MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude présenté pour l'obtention du diplôme
Master Académique

Domaine	:	Mathématiques et Informatique
Filière	:	Mathématiques
Option	:	Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Rédiger Par:

Thème Sur

Devant le jury composé de:

D^{r}.	M. A. université-M'SILA	**Président**
D^{r}.	M. A. université-M'SILA	**Examinateur**
D^{r}.	M. A. université-M'SILA	**Rapporteur**

Version de : 2015/2016

Remerciements

En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire **Amroune Abdelaziz** . Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles,

leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement ma grand-mère .

Je remercie ma frère et sœur qui ont toujours été là pour moi.

Enfin, je remercie ma famille que j'aime tant.

Dédicace

A mes parents que j'aime très forts.

A ma grand-mère .

A mes frères et soeurs.

A toute ma famille.

A mes amis

Table des matières

Introduction

La théorie des systèmes déductifs a été fondée par A. Tarski [1930] et développée par le même auteur dans ses importants travaux [1956]. D'autre part, D. Hilbert [1923] a mis en évidence l'importance du calcul implicatif positif, dont l'étude au point de vue de l'algèbre a été développée par L. Henkin [1950] et A. Diego [1965]. Ce dernier travail qui contient la thèse de cet auteur, soutenue en 1961 à l'université de Buenos Aires.[1]

La notion de modèle implicatif au sens de Henkin (à laquelle on peut donner le nom d'algèbre implicative de Hilbert) a une grande importance dans l'étude du calcul considéré par D. Hilbert. Il existe cependant d'autres calculs propositionnels, de nature très variée, et distinctes du calcul implicatif positif.[1]

Ce document est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est constitué des définitions et des concepts de base ; à ce niveau, nous rappelons les notions et outils de base de la théorie des ensembles ordonnés, nous présentons les concepts et le vocabulaire permettant de définir un ensemble ordonné, un treillis et une algèbre de Boole en proposant pour chacun un exemple illustratif.

Le second chapitre consiste à définir et à étudier les treillis de Heyting en général et énumérant certaines propriétés algébriques importantes qui les identifient et les caractérisent.

Le dernier chapitre fera l'objet de l'étude les systèmes déductifs et traitement les deux théories principales.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS ET NOTIONS DE BASE

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions de sur relations définies entre deux ensembles non vides.

Ce chapitre est divisé en quatre sections :

1- Dans la première section nous donnons des définitions et des propriétés des relations binaires.

2- La seconde section est consacrée à l'ordre et aux ensembles ordonnés ainsi qu'aux notions de chaînes et antichaines.

3- Dans la troisième section on introduit la structure de treillis d'ordre, treillis algébrique, treillis distributif, treillis modulaire, treillis complémenté, treillis résiduel ainsi que certain sous-ensembles particuliers dans un treillis.

4- Enfin la quatrième section est consacrée à une classe particulière de treillis à savoir les algèbres de Boole.

1.1 Relations binaires

Définition 1.1.1 *Une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times F$. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$. Si $(x, y) \notin \mathcal{R}$*

on dit que x n'est pas en relation avec y et on note $\left(x\mathcal{R}^C y\right)$ ou $\rceil(x\mathcal{R}y)$. Dans le cas particulier où $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire définie sur E.

Définition 1.1.2 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F. On appelle relation réciproque de $\mathcal{R}$ et on note $\mathcal{R}^{-1}$ (ou $\mathcal{R}^d$) la relation binaire de F vers E définie par :*

$$\forall(x,y) \in E \times F,\ (x\mathcal{R}^{-1}y) \Leftrightarrow (y\mathcal{R}x).$$

Définition 1.1.3 *On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ est incluse dans une relation $\mathcal{S}$ ou que $\mathcal{S}$ est une extension de $\mathcal{R}$ et on note $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, si*

$$\forall(x,y) \in E \times F\ (x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{S}.$$

On dit que deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont égales si $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

Définition 1.1.4 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F. On appelle relation complémentaire de $\mathcal{R}$ et on note $\mathcal{R}^c$ la relation binaire de E vers F définie par :*

$$\forall(x,y) \in E \times F, (x,y) \in \mathcal{R}^c \Leftrightarrow (x,y) \notin \mathcal{R}.$$

Définition 1.1.5 *[6] Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F et $\mathcal{S}$ une relation binaire de l'ensemble F vers un ensemble G. La composée $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est une relation binaire de l'ensemble E vers l'ensemble G notée $\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{S}$ et définie par :*

$$\forall(x,y) \in E \times G, (x\mathcal{T}y) \Leftrightarrow (\exists z \in F\ tq\ (x\mathcal{S}z) \wedge (z\mathcal{R}y)).$$

Notation : Dans le cas particulier où $E = F = G$ on note $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{R}$.

Définition 1.1.6 (Relation d'équivalence) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est :*

- *Réflexive* $[(\forall x \in E)(x,x) \in \mathcal{R}]$;
- *Symétrique* $[(\forall x, y \in E)\ si\ (x,y) \in \mathcal{R}\ alors\ (y,x) \in \mathcal{R}]$;
- *Transitive* $[(\forall x, y, z \in E)\ si\ (x,y) \in \mathcal{R}\ et\ (y,z) \in \mathcal{R},\ alors\ (x,z) \in \mathcal{R}]$.

