



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Mohamed Essaghir Ben rahmoune

Sujet

**Problème de Cauchy pour les équations différentielles
d'ordre fractionnaires**

Devant le jury :

Mr. Mostefa NADIR

Prof. Univ de M'sila

Président

Mr. Bachir GAGUI

MCA. Univ de M'sila

Encadreur

Mr. Amina KHIRANI

MCB. Univ de M'sila

Examineur

Mr. Nabila SEGHIRI

MAA. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2017 / 2018

REMERCIEMENTS

Merci à Dieu le tout puissant miséricordieux qui m
à donné La force et le patience d'accoupler Ce
travail.

Je tiens à exprimer ma plus grande de
reconnaissance et mes vifs remerciements à mon
directeur de recherche " Gagui Bachir" pour Ces
conseils , ses orientations.

Je remercie aussi tous ceux qui ont participé de
près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements s'étendent également à tous
les travailleurs du département du mathématique
et l'informatique.

DÉDICACES

Je Dédie ce modeste travail

Aux deux personnes les plus chères à mon cœur et
à ceux qui ne peuvent pas compter leurs vertus.

Mon père et ma mère qui Dieu les garde

A mes chères sœurs et mes frères

A tout mes amis

A tout les étudiants de 2^{ème} MASTER MATH
2018.

A tout ceux qui ont tombés de mon stylo
accidentelles

تعتبر المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسائل من نوع كوشي الخاصة بالمعادلات التفاضلية ذات الصيغة الكسرية وهذا من اجل اثبات وجود و وحدانية الحل حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى ريمان ليوفيل وباعتماد على تقنيات مكيفة على حسب نوع المسألة منها الخطية والغير الخطية

الكلمات المفتاحية : فضاء لوبيغ, فضاء الدوال المستمرة , مؤثر ريمان ليوفيل , مؤثر كابتو, مسائل كوشي.

Abstract

Fractional differential equations are generalization of classical differential equations.

In this memory we study how to proof the existence and uniqueness of solutions to Cauchy type problems for ordinary differential equations of fractional order particularly of Riemman-Liouville operator using a different techniques adapted for linear and non linear problems.

Keywords : Lebesgue spaces, Spaces of Continuous Functions Riemman-Liouville operator, Caputo operator, Cauchy problem

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques. Dans ce mémoire on a traité le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre fractionnaires pour prouver l'existence et l'unicité de ces types de problème, particulièrement sur l'opérateur différentiel de Riemann-Liouville, en utilisant des techniques adaptés aux différents types linéaire et non linéaire.

Mots clés : Espace de Lebesgue, Espace de fonction continue, L'opérateur de Riemann-Liouville, L'opérateur de Caputo, Problème de Cauchy.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Notions de bases et préliminaires	3
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.2 Théorèmes fondamentaux	6
1.2.1 Principe du point fixe	6
1.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	7
2 Calcul Fractionnaire	9
2.1 Fonctions Spéciales	9
2.1.1 Fonction Gamma	9
2.1.2 Fonction Bêta	11
2.1.3 Fonction Mittag-Leffler	12
2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a; b]$	13
2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville	14
2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	20
2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	24
2.4.1 Linéarité	24
2.4.2 Règle de Leibniz	24
2.4.3 Intégration par parties	25
2.4.4 Transformée de Laplace	25
2.4.5 Transformée de Fourier	27

3	Existence et Unicité d'un Problème de Cauchy pour EDF	29
3.1	Problème fractionnaire de type Cauchy au sens Riemann-Liouville	29
3.1.1	Position du problème	29
3.1.2	Équivalence le problème de type Cauchy et de l'équation intégrale de Volterra	32
3.1.3	Existence et Unicité	34
	Conclusion	38
	Bibliographie	39

INTRODUCTION

Le sujet du calcul fractionnaire a acquis une popularité et une importance considérables au cours des trois dernières décennies, en raison principalement de sa démonstration d'applications dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie, apparemment diversifiés et largement répandus. Il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre les équations différentielles et intégrales, et divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations dans une et plusieurs variables.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hôpital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hôpital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837.

Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leur apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, Weyl et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique...etc

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de problème de Cauchy pour la dérivée fractionnaire. Ce mémoire se compose d'un total de trois chapitres. Le premier chapitre (préliminaires) fournit quelques définitions de base et les propriétés de tels sujets de l'analyse mathématique que les espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre. notions et définitions de la dérivation et d'intégration fractionnaire au sens de Riemann Liouville, et Caputo, et quelques propriétés

Le dernier chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^\alpha y(x) = f(x), \quad (\alpha \succ 0, 0 < x < T < \infty) \\ (\mathcal{D}_0^{\alpha-k} y)(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Et pour l'équation différentielle d'ordre fractionnaire non linéaire qu'il est écrite de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{D}_a^\alpha y(x) = f[x, y(x)], \quad (\Re(\alpha) > 0, x > a), \\ (\mathcal{D}_a^{\alpha-k} y)(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (k = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Où $\mathcal{D}^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α défini par :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASES ET PRÉLIMINAIRES

Dans cette section on rappelle les notions et les résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous présentons des définitions des espaces, p -intégrables, fonctions absolument continues et continues

Espace des fonctions intégrables

Définition 1.1.1. Soient Ω un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et p un nombre réel positif.

On note par $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) les classes de toutes les fonctions mesurables f définies dans Ω , où

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty. \quad (1.1.1)$$

La fonctionnelle $\| \cdot \|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1.1.2)$$

est une norme dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1.2. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable}, \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}. \quad (1.1.3)$$

La fonctionnelle $\| \cdot \|_{L^\infty}$ définie par

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}, \quad (1.1.4)$$

est une norme pour $p = \infty$.

Remarque 1.1.1. Si $f \in L^\infty$ on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega \quad (1.1.5)$$

Lemme 1.1.1. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{L^p}$ est un espace de Banach.

L'espace $L^2(\Omega)$, muni de la norme $\| \cdot \|_{L^2}$ est un espace de Hilbert.

