REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'SILA
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Existence et unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée

---

Présenté par :
M^{lle} *Ben Makhloufi* Saida

Membres du jury :

Benabderrahmane Benyattou	Prof,	Université de M'sila	**Président**.
Amroune Nasreddine	MCB,	Université de M'sila	**Encadreur.**
Bounabe Noura	MCB,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés avec l'aide du notre encadreur : Amroune Nasreddine qui a toujours été présent á mes côtés pour m'orienter. Il m'a permis d'approfondir au maximum mes travaux afin de pouvoir être fier aujourd'hui du travail réalisé, je les remercie et pour tous les membres de ce service qui ont su m'apporter leurs conseils, leur aide et leur soutient durant cette année.

Je souhaite remercié également à les étudiants de département mathématique et les différentes personnes pour leurs questions ou leur conseils me permettre de toujours pousser un peu plus mon raisonnement

Je me remercie enfin les membres de ma famille qui ont toujours été à mes côtés et m'ont encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Merci.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère et douce mère,

Mon très cher père à qui m'adresse au ciel les vœux les plus ardents pour la conservation de leur santé et de leur vie.

Pour mes chers frères.

Pour mes chères sœurs.

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES NOTATIONS

$\rightharpoonup$	La convergence faible
$\rightharpoonup^*$	La convergence faible*
$\rightarrow$	La convergence forte
$\times$	Produit vectoriel
$\cdot$	Produit sclaire
$p.p$	presque partout
$\limsup$	Limite supérieure
$\liminf$	Limite inférieure
$< .;. >$	Crochet de dualité
$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, ..., n :$	Gradient de v
$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} :$	Laplacien de v.
$\text{div } v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot v :$	Divergence de v
$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} :$	u,v champs vectoriels régulier
$\text{div} u = 0,$	$(i.e. \sum_{i=1}^{3} D_i u_i = 0)$

$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, k$ fois continûment différentiables
$\mathscr{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans Ω
$\mathscr{D}'(\Omega)$	Espace des distribution sur Ω
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue
$\Vert.\Vert_{L^p(\Omega)}$	Norme dans $L^p(\Omega)$
$\vert.\vert$	Norme dans $L^2(\Omega)$
$W^{m,p}(\Omega),\ H^m(\Omega)$	Espace de Sobolev
$W_0^{m,p}(\Omega),\ H_0^m(\Omega)$	l'Adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$
$\Vert.\Vert$	Norme dans $H_0^1(\Omega)$

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude de différents modèles des `équations de Navier-Stokes`. Ce sont des équations aux dérivées partielles décrivant l'écoulement des fluides (liquide, gaz ou plasma). Le but de ce travail est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un modèle des équations de Navier-Stokes avec un terme régularisant.

Le premier modèle de Navier-Stokes qu'on va étudier est constitué de deux équations, la première est l'équation de continuité pour les fluides incompressibles, la deuxième est l'équation de Navier-Stokes satisfaite par la vitesse du fluide u et la pression P.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière assez régulière qu'on note Γ. On note

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T) \text{ et } \Sigma_T = \Gamma \times (0,T).$$

On a le système suivant

$$\begin{cases} \text{div } u = 0, & \text{dans } \Omega_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i D_i u = f - \nabla P, & \text{dans } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où μ est une constante positive qui représente la viscosité du fluide, et f représente l'ensemble de forces extérieures exerçant sur le fluide.

Dans le deuxième modèle, nous allons ajouter un terme régularisant à la deuxième équation qui sert à augmenter la régularité en temps de la solution. L'ajout de ce terme va nous permettre d'obtenir l'unicité de la solution pour la nouvelle équation.

Le modèle qu'on va étudier est donné par le système suivant

$$\begin{cases} \text{div } u = 0, & \text{dans } \Omega_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \mu_0 \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i D_i u = f - \nabla P, & \text{dans } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Notre travail est structuré comme suit

•Le premier chapitre est consacré aux rappels mathématiques de différents outils qui seront utilisés dans la résolution de nos systèmes d'équations. Nous allons principalement rappeler les différentes notions de convergences, les injections de Sobolev, le lemme de compacité et les opérateurs monotones.

• Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'équation de Navier-Stokes. Nous montrons l'existence d'une solution faible à l'aide de la méthode de Faedo-Galerkin et le lemme de compacité d'Aubin.

•Dans le dernier chapitre qui est le but de ce mémoire, on montre l'existence et l'unicité de la solution d'une variante de Navier-Stokes (Navier-Stokes avec un terme régularisant). Pour cet effet, on applique les méthodes de monotonie et de compacité.

CHAPITRE 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.1 Rappel de quelques inégalités mathématiques

Théorème 1.1 *(voir [2])(**Inégalité de Hölder**)*
Supposons que $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $u, v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.1}$$

Notation 1.2 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$; on note q l'exposant conjugué,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En particulier, si $p = 2$ et $q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.2}$$

Proposition 1.1 *(voir [2]) (**Inégalité de Young**)*
$\forall a \geq 0$, $\forall a \geq 0$, supposons que $1 < p < +\infty$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Remarque 1.1 *Un cas simple de l'inégalité de Young avec les exposants $p = q = 2$ et $(\epsilon > 0)$ est*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.2 *(voir [2])(**Inégalité d'interpolation**)*
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors $f \in L^r(\Omega)$, $\forall p \leq r \leq q$, et on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^r(\Omega)} \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

- ***Inégalité de Poincaré***

Théorème 1.3 *(Voir [2]) Soit Ω un borné, alors il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|\nabla u|_{L^2}\,, \forall u \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{1.4}$$

• ***Égalité de Parseval****(voir [10])*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{u}_m(\tau)\|_X^2\, d\tau = \int_0^T \|u_m(t)\|_X^2\, dt$$

1.2 Applications linéaires

(voir [7])

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F. Cette application permet de considérer E comme un sous-ev de F. On notera $E \hookrightarrow F$. On dira que cette inclusion est :

- Continue, et on notera $E \hookrightarrow F$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C\,\|u\|_E$ pour tout $u \in E$.
- Compacte, notée $E \hookrightarrow_c F$, si de toute suite bornée dans E (pour la norme de E), il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F).
- Dense si pour tout $u \in F$ il existe une suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).

1.3 Injection de Sobolev

Définition 1.1 *(Voir [2])*

X et Y deux espaces de Banach, l'écriture $X \subset Y$ signifie l'injection continue de X dans Y, c-à-d qu'il existe une constante k telle que

$$\|u\|_Y \leq k\,\|u\|_X\,, \forall u \in X$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipshitzienne ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Proposition 1.3 *(Voir [2]) Soit $1 \leq p < \infty$, on a*

- *Si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}$, avec $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
- *Si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q$, $\forall q \in [p, +\infty)$.*
- *Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

D'aprés le théorème de **Rellich-Kodrachov** (Voir [2]), on a

Théorème 1.4 *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une ouvert borné de classe C^1, on a*

- *Si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q$, $\forall q \in [1, p*)$, $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
- *Si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q$, $\forall q \in [p, +\infty)$.*
- *Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C\left(\overline{\Omega}\right)$.*

En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p$ injection compacte, pour tout p et n.