1.2 Ensemble ordonné

Définition 1.2.1 (Relation d'ordre) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est un ordre sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

- *Réflexive : pour tout $x \in E, x \leq x$;*
- *Antisymétrie : pour tous $x, y \in E, (x \leq y$ et $y \leq x)$ impliquent $x = y$;*
- *Transitive :pour tous $x, y, z \in E$, $(x \leq y$ et $y \leq z)$ impliquent $x \leq z$.*

Définition 1.2.2 (Ensemble ordonné) *Un ensemble ordonné ou ordre est un couple $(E, \leq)$ où E est un ensemble non vide et $\leq$ est une relation d'ordre définie sur E .*

Remarque 1.2.1 *Les définitions ci-dessus correspondent à l'ordre large mais pas à l'ordre strict : $(\mathbb{R}, <)$ où $<$ est l'ordre strict usuel sur les réels n'est pas un ensemble ordonné (c'est un ensemble strictement ordonné, voir en-dessous).*

Définition 1.2.3 (Ordre strict) *Une relation binaire est un ordre strict (ou une relation d'ordre strict) quand elle est irréflexive (pour tout $x \in E, x\mathcal{R}^c x$) et transitive.*

Théorème 1.2.1 *Un ordre strict est toujours antisymétrique.*

Définition 1.2.4 (Ensemble strictement ordonné) *Soit E un ensemble et $<$ une relation d'ordre strict sur E. On dit que $(E, <)$ est un ensemble strictement ordonné.*

- *Deux éléments x et y de E sont dits comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on note cette symboliquement par l'écriture $x \nparallel y$. Si tous les paires d'éléments de E sont comparables, alors nous disons que E forme une chaîne, sinon ils sont dits incomparables, il sont alors notés $x \parallel y$. Si tous les paires d'éléments (distincts) de E sont incomparables alors nous disons que E forme une antichaîne.*

Définition 1.2.5 (Ordre total) *Un ordre sur E est dit total si deux éléments sont toujours comparables. Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.*

Définition 1.2.6 (Ordre strict total) *Un ordre strict sur E est dit strict total si deux éléments différents sont toujours comparables :*

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow x < y \text{ ou } y < x.$$

Exemple 1.2.1

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre naturel est totalement ordonné.*

2. *L'ensemble $\mathbb{N}$ est partiellement ordonné par la relation de divisibilité. On note ce poset par $(\mathbb{N}, |)$.*

3. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas partiellement ordonné par rapport à la divisibilité. Soit x un élément non nul. On a x divise $-x$, et $-x$ divise x. Mais x n'est pas égal à $-x$, et donc la propriété d'antisymétrie n'est pas valide.*

4. *Si X est un ensemble, l'ensemble de ses parties $P(X)$ est partiellement ordonné par l'inclusion. On note ce poset $(P(X), \subset)$.*

5. *Supposons que A est un ensemble totalement ordonné par une relation, et supposons que n est un entier positif. Alors l'ensemble A^n est partiellement ordonné par la relation $\leq_{lex}$définie ci-dessous :*

   $$(a_1, ..., a_n) <_{lex} (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow \exists i \in [1, n] : a_1 = b_1, b_2 = a_2, ..., a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i.$$

   Cet ordre est appelée l'ordre lexicographique.

6. *Soit $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ensembles ordonnés. On définit l'ordre produit simple $\leq_{prod}$ sur $E \times F$ par $\forall (x_1, y_1) \in E \times F, \forall (x_2, y_2) \in E \times F, (x_1, y_1) \leq_{prod} (x_2, y_2), x_1 \leq_E x_2$ et $y_1 \leq_F y_2$.*

1.2.1 Eléments particuliers

Définition 1.2.7 (Minorant, plus petit élément) *[5] Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. On dit que $x \in E$ est un minorant de F si tout élément de F est plus grand que x pour $\leq$: $\forall y \in F, x \leq y$. Si le minorant de F est un élément de F on dit que c'est le plus petit élément de F.*

Définition 1.2.8 (Borne inférieure) *On appelle borne inférieure de F, s'il existe, le plus grand des minorants de F. On la note* $\inf F$.

Définition 1.2.9 (Majorant, plus grand élément) *[5]Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. On dit que $x \in E$ est un majorant de F si tout élément de F est plus petit que x pour $\leq$: $\forall y \in F, y \leq x$. Si un majorant de F est un élément de F, on dit que c'est le plus grand élément de F.*

Définition 1.2.10 (Borne supérieure) *On appelle borne supérieure de F, si elle existe, le plus petit des majorants de F, on la note* $\sup F$.

Remarque 1.2.2 *Il n'y a pas toujours un minorant ou un majorant.*

Exemple 1.2.2 *Dans* $(\mathbb{R}, \leq)$ *:*

Pour $F = [0; 1[$, on a $Majo(F) = [1; +\infty[$ et $Mino(F) =]-\infty; 0]$ donc $\sup F$ *et* $\inf F$ *existent avec* $\sup F = 1$ *et* $\inf F = 0$.

Pour $F =]-\infty; 1]$, on a $Majo(F) = [1; +\infty[$ et $Mino(F) = \emptyset$ donc $\sup F$ *existe et* $\sup F = 1$. *En revanche* $\inf F$ *n'existe pas.*

Définition 1.2.11 (Elément minimal) *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. Un élément $x \in F$ est un élément minimal de F quand aucun élément de F n'est strictement plus petit, pour $\leq$ que x*

$$\forall y \in F, y \leq x \Rightarrow y = x.$$

Définition 1.2.12 (Elément maximal) *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. Un élément $x \in F$ est un élément maximal de F quand aucun élément de F n'est strictement plus grand, pour $\leq$ que x*

$$\forall y \in F, x \leq y \Rightarrow y = x.$$

1.2.2 Chaînes et antichaînes

Notation : On note $x_0 < x_1 < .... < x_p$ une chaîne de $(X, \leq)$ ou, simplement, $x_0x_1.....x_p$.L'élément x_0 est l'origine de la chaîne, x_p son extrémité, et sa longueur vaut le nombre de ses éléments moins un (donc p pour la chaîne $x_0 < x_1 < .... < x_p$).

