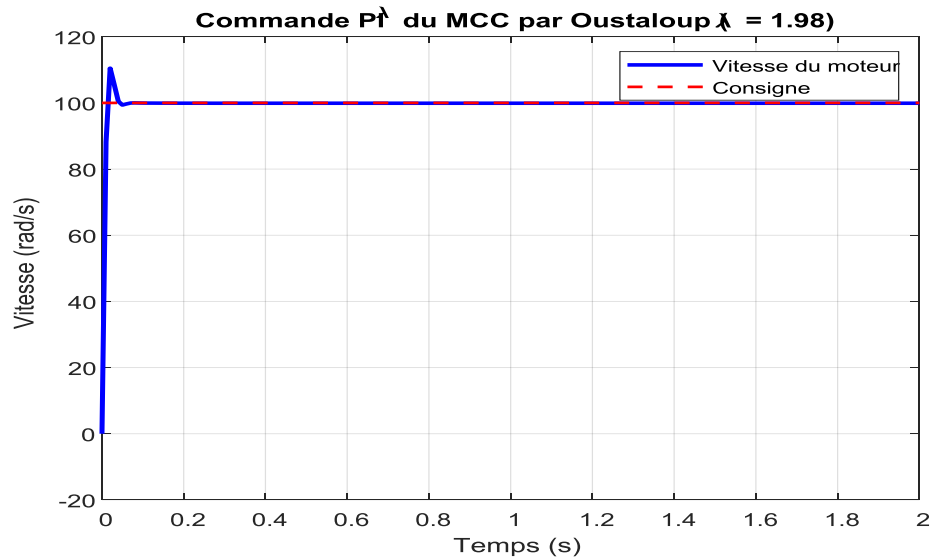


Figure III.17 commande PI^λ pour $\lambda=1.99$

III.6. Comparaison et commentaires

L'opérateur fractionnaire $s^{-\lambda}$ permet d'interpoler entre une action proportionnelle et intégrale pure. Cela donne une **action mémoire plus fine** : une meilleure adaptation à l'historique du système.

-Robustesse

- **PI classique** : Moins robuste face aux variations de paramètres.
- **PI fractionnaire** : Généralement **plus robuste** aux perturbations et aux incertitudes du système.

-Applications

- **PI classique** : Systèmes linéaires simples, procédés bien connus.
- **PI fractionnaire** : Systèmes non linéaires, modèles incertains, dynamique complexe (ex : bio-ingénierie, robotique, réseaux électriques).

-Réponse temporelle

PI classique :

- Réponse souvent rapide mais sujette à des dépassements si mal réglé.
- Moins tolérant aux variations du modèle.

PI fractionnaire :

- **Réponse plus douce**, avec **moins de dépassement** et **temps de réponse mieux ajusté**.
- Permet une **meilleure suppression du bruit** dans le signal de commande.

-Paramètres à ajuster :

- **PI classique** : 2 paramètres (K_p, K_i)
- **PI fractionnaire** : 3 paramètres (K_p, K_i, λ) $\Rightarrow$ plus de **degrés de liberté**, mais aussi plus de complexité de réglage.

-Méthodes de réglage :

- **PI classique** : Ziegler-Nichols, méthode de place, boucle fermée.
- **PI fractionnaire** : Optimisation numérique, algorithmes évolutionnaires, techniques fréquentielles, méthode d'Oustaloup pour l'approximation de s^λ .

Conclusion

Le régulateur PI classique, grâce à sa simplicité, sa facilité d'implémentation et son efficacité dans de nombreuses situations industrielles, reste un choix standard pour les systèmes linéaires et bien modélisés. Cependant, ses performances peuvent être limitées lorsqu'il s'agit de gérer des systèmes complexes, incertains ou non linéaires.

À l'inverse, le régulateur PI d'ordre fractionnaire offre une plus grande flexibilité de réglage grâce au paramètre d'ordre fractionnaire λ , permettant une meilleure robustesse, une meilleure réponse transitoire, et une adaptabilité accrue face aux perturbations et incertitudes. Ces avantages se paient toutefois par une complexité mathématique et numérique plus importante, nécessitant des outils spécialisés pour sa conception et son implémentation.

- Le PI classique convient aux applications standards où simplicité, coût et rapidité de mise en œuvre priment.
- Le PI fractionnaire est recommandé pour les systèmes exigeants en termes de performance, robustesse ou précision, notamment dans les domaines à dynamique complexe.