1.4 Espaces abstraits contenant le temps

Définition 1.2 *(voir [4])*

Soit X un espace de Banach, on défnit $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions f mesurables de $]0,T[$ à valeurs dans X, muni de la norme
si $1 \leq p < \infty$:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p\right)^{1/p} \tag{1.5}$$

Si $p = \infty$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \|f(t)\|_X . \tag{1.6}$$

1.5 Lemme de Compacité

Définition 1.3 *(Voir [4] [10])*
Pour $\gamma > 0$, on défnit l'espace :

$$H^\gamma(0,T;X_0,X_1) = \left\{u \in L^2(0,T;X_0) ; D_t^\gamma u \in L^2(0,T;X_1)\right\}$$

telle que X_0,X_1 sont des espaces de Hilbert, et

$$\|u\|_{H^\gamma(\mathbb{R};X_0,X_1)} = \left\{\|u\|_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + \||\tau|^\gamma \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R};X_1)}\right\}^{1/2}$$

Nous allons donner maintenant « Lemme de compacité» faisant intervenir la notion de dérivée fractionnaire ;

Lemme 1.1 *(voir [4])(Lemme de compacité)*
Soit X_0, X, X_1 sont des espaces de Hilbert avec les injections continues

$$X_0 \subset X \subset X_1$$

de plus, l'injection de X_0 dans X est compacte, alors l'injection de $H^\gamma(0,T;X_0,X_1)$ dans $L^2(0,T;X)$ est compacte.

1.6 Formule de Green

(voir [3])

Théorème 1.5 *(intégration par parties en dimension n)*
Soit Ω ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 . Alors si u et $v \in H^1(\Omega)$ ona :

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Gamma uv\eta_i ds. \tag{1.7}$$

où η_i est la i^{eme} composante de la normale sortante au domaine Ω.

Théorème 1.6 *(formule de Green dans H^2)*
Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors

1. *Pour tous champs vectoriels u, v réguliers on a*

$$\int_\Omega (\Delta u) \cdot v dx = -\int_\Omega \nabla u : \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds. \tag{1.8}$$

2. *Pour tous champs scalaires v, u réguliers, on a*

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds. \tag{1.9}$$

Remarque 1.2

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

1.7 Les convergences forte, faible et faible*

Définition 1.4 *(convergence forte)*
Soit $p > 1$ et $(u_n)_{n\in N}$ une suite dans L^p, (u_n) converge fortement vers u pour la norme L^p si on a

$$\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$$

Définition 1.5 *(convergence faible) (Voir [11])*
Soient $(u_n)_{n\in N} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \to u$ faiblement dans E lorsque $n \to \infty$ si $T(u_n) \to T(u)$ pour tout $T \in E'$.

Définition 1.6 *(convergence faible*) (Voir [11])*
Soient $(T_n)_{n\in N} \subset E'$ et $T \in E'$. On dit que $T_n \to T$ dans E' faible si $T_n(x) \to T(x)$ pourtout $x \in E$.*

1.8 Régularité en temps

- **La continuité forte**

Théorème 1.7 *(voir [1])*
Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$, X étant dense dans Y. Soit $T > 0$ et p, q tels que $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors l'espace

$$E_{p,q} = \left\{ v \in L^p(0,T;X); v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0,T;Y) \right\}$$

s'injecte continûment dans l'espace $C([0,T];Y)$.

- **La continuité faible**

Théorème 1.8 *(voir [1])*

Soit Y un espace de Banach, on dit qu'une fonction $u : [0,T] \to Y$ faiblement continue si pour tout $\Psi \in Y'$, la fonction défini par

$$t \in [0,T] \to \langle \Psi(t), u(t) \rangle_{Y',Y}$$

est continue. On note par $C([0,T]; Y_{faible})$, l'espace des fonction définies de $[0,T]$ à Y qui sont faiblement continue.

Lemme 1.2 *Soit X un espace de Banach séparable et réflexif, et soit Y un espace de Banach tel que X s'injecte continûment dans Y. Alors*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C([0,T]; Y_{faible}) = C([0,T]; X_{faible})$$

1.9 Lemme de DeRham

Lemme 1.3 *(Lemme DeRham)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ connexe. On considère $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, une condition nécessaire et suffisante pour que

$$f = \nabla P \quad pour \ P \in \mathscr{D}(\Omega)$$

et que

$$\langle f, v \rangle = 0, \forall v \in \mathscr{D}_s(\Omega)$$

où $\mathscr{D}_s(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ à divergence nulle.
On déduit d'après ce lemme, une extension du théorème de DeRham aux distributions qui dèpendent du temps.
On a

Lemme 1.4 *Soit $h \in \mathscr{D}'(]0,T[; H^{-1}(\Omega))$, telle que*

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0, \forall v \in \mathscr{D}_s(\Omega).$$

Alors, il existe $P \in \mathscr{D}'(]0,T[; L^2(\Omega))$, tel que $h = \nabla P$.
Si de plus $h \in W^{k,r}(0,T; H^{-1}(\Omega))$ on peut choisir $P \in W^{k,r}(0,T; L^2(\Omega))$

Définition 1.7 *(Formule des sauts)*

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ admettant des discontinités en les points $a_i, ..., a_p$, soit σ_i le saut en a_i c'est à dire que

$$\sigma_i = \lim_{x \to a_i^+} f(x) - \lim_{x \to a_i^-} f(x).$$

Alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \delta_{a_i}.$$

1.10 Opérateur Monotone

Définition 1.8 *(voir [4])*
Tout opérateur A de $V \to V'$ ayant la propriété de la continuité suivante

$$\begin{cases} \forall u, v, w \in V,\ la\ fonction\ \lambda \to (A(u+\lambda v), w) \\ est\ continue\ de\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.10}$$

est dit hémicontinu.

l'opérateur A vérifie

$$\begin{cases} \forall u, v \in V, ona : \\ (A(u) - A(v), u - v) \geq 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

On pose la

Définition 1.9 *(voir [4])*
Tout opérateur A de $V \to V'$ ayant la propriété (1.11) *est dit monotone.*

Proposition 1.4 *Si $v \to J(v)$ est une fonctionnelle différentiable au sens de Gâteaux sur V et convexe, l'application $u \to J'(u)$ de $V \to V'$ est monotone et hémicontinu.*

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES

Dans ce chapitre, nous nous étudions l'existence d'une solution faible solution de l'équation de Navier-Stokes (cas d'évolution) selon [4] [10].