Définition 1.2.13 *Une chaîne $C = x_0x_1......x_p$ de P est dite :*

- *Maximale si elle n'est contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de X;*
- *Etendue si elle contient un élément minimal et un élément maximal de X.*

Définition 1.2.14 *Une antichaîne de X est maximale si elle n'est contenue dans aucune autre antichaîne de X.*

Remarque 1.2.3 *Les seuls sous-ensembles ordonnés de X qui sont à la fois chaîne et antichaîne de X sont les singletons de X.*

Définition 1.2.15 *[7]Soit X un ensemble ordonné. Le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de X s'appelle la largeur de X et est noté $\alpha(X)$. L'étendue $\kappa(X)$ de X est le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de X. Par ailleurs, on note $\gamma(X)$ le nombre minimum d'antichaînes dans une partition de X en antichaînes et $\theta(X)$ le nombre minimum de chaînes dans une partition de X en chaînes.*

Définition 1.2.16 *La hauteur de X est la quantité $\lambda(X) = \kappa(X) - 1$.*

Exemple 1.2.3

- $\mathbb{N}$ *avec l'ordre ordinaire est une chaîne.*
- $\mathbb{N}^*$ *avec la relation de divisibilité n'est pas une chaîne.*
- $P(X)$ avec la relation d'inclusion n'est pas une chaîne (si X a au moins deux éléments).
- la chaîne 4 formée de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ muni de l'ordre naturel.

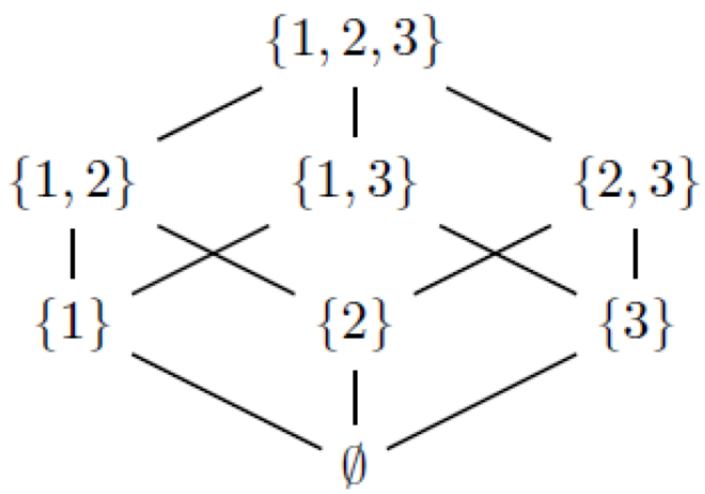
Exemple graphique :

1.2.3 Diagramme de Hasse

Quand $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné fini, on peut le représenter graphiquement par son diagramme de Hasse, qui est un graphe non-orienté avec les contraintes suivantes :

- les sommets sont les éléments de E;
- si $x \leq y$ on place x plus bas que y sur le diagramme ;
- si $x \leq y$ et qu'il n'y a pas de $z \in E$ tel que $x \leq z \leq y$, on met une arête entre x et y.

Exemple 1.2.4 *Le diagramme de Hasse pour l'ordre* $\subset$ *sur* $E = \{1; 2; 3\}$ *est :*



1.3 Treillis

Définition 1.3.1 *Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. On notera :* $Inf\{x, y\} = x \wedge y$ *et* $Sup\{x, y\} = x \vee y$.

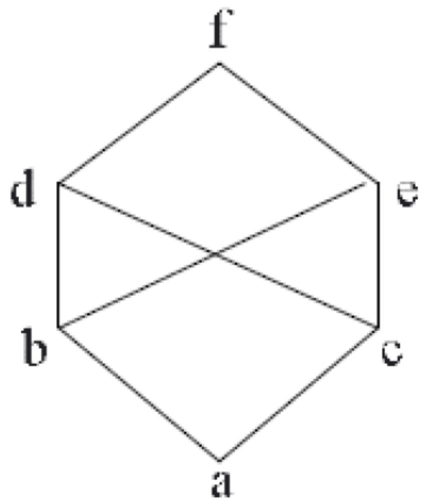
Définition 1.3.2 (Treillis fermé) *Un treillis est fermé s'il possède un plus petit élément noté "0"est plus grand élément noté "1".*

Définition 1.3.3 (Treillis complet) *Un treillis est dit complet lorsque toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

Exemple 1.3.1

- *Pour tout ensemble* E, $(P(E), \subseteq)$ *est un treillis, si* X *et* Y *sont des parties de* E *on a :* $X \vee Y = X \cup Y$, *et* $X \wedge Y = X \cap Y$
- $(\mathbb{N}^*, |)$ *est un treillis :*$x \vee y = ppmc(x, y)$ *et* $x \wedge y = pgdc(x, y)$.
- *Toute chaîne est un treillis :* $x \vee y = max(x, y)$, $x \wedge y = min(x, y)$.