Inégalité de Holder

Soit p, q, r des nombres de $[1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ le produit fg appartient à L^r , et on a

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad (1.1.6)$$

Inégalité de Young

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1; +\infty[$ t.q $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (1.1.7)$$

Inégalité de Minkowski

Soit $p \in [1, \infty]$ et f et g dans L^p on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1.1.8)$$

Espaces des fonctions continues

Définition 1.1.3. Soit $\Omega = [a; b] (-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui leurs dérivées d'ordre n sont continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.9)$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (1.1.10)$$

Théorème 1.1.1 (Ascoli-Arzelà). Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est borné, i.e, il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\|\varphi(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in J, \text{ et tout } \varphi \in A$$

ii) L'ensemble A est équicontinue, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que :

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < \varepsilon \text{ pour tout } x_1, x_2 \in J \text{ et tout } \varphi \in A$$

l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Espaces des fonctions absolument continues

Définition 1.1.4. Soit $\Omega = [a; b]$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) un intervalle fini on note par $AC[a; b]$ l'espace des fonctions absolument continues, c'est-à-dire l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables

$$f(x) \in AC[a; b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, (\varphi(t) \in L[a; b]) \quad (1.1.11)$$

Ainsi, toute fonction f absolument continue possède une dérivée sommable $f' = \varphi(t)$, presque partout sur $[a, b]$, et donc $c = f(a)$.

pour $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, on désigne par $AC^n([a; b])$ l'espace des fonctions $(n - 1)$ fois dérivable sur $[a; b]$, telle que $f^{(n-1)} \in AC([a; b])$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \{f : [a; b] \mapsto C \text{ et } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a; b], (D = \frac{d}{dx})\} \quad (1.1.12)$$

Lemme 1.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $AC^n[a; b]$ est l'espace des fonctions f s'écrivent sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k \quad (1.1.13)$$

Où $\varphi(t) \in L[a; b]$ et $C_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ sont des constantes arbitraires telle que :

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.1.5. Soit $\Omega = [a; b]$ un intervalle fini et $\lambda \in \mathbb{C} (0 \leq \Re(\lambda) < 1)$, on note par $C_\lambda[a; b]$ l'espace des fonctions f définies sur $]a; b]$ telle que $(x-a)^\lambda f(x) \in C[a; b]$.

La fonctionnelle $\|\cdot\|_{C_\lambda}$, définie par

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x-a)^\lambda f\|_C \quad (1.1.14)$$

est une norme dans $C_\lambda[a; b]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $C_\lambda^n[a; b]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre $(n-1)$ sur $[a, b]$ et ont la dérivée $f^{(n)}(x)$ d'ordre n , telle que $f^{(n)}(x) \in C_\lambda[a; b]$, La fonctionnelle $\|\cdot\|_{C_\lambda^n}$ est définie par

$$C_\lambda^n[a; b] = \{f : \|f\|_{C_\lambda^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\lambda}\} \quad (1.1.15)$$

Espaces des fonctions absolument continues avec poids

Soit $\Omega = [a; b]$ un intervalle fini on note par $AC_{\lambda, \mu}^n$ l'espace des fonctions absolument continues avec poids admet dérivable $n-1$ fois et $\lambda^{n-1}[x^\mu f(x)]$ est absolument continue sur $[a; b]$, telle que

$$AC_{\lambda, \mu}^n[a; b] = \{f : [a; b] \mapsto \mathbb{C}; \lambda^{n-1}[x^\mu f(x)] \in AC, \mu \in \mathbb{R}, \lambda = x \frac{d}{dx}\}, \quad (1.1.16)$$

1.2 Théorèmes fondamentaux

1.2.1 Principe du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Définition 1.2.1. Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T .

Théorème 1.2.1. Soit T un opérateur continu dans un espace de Banach E dans lui-même, et on définit la suite (x_m) par

$$x_{m+1} = T(x_m), m = 0, 1, \dots \quad (1.2.1)$$

qui converge vers $x = x^*$, pour $x_0 \in E$, alors x^* c'est le point fixe de l'opérateur T , c'est-à-dire

$$x^* = T(x^*) \quad (1.2.2)$$

Preuve. On peut le voir directement d'après l'équation (1.2.1), et que l'opérateur T est continu

$$x^* = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} T(x_m) = T(x^*).$$

Théorème 1.2.2. Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|. \quad (1.2.3)$$

Remarque 1.2.1.

- i) Si $k \geq 0$ dans la relation (1.2.3), T est dit Lipschitzienne.
- ii) L'application Lipschitzienne est nécessairement continue.
- iii) Si $k < 1$ dans la relation (1.2.3), T est dite contraction.
- iv) Si $k = 1$ dans la relation (1.2.3), T est dit non expansive.

Théorème 1.2.3. Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E .

Soit f une application contractante de F dans E , alors il existe un unique $z \in F$, tel que

$$f(z) = z.$$

Théorème 1.2.4. Si T un opérateur continu dans un espace de Banach E , tel que pour $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur T^m est contractant, alors l'équation $T^m x = x$, admet une seule solution, cette solution c'est le point fixe.

Théorème 1.2.5 (Picard). Si E est un espace de Banach et f est contractante, alors f admet un unique point fixe.

Théorème 1.2.6 (Schauder). Soit (E, d) un espace métrique complet, soit X une partie convexe et fermée de E , et soit $\{A : X \rightarrow X\}$ une application telle que l'ensemble $Ax : x \in X$ est relativement compact dans E . Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.2.7 (Schaefer). Soient X un espace de Banach et $A : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu, Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u, \text{ pour un certain } \lambda \in]0, 1[\}, \quad (1.2.4)$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

1.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est le plus connu des théorèmes sur les équations différentielles. Ses hypothèses sont souvent satisfaites dans la pratique.

Théorème 1.2.8 (*Cauchy-Lipschitz*). Soit $F : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue où Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$. On suppose que F est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\Omega \times U$ au sens où, pour tout $(t, y) \in \Omega \times U$ il existe un voisinage Ω_t de t dans Ω et un voisinage U_y de y dans U et une constante K telle que, pour tout $s \in \Omega_t$ et $y_1, y_2 \in U_y$

$$|F(s, y_1) - F(s, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (1.2.5)$$

Soit $(t_0, y_0) \in \Omega \times U$. Alors les deux résultats suivants sont vérifiés :

- **Existence locale** : il existe un intervalle ouvert $J_0 \subset \Omega$ contenant t_0 et une application $y : J_0 \rightarrow U$ de classe C^1 , telle que

$$\forall t \in J_0, y'(t) = F(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

- **Unicité globale** : si y_1 et y_2 sont deux applications de classe C^1 définies sur l'intervalle ouvert $J \subset \Omega$ contenant t_0 qui vérifient

$$\forall t \in J, y_1'(t) = F(t, y_1(t)) = y_2'(t) = F(t, y_2(t)) \text{ et } y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$$

alors $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J$.

CHAPITRE 2

CALCUL FRACTIONNAIRE

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Dans ce chapitre, on donne les différentes définitions de la dérivée fractionnaire.

2.1 Fonctions Spéciales

Dans cette sections nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions :Gamma,Bêta et Mittag-Leffter.Ces trois fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

2.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale impropre.

Définition 2.1.1. On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0) \quad (2.1.1)$$

Exemple 2.1.1.