2.1 Position de problème

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence d'un problème de Navier-Stokes. Pour ce fait, on aura besoin de la méthode de Faedo-Galerkin et le lemme de compacité d'Aubin.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ assez régulière. On note

$$\Omega_T = \Omega \times]0, T[, \quad T \quad fini$$

$$\Sigma_T = \Gamma \times]0, T[.$$

On définit le vecteur u dans Ω par

$$u = (u_1, u_2, u_3)\,. \tag{2.1}$$

Les équations de Navier-Stokes, sont données par

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i D_i u = f - \nabla P, \quad (\mu > 0) \tag{2.2}$$

$$\text{div } u = 0 \tag{2.3}$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$u = 0 \quad sur \quad \Sigma \tag{2.4}$$

$$u\,(x, 0) = u_0\,(x) \quad sur \quad \Omega \tag{2.5}$$

On note le probème (2.2) – (2.5) par $(\mathcal{P}')$
Notre but est de montrer l'existence de u et P
Tels que

- P désigne le tenseur des contraintes (ou tenseur de pression), est une fonction scalaire telle que
$$P : \Omega_T \to \mathbb{R}$$
.
- u désigne la vitesse de fluide , est une fonction vecteur telle que
$$u : \Omega_T \to \mathbb{R}^3$$
.
- t représente le temps.
- μ une constante positive qui désigne la viscosité du fluide.
- f désigne la gravité ou toute autre force massique extérieure.

2.2 Résolution du problème $(\mathcal{P}')$

Avant de commencer la résolution de notre problème on a besoin de définir certains espaces fonctionnels

2.2.1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, on définit les espaces fonctionnels suivants

$$V = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3, \text{div } u = 0 \right\}. \tag{2.6}$$

$$H = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^3, \text{div } u = 0 \right\}. \tag{2.7}$$

L'espace H est équipé du produit scalaire $(.,.)$ induit par $L^2(\Omega)$; l'espace V est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{3} (D_i u, D_i v). \tag{2.8}$$

l'espace V est contenu dans H dense en H et l'injection est continue. Soit H' et V' les espaces duales de H et V.
D'après le theorème de Riesz, on identifie H à son dual : $H' = H$, alors on a l'injection suivante :

$$V \subset H \equiv H' \subset V'. \tag{2.9}$$

où dans (2.9) chaque espace est dense dans le suivant.
En conséquence des identifications précédentes, le produit scalaire dans H de $f \in H$ et $u \in V$ est le même que le produit scalaire de f et u dans la dualité entre V' et V :

$$\langle f, u \rangle = (f, u), \forall f \in H, \forall u \in V$$

2.2.2 Propriétés du terme non-linéaire l'équations de Navier-Stokes

Soient u, v et w trois vecteurs dans V on pose

$$b(u,v,w) = \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i \, dx \tag{2.10}$$

Lemme 2.1 *Pour tous u, v, w dans V nous avons :*

1) $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$
2) $b(u,v,v) = 0$

Démonstration

$*$ On montre que :

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v). \tag{2.11}$$

Au lieu de cela, nous démontrons que :

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} b(u,v,w) + b(u,w,v) &= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i \, dx + \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k w_i) v_i \, dx \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i + u_k (D_k w_i) v_i \, dx \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k [(D_k v_i) w_i + (D_k w_i) v_i] \, dx \\ &= \underbrace{\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k [D_k (v_i w_i)] \, dx}_{I}. \end{aligned}$$

D'après `la formule de Green` , $\forall u \in V$

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{-\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} (v_i w_i) \operatorname{div} u_k \, dx}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Gamma} u_k (v_i w_i) \eta_i \, ds}_{=0} \\ I &= 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

$*$ Maintenant on montre que

$$b(u,v,v) = 0$$

Pour $u, v \in V$, on a d'après (2.11) alors : $b(u,v,v) = -b(u,v,v)$

$$\begin{aligned} b(u,v,v) &= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) v_i \, dx \\ &= -\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k v_i (D_k v_i) \, dx \\ &= -b(u,v,v) \end{aligned}$$

il vient

$$2 \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) v_i \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2b(u,v,v) = 0$$

Alors

$$b(u,v,v) = 0 \tag{2.12}$$

Lemme 2.2 *Pour $u \in V$, la forme linéaire $v \to b(u,u,v)$ est continue sur V ; on a :*

$$\left| \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i \, dx \right| \leq \|u_k\|_{L^6(\Omega)} \|D_k v_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^3(\Omega)} \tag{2.13}$$

tel que :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.$$

Pour

$$b(u,u,v) = (g(u), v), \quad g(u) \in V', \tag{2.14}$$

Alors

$$\|g(u)\|_{V'} \leq c_3 \|u\|^2_{(L^p(\Omega))^3} \tag{2.15}$$

2.2.3 Formulation variationnelle

Soit $v \in V$ une fonction test. On multiplie l'équation (2.2) par v et on intègre sur Ω

$$\int_{\Omega} u' \cdot v \, dx - \mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{3} u_i D_i u \right) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \nabla P \cdot v \, dx. \tag{2.16}$$

On a $\forall P \in \mathscr{D}'(\Omega)$

$$(\nabla P, v) = -(P, \operatorname{div} v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Alors

$$(\nabla P, v) = 0 \quad \left(Dans\ \mathscr{D}'(0,T)^3 \right).$$

D'autre part par la `formule de Green` pour tous champs vectoriels u, v réguliers

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\Gamma} \nabla u \cdot \eta v \, ds}_{=0} \end{aligned}$$

Alors la formulation variationnelle de problème $(\mathcal{P}')$ est donnée par :

$$\int_\Omega u' \cdot v \, dx + \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \left(D_i u_j\right) v_j dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \forall v \in V \tag{2.17}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.18}$$

Théorème 2.1 *Soient*

$$u_0 \in H. \tag{2.19}$$

et

$$f \in L^2(0,T;V'), \tag{2.20}$$

Alors, il existe

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{2.21}$$

solution de (2.17)-(2.18).

Remarque 2.1 *L'existence de la pression P est une conséquence du lemme de DeRham*

Pour la preuve de ce théorème on utilise la méthode de `Faedo-Galerkin`

2.2.4 Démonstration du Théorème d'existence 2.1

Etape 1 : Construction des solutions approchées

Comme les espaces V et $(H_0^1)^3$ sont séparables alors il existe une famille libre. Soient $w_1, ..., w_m$ ... une base «quelconque» de V et u_m solution approchée définie par

$$u_m(t) \in [w_1, ..., w_m], \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j.$$

telle que

$$\int_\Omega u'_m \cdot w_j \, dx - \mu \int_\Omega \Delta u_m \cdot w_j \, dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} u_{im} D_i u_m \right) \cdot w_j \, dx = \int_\Omega f \cdot w_j \, dx, 1 \leq j \leq m. \tag{2.22}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \tag{2.23}$$

où u_{0m} est la projection orthogonale en H de u_0 sur l'espace engendré par $w_1, ..., w_m$, donc

$$u_{0m} \to u_0 \text{ dans H fortement quand } m \to \infty. \tag{2.24}$$

Les fonctions g_{jm}, $1 \leq j \leq m$, sont fonctions scalaires définies sur $[0, t_m]$. Existence de ces fonctions est assurée par le théorème de Cauchy-Lipchitz.