  Exemple graphique :

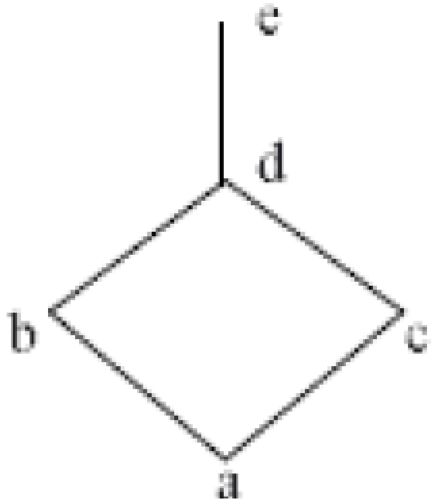


Un contre-exemple de treillis

Définition 1.3.4 (Sous-treillis) *Une partie$(P,\leq)$ d'un treillis $(E,\leq)$ est un sous-treillis de E si pour tout x et y de P, $x\wedge y$ et $x\vee y$ sont dans P.*

Exemple 1.3.2

- $\{a,b,c,d\}$, *muni du même ordre, est un sous-treillis de* E;
- $\{a,b,c,e\}$, *muni du même ordre, est un treillis mais pas un sous-treillis de* E.



1.3.1 Caractérisations algébriques

Proposition 1.3.1 *Dans un treillis que quelconque*

- $x\leq y\Leftrightarrow x=x\wedge y\Leftrightarrow y=x\vee y$;
- *idempotente :* $x\vee x=x$ *et* $x\wedge x=x$;
- *commutative :* $x\vee y=y\vee x$ *et* $x\wedge y=y\wedge x$;
- *associative :* $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ *et* $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$;
- *les lois d'absorption :* $x\wedge(x\vee y)=x$ *et* $x\vee(x\wedge y)=x$.

Théorème 1.3.1 *[3]Soit un ensemble E muni de deux lois internes $\wedge,\vee$, qui sont idempotentes, commutatives et associatives qui vérifient les lois d'absorption, alors il existe une unique relation d'ordre $\leq$ sur E telle que E soit un treillis et quels que soient x et y :* $\sup\{x,y\}=x\vee y$ *et* $\inf\{x,y\}=x\wedge y$.

Preuve. Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \vee y = y$, ou $x\mathcal{R}'y$ si et seulement si $x \wedge y = x$.

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $x\mathcal{R}x$ car $x \vee x = x$ (idempotence).
- $\mathcal{R}$ est transitive : supposons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee z = z$. Alors :

$$\begin{aligned} x \vee z &= x \vee (y \vee z) \\ &= (x \vee y) \vee z \quad \text{(associativité)} \\ &= y \vee z \\ &= z. \end{aligned}$$

  Donc $x\mathcal{R}z$.

- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : supposons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee x = x$, d'après la commutativité il en résulte $x = y$.

  $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'ordre.

  Unicité: Soit $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ on montre que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$:

  soit $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \vee y = y$

  $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ (loi d'absorption)

  $\Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}'$

- $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$:

  soit $(x, y) \in \mathcal{R}' \Leftrightarrow x \wedge y = x$

  $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (y \wedge x) = y$ (loi d'absorption)

  $\Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$ donc $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

  $(E, \leq)$ est un treillis :

  Soient deux éléments x et y.

- $x\mathcal{R}x \vee y$, car

$$\begin{aligned} x \vee (x \vee y) &= (x \vee x) \vee y \quad \text{(associativité)} \\ &= x \vee y \quad \text{(idempotence)} \end{aligned}$$

$y\mathcal{R}x \vee y$, car

$$\begin{array}{rcll} y \vee (x \vee y) & = & (x \vee y) \vee y & \text{(commutativité)} \\ & = & x \vee (y \vee y) & \text{(associativité)} \\ & = & x \vee y & \text{(idempotence)} \end{array}$$

Donc $x \vee y$ majore $\{x, y\}$. Soit M un autre majorant de $\{x, y\}$:

$$\begin{array}{rcccl} (x \vee y) \vee M & = & x \vee (y \vee M) & = & x \vee M (\text{car } y\mathrm{R}M) \\ & & & = & M \ (\text{car } x\mathrm{R}M) \end{array}$$

Donc $x \vee y\mathcal{R}M$.

On a donc bien : $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

- $x \wedge y\mathcal{R}y$ car

$$\begin{array}{rcll} (x \wedge y) \wedge y & = & x \wedge (y \wedge y) & \text{(associativité)} \\ & = & x \wedge y & \text{(idempotence)} \end{array}$$

$x \wedge y\mathcal{R}x$ car

$$\begin{array}{rcll} (x \wedge y) \wedge x & = & x \wedge (x \wedge y) & \text{(commutativité)} \\ & = & (x \wedge x) \wedge y & \text{(associativité)} \\ & = & x \wedge y & \text{(idempotence)} \end{array}$$

Donc $x \wedge y$ minorant $\{x, y\}$. Soit m un autre minorant de $\{x, y\}$:

$$\begin{array}{rcccl} (x \wedge y) \wedge m & = & x \wedge (y \wedge m) & = & x \wedge m \ (\text{car } m\mathcal{R}y) \\ & & & = & m \ (\text{car } m\mathcal{R}x) \end{array}$$

Donc $m\mathcal{R}x \wedge y$.

On a donc bien :$\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

■

Proposition 1.3.2 *Dans un treillis $(E, \leq)$:*

- *Si $a \leq b$, alors pour tout x : $a \wedge x \leq b \wedge x$ et $a \vee x \leq b \vee x$;*
- *Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors : $a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d$.*

Preuve.