1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi},$ (posant le changement de variable, $t = s^2$)

Lemme 2.1.1. La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. holomorphe sur le demi plan $z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0$) et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}_+^* (\Re(z) > 0), \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1.2)$$

Proposition 2.1.1. pour tout $(z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0, n \in \mathbb{N})$, on a

i)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.1.3)$$

ii)

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (2.1.4)$$

iii)

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \quad (2.1.5)$$

Preuve.

i) En intégrant par partie

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

ii) On pose $z = n-1$,

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\dots\Gamma(1) \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

iii) Nous allons démontrer la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

pour $n = 0$ on a

$$\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0)!} = \sqrt{\pi}$$

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n.c-à-d que supposons que

$$\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$$

est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) \\ &= (n - \frac{1}{2}) \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{2n-1}{2} \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{2n-1}{2} \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.1.2. La fonction Bêta est une fonction définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0) \quad (2.1.6)$$

le changement de variable $u = 1-t$ permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (2.1.7)$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$B(p, q) = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a t^{p-1} (a-t)^{q-1} dt \quad (2.1.8)$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} dt \quad (2.1.9)$$

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta \quad (2.1.10)$$

Proposition 2.1.2. la fonction Bêta est reliée au fonction Gamma par la relation suivante : $\forall x, y \succ 0$, on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.1.11)$$

En effectuant le changement de variable

$$t'_2 = t_1 + t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} t_1^{p-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{q-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{q-1} t_1^{p-1} dt_1 \end{aligned}$$

Si on pose $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$, on arrive à

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left(\int_0^1 (t'_2 t'_1)^{p-1} (t'_2 - t'_2 t'_1)^{q-1} t'_2 dt'_1 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 ((t'_2)^{p+q-1} B(p, q)) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{p+q-1} dt'_2 B(p, q) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

2.1.3 Fonction Mittag-Leffter

Définition 2.1.3. La fonction de Mittag-Leffter est définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, (z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0) \quad (2.1.12)$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0) \quad (2.1.13)$$

Exemple 2.1.2.

1)

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

2)

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{z}.$$

Proposition 2.1.3. pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a

1)

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), (n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}) \quad (2.1.14)$$

2)

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), (z \neq 0; n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}) \quad (2.1.15)$$

pour $\alpha = 1/n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

3)

$$E_{1/n}(z) = e^{z^n} \left[1 + n \int_0^z e^{-t} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k/n)} \right) dt \right], (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \quad (2.1.16)$$

Cas particulier : si $n = 2$, on a

$$E_{1/2}(z) = e^{z^2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t} dt \right] \quad (2.1.17)$$

2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés dans l'espace des fonctions continues .

Formule de Dirichlet[8]

Soient $F(x, y)$ une fonction continue et α, β, γ trois réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet.

$$\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_a^x (y-a)^{\gamma-1} (x-y)^{\beta-1} F(x, y) dy = \int_a^t (y-a)^{\gamma-1} dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} F(x, y) dx.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier. Par exemple, si on prend $F(x, y) = g(x)f(y)$ et $\gamma = 1$, on a :

$$\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} g(x) dx \int_a^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = \int_a^t f(y) dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} g(x) dx. \quad (2.2.1)$$

On pose $g(x) \equiv 1$. d'après la formule (2.2.1) on trouve

$$\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_a^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_a^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy. \quad (2.2.2)$$

où B est la fonction bêta.

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a; b]$

Définition 2.2.1. Soit $f : [a, b) \rightarrow R$ une fonction continue. La primitive de f est définie par :

$$\mathcal{I}_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.2.3)$$

Proposition 2.2.1. Soit $f : [a, b) \rightarrow R$ une fonction continue. La primitive d'ordre n à gauche de f est définie par :

$$\mathcal{I}_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt. \quad (2.2.4)$$

Preuve. En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^2 f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}_{a+}^1 f(s) ds \\ &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Dirichlet (2.2.2), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^2 f(x) &= \int_a^x \left(\int_t^x f(t) dt \right) ds \\ &= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds \right) dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{I}_{a+}^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^3 f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}_{a+}^2 f(s)ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$\mathcal{I}_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt.$$

Lemme 2.2.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre n à droit de f est définie par :

$$\mathcal{I}_{b-}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{(n-1)} f(t)dt. \quad (2.2.5)$$

2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 2.2.2. soit $\Omega = [a; b]$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$, et f une fonction intégrable sur Ω . L'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{a+}^\alpha$ $\mathcal{I}_{b-}^\alpha$ d'ordre $(\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0)$ est définie par :

$$\mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. \quad (2.2.6)$$

Et

$$\mathcal{I}_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} f(t)dt. \quad (2.2.7)$$

$\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma.

Théorème 2.2.1. [7] Les opérateurs d'intégration fractionnaires $\mathcal{I}_{a+}^\alpha$ et $\mathcal{I}_{b-}^\alpha$ avec $(\Re(\alpha) > 0)$ sont bornés dans l'espace $L^p(1 \leq p \leq \infty)$, tel que :

$$\|\mathcal{I}_{a+}^\alpha\|_p \leq k \|f\|_p, \text{ et } \|\mathcal{I}_{b-}^\alpha\|_p \leq k \|f\|_p. \quad (2.2.8)$$

Où

$$k_\alpha = \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha) \mid \Gamma(\alpha) \mid}.$$

Corollaire 2.2.1. Soit f est fonction définie sur $(\mathbb{R}^+ \text{ ou } \mathbb{R})$, alors on a :

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. (x \in \mathbb{R}^+; \Re(\alpha) > 0), \quad (2.2.9)$$

$$\mathcal{I}_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{(\alpha-1)} f(t)dt. (x \in \mathbb{R}^+; \Re(\alpha) > 0), \quad (2.2.10)$$

et

$$\mathcal{I}_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. (x \in \mathbb{R}; \Re(\alpha) > 0), \quad (2.2.11)$$

$$\mathcal{I}_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{(\alpha-1)} f(t)dt. (x \in \mathbb{R}; \Re(\alpha) > 0). \quad (2.2.12)$$

Proposition 2.2.2. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0; \Re(\beta) > 0$), on a

i)

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(x)) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta}f(x) \quad (2.2.13)$$

ii)

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f(x)) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-1}f(x) \quad (2.2.14)$$

iii)

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1} \quad (2.2.15)$$

Preuve.

i) D'après la définition (2.2.6), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} \mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{(\beta-1)} f(t) dt \right) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} ds \int_a^s (s-t)^{(\beta-1)} f(t) dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Dirichlet, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(x)) &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) dt, \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned}$$

ii) En utilisant la définition (2.2.6), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{(\alpha-1)}) f(t) dt, \\ &= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt, \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-1}f(x). \end{aligned}$$

iii) De même manière, on a

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= a + (x - a)y, \quad y \in [0, 1] \\ dt &= (x - a)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(x - a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - a + (x - a)y)^{\alpha-1} (x - a)^{\beta-1} y^{\beta-1} (x - a) dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a)^{\alpha+\beta-1} (1 - y)^{\beta-1} y^{\beta-1} dy, \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\beta-1} y^{\beta-1} dy, \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (x - a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2. [2] Soit $\alpha \succ 0$ et soit $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a; b]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suite

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) = (\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f_k)$$

, en particulier, la suite $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit f la limite de la suite f_k , il est clair que f est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_a^{\alpha} f_k - \mathcal{I}_a^{\alpha} f| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} |f_k(t) - f(t)| dt, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_{\infty} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} dt, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_{\infty} (x - a)^{\alpha}, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_{\infty} (b - a)^{\alpha}. \end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme lorsque $k \rightarrow \infty$, pour $x \in [a; b]$.