Etape 2 : Estimation de solution approchée

Multiplions (2.22) par $g_{jm}(t)$ et sommons en j, il vient

$$\int_\Omega u'_m \cdot u_m \, dx - \mu \int_\Omega \Delta u_m \cdot u_m \, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{im} \left(D_i u_{jm}\right) \cdot u_{jm} \, dx = \int_\Omega f \cdot u_m \, dx, 1 \leq j \leq m. \quad (2.25)$$

D'après (2.12) on a $b\left(u_m, u_m, u_m\right) = 0$, on en déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(t) \cdot u_m \, dx \quad (2.26)$$

Par l'inégalité de `Cauchy-schwartz`

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu \left\|u_m(t)\right\|^2 \leq \left\|f(t)\right\|_{V'} \left\|u_m(t)\right\| \quad (2.27)$$

D'après l'inégalité de `Young`, le second membre de l'inégalité (2.27) est majoré par

$$\left\|f(t)\right\| \left\|u_m(t)\right\| \leq \frac{\mu}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 + c_\mu \left\|f(t)\right\|^2_{V'}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 + \mu \left\|u_m(t)\right\|^2 \leq \frac{\mu}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 + c_\mu \left\|f(t)\right\|^2_{V'},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2 + \frac{\mu}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 \leq c_\mu \left\|f(t)\right\|^2_{V'}.$$

Intégrons sur $(0, t)$, il vient

$$\left|u_m(t)\right|^2 - \left|u_{0m}\right|^2 + \mu \int_0^t \left\|u_m(\sigma)\right\|^2 d\sigma \leq c_\mu \int_0^t \left\|f(\sigma)\right\|^2_{V'} d\sigma.$$

Alors

$$\left|u_m(t)\right|^2 + \mu \int_0^t \left\|u_m(\sigma)\right\|^2 d\sigma \leq \left|u_{0m}\right|^2 + c_\mu \int_0^t \left\|f(\sigma)\right\|^2_{V'} d\sigma \quad (2.28)$$

d'après (2.19), on a $u_0 \in H$
d'où

$$\left|u_{0m}\right| \leq c_1$$

et d'après (2.20), on a $f \in L^2\left(0, T; V'\right)$ d'où

$$\int_0^t \left\|f(\sigma)\right\|^2_{V'} d\sigma \leq c_2$$

alors, il vient

$$\left|u_m(t)\right|^2 + \mu \left\|u_m(t)\right\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq c \quad (2.29)$$

Comme la constante c ne dépend pas de m on prend donc $t_m = T$.
De l'estimation (2.29) on déduit que

$$\left(u_m\right) \quad \textit{est uniformément bornée dans} \quad L^2\left(0, T; V\right) \cap L^\infty\left(0, T; H\right). \quad (2.30)$$

Etape 3 : Compacité des solutions

L'estimation précédente ne suffit pas pour passer à la limite dans l'équation (2.22) à cause de la présence du terme non-linéaire $b(u,u,w)$. Pour cela, on a besoin de montrer la compacité des solutions.

$$u_m \to u \quad dans \quad L^2(0,T;H)$$

Soit $\widetilde{u}_m$ le prolongement de u_m par 0 en dehors de $(0,T)$. On remarque qu'on a deux points de discontinuité en 0 et en T. D'après la formule des sauts,

$$\frac{d}{dt}\widetilde{u}_m(t) = u'_m(t) + \sigma_1\delta_0 + \sigma_2\delta_T$$

telles que

$$\sigma_1 = \lim_{t\to 0^+} \widetilde{u}_m(t) - \lim_{t\to 0^-} \widetilde{u}_m(t) = u_m(0).$$

$$\sigma_2 = \lim_{t\to 0^+} \widetilde{u}_m(t) - \lim_{t\to 0^-} \widetilde{u}_m(t) = -u_m(T).$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\widetilde{u}_m(t) = u'_m(t) + u_m(0)\,\delta_0 - u_m(T)\,\delta_T$$

On a

$$\forall\epsilon > 0, D_t^{1/4-\epsilon}u_m \quad est\ uniformément\ bornée\ de \quad L^2(0,T;H). \tag{2.31}$$

où

$$\begin{cases} D_t^{1/4-\epsilon}u = \ restriction\ à\ (0,T)\ de\ la\ transformée\ de\ Fourier\ inverse \\ en\ \tau\ de\,|\tau|^{1/4-\epsilon}\,\widehat{u},\ où\ \widehat{u} = transformée\ de\ Fourier\ en\ t\ de\ \widetilde{u}, \\ prolongement\ de\ u\ par\ 0\ hors\ de\ (0,T). \end{cases} \tag{2.32}$$

on déduit de (2.22) que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \widetilde{u}_m(t)\cdot w_j\,dx - \mu\int_\Omega \Delta\widetilde{u}_m\cdot w_j\,dx + b(\widetilde{u}_m,\widetilde{u}_m,w_j) = \int_\Omega \widetilde{f}\cdot w_j dx \\ \\ \qquad -\delta_T\int_\Omega u_m(T)\cdot w_j\,dx + \delta_0\int_\Omega u_{0m}\cdot w_j\,dx. \end{cases} \tag{2.33}$$

où $\widetilde{f}$ est le prolongement de f par 0 hors de $(0,T)$, et où δ_0, (resp. δ_T) est la masse de Dirac en 0 (resp.T).