1. $a \leq b$, *donc* $a \wedge b = a$ *et* $a \vee b = b$, *alors :*

   $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x$ *donc* $a \wedge x \leq b \wedge x$.

   $(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x$ *donc* $a \vee x \leq b \vee x$.

2. *Si* $a \leq b$ *et* $c \leq d$, *alors* $a \wedge c \leq b \wedge c$ *et* $b \wedge c \leq b \wedge d$ *donc* $a \wedge c \leq b \wedge d$

   $a \vee c \leq b \vee c$ *et* $b \vee c \leq b \vee d$ *donc* $a \vee c \leq b \vee d$.

■

1.3.2 Treillis distributif

Définition 1.3.5 *Un treillis E est dit un treillis distributif si chacune des lois $\vee$ et $\wedge$ est distributive par rapport à l'autre. Cela équivaut à dire que E vérifie l'une quelconque des conditions :*

- *(D_1) Quels que soient x, y, z : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$);*
- *(D_2) Quels que soient x, y, z :$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$).*

Remarque 1.3.1 *Les conditions D_1 et D_2 sont équivalentes. En effet, supposons que D_1 soit vérifiée, on peut écrire :*

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\
&= x \vee [z \wedge (x \vee y)] && \textit{(loi d'absorption)} \\
&= x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\
&= x \vee (y \wedge z) && \textit{(loi d'absorption)}
\end{aligned}$$

Donc D_2 est aussi vérifiée.

La réciproque, supposons que D_2 soit vérifiée, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] \\
&= x \wedge [z \vee (x \wedge y)] && \textit{(loi d'absorption)} \\
&= x \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \\
&= x \wedge (y \vee z) && \textit{(loi d'absorption).}
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.3

- $(P(E), \subseteq)$ *est un treillis distributif.*

- *Toute chaîne est un treillis distributif.*

  $min(x, max(y, z)) = max(min(x, y), min(x, z))$.

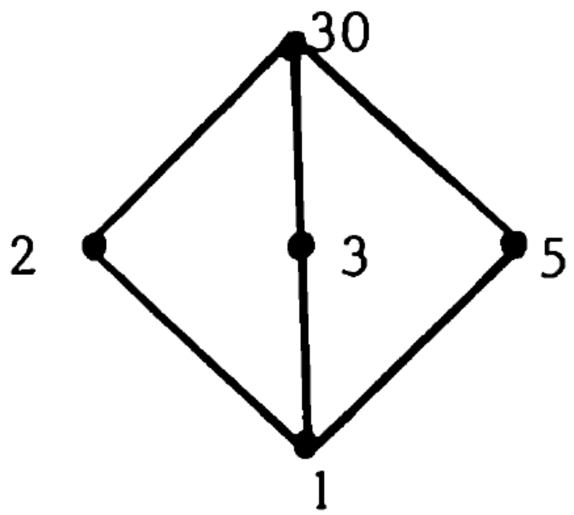
- *Considérons le treillis* $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ *ordonné par divisibilité* $x \vee y = ppmc(x, y)$ *et* $x \wedge y = pgdc(x, y)$ *. Ce treillis n'est pas distributif, car par exemple :*

  $2 \wedge (3 \vee 5) \neq (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$.

  En effet, $2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$ *et* $(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$.

  De même $2 \vee (3 \wedge 5) \neq (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5)$.

  En effet, $2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$ *et* $(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30 \vee 30 = 30$ *.*



Caractérisation des treillis distributifs

Théorème 1.3.2 *[3]Pour qu'un treillis E soit distributif il faut et il suffit qu'il vérifie, quels que soient* x, y, z*, la condition :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array} \right\} \text{ impliquent } x = y.$$

1.3.3 Treillis modulaires

Définition 1.3.6 *Un treillis E est dit un treillis modulaire s'il vérifie, quels que soient les éléments x, y, z, la condition :*

$x \leq z$ *implique* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. *(Une propriété plus faible que la distributivité.)*

Remarque 1.3.2 *Tout treillis distributif est modulaire.*

Théorème 1.3.3 *[3]Pour qu'un treillis E soit modulaire il faut et il suffit qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :*

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \text{ impliquent } x \text{ et } y \text{ sont égaux ou incomparables.}$$

1.3.4 Treillis complémenté

Définition 1.3.7 *Un treillis est dit complémenté s'il admet un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 et si tout élément x admet un élément $x\prime$ dit complémenté de x tel que $x \wedge x\prime = 0$ et $x \vee x\prime = 1$.*

Exemple 1.3.4

- *Dans une chaîne, un élément différent de 0 et 1 n'a jamais de complément.*
- *Tout treillis $(P(E), \subseteq)$ est complémenté, si $X \subseteq E$ son complément (unique) n'est autre que le complémentaire de $X = \complement x$.*

Théorème 1.3.4 *Dans un treillis distributif, tout élément a au plus un complément.*

Preuve. Supposons que x possède deux complément $x\prime$ et $x\prime\prime$

$$\left.\begin{cases} x \wedge x\prime = x \wedge x\prime\prime = 0 \\ x \vee x\prime = x \vee x\prime\prime = 1 \end{cases}\right\} \text{impliquent } x\prime = x\prime\prime \text{ (car treillis distributif).} \quad \blacksquare$$