Exemple 2.2.1. Soit f une fonction définie par

$$f(x) = x^{\beta}$$

En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} t^{\beta} dt.$$

On utilise le changement de variable

$$u = \frac{t}{x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (xu)^{\beta} x du, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta} du, \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta}, \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \quad (2.2.16)$$

2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.3. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) avec $n = [\alpha] + 1$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}^n (\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.2.17)$$

Où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ la partie entière de α

Si de plus $\alpha \in [0, 1]$ alors $n = 1$, d'où

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.2.18)$$

Définition 2.2.4. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droit d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\Re(\alpha) > 0$) avec $n = [\alpha] + 1$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n \mathcal{D}^n (\mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.2.19)$$

Remarque 2.2.1. Pour $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur $\mathcal{D}^{\alpha}$ donne le même résultat que la dérivée usuelle d'ordre entier, tel que

$$\mathcal{D}_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$\mathcal{D}_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$$

Corollaire 2.2.2. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\Re(\alpha) > 0$) sur $(\mathbb{R}^+ \text{ ou } \mathbb{R})$ est définie par :

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_0^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt, (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.2.20)$$

$$\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^{\infty} (t-x)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt, (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.2.21)$$

et

$$\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_{-\infty}^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt, (x \in \mathbb{R}) \quad (2.2.22)$$

$$\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^{\infty} (t-x)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt, (x \in \mathbb{R}) \quad (2.2.23)$$

Proposition 2.2.3. Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ tel que ($n; m \in N^*$) alors :

1) si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité

$$\mathcal{D}_{a+}^{\beta} (\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) \quad (2.2.24)$$

est presque par tout sur $[a; b]$

2) Pour $\alpha > 0$, $k \in N^*$, Si les dérivées fractionnaires $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ et $\mathcal{D}_{a+}^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$\mathcal{D}_{a+}^k (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)) = \mathcal{D}_{a+}^{k+\alpha} f(x) \quad (2.2.25)$$

3) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $\mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\beta} (\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x)) = \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f(x) \quad (2.2.26)$$

4) si $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, on obtient

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x). \quad (2.2.27)$$

Preuve.

1) Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n > m$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\beta+\alpha} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f(x), \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a; b]$.

2) pour $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{k+n} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha+k-k} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{k+n} \mathcal{I}_{a+}^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{k+\alpha} f(x)\end{aligned}$$

d'où la résultat.

3) Pour $\alpha > \beta > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^\beta \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{I}_{a+}^{m-\beta} \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{I}_{a+}^{m-(\beta-\alpha)} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f(x)\end{aligned}$$

existe pour $i-1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$

4) D'après la définition (2.2.17), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^\alpha \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^n f(x) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Lemme 2.2.2. [7] Soient $\alpha > 0$ et $f_{n-\alpha}(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \in AC^n[a; b]$ avec

$g_{n-\alpha}(x) = \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} g(x) \in AC^n[a; b]$, alors l'égalité

$$\mathcal{I}_{a+}^\alpha \mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} \quad (2.2.28)$$

$$\mathcal{I}_{b-}^\alpha \mathcal{D}_{b-}^\alpha g(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(b)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (b - x)^{\alpha-j} \quad (2.2.29)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a; b]$.

Exemple 2.2.2.

i) La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x - a)^{-\alpha}$$

ii) La dérivée de $f(t) = (t - a)^{\beta-1}$ au sens de Riemann-Liouville :

Soit α non entier et $0 < n - 1 < \alpha < n$ et $\beta - 1 > 0$, alors on a

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt \right)$$

D'après la définition (2.2.17) et proposition (2.2.15), on a

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (x-a)^{n-\alpha+\beta-1} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (x-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre côté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section, on va définir la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et quelques propriétés sur un intervalle fini de l'axe réel dans l'espace des fonctions continues.

Définition 2.3.1. soit $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définie par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville tel que :

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] (x), \tag{2.3.1}$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] (x). \tag{2.3.2}$$

Si $\Re(\alpha) \in]0; 1]$ alors $n = 1$ tel que

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} [f(t) - f(a)] (x), \tag{2.3.3}$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} [f(t) - f(b)] (x). \tag{2.3.4}$$

Lemme 2.3.1. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction continue, la dérivée fractionnaire au sens Caputo et Riemann-Liouville existent, on a la relation suivant

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad (2.3.5)$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}. \quad (2.3.6)$$

Théorème 2.3.1. la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche ${}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ et à droit ${}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ avec $n = [\alpha] + 1$ est définie par :

$$\forall x \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, \quad (2.3.7)$$

et

$$\forall x \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt. \quad (2.3.8)$$

Cas particulier : Si $\alpha \in [0, 1]$ alors $n = 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo est

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a+}^{1-\alpha}(\mathcal{D}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt, \quad (2.3.9)$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = (-1) \mathcal{I}_{b-}^{1-\alpha}(\mathcal{D}f)(x) = \frac{(-1)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt. \quad (2.3.10)$$

Preuve. D'après la définition (2.3.1), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] (x) &= \mathcal{D}^n \mathcal{I}_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] (x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt. \end{aligned}$$

Posons

$$g(x) = \mathcal{I}_a^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] (x)$$

. En utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt. \\ &= -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \mathcal{D} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \\ &= \mathcal{I}_a^{n+\alpha+1} \mathcal{D} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]. \end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{I}_a^{n-\alpha+n} \mathcal{D}^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \mathcal{I}^n \mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) > 0)$ et $n = [\alpha] + 1$, tel que ${}^C \mathcal{D}^\alpha$ et $\mathcal{D}^\alpha$ existent.

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, alors

$${}^C \mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}^\alpha f(x)$$

Lemme 2.3.2. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) > 0)$ sur $(\mathbb{R}^+ \text{ ou } \mathbb{R})$ est définie par :

$${}^C \mathcal{D}_{0^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.3.11)$$

$${}^C \mathcal{D}_-^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.3.12)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, (x \in \mathbb{R}) \quad (2.3.13)$$

$${}^C \mathcal{D}_-^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, (x \in \mathbb{R}) \quad (2.3.14)$$

Proposition 2.3.1. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, avec $n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

i) Si $f(x) \in C^p([a; b])$, $p = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\beta f(x) = {}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) \text{ et } {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\beta f(x) = {}^C \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (2.3.15)$$

ii) Si $f(x) \in C^n([a; b])$ ou $f(x) \in AC^n([a; b])$, alors

$$\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.3.16)$$

$$\mathcal{I}_{b^-}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(n-k)} f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k \quad (2.3.17)$$

Preuve.

i) En utilisant le théorème (2.3.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a+}^\beta f(x) &= {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha \mathcal{I}^{n-\beta} \mathcal{D}^n f(x) \\
 &= \mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n (\mathcal{I}^{n-\beta} \mathcal{D}^n f(x)) \\
 &= \mathcal{I}^{n-(\alpha+\beta)} \mathcal{D}^n \mathcal{I}^n \mathcal{D}^n f(x) \\
 &= \mathcal{I}^{n-(\alpha+\beta)} \mathcal{D}^n f(x) \\
 &= {}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).
 \end{aligned}$$

ii) D'après le théorème (2.3.7), on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{a+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) &= \mathcal{I}_{a+}^\alpha (\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} \mathcal{D}_{a+}^n f(x)) \\
 &= \mathcal{I}_{a+}^n \mathcal{D}_{a+}^n f(x) \\
 &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.
 \end{aligned}$$