On utilise maintenant (2.14) mais avec des majorations différentes, valables lorsque $n = 3$; on a

$$(g(u), v) = -b(u,v,u)$$

donc

$$|(g(u), v)| \leq C\,\|u\|^2_{(L^4(\Omega))^3}\,\|v\|$$

et comme $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ si $n = 3$, on a :

$$\|g(u)\|_{V'} \leq c\|u\|^2 \tag{2.34}$$

Posons : $\widehat{g}_m = g(\widehat{u}_m)$

$\widehat{g}_m$ = transformée de Fourier de g_m, $\widehat{f}$ = transformée de Fourier de f ; d'autre-part la dérivée par rapport à t d'ordre γ de u est la transformée de Fourier inverse de $(2i\pi\tau)^\gamma \widehat{u}$, ou

$$\widehat{D_t^\gamma u(\tau)} = (2i\pi\tau)^\gamma \widehat{u}(\tau) \tag{2.35}$$

(2.33) et (2.35)donne :

$$\begin{cases} 2\pi i\tau \int_\Omega \widehat{u}_m(\tau) \cdot w_j \, dx - \mu \int_\Omega \Delta\widetilde{u}_m \cdot w_j \, dx + \int_\Omega \widehat{g}_m \cdot w_j \, dx = \int_\Omega \widehat{f} \cdot w_j \, dx - \\ \qquad -e^{-2\pi i\tau T} \int_\Omega u_m(T) \cdot w_j \, dx + \int_\Omega u_{0m} \cdot w_j \, dx. \end{cases} \tag{2.36}$$

Mais $\widehat{u}_m(\tau) \in [w_1, ..., w_m]$; on déduit donc de (2.36)

$$\begin{cases} 2\pi i\tau \int_\Omega \widehat{u}_m(\tau) \cdot \widehat{u}_m(\tau)\, dx + \mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \widehat{u}_{im}(\tau)}{\partial x_j} \frac{\partial \widehat{u}_{im}(\tau)}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \widehat{g}_m(\tau) \cdot \widehat{u}_m(\tau)\, dx = \\ \int_\Omega \widehat{f}(\tau) \cdot \widehat{u}_m(\tau) \, dx - e^{-2\pi i\tau T} \int_\Omega u_m(T) \cdot \widehat{u}_m(\tau) \, dx + \int_\Omega u_{0m} \cdot \widehat{u}_m(\tau) \, dx. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} 2\pi i\tau |\widehat{u}_m(\tau)|^2 + \mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \widehat{u}_{im}(\tau)}{\partial x_j} \frac{\partial \widehat{u}_{im}(\tau)}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \widehat{g}_m(\tau) \cdot \widehat{u}_m(\tau)\, dx = \int_\Omega \widehat{f}(\tau) \cdot \widehat{u}_m(\tau)\, dx \\ \qquad -e^{-2\pi i\tau T} \int_\Omega u_m(T) \cdot \widehat{u}_m(\tau) \, dx + \int_\Omega u_{0m} \cdot \widehat{u}_m(\tau) \, dx. \end{cases} \tag{2.37}$$

On déduit de (2.37), en prenant la partie imaginaire et majorant :

$$\begin{cases} |\tau| |\widehat{u}_m(\tau)|^2 \leq \left(\|\widehat{g}_m(\tau)\|_{V'} + \left\|\widehat{f}(\tau)\right\|_{V'} \right) \|\widehat{u}_m(\tau)\| + |u_m(T)| |\widehat{u}_m(\tau)| \\ \qquad + |u_{0m}| |\widehat{u}_m(\tau)| \end{cases} \tag{2.38}$$

D'après (2.34) il vient :

$$\begin{aligned} \|\widehat{g}_m(\tau)\|_{V'} &\leq \int_0^T \|g_m(t)\|_{V'} \, dt \\ &\leq C \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \\ &\leq C_1 \end{aligned}$$

et donc

$$\left\|\widehat{g}_m(\tau)\right\|_{V'} \leq C_1.$$

D'après (2.30), $u_m(T)$ et u_{0m} sont bornées, on déduit de (2.38)

$$|\tau| \left|\widehat{u}_m(\tau)\right|^2 \leq c_1 \left\|\widehat{u}_m(\tau)\right\| + \left\|\widehat{f}(\tau)\right\|_{V'} \left\|\widehat{u}_m(\tau)\right\| + c_2 \left|\widehat{u}_m(\tau)\right|$$

Soit σ tel que $2\sigma > 1$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau| \left|\widehat{u}_m(\tau)\right|^2}{1+|\tau|^\sigma} d\tau \leq \alpha_m + \beta_m + \phi_m \tag{2.39}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\|\widehat{u}_m(\tau)\right\|}{1+|\tau|^\sigma} d\tau, \\
\beta_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\|\widehat{f}(\tau)\right\|_{V'} \left\|\widehat{u}_m(\tau)\right\|}{1+|\tau|^\sigma} d\tau, \\
\phi_m &= c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\widehat{u}_m(\tau)\right|}{1+|\tau|^\sigma} d\tau.
\end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{1+|\tau|^\sigma} \in L^2(\mathbb{R}_\tau)$ et d'après (2.30), $\widehat{u}_m$ est uniformément bornée de $L^2(\mathbb{R}_\tau; V)$, donc $\alpha_m \leq c$ comme

$\beta_m \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widehat{f}(\tau)\right\|_{V'} \left\|\widehat{u}_m(\tau)\right\| d\tau$ On a $\beta_m \leq c$,

Enfin «$\frac{1}{1+|\tau|^\sigma} \in L^2(\mathbb{R}_\tau)$» et (2.30), entrainent $\phi_m \leq c$
Donc (2.39), $\sigma > \frac{1}{2}$ entrainent (2.31).
D'après le lemme de compacité 1.1, on a

Conclusion : (u_m) est uniformément bornée de $L^2(0, T; H)$.

Etape 4 : Passage à la limite

On peut donc extraire de (u_m) une suite (u_n) telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \;\; dans \;\; L^2(0,T;V) && (2.40)\\ u_n &\rightharpoonup^* u \;\; dans \;\; L^\infty(0,T;H) && (2.41)\\ u_n &\to u \;\; dans \;\; L^2(0,T;H) \;\; fort\ et\ p.\ p.\ dans\ \Omega_T,. && (2.42)\end{aligned}$$

On déduit de (2.40) (2.42) que $u_n(0) \to u(0)$ dans V' faible et donc $u(0) = u_0$.
En utilisant le lemme suivant :

Lemme 2.3 *Soit* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. *Alors*

$$u \in L^4\left(0,T;(L^p(\Omega))^3\right). \tag{2.43}$$

Démonstration du lemme

Si $u = \{u_i\}$, *on a*

$$u_i \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{2.44}$$

Pour $n \geq 3$ *:*
D'après le théorème de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

$$u_i \in L^2(0,T;L^q(\Omega)) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{2.45}$$

Mais d'après Hölder

$$\begin{aligned} \|u_i(t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |u_i(t)|_{L^q(\Omega)}^{1/2} \|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq c\,\|u_i(t)\|_{L^q(\Omega)}^{1/2} \end{aligned}$$

D'où

$$u \in L^4(0,T;L^p(\Omega))$$

D'où (2.43)

Alors

$(u_{ni}u_{nj})$ est bornée dans $L^2\left(0,T;L^{p/2}\right)$ et on peut donc supposer que

$$(u_{ni}u_{nj}) \rightharpoonup \chi_{ij} \;\; dans \;\; L^2\left(0,T;L^{p/2}\right). \tag{2.46}$$

Mais grâce à (2.42) on a

$$\chi_{ij} = u_i u_j. \tag{2.47}$$

Utilisons le Lemme suivant :

Lemme 2.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_n et g des fonctions de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, telle que*

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \quad g_n \to g \quad p.\ p.\ dans\ \Omega.$$

Alors $g_n \to g$ dans L^q faible.