Le choix entre ces deux types de régulateurs dépend donc étroitement du contexte d'application, du niveau de complexité du système à contrôler et des ressources disponibles pour la conception et l'implémentation du contrôleur.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans cette étude, nous avons réalisé une comparaison entre le régulateur proportionnel-intégral classique (PI) et le régulateur proportionnel-intégral d'ordre fractionnaire (PIFO) dans un système linéaire exprimé par le moteur à courant continu (MCC). Le but principal était de comparer l'efficacité du contrôleur fractionnaire par rapport au contrôleur conventionnel sur la base de l'amélioration de la qualité de réponse, de diminution du dépassement, de réduction du temps de stabilisation et de suppression de l'erreur statique.

À travers les simulations et l'analyse des résultats, nous avons constaté que le régulateur PIFO offre une nette amélioration des performances dynamiques du système. Il permet une réponse plus rapide, une réduction du dépassement, ainsi qu'un meilleur comportement en régime permanent. Ces avantages sont attribués à la flexibilité offerte par l'ordre fractionnaire, qui permet un ajustement plus précis du comportement du système.

Cependant, l'implémentation des régulateurs fractionnaires reste relativement complexe sur le plan numérique, notamment en temps réel. Cela nécessite le recours à des méthodes avancées telles que les algorithmes intelligents (comme PSO ou GA) pour optimiser automatiquement les paramètres du contrôleur et garantir un compromis entre performance et faisabilité.

En conclusion, cette étude met en évidence que le régulateur PI d'ordre fractionnaire n'est pas seulement une alternative au régulateur classique mais est une importante vers un contrôle plus précis, flexible et adapté aux besoins des systèmes contemporains.

Perspectives

En tenant compte des résultats obtenus dans cette étude comparative entre la commande PI classique (PIOE) et la commande PI d'ordre fractionnaire (PIFO), plusieurs recommandations peuvent être proposées en vue d'orienter les travaux futurs et d'optimiser l'exploitation des résultats :

- ✚ Utiliser le régulateur PI fractionnaire pour les systèmes qui exigent très sérieusement de l'exactitude et une réduction de l'erreur statique.
- ✚ Utiliser des algorithmes d'optimisation intelligents (comme PSO ou GA) pour réguler automatiquement les paramètres du contrôleur.

- ✚ Étendre le champ d'étude aux systèmes non linéaires ou incertains pour essayer la robustesse du régulateur fractionnaire dans des applications complexes.
- ✚ Mettre en œuvre le contrôleur en temps réel sur une carte embarquée (comme Arduino ou STM32) pour tester son efficacité pratique.

ملخص:

تتناول هذه المذكرة دراسة مقارنة بين متحكمين في أنظمة التحكم: المتحكم التناسبي-التكاملي التقليدي (PI) والمتحكم التناسبي-التكاملي من الرتبة الكسرية (PIFO) ، وذلك بتطبيقهما على نموذج خطي يتمثل في محرك تيار مستمر (MCC).

تمت نمذجة النظام وتصميم كلا المتحكمين باستخدام بيئة MATLAB/Simulink ، مع تحليل استجابة النظام من حيث السرعة، الاستقرار، نسبة التجاوز، والدقة في التتبع. أظهرت نتائج المحاكاة أن المتحكم PIFO يوفر أداءً أفضل مقارنة بالمتحكم التقليدي، بفضل مرونته في ضبط المعاملات وتحكمه الدقيق في السلوك الديناميكي للنظام. ورغم الصعوبات المرتبطة بتعقيد التنفيذ العددي، فإن هذا النوع من التحكم يُعد بديلاً فعالاً، وقابلاً للتطوير من خلال دمج تقنيات الذكاء الاصطناعي أو تطبيقه على أنظمة أكثر تعقيداً في المستقبل. الكلمات المفتاحية : الحساب الجزئي الجزئي PI الكلاسيكي

Résumé :

Ce mémoire propose une étude comparative entre deux types de régulateurs utilisés dans les systèmes de contrôle : le régulateur classique proportionnel-intégral (PI) et le régulateur proportionnel-intégral d'ordre fractionnaire (PIFO). L'application a porté sur un système linéaire représenté par un moteur à courant continu (MCC).

La modélisation du système ainsi que la conception des deux régulateurs ont été effectuées à l'aide de l'environnement MATLAB/Simulink.

L'analyse des performances s'est appuyée sur plusieurs critères tels que le temps de réponse, la stabilité et la précision. Les résultats des simulations montrent que le régulateur PIFO offre de meilleures performances grâce à sa capacité accrue de réglage fin des paramètres de commande et à une meilleure adaptation au comportement dynamique du système. Bien que sa mise en œuvre numérique soit plus complexe, ce type de régulation constitue une alternative prometteuse, ouvrant des perspectives intéressantes, notamment par l'intégration de méthodes d'intelligence artificielle ou par son application à des systèmes plus sophistiqués.