Lemme 2.3.3. [7] Soit $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) > 0)$ et $n \in \mathbb{N}; n = [\alpha] + 1$ les opérateurs fractionnaires ${}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ et ${}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha$ définis sur l'espace $C^n[a; b]$ dans l'espace $C_a[a; b]$ et $C_b[a; b]$ sont dit bornés, tel que

$$\| {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f \|_{C_a} \leq K_\alpha \| f \|_{C^n} \quad \text{et} \quad \| {}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f \|_{C_b} \leq K_\alpha \| f \|_{C^n}. \quad (2.3.18)$$

Où

$$K_\alpha = \frac{(b-a)^{n-\Re(\alpha)}}{|\Gamma(n-\alpha)| |n-\Re(\alpha)+1|}$$

Exemple 2.3.1.

i) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^C\mathcal{D}^\alpha C = 0.$$

ii) La dérivée de $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo :

Soit α non entier et $0 < n-1 < \alpha < n$ et $\beta-1 > 0$, alors on a

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} (\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt,$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(x-a)^{\beta-n-1},$$

posons

$$(t-a) = s(x-a) \quad \text{et} \quad s \in [0; 1]$$

$$dt = (x-a)ds$$

$$\begin{aligned}
 {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\
 &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\
 &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

le même resultat avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville .

2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés d'intégration et de la différentiation fractionnaire, les quelles sont plus souvent utilisées dans la dérivée classique.

2.4.1 Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \quad (2.4.1)$$

2.4.2 Règle de Leibniz

Pour un entier n on a

$$\frac{d^n}{dt^n}((f(t)g(t))) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \quad (2.4.2)$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^\alpha((f(t)g(t))) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^\alpha g^{(\alpha-k)}(t) + R_n^\alpha(t) \quad (2.4.3)$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} g(s) ds \int_s^t f^{(n+1)}(\xi) d\xi \quad (2.4.4)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(t) = 0$$

. Si f et g sont continues dans $[a; t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^\alpha((f(t)g(t))) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^\alpha g^{(\alpha-k)}(t). \quad (2.4.5)$$

où D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.4.3 Intégration par parties

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\Re(\alpha) > 0$) et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = [\Re(\alpha)] + 1$ avec $f(x) \in C^n[a; b]$ et $g(x) \in C^n[a; b]$, on a

$$\int_a^b f(x)(\mathcal{I}_{a+}^\alpha g)(x)dx = \int_a^b g(x)(\mathcal{I}_{b-}^\alpha f)(x)dx \quad (2.4.6)$$

$$\int_a^b f(x)(\mathcal{D}_{a+}^\alpha g)(x)dx = \int_a^b g(x)(\mathcal{D}_{b-}^\alpha f)(x)dx \quad (2.4.7)$$

2.4.4 Transformée de Laplace

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est méthode pratique pour résoudre des équations et des systèmes différentiels.

Soit f une fonction donnée définie pour tout les valeurs positive de la variable x La transformée de Laplace définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(x)](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx, p \in \mathbb{C}. \quad (2.4.8)$$

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists M \succ 0, \exists p_0 \in \mathbb{R}; |f(x)| \leq Me^{p_0 x}. \quad (2.4.9)$$

Transformée inverse de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}\{F(p)\}(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{px}dp, c = \Re(p) \succ p_0 \quad (2.4.10)$$

f est une fonction définie est continue pour $x > 0$ ainsi que ses dérivées $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$ au sens et sous les formule (2.4.9), alors La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier existe pour $p \succ p_0$

Transformée de Laplace du dérivée

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](p) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{k+1} f^{(n-k)}(0). \quad (2.4.11)$$

On dit que le produit de convolution de f par g est défini par :

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x g(x-t)f(t)dt. \quad (2.4.12)$$

Transformée de Laplace du convolution

$$\mathcal{L}[f(x) * g(x)] = F(p).G(p) \quad (2.4.13)$$

sous l'hypothèse que $F(p)$ et $G(p)$ existent.

L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ est définie par la convolution

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x). \quad (2.4.14)$$

et la transformée de Laplace du fonction $x^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](p) = \Gamma(\alpha) p^{-\alpha} \text{ (notation } \mathcal{L}[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}) \quad (2.4.15)$$

d'après la formule (2.4.14) et (2.4.15) la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville est la suivant :

$$\mathcal{L}[\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f](p) = p^{-\alpha} F(p) \quad (2.4.16)$$

En utilisant la formule (2.4.11) et (2.4.16), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f](p) &= \mathcal{L}[\mathcal{D}_{0+}^n \mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha} f](p) \\ &= p^n \mathcal{L}[\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha} f](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathcal{D}^{n-k-1}(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha} f)(0) \\ &= p^n p^{\alpha-n} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathcal{D}^{n-k-1}(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha} f)(0) \\ &= p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathcal{D}^{n-k-1}(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-n} f)(0) \\ &= p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \mathcal{D}^{\alpha-k-1} f(0) \\ &= p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} \mathcal{D}^{\alpha-k} f(0). \end{aligned}$$

de même on applique la formule (2.4.16) et (2.4.11), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f\}(p) &= \mathcal{L}\{\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha} \mathcal{D}_{0+}^n f\}(p) \\ &= p^{\alpha-n} \mathcal{L}(\mathcal{D}_{0+}^n f)(p) \\ &= p^{\alpha-n} [p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)] \\ &= p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

donc la transformée de Laplace du dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville et Caputo est définie par

$$\forall p \succ p_0, \mathcal{L}\{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f\}(p) = p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} \mathcal{D}^{\alpha-k} f(0), \quad (2.4.17)$$

$$\forall p \succ p_0, \mathcal{L}\{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f\}(p) = p^{\alpha} \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.4.18)$$

2.4.5 Transformée de Fourier

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Fourier.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit la transformée de Fourier de f , la fonction notée $\mathcal{F}[f]$ ou $\widehat{f}$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

Transformée de Fourier .