1.3.5 Treillis résiduel

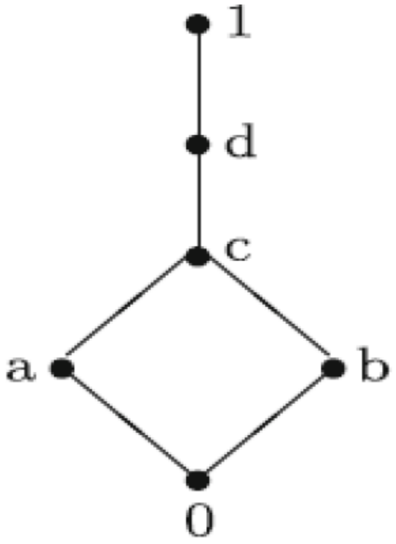
Définition 1.3.8 *(Monoïde) Un monoïde est un ensemble non vide muni d'une loi de composition, interne associative qui admet un élément neutre, un monoïde est dit commutatif si ses éléments sont permutables.*

Définition 1.3.9 *[2]Une algèbre* $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, e)$ *de type* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$*, sera dit un treillis résiduel si les conditions suivantes sont vérifiées:*

- *(R_1)* $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est un treillis fermé;*
- *(R_2)* $(L, \odot, e)$ *est un monoïde commutatif;*
- *(R_3) Pour tout* $x, y, z \in L$*,* $x \leq y \rightarrow z \Leftrightarrow x \odot y \leq z$*.*

Exemple 1.3.5

Les tables définissent deux opérations $\odot$ *et* $\rightarrow$ *sur l'ensemble* $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$ *de telle sorte que* $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *est un treillis résiduel*



Le diagramme de Hasse de L

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	0	0	0	c	c
d	0	0	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	1	1
b	d	d	1	1	1	1
c	d	d	d	1	1	1
d	0	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

1.3.6 Filtres et ideaux dans un treillis

Soit E un treillis.

Définition 1.3.10 (Filtres) *On appelle filtre de E toute partie non vide F de E vérifiant :*

a) Si $x \in F$ et $y \geq x$: alors $y \in F$.

b) Si $x \in F$ et $y \in F$: alors $x \wedge y \in F$.

Proposition 1.3.3 *Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est un ultrafiltre.*
2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.*

Définition 1.3.11 (Idéal) *On appelle idéal d'un treillis E toute partie non vide I de E vérifiant :*

1. *Si $x \in I$ et $y \leq x$: alors $y \in I$.*
2. *Si $x \in I$ et $y \in I$: alors $x \vee y \in I$.*

Proposition 1.3.4 *Soit I un ideal propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *I est un idéal propre.*
2. *Pour tout $x \notin I$, il existe $y \in I$ tel que $x \vee y = 1$.*

1.4 Algèbres de Boole

Définition 1.4.1 *Une algèbre de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.*

Exemple 1.4.1 *Tout treillis $(P(E), \subseteq)$ est une algèbre de Boole.*

Théorème 1.4.1 *Soit E une algèbre de Boole, Pour tout $x, y \in E$ on a :*

1. $0\prime = 1,\ 1\prime = 0$ *et* $(x\prime)\prime = x$

2. *Lois de Morgan:*

   a) $(x \wedge y)\prime = x\prime \vee y\prime$

   b) $(x \vee y)\prime = x\prime \wedge y\prime$.

3. $$\begin{aligned} x \leq y &\overset{1}{\Leftrightarrow} x\prime \vee y = 1 \\ &\overset{2}{\Leftrightarrow} y\prime \wedge x = 0 \end{aligned}$$

4. $x \leq y \Leftrightarrow y\prime \leq x\prime$

Preuve.

1. $\left.\begin{array}{l} 1 \vee 0 = 1 \\ 1 \wedge 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\prime = 1$ et $1\prime = 0.$ et $\left.\begin{array}{l} x\prime \wedge (x\prime)\prime = 0 \\ x\prime \vee (x\prime)\prime = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = (x\prime)\prime.$

2. **a)** $(x \wedge y) \wedge (x\prime \vee y\prime) = (x \wedge y \wedge x\prime) \vee (x \wedge y \wedge y\prime) = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$

$(x \wedge y) \vee (x\prime \vee y\prime) = (x \vee x\prime \vee y\prime) \wedge (y \vee x\prime \vee y\prime) = (y\prime \vee 1) \wedge (x\prime \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Donc $(x \wedge y)\prime = x\prime \vee y\prime$

b) $(x \vee y) \vee (x\prime \wedge y\prime) = (x \vee y \vee x\prime) \wedge (x \vee y \vee y\prime) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \vee 1 = 1$

$(x \vee y) \wedge (x\prime \wedge y\prime) = (x \wedge x\prime \wedge y\prime) \vee (y \wedge x\prime \wedge y\prime) = (y\prime \wedge 0) \vee (x\prime \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$

Donc $(x \vee y)\prime = x\prime \wedge y\prime$.

3. $(\overset{1}{\Leftrightarrow})$

Sens direct $(\Rightarrow)$

$1 = x\prime \vee x \leq x\prime \vee y$ donc $x\prime \vee y = 1$

Sens inverse $(\Leftarrow)$

Si $x\prime \vee y = 1$

$$\begin{array}{rclclcl} x \wedge (x\prime \vee y) & = & x \wedge 1 & = & x & \Rightarrow & (x \wedge x\prime) \vee (x \wedge y) = x \\ & & & & & \Rightarrow & 0 \vee (x \wedge y) = x \\ & & & & & \Rightarrow & x \wedge y = x \\ & & & & & \Rightarrow & x \leq y \end{array}$$

$(\overset{2}{\Leftrightarrow})$

Sens direct $(\Rightarrow)$

$y\prime \wedge x \leq y\prime \wedge y = 0$ donc $y\prime \wedge x = 0$

Sens inverse $(\Leftarrow)$

si $y\prime \wedge x = 0$ on a :

$$\begin{array}{rclclcl} y \vee (y\prime \wedge x) & = & y \vee 0 & = y & \Rightarrow & (y \vee y\prime) \wedge (y \vee x) = y \\ & & & & \Rightarrow & 1 \wedge (y \vee x) = y \\ & & & & \Rightarrow & x \vee y = y \\ & & & & \Rightarrow & x \leq y. \end{array}$$

4. $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow (x \wedge y)\prime = x\prime \Leftrightarrow x\prime \vee y\prime = x\prime \Leftrightarrow y\prime \leq x\prime$.