Mot-cles : Calcul fractionnaire, PI classique, PI fractionnaire, MCC

Abstract :

The thesis is a comparative analysis of two controllers utilized in automatic control systems: the conventional Proportional-Integral (PI) controller and the Fractional Order Proportional-Integral (PIFO) controller. The system under application is a linear system shown by a DC motor (MCC).

Both system modeling and controller design were carried out using MATLAB/Simulink. Performance analysis was performed in terms of several parameters, including response time, stability, overshoot, and tracking accuracy. Simulation indicated that the PIFO controller gives better performance as a result of its efficient tuning and improved adaptability to the dynamic characteristics of the system. Despite the numeric implementation complexity, the fractional-order controller represents a promising choice, and its potential in the future includes integration with artificial intelligence techniques or use in more complex systems.

Keywords : Fractional calculus, Classical PI, Fractional PI, DCM.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] : B'nejjara, M., & Khettab, K. (2024). *Amélioration des performances des systèmes industriels par la commande PID adaptative fractionnaire* (Mémoire de Master, Université de M'sila).
- [2] : **N'Doye, I.** (2011). *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires* [Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy I et Université Hassan II Aïn Chock – Casablanca.
- [3] : Racewicz, S. (2010). *Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble et Université Technologique de Gdansk).
- [4] : **Bensafia, Y.** (2016). *Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes* (Thèse de doctorat, Université du 20 Août 1955, Skikda, Algérie).
- [5] : Matignon, D., & d'Andréa-Novel, B. (1996). Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *Computational Engineering in Systems Applications*, 2, 952–956.
- [6] : **Terchi, N, Barka, N, & Abdelhakim, I.** (2024). *Commande robuste des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire*. Université Mohamed Boudiaf - M'sila.
- [7] : Lahouar, K., & Silini, A. (2020). *Étude comparative de la commande PID classique et la commande PID d'ordre fractionnaire : Application à un moteur à courant continu* (Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf de M'sila).
- [8] : **Benzahia, H., Belouadah, B., & Khettab, K.** (2022). *Utilisation des méthodes d'identification pour l'approximation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire* (Mémoire de master, Université de M'sila).
- [9] : Oust loup, A. (1991). *La commande CRONE*. Paris : Hermès Science Publications.
- [10] : Oust loup, A., Moreau, X., & Nouillant, M. (1996). The CRONE suspension. *Control Engineering Practice*, 4(8), 1101–1108.
- [11] : Chien, C. J., Sun, K. C., Wu, A. C., & Fi, L. C. (1996). A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants. *Automatica*, 32(6), 833–848.

[12] :GeeksforGeeks. (2024, January 19). *Proportional Integral Controller – Control System*. Retrieved May 25, 2025

[13]: Boukerche, G., & MEMOIRE, D. M. (2017). Etude et Synthèse d'un Contrôleur PI et Application. *Mémoire de*

[14]: : Benali, A. (2020). *Commande PI adaptative robuste des systèmes linéaires* (Mémoire de fin d'études de Master). Université Mohamed Boudiaf de M'sila.

[15] : Boubidi, A. (2022). *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes fractionnaires* (Thèse de doctorat, Université 8 Mai 1945 de Guelma).

[16] : Tarik, G., & belkacem Djamila, B. (2017). *Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire* (Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri).

[17] : Bensafia, Y., Ladaci, S., & Khettab, K. (2015). Using a fractionalized integrator for control performance enhancement. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 11(6), 2013–2028.

[18]: Bensafia, Y., Khettab, K., & Ladaci, S. (2012, novembre). *Robustness test of the Fractional Adaptive Control*. Communication présentée à la 3^e Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications (SOFA 2012), Université 08 Mai 1945, Guelma, Algérie.

Référence :

[18] :**Elarbi, R. S.** (2022). *Réglage optimal de la commande PID fractionnaire par PSO* (Mémoire de Master, Université Saad Dahlab de Blida 1).

[19]:**Åström, K. J., & Hägglund, T.** (2004). Revisiting the Ziegler–Nichols step response method for PID control. *Journal of Process Control*, 14(6), 635–650.

[20]: Liang, T. N. (2011). *Fractional order PID controllers and analysis of stability region for fractional order systems with uncertain parameters* (Thèse de doctorat). Xidian University.

[21]:Luo, Y., & Chen, Y. Q. (2012). Stabilizing and robust fractional order PI controller synthesis for first order plus time delay systems. *Automatica*, 48(9), 2150–2156.

[22]:Keziz, B., Bouziane, K., & Djouambi, A. (2020). A new fractional order controller tuning method based on Bode's ideal transfer function. *International Journal of Dynamics and Control*, 8(4), 932–942.