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi} dx. \quad (2.4.19)$$

Transformée inverse de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\xi)e^{-ix\xi} d\xi. \quad (2.4.20)$$

On appelle produit de convolution de f par g , la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(t)dt \quad (2.4.21)$$

Transformée de Fourier du convolution

$$\mathcal{F}[f * g(x)] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad (2.4.22)$$

sous l'hypothèse $\mathcal{F}[f]$ et $\mathcal{F}[g]$ existent

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables

Transformée de Fourier du dérivée

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (-i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi) \quad (2.4.23)$$

l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ est définie par la convolution

$$J_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x). \quad (2.4.24)$$

et la transformée de Fourier du fonction $x^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}[x^{\alpha-1}](\xi) = \Gamma(\alpha)(-i\xi)^{-\alpha} \text{ (notation } \mathcal{F}[x^n](\xi) = \frac{n!}{(-i\xi)^{n+1}}) \quad (2.4.25)$$

En utilisant la formule (2.4.24) et (2.4.25) la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\forall \alpha \in]0; 1[, (\mathcal{F}I_+^\alpha f)(x) = (-i\xi)^{-\alpha}(\mathcal{F}f)(\xi) \quad (2.4.26)$$

Utilisant la règle (2.4.23) et (2.4.26), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{D}_+^\alpha f](\xi) &= \mathcal{F}[\mathcal{D}^n \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f](\xi) \\ &= (-i\xi)^n \mathcal{F}[\mathcal{I}_+^{n-\alpha} f](\xi) \\ &= (-i\xi)^n (-i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\ &= (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)\end{aligned}$$

Alors la transformée de Fourier de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_+^\alpha f](\xi) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi) \tag{2.4.27}$$

le même résultat avec la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

CHAPITRE 3

EXISTENCE ET UNICITÉ D'UN PROBLÈME DE CAUCHY POUR EDF

Dans ce chapitre nous considérons la question de l'existence et de l'unicité de solutions des problèmes de type Cauchy, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel dans les espaces des fonctions sommable et des fonctions continues

3.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens Riemann-Liouville

Dans cette section nous donnons des conditions pour prouver l'existence et l'unicité du problème fractionnaire de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaire au sens de Riemann-Liouville.

3.1.1 Position du problème

Le cas linéaire

Dans cette sous-section, nous discutons sur l'existence et l'unicité de solutions de problèmes de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires linéaires.

On considère le problème fractionnaire de type Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^\alpha y(x) = f(x), & (\alpha \succ 0, 0 < x < T < \infty) \\ (\mathcal{D}_0^{\alpha-k} y)(0) = b_k \in \mathbb{R}, & (k = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Où $f(x) \in L^1(0, T)$, i.e.

$$\int_0^T |f(x)| dx < \infty.$$

Théorème 3.1.1. [9] Si $f(x) \in L^1(0, T)$, alors le problème (3.1.1) admet une solution unique $y(x) \in L^1(0, T)$.

Preuve. Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (3.1.1), la formule de la transformée de Laplace (2.4.17) d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, à savoir

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}_{0+}^\alpha y\}(p) = p^\alpha Y(p) - \sum_{j=1}^n p^{j-1} \mathcal{D}^{\alpha-j} y(0) = F(p), \quad (3.1.2)$$

Où $Y(p)$ et $F(p)$ désignent les transformées de Laplace de $y(x)$ et $f(x)$. En s'aidant de la condition initiale introduite dans (3.1.1), on peut écrire

$$Y(p) = p^{-\alpha} F(p) + \sum_{j=1}^n p^{j-\alpha-1} b_j \quad (3.1.3)$$

et la transformée de Laplace inverse donne

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}[p^{-\alpha} F(p)] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{j=1}^n p^{j-\alpha-1} b_j\right] \quad (3.1.4)$$

D'après la formule (2.4.16), on a

$$y(x) = \mathcal{I}_{0+}^\alpha f(x) + \sum_{j=1}^n b_j \mathcal{L}^{-1}(p^{j-\alpha-1}), \quad (3.1.5)$$

En utilisant la formule (2.4.15), on a

$$y(x) = \mathcal{I}_{0+}^\alpha f(x) + \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (3.1.6)$$

En utilisant la règle de la différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du fonction polynôme (??) ($\mathcal{I}_{a+}^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^\alpha x^{\alpha-j} &= \mathcal{D}_{a+}^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} x^{\alpha-j} \\ &= \mathcal{D}_{a+}^n \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-k+1)} x^{n-j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

on aura

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha y(x) = \mathcal{D}_{a+}^\alpha \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(x) = f(x). \quad (3.1.8)$$

ce qui veut dire que notre $y(x)$ défini par (3.1.6) est bien solution, dans $L^1(0, T)$, de la première équation de (3.1.1). Par ailleurs, on sait que (voir la formule (2.2.30))

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} x^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j+1)} x^{k-j}$$

Alors, de (3.1.6), on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y(x) &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f(x) + \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\
 &= \mathcal{I}_{0+}^k f(x) + \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{k-j}}{\Gamma(k-j+1)} \\
 &= \mathcal{I}_{0+}^k f(x) + \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{k-j}}{(k-j)!}
 \end{aligned}$$

D'où $[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y(x)]_{x=0} = b_k$, c'est à dire que les conditions initiales introduite dans (3.1.1) est bien vérifiée. Par conséquent la fonction construite $y(x)$ est solution du problème (3.1.1) reste à montrer l'unicité de cette dernière, Pour cela, posons

$$z(x) = y_1(x) - y_2(x),$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions (dans $L^1(0, T)$) du problème (3.1.1). Et donc $z(x)$ sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^{\alpha} z(x) = 0, \\ (\mathcal{D}_0^{\alpha-k} z)(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (3.1.9), on obtient

$$Z(p) = \mathcal{L}\{z(x)\}(p) = 0,$$

et donc $z(x) = 0$ pour presque tout $x \in (0, T)$, ce qui prouve que la solution $y(x)$ est l'unique solution dans $L^1(0, T)$ du problème (3.1.1).

Le cas non linéaire

Le "Model " non linéaire d'équation différentielle d'ordre fractionnaire α ($\Re(\alpha) > 0$) sur un intervalle fini $[a, b]$ de l'axe réel $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ de la forme

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y(x) = f[x, y(x)], \quad (\Re(\alpha) > 0, x > a), \quad (3.1.10)$$

Avec les conditions initiales

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y)(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} (k = 1, \dots, n) \quad (3.1.11)$$

dans l'espace $L^{\alpha}(a, b)$ défini pour $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ par :

$$L^{\alpha}(a, b) = \{y \in L(a, b); \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y \in L(a, b)\} \quad (3.1.12)$$

Où $n = [\alpha] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $\alpha = n$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$. La notation $(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+)$ signifie que la limite est prise à presque tous les points du voisinage du côté droit de $(a, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) comme suit :

$$(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} (D_{a^+}^{\alpha-k}y)(x) \quad (1 \leq k \leq n-1), \quad (3.1.13)$$

$$(D_{a^+}^{\alpha-n}y)(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}y)(x), \quad (\alpha \neq n); \quad (D_{a^+}^0y)(a^+) = y(a), \quad (\alpha = n) \quad (3.1.14)$$

Où $\mathcal{I}^\alpha$ est l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'ordre α défini par (2.2.6)

En particulier si $\alpha = n$ puis, conformément aux (2.2.1) et (3.1.14), le problème dans (3.1.10)-(3.1.11) est réduit au problème usuel de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)], \quad y^{(n-k)}(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.1.15)$$

Quand $0 < \Re(\alpha) < 1$, le problème (3.1.10)-(3.1.11) prend la forme

$$\mathcal{D}^\alpha y(x) = f[x, y(x)], \quad (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}y)(a) = b, \quad (b \in \mathbb{C}) \quad (3.1.16)$$

Et aussi on peut écrire un problème de type Cauchy sous la forme

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha y(x) = f[x, y(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^{1-\alpha} y(x) = c, \quad (c \in \mathbb{C}). \quad (3.1.17)$$

3.1.2 Équivalence le problème de type Cauchy et de l'équation intégrale de Volterra

Dans cette sous-section, nous prouvons que le problème de type Cauchy (3.1.10)-(3.1.11) et l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt, \quad (x > a), \quad (3.1.18)$$

sont équivalents en ce sens que, si $y(x) \in L^1(a, b)$ satisfait une de ces relations, puis elle satisfait également l'autre. Nous prouver un tel résultat en supposant qu'une fonction $f(x, y)$ appartient à $L^1(a, b)$ pour toute $y \in G \in \mathbb{C}$ pour cela nous avons besoin de l'assertion auxiliaire qui suit le lemme.