■

Lois supplémentaires:

- $x \rightarrow y = x\prime \vee y \Rightarrow x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$;
- $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Chapitre 2

TREILLIS DE HEYTING

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence certaines connaissances nécessaires à la compréhension algèbre implicative et algèbre implicative positive. En particulier nous parlerons des outils de base de la théorie treillis de Heyting.

2.1 Algèbre implicative

Définition 2.1.1 *Une algèbre* $(A, \to, 1)$ *de type* $(2, 0)$, *formé d'un ensemble non vide* A, *une opération binaire* $\to$ *définie sur* A *et un élément distingué* $1 \in A$, *sera dit algèbre implicative si les conditions suivantes sont vérifiées:*

$\mathbf{I}_1$ $a \to a = 1$;

$\mathbf{I}_2$ $a \to b = 1$ *et* $b \to c = 1$ *alors* $a \to c = 1$;

$\mathbf{I}_3$ $a \to b = 1$ *et* $b \to a = 1$ *alors* $a = b$;

$\mathbf{I}_4$ $a \to 1 = 1$.

Exemple 2.1.1 *Toute chaine avec un plus grand élément* 1 *est une algèbre implicative, ou* $a \to b$ *est définie par :* $a \to b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b; \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$

En effet :

$\mathbf{I}_1$ $a \leq a \Longrightarrow a \to a = 1$;

$$\mathbf{I}_2 \quad \left.\begin{array}{r} a \to b = 1 \\ b \to c = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} a \le b \\ b \le c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \le c, donc\ a \to c = 1;$$

$$\mathbf{I}_3 \quad \left.\begin{array}{r} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} a \le b \\ b \le a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b.$$

$\mathbf{I}_4$ *$a \le 1$, (1 un plus grand élément) $\Longrightarrow a \to 1 = 1$.*

Lemme 2.1.1 *On définit $a \le b$ pour $a \to b = 1$.*

$(A, \le)$ est un ensemble ordonné avec un plus grand élément 1 si et seulement si A est une algèbre imlicative.

Preuve. En effet, soit A un ensemble ordonné on a

1. $a \to a = 1$ (car $a \le a$);
2. $\left\{\begin{array}{l} a \to b = 1 \\ b \to c = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \le b \\ b \le c \end{array}\right. \Rightarrow a \le c \Rightarrow a \to c = 1;$
3. $\left\{\begin{array}{l} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \le b \\ b \le a \end{array}\right.$ alors $a = b$;
4. $a \to 1 = 1(\forall\, a \in A,\, a \le 1)$.

   Réciproquement, si on considère est un algèbre imlicative A, on a $\le$ relation d'ordre avec un plus grand élément,

   en effet

   - Réflexivité : $a \le a$ (car $a \to a = 1$);
   - Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} a \le b \\ b \le c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \to b = 1 \\ b \to c = 1 \end{array}\right. \Rightarrow a \to c = 1 \Rightarrow a \le c;$
   - Antisymétrie : $\left\{\begin{array}{l} a \le b \\ b \le a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{array}\right.$ alors $a = b$;
   - $\forall a \in A$, $a \le 1$(car $a \to 1 = 1$).

■

Théorème 2.1.1 (Règle de modus ponens)

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ a \to b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1$$

Preuve.
$$\left\{\begin{array}{ll} b \to 1 = 1 & \text{de } \mathrm{I}_4 \\ 1 \to b = 1 & \text{(hypothèse)} \end{array}\right. \Rightarrow b = 1 \quad \text{de } \mathrm{I}_3. \ \blacksquare$$

2.2 Algèbre implicative positive

Définition 2.2.1 *Une algèbre $(A, \to, 1)$ de type $(2, 0)$, formé par un ensemble non vide A, une opération binaire $\to$ définie sur A et un élément distingué $1 \in A$, sera dit algèbre implicative positive si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(P_1) $a \to (b \to a) = 1;$

(P_2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1;$

(P_3) $\left.\begin{array}{l} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b;$

(P_4) $a \to 1 = 1.$

Exemple 2.2.1 $(X, \sigma(X))$ *un espace topologique,* $\sigma(X) = \{$*des ouverts de* X $\}$. *On pose* $A \to B = \overset{\circ}{\widehat{B \cup \complement A}}$ *et* $1 = X$.