$u_{ni}u_{nj} \to u_i u_j$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_T)$; en effet

$$\int_\Omega u_{ni}u_{nj}\varphi\ dx\ dt \to \int_\Omega u_i u_j \varphi\ dx\ dt \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_T)$$

car $u_{ni} \rightharpoonup u_i$ dans $L^2(\Omega_T)$ et $u_{nj}\varphi \to u_j\varphi$ dans $L^2(\Omega_T)$.

On déduit de (2.46) (2.47) que

$$b(u_n, u_n, w_j) \rightharpoonup b(u, u, w_j)\ \ dans\ L^2(0,T). \tag{2.48}$$

En effet si $\psi \in L^2(0,T)$, on a :

$$\int_0^T b(u_n, u_n, w_j)\psi\ dt = -\int_0^T b(u_n, w_j, u_n)\psi\ dt$$

Par ailleurs

$$(u_n', w_j) \to (u', w_j) \quad dans\ \mathscr{D}'(0,T)$$

et donc (2.22) (pour $m = n$) donne à la limite

$$\int_\Omega u' \cdot w_j\ dx - \mu \int_\Omega \Delta u \cdot w_j\ dx + b(u,u,w_j) = \int_\Omega f \cdot w_j\ dx.$$

et cela $\forall j$.
On en déduit (2.17), $\forall v \in V$
Reste à montrer que (2.5) a lieu. Mais d'après (2.40) on a, $u_n(0) \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $L^2(\Omega)$; or (cf.(2.24)) $u_n(0) = u_{n0} \to u_0$ dans H, donc on a (2.5).

CHAPITRE 3

ETUDE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC UN TERME RÉGULARISANT

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'un problème de Navier-Stokes régularisant. En effet, nous allons ajouter un terme régularisant aux équations de Navier-Stokes pour augmenter la régularité en temps de la solution. Pour ce fait, on aura besoin de la méthode de Faedo-Galerkin, le lemme de compacité d'Aubin et de la méthode de monotonie.

3.1 Position du problème

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière régulière Σ. On note

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T) \text{ et } \Sigma_T = \Sigma \times (0, T).$$

On pose $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} |D_i u_j|^2 , D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

On considère le problème défini dans Ω_T suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \mu_0 \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i D_i u = f - \nabla P, \quad (\mu, \mu_0 > 0) . \tag{3.2}$$

$$\text{div } u = 0, \tag{3.3}$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale

$$u = 0 \quad sur \quad \Sigma_T \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad sur \quad \Omega. \tag{3.5}$$

On note le probème $(3.2) - (3.5)$ par $(\mathcal{P}'')$. Notre but est de montrer l'existence et l'unicité de la vitesse u et l'existence de la pression P.

3.2 Résolution du problème

3.2.1 Espaces fonctionnels

On a besoin de définir certains espaces fonctionnels pour la résolution de notre problème. On introduit les espaces fonctionnels suivants

$$V = \left\{ u | u \in \left(W_0^{1,4}(\Omega)\right)^3, \text{div } u = 0 \right\} \tag{3.6}$$

muni de la nomre

$$\|u\|_V = \left(\sum_{j=1}^{3} \left\| D^j u \right\|_{L^4(\Omega)}^4 \right)^{1/4},$$

et

$$H = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^3, \text{div } u = 0 \right\}. \tag{3.7}$$

3.2.2 Formulation variationnelle

Soit $v \in V$ une fonction test. Nous multiplions l'équation (3.2) par v et intègrons sur Ω

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u \cdot v dx - \mu \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) \cdot v dx - \mu_0 \int_\Omega \Delta u \cdot v dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} u_i D_i u \right) \cdot v dx \tag{3.8}$$

$$= \int_\Omega f \cdot v dx - \int_\Omega \nabla P \cdot v dx.$$

D'autre part par la formule de Green, $\forall u, v \in V$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) \cdot v \, dx &= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_\Gamma |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \eta_i \, ds}_{=0} \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\nabla u|^2 D_i u_j D_i v_j \, dx. \end{aligned}$$

Alors la formulation variationnelle de problème $\mathcal{P}''$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u \cdot v dx + \mu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\nabla u|^2 D_i u_j D_i v_j dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i (D_i u_j) v_j dx \tag{3.9}$$

$$= \int_\Omega f \cdot v dx, \forall v \in V.$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.10}$$

3.2.3 Théorème d'existence

Théorème 3.1 *On suppose que $f \in L^{4/3}(0,T;V')$ et $u_0 \in H$ il existe alors une solution u, P du problème $(\mathcal{P}'')$, telle que*

$$u \in L^4(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{3.11}$$

La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que le problème du chapitre précédent. La seule différence est dans le passage à la limite dans le terme régularisant. Pour ce fait on aura besoin d'autre outils mathématiques.

Etape 1 : Solutions approchées

Soient $w_1, ..., w_m$ ... une base quelconque de V et u_m solution approchée définie par

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

Les g_{jm} étant à déterminer par les équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u_m \cdot w_j dx + \mu \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 D_i u_{jm} D_i w_j dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla u_m \nabla w_j dx + \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{im}(D_i u_{jm}) w_j dx = \int_\Omega f \cdot w_j dx, \text{ où } \ 1 \leq j \leq m.$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{3.13}$$

L'existence de g_{jm} se fait grâce aux résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles dans un intervalle $[0, t_m]$. On montrera dans la suite que $t_m = T$.

Etape 2 : Estimation de solutions

On multiplie (3.12) par $g_{jm}(t)$ et sommons en j ; comme $\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{im}(D_i u_{jm}) u_m dx = 0$, on déduit

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t} \cdot u_m \, dx - \mu \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u_m|^2 \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) \cdot u_m dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_m dx = \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega f \cdot u_m \, dx, \ 1 \leq j \leq m.$$

tel que

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) \cdot u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^4 \, dx.$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \mu \|u_m(t)\|^4 + \mu_0 \|u_m(t)\|^2 = \int_\Omega f \cdot u_m \, dx, \tag{3.15}$$

Par l'inégalité de `Cauchy-schwartz`

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2+\mu\left\|u_m(t)\right\|^4+\mu_0\left\|u_m(t)\right\|^2\leq\left\|f(t)\right\|_{V'}\left\|u_m(t)\right\| \tag{3.16}$$

D'après l'inégalité de `Young`

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2+\mu\left\|u_m(t)\right\|^4+\mu_0\left\|u_m(t)\right\|^2\leq\frac{\mu}{2}\left\|u_m(t)\right\|^4+c_\mu\left\|f(t)\right\|_{V'}^{3/4} \tag{3.17}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2+\frac{\mu}{2}\left\|u_m(t)\right\|^4+\mu_0\left\|u_m(t)\right\|^2\leq c_\mu\left\|f(t)\right\|_{V'}^{3/4} \tag{3.18}$$

En intégrant sur $(0,t)$:

$$\left|u_m(t)\right|^2+\mu\int_0^t\left\|u_m(\sigma)\right\|^4d\sigma+\mu_0\int_0^t\left\|u_m(\sigma)\right\|^2d\sigma\leq\left|u_{0m}\right|^4+c_\mu\int_0^t\left\|f(\sigma)\right\|_{V'}^{3/4}d\sigma \tag{3.19}$$

et comme $f\in L^{3/4}(0,T;V')$ et $u_0\in H$, alors

$$\left|u_m(t)\right|^2+\mu\left\|u_m(t)\right\|_{L^4(0,T;V)}^4+\mu_0\left\|u_m(t)\right\|_{L^2(0,T;V)}^2\leq c, \tag{3.20}$$

où c est une constante indépendante de m, on pourra dans la suite prendre $t_m=T$.