Lemme 3.1.1. [7] L'opérateur d'intégration fractionnaire $\mathcal{I}^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ est bornée dans $L^1(a, b)$:

$$\|\mathcal{I}_{a^+}^\alpha g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha) \Gamma(\alpha)} \|g\|_1. \quad (3.1.19)$$

D'abord, nous considérons le problème de type Cauchy (3.1.10)-(3.1.11) avec un réel $\alpha > 0$ donné par :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x) = f[x, y(x)], \quad (\alpha > 0,), \quad (3.1.20)$$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}y)(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R} (k = 1, \dots, n) \quad (3.1.21)$$

Théorème 3.1.2. [7] Soient $\alpha > 0, n = -[-\alpha]$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, et $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in L(a, b)$ pour tout $y \in G$.

Si $y \in L(a, b)$, alors y satisfait les relations (3.1.10)-(3.1.11) si et seulement si y satisfait l'équation intégrale (3.1.18).

Preuve. D'abord, on prouve la condition nécessaire. Soit $y(x) \in L^1(a, b)$ satisfaisant les relation (3.1.10)-(3.1.11) . Depuis que $f(x, y) \in L^1(a, b)$, signifie que $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y)(x)$ existe dans $L^1(a, b)$. Selon (2.2.17), on a :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x) = \mathcal{D}^n(\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}y)(x), \mathcal{I}_{a+}^0y(x) = y(x) \quad (3.1.22)$$

Et d'après (3.1.22) on voit que $(\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \in AC^n[a, b]$ Comme $(\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}y)(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}y(x)$, alors $(\mathcal{D}_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \in AC^n[a, b]$. Selon le lemme (3.1.1), l'intégrale $(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f)(t, y(t))$ existe dans $L(a, b)$ en appliquant l'opérateur $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}$ aux deux côtés de (3.1.10)

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y)(x) = (\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f(t, y(t)))(x) \quad (3.1.23)$$

D'autre part on a :

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha-j}, \quad (y_{n-\alpha} = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}(x)) \quad (3.1.24)$$

D'après (2.2.17), nous avons également

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j}(\mathcal{I}_{a+}^{(n-j)-(\alpha-j)}y)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j}y)(x). \quad (3.1.25)$$

En utilisant cette relation et (3.1.21), nous réécrivons (3.1.24) sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x) &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j}y(a^+)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha-j} \\ &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha-j} \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

D'après (3.1.23) et (3.1.26), il vient :

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt, \quad (x > a) \quad (3.1.27)$$

avec $\alpha > 0$. Ce qui prouve la condition nécessaire.

Maintenant, nous prouvons la suffisance. soit $y(x) \in L^1(a, b)$ satisfaisant l'équation (3.1.18). en appliquant l'opérateur $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ aux deux côtés de (3.1.18), on a

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x - a)^{\alpha-j}) + \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\alpha [t, y(t)](x). \quad (3.1.28)$$

D'après la définition (2.2.17) et la proposition (2.2.15), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x - a)^{\alpha-j} &= \mathcal{D}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} (x - a)^{\alpha-j} \\ &= \mathcal{D}_{a^+}^n \left[\frac{\Gamma(\alpha - j + 1)}{\Gamma(n - j + 1)} (x - a)^{n-j} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Et selon la relation (2.2.27), on obtient :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha y(x) = f[x, y(x)] \quad (3.1.30)$$

et donc, on arrive à l'équation (3.1.10).

A présent on peut montrer que la relation (3.1.11) est aussi réalisée. Pour cela, on applique l'opérateur $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k}$ ($k = 1, \dots, n$) aux deux côtés de (3.1.18).

Si $1 \leq k \leq n - 1$, d'après les relations (2.2.30)-(3.1.29) et propriété (2.2.3), on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k} y)(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k} (x - a)^{\alpha-j})(x) + (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k} \mathcal{I}_{a^+}^\alpha f[t, y(t)])(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} (x - a)^{k-j} + (\mathcal{I}_{a^+}^k f[t, y(t)])(x). \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Donc

$$(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-k} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(k - j)!} (x - a)^{k-j} + \frac{1}{(k - 1)!} \int_a^x (x - t)^{k-1} f[t, y(t)] dt. \quad (3.1.32)$$

Si $k = n$, selon les relations (3.1.14) et (3.1.32), on obtient

$$(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha-n} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(n - j)!} ((x - a)^{n-j}) + \frac{1}{(n - 1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f[t, y(t)] dt. \quad (3.1.33)$$

Utilisons (3.1.32)-(3.1.33) pour calculer la limite $t \rightarrow a^+$ on obtient la relation (3.1.11).

Ainsi, la suffisance est prouvée, qui complète la preuve du théorème (3.1.2).

3.1.3 Existence et Unicité

Dans cette partie, nous établissons l'existence d'une solution unique au problème (3.1.10)-(3.1.11) de type Cauchy dans l'espace $L^\alpha(a, b)$, défini dans (3.1.12) sous les conditions du théorème (3.1.2), et la condition de Lipschitz sur $f(x, y)$ par rapport à la deuxième variable : il existe $A \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ et tous $y_1, y_2 \in G \in \mathbb{R}$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A |y_1 - y_2| \quad (3.1.34)$$

Théorème 3.1.3. [7] soit $\alpha > 0, n = -[\alpha]$, soient G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, et $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f[x, y] \in L^1(a, b)$ pour tout $y \in G$, et la condition (3.1.34) est satisfait.

Alors, il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.1.10)-(3.1.11) dans l'espace $L^\alpha(a, b)$.

Preuve. D'abord nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(x) \in L^1(a, b)$, selon le théorème (3.1.2). il est suffisant de prouver l'existence d'une solution unique $y(x) \in L^1(a, b)$ à l'équation intégrale non linéaire de Volterra (3.1.18). pour cela, nous appliquons la méthode connue, pour les équations intégrales non linéaires de Volterra, pour prouver le première résultat sur une partie de l'intervalle $[a, b]$

L'équation (3.1.18) semble raisonnable dans n'importe quel intervalle $[a, x_1] \subset [a, b]$ ($a < x_1 < b$).