Conclusion :

$$(u_m)\ \text{ est uniformément bornée dans } L^4(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H). \tag{3.21}$$

Etape 3 : Compacité des solutions

Avant de passer à la limite il faut montrer la compacité des solutions, on a besoin le lemme suivant

Lemme 3.1 *La suite (u_m) est compacte dans $L^4(0,T,L^2(\Omega))$.*

La preuve de ce lemme se fait de la même manière que le chapitre précedent, Lemme 2.2.

Etape 4 : Passage à la limite

Grâce à l'estimation (3.21) et au lemme (3.1), on dèduit les passages à la limite suivants

$$\begin{aligned}
&u_n\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^4(0,T;V)\\
&u_n\rightharpoonup^* u \text{ faiblement } ^\star \text{ dans } L^\infty(0,T;H)\\
&u_n\to u \text{ fortement dans } L^4(0,T;H)\ \text{ et p. p. dans } \Omega_T\\
&u_n'\rightharpoonup u' \text{ faiblement dans } L^4(0,T;V')
\end{aligned} \tag{3.22}$$

par ce dernier passage on déduit

$$\sum_{i,j=1}^3 u_{im}D_iu_{jm}=(u_m\cdot\nabla)\,u_m\rightharpoonup(u\cdot\nabla)\,u \text{ dans } L^2\left(0,T;L^1(\Omega)\right) \tag{3.23}$$

On définit maintenant l'opérateur non linéaire A par

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \tag{3.24}$$

Pour tout $v \in V$, on a

$$\begin{aligned} \langle A(u_m), v \rangle &= \mu \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 D_i u_{jm} D_i v_j \; dx, \\ &= \mu \|\nabla u_m\|^2 \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla v \; dx. \end{aligned}$$

On a

$$|\langle A(u_m), v \rangle| \leq \mu \|\nabla u_m\|^3 \|\nabla v\|, \forall v \in V,$$

d'où $A(u_m) \in V', \forall u_m \in V$, et on a

$$\|A(u_m)\|_{V'} \leq \mu \|\nabla u_m\|^3.$$

On intègre sur $[0, T]$

$$\int_0^T \|A(u_m)\|_{V'} \; dt \leq \mu \int_0^T \|\nabla u_m\|^3 \; dt.$$

Comme ∇u_m est borné dans $L^4\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ donc $A(u_m)$ est borné dans $L^{4/3}(0, T; V')$, on en déduit que

$$A(u_n) \rightharpoonup \chi \quad dans \quad L^{4/3}(0, T; V') \tag{3.25}$$

Grâce aux (3.22), (3.23) et (3.25), on peut passer à la limite dans (3.12) on obtient l'équation

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot w_j \; dx + \mu \int_{\Omega} \chi \cdot w_j \; dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_j dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot w_j dx = \int_{\Omega} f \cdot w_j dx. \tag{3.26}$$

Mais pour $\forall j$, on déduit donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v \; dx + \mu \int_{\Omega} \chi \cdot v \; dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v dx = \tag{3.27}$$

$$\int_{\Omega} f \cdot v dx, \; \forall v \in V, \; \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

Il reste à montrer que $\chi = A(u)$, pour cela on utilise la méthode de monotonie.
On remarque que

$$A(u_n) = J'(u_n)$$

avec

$$J(u_n) = \frac{\mu}{4} \|\nabla u_n\|^4$$

et la fonctionnelle $u \to J(u)$ est différentiable au sens de Gâteaux sur V est convexe. Grâce à la proposition (1.4), on déduit que l'opérateur A est monotone et hémicontinu. On pose maintenant

$$\begin{aligned} X_n &= \int_0^T \left(A(u_n) - A(v), u_n - v\right) \, dt \\ &= \int_0^T \Big[(A(u_n), u_n) - (A(u_n), v) - (A(v), u_n - v) \Big] dt \geq 0, \forall v \in L^4(V). \end{aligned}$$

De l'équation (3.15)

$$\int_0^T (A(u_n), u_n) \, dt = \int_{\Omega_T} f \cdot u_n - \frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_n(0)\|^2$$

De l'équation (3.27), on a

$$X_n = \frac{1}{2} \|u_n(0)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2 + \int_{\Omega_T} f \cdot u_n - \int_0^T (A(u_n), v) \, dt -$$

$$\int_0^T (A(v), u_n - v) \, dt, \forall v \in L^4(V).$$

On prend la limite sup de X_n et on utilise le fait que

$$\|u(T)\| \leq \liminf \|u_n(T)\|.$$

On obtient

$$\limsup X_n \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 + \int_{\Omega_T} f \cdot u \, dx - \int_0^T (\chi, v) \, dt -$$

$$\int_0^T (A(v), u - v) \, dt, \forall v \in L^4(V).$$

De l'équation (3.27), il résulte que

$$\int_0^T (\chi, u) \, dt = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 + \int_{\Omega_T} f \cdot u \, dx,$$

donc

$$\limsup X_n \leq \int_0^T (\chi, u) \, dt - \int_0^T (\chi, v) \, dt - \int_0^T (A(v), u - v) \, dt.$$

D'où

$$\limsup X_n \leq \int_0^T (\chi - A(v), u - v) \, dt, \forall v \in L^4(0, T; V).$$

Comme l'opérateur A est monotone alors

$$\int_0^T (\chi - A(v), u - v) \, dt \geq 0, \ \forall v \in L^4(0, T; V) \ldots\ldots (*)$$