On choisit x_1 telle que l'inégalité

$$A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (3.1.35)$$

est satisfaite. On montre l'existence d'une solution unique $y(x) \in L^1(a, x_1)$ à l'équation (3.1.18) sur l'intervalle $[a, x_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $L^1(a, x_1)$, qui est trivialement un espace métrique complet muni de la distance

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_1 = \int_a^{x_1} |y_1 - y_2| dx. \quad (3.1.36)$$

Nous réécrivons l'équation intégrale (3.1.18), sous la forme $y(x) = (Ty)(x)$, où

$$(Ty)(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt, \quad (3.1.37)$$

Avec

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}. \quad (3.1.38)$$

Pour appliquer le théorème (1.2.2) du point fixe, on doit prouver ce qui suit :

- i) si $y(x) \in L^1(a, x_1)$, alors $Ty(x) \in L^1(a, x_1)$
- ii) pour toute $y_1, y_2 \in L^1(a, x_1)$ la relation qui suit est vérifiée :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leq w \|y_1 - y_2\|_1, \quad w = A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.1.39)$$

Il découle de (3.1.38) que $y_0(x) \in L^1(a, x_1)$. Depuis que $f[x, y(x)] \in L^1(a, b)$ et d'après le lemme (3.1.1) ($x = b$ et $g(t) = f[t, y(t)]$), l'intégrale du membre de droite de (3.1.1) appartient également à $L^1(a, x_1)$. Par conséquent $(Ty)(x) \in L^1(a, x_1)$.

A présent, on montre la relation (3.1.39). D'après (3.1.37)-(3.1.38) et (3.1.12), en utilisant la condition de Lipschitz (3.1.34) et en appliquant la relation (3.1.19) (avec $b = x_1$ et $g(x) = f[x, y_1] - f[x, y_2]$), il vient :

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a, x_1)} &\leq \| \mathcal{I}_{a+}^\alpha [f(t, y_1) - f(t, y_2)] \|_{L(a, x_1)} \\ &\leq A \| \mathcal{I}_{a+}^\alpha [y_1 - y_2] \|_{L(a, x_1)} \\ &\leq A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1(x) - y_2(x)\|_{L(a, x_1)} = w \|y_1(x) - y_2(x)\|_{L(a, x_1)} \end{aligned}$$

Ce qui donne (3.1.39). Selon (3.1.35), w vérifie $0 < w < 1$, et par conséquent (d'après le théorème (1.2.2)), il existe une solution unique $y^*(x) \in L^1(a, x_1)$ de l'équation (3.1.18) dans l'intervalle $[a, x_1]$.

D'après le théorème (1.2.2), la solution y^* est obtenue comme une limite de la suite convergente $(Ty^*)(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|T^m y_0^* - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0, \quad (3.1.40)$$

où $y_0^*(x)$ est une fonction dans $L^1(a; b)$. Si au moins un $b_k \neq 0$ dans les conditions initiales (3.1.11), on peut prendre $y_0^*(x) = y_0(x)$ avec $y_0(x)$ est définie par (3.1.38).

Selon (3.1.37), la suite $(T^m y_0^*)(x)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f[t, T^{m-1} y_0^*(t)] dt, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.1.41)$$

posons $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$, alors la dernière relation prend la forme :

$$y_m(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f[t, y_{m-1}(t)] dt, \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (3.1.42)$$

et (3.1.40) peut-être réécrit comme suit :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0, \quad (3.1.43)$$

Ceci signifie que l'on a appliqué la méthode des approximations successives pour trouver une solution unique $y^*(x)$ de l'équation intégrale (3.1.18) sur $[a, x_1]$.

Par la suite on considère l'intervalle $[x_1, x_2]$, où $x_2 = x_1 + h_1$, $h > 0$ avec $x_2 < b$. On réécrit l'équation (3.1.18), de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} (x-t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x (x-t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Depuis que la fonction $y(x)$ est uniquement définie sur l'intervalle $[a, x_1]$, la dernière intégrale peut être considérée comme une fonction connue, ce qui permet de réécrire la dernière équation comme

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x (x-t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt \quad (3.1.45)$$

où $y_{01}(x)$ est définie par

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} (x-t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt \quad (3.1.46)$$

est la fonction connue.

On utilise les mêmes arguments comme ci-dessus, on conclut qu'il existe une solution unique $y^* \in L^1(x_1, x_2)$ de l'équation (3.1.18) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.

On prend l'intervalle suivant $[x_2, x_3]$, où $x_3 = x_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ avec $x_3 < b$ et ainsi de suite. Par la répétition de ce processus, on conclut à l'existence de la solution $y^* \in L^1(a, b)$ pour l'équation (3.1.18) sur l'intervalle $[a, b]$.

Ainsi, il existe une solution unique $y(x) = y^* \in L^1(a, b)$ de l'équation intégrale (3.1.18) de Volterra, et par conséquent aussi du problème de type Cauchy (3.1.10)-(3.1.11).

Finalement pour achever la preuve du théorème (3.1.3), il reste à montrer que la solution $y(x) \in L^1(a, b)$ est unique et qu'elle appartient à l'espace $L^\alpha(a, b)$. Selon (3.1.3), il est alors suffisant de prouver $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha y) \in L^1(a, b)$.

D'après la preuve ci-dessus, la solution est une limite de la séquence $y_m \in L(a, b)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\|_1 = 0, \quad (3.1.47)$$

avec le choix de certains y_m sur chacun $[a, x_1], \dots, [x_{m-1}, b]$. L'utilisation des deux relations (3.1.10) et (3.1.34), donne :

$$\|\mathcal{D}_{a+}^\alpha y_m - \mathcal{D}_{a+}^\alpha y\|_1 = \|f[x, y_m] - f[x, y]\|_1 \leq A \|y_m - y\|_1 \quad (3.1.48)$$

Selon (3.1.47) et (3.1.48), on obtient :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_{a+}^\alpha y_m - \mathcal{D}_{a+}^\alpha y\|_1 = 0 \quad (3.1.49)$$

et par conséquent $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha y) \in L^1(a, b)$. Ceci termine la preuve du théorème (3.1.3).

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a traité le problème de Cauchy pour les EDFs pour prouver l'existence et l'unicité de ces types d'équations, cette étude restreinte à des techniques revient à l'origine du problème de Cauchy pour le cas linéaire, et à théorie du point fixe de Banach pour le cas non linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris, 1987.
- [2] K. Diethelm, Analysis of Fractional Differential Equations an Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [4] H.Hadjar, Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires , Mémoire de fin d'études, Tlemcen, 2014-2015.
- [5] K. Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires,Thèse Doctorat en Mathématique, Univ de Constantine, Septembre 2007.
- [6] M. Kaddouri, Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire,Mémoire du diplôme de Master,Université Dr Tahar Moulay - Saïda,Mai 2017
- [7] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006).
- [8] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, 1993.
- [9] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.
- [10] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, and O. I.MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.