Soit maintenant $\bar{v} \in V$ quelconque et $h \in \mathbb{R}_+^*$, si on prend dans $(*)$, $v = u - h\bar{v}$, on obtient

$$\int_0^T (\chi - A(u - h\bar{v}), h\bar{v})\ dt = h\int_0^T (\chi - A(u - h\bar{v}), \bar{v})\ dt \geq 0$$

donc

$$\int_0^T (\chi - A(u - h\bar{v}), \bar{v})\ dt \geq 0.$$

On fait tendre h vers 0, comme A est hemicontinu, il vient

$$\int_0^T (\chi - A(u), \bar{v})\ dt \geq 0, \forall \bar{v} \in L^4(0, T; V)$$

Cette inégalité reste vraie pour $-\bar{v}$, donc

$$\int_0^T (\chi - A(u), \bar{v})\ dt = 0, \forall \bar{v} \in L^4(0, T; V)$$

ce qui donne

$$A(u) = \chi$$

3.2.4 Unicité de la solution

On a le théorème d'unicité suivant

Théorème 3.2 *Le problème $(\mathcal{P}'')$ admet alors une solution et une seule telle que*

$$u \in L^4(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{3.28}$$

Démonstration du théorème

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème $(\mathcal{P}'')$, vérifiant (3.28) et soit $w = u_1 - u_2$. On a

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \cdot v dx + \mu\Big\langle A(u_1) - A(u_2), v\Big\rangle + \mu_0 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (u_1 \cdot \nabla) w \cdot v dx -$$

$$\int_\Omega (w \cdot \nabla) w \cdot v dx + \int_\Omega (w \cdot \nabla) u_1 \cdot v dx = 0.$$

En prenant $v = w(t)$, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \mu\Big\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\Big\rangle + \mu_0 \|\nabla w\|^2 + \int_\Omega (w \cdot \nabla) u_1 \cdot w dx = 0 \tag{3.29}$$

L'opérateur A étant monotone l'équation (3.29) devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \mu_0 \|\nabla w\|^2 \leq -\int_\Omega (w \cdot \nabla) u_1 \cdot w dx = \int_\Omega (w \cdot \nabla) w \cdot u_1 dx \quad (\text{ voir lemme } (2.1)) \tag{3.30}$$

Le point essentiel est de pouvoir majorer le terme non linéaire

$$b(w, w, u_1) = \int_\Omega (w \cdot \nabla) w \cdot u_1 dx.$$

On a par l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q \leq 6$, en dimension 3,

$$\Big|b(w(t), w(t), u_1(t))\Big| \leq C_1 \Big\|w(t)\Big\| \Big\|u(t)\Big\|_{(L^6(\Omega))^3} \Big\|w(t)\Big\|_{(L^3(\Omega))^3)}. \tag{3.31}$$

On utilise maintenant l'inégalité d'interpolation (voir la proposition (1.2)) pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\Big\|w(t)\Big\|_{(L^3(\Omega)^3)} \leq \Big|w(t)\Big|^{\frac{1}{2}} \Big\|w(t)\Big\|^{\frac{1}{2}}_{(L^6(\Omega)^3)} \tag{3.32}$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^6(\Omega)$ en dimension 3 (c'est à dire $\|w\|_{(L^6(\Omega))^3} \leq C\|w\|$), la majoration (3.31) devient

$$\Big|b(w(t), w(t), u_1(t))\Big| \leq C_2 \Big\|u(t)\Big\|_{(L^6(\Omega))^3} \Big|w(t)\Big|^{\frac{1}{2}} \Big\|w(t)\Big\|^{\frac{3}{2}} \tag{3.33}$$

On pose

$$M(t) = \Big\|u(t)\Big\|_{(L^6(\Omega))^3},$$

par l'inégalité de Young on obtient la majoration

$$\Big|b(w(t), w(t), u_1(t))\Big| \leq C_3 M(t)^4 \Big|w(t)\Big|^2 + \mu_0 \Big\|w(t)\Big\|^2 \tag{3.34}$$

On l'injecte dans (3.30), on a l'estimation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|w\Big|^2 \leq C_3 M^4(t) \Big|w(t)\Big|^2 \tag{3.35}$$

Comme $u \in L^4(0, T; V)$ alors $M^4(t) \in L^1(0, T)$, d'où

$$w = 0$$

CONCLUSION

Dans ce trvail, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée, tel que nous avons conclu lorsque l'opérateur est monotone, la méthode de la monotonie est mieux adaptée à l'étude des problèmes non linéaires, car elle nécessite moins d'estimations que la méthode de compacité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Boyer, P. Fabrie, Mathematical Tools for the Study of the Incomperssible Navier-Stokes Equations and Related Models, Springer New York (2013).

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application. Masson, Paris (1992).

[3] F. Djetoui, Existence d'une solution faible pour l'écoulement d'un fluide micropolaire (Diplôme de Master),Département Des Mathématiques, université de M'sila -Algérie-, (2018).

[4] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéares, Paris, Dunod (1969).

[5] G. Lukaszewicz, Micropolar fluids (Theory and Application), Birkhauser Boston (1999).

[6] V. Mikhailov, Equations aux dérivées partielles. Editions Mir (1980).

[7] A. Munnier, Cours d'Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy (2007), 2007-2008.

[8] A. Popier, Espace de Banach, de Hilbert, de Sobolev. Université du Maine, Le Mans.

[9] P. A. Raviart, J. M. Thomas. Introduction à l'Analyse Numérque l'Analyse des équations aux dérivées partielles. Masson (1988).

[10] R .Temam, Navier-Stokes equations.Theory and Numerical Analysis. North-Holland, Publishing Company-Amsterdam. New York OXFORD (1977).

[11] G. Thierry, H. Raphaèle, Equations aux dérivées partielles, Université Aix Marseille 1 (2011).

ملخص

في هذه الأطروحة سوف ندرس نموذجين من معادلة نافيير-ستوكس وهما معادلات تفاضلية جزئية غير خطية: هدفنا هو إظهار وجود الحلول. لهذا الغرض ، يتم استخدام أدوات رياضية مختلفة مثل طريقة فاودو-كالركين ؛ خاصية الاكتناز وطريقة الرتابة

الكلمات المفتاحية :

معادلة نافيير-ستوكس، طريقة فاودو-كالركين، خاصية الاكتناز، طريقة الرتابة.

Résumé

Dans ce mémoire nous allons étudier deux modèles de l'équation de Navier-Stokes qui sont des équations aux dérivées partielles non linéaires : Notre but est de montrer l'existence de solutions ; pour cet effet on faitappel aux différent outils mathématiques tel la méthode de Faedo-Galerkin ; lemme de compacité et la méthode de monotonie.

Les mots clés :

Équation de Navier-Stokes, la méthode de Faedo-Galerkin, lemme de compacité, la méthode de monotonie.

Abstract

In this thesis we will study two models of the Navier-Stokes equation which are nonlinear partial differential equations: Our aim is to show the existence of solutions; for this purpose, different mathematical tools such as the Faedo-Galerkin method are used; lemma of compactness and the method of monotony.

The key-words:

the Navier-Stokes equation, the Faedo-Galerkin method, lemma of compactness, the method of monotony.