Alors $(\sigma(X), \to, 1)$ *est une algèbre implicative positive.*

En effet

(P_1) $A \to (B \to A) = X$ *?*

On a $A \cup \complement B \supset A$, *donc* $\overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} \supset \overset{\circ}{\widehat{A}} = A$ *(A est ouvert)*

$\overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} \cup \complement A \supset A \cup \complement A$

$\overset{\circ}{\widehat{\overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} \cup \complement A}} \supset \overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement A}} = \overset{\circ}{\widehat{X}} = X$ *(X est ouvert)*

$A \to (B \to A) = \overset{\circ}{\widehat{\overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} \cup \complement A}} = X$. *Donc* (P_1) *est vérifiée.*

(P_2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) = X$. *S'obtient de la même manière.*

$$(P_3) \quad \left.\begin{array}{l} A \to B = X \\ A \to B = X \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{\widehat{B \cup \complement A}} = X \\ \overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} = X \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{B \cup \complement A}} = \overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}}$$

pour $A \subseteq B$

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup \complement B}} \\ &\Rightarrow \quad x \in \overset{\circ}{\widehat{B \cup \complement A}} \\ &\Rightarrow \quad x \in B \cup \complement A \\ &\Rightarrow \quad x \in B \ \textit{(car } x \in A) \end{aligned}$$

$B \subseteq A$. *S'obtient de la même manière.*

(P_4) $A \to X = X$.

$A \to X = \overset{\circ}{\widehat{X \cup \complement A}} = \overset{\circ}{\widehat{X}} = X$. *C'est -à- dire,* $(\sigma(X), \to, 1)$ *est une algèbre implicative positive.*

Remarque 2.2.1 *La règle de modus ponens est valable dans une algèbre implicative positive.*

Proposition 2.2.1 *Tout algèbre implicative positive est une algèbre implicative.*

Preuve. Pour I_1:

Remplacer c par a

$(a \to (b \to a)) \to ((a \to b) \to (a \to a)) = 1$

$1 \to ((a \to b) \to (a \to a)) = 1$ (car $a \to (b \to a) = 1$ de P_1)

$(a \to b) \to (a \to a) = 1$ (d'après la règle de modus ponens)

Remplacer b par $a \to a$

$(a \to (a \to a)) \to (a \to a) = 1$

$1 \to (a \to a) = 1$ (car $a \to (a \to a) = 1$ de P_1)

$a \to a = 1$ (d'après la règle de modus ponens).

Pour I_2 :

Supposons que $a \to b = 1$ et $b \to c = 1$,

$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (de P_2)

$(a \to 1) \to (1 \to (a \to c)) = 1$

$1 \to (1 \to (a \to c)) = 1$ (hypothèse)

$1 \to (a \to c) = 1$ (d'après la règle de modus ponens)

$a \to c = 1$ (d'après la règle de modus ponens). ■

Proposition 2.2.2 *Pour toute algèbre implicative positive, on a les propriétés suivantes :*

1. $a \leq b \to a$;
2. $a \leq b \to c \Leftrightarrow b \leq a \to c$;
3. $a \leq (a \to b) \to b$;
4. $1 \to a = a$;
5. *si* $b \leq c$, *alors* $a \to b \leq a \to c$;
6. *si* $a \leq b$ *alors* $b \to c \leq a \to c$;
7. $a \to (a \to b) = a \to b$;
8. $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$;
9. $(b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c)$.

Preuve.

1. On veut montrer $a \leq b \to a$. On sait que d'après (P_1) $a \to (b \to a) = 1$, donc $a \leq b \to a$.

2. Montrons l'équivalence $a \leq b \to c \Leftrightarrow b \leq a \to c$.

   a)Le sens direct $(\Rightarrow)$

Supposons que $a \leq b \to c$, alors $a \to (b \to c) = 1 \quad (*)$, or , $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (P_2).

$(*)$ et (P_2), d'après la règle de modus ponens, nous aurons : $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

$$\left.\begin{array}{lll} b & \leq & a \to b, \ (P_1) \\ a \to b & \leq & a \to c \end{array}\right\} \Rightarrow b \leq a \to c.$$

b) Le sens réciproque ($\Leftarrow$)

Supposons que $b \leq a \to c$, donc $b \to (a \to c) = 1$, on aura

$(b \to a) \to (b \to c) = 1$ (d'après la règle de modus ponens et (P_2))

$$\left.\begin{array}{lll} a & \leq & b \to a, \ (P_1) \\ b \to a & \leq & b \to c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq b \to c.$$

3. On veut etablir : $a \leq (a \to b) \to b$. On a : $a \to b \leq a \to b$ (car $\leq$ est une relation d'ordre), donc (d'après 2) $a \leq (a \to b) \to b$.

4. Montrons l'egalité $1 \to a = a$.

   Dans 3. c'est-à-dire $a \leq (a \to b) \to b$, on remplace $\begin{array}{ccc} a & \text{par} & 1 \\ b & \text{par} & a \end{array}$, $1 \leq (1 \to a) \to a$ et donc $(1 \to a) \to a = 1$, c'est-à-dire $1 \to a \leq a$. d'autre part d'après (1.) on a $1 \to a \geq a$.

   Conclusion $\left.\begin{array}{c} 1 \to a \leq a \\ 1 \to a \geq a \text{ de } 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \to a = a.$

5. Montrons que si $b \leq c$, alors $a \to b \leq a \to c$.

Si $b \leq c$, alors $b \to c = 1$. Dans ce cas $a \to (b \to c) = a \to 1 = 1$ or $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (P_2)

$$(a \to b) \to (a \to c) = 1, \text{(d'après la règle de modus ponens)}$$

Conclusion : $b \leq c$, alors $a \to b \leq a \to c$.

6. Si $a \leq b$ montrons alors que $b \to c \leq a \to c$.

Si $a \leq b$ alors $a \to b = 1$

$$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1 \ (P_2)$$

donc $(a \to (b \to c)) \to (1 \to (a \to c)) = 1$ (hypothèse)

mais $1 \to (a \to c) = (a \to c)$ d'après 4.

$a \to (b \to c) \leq a \to c$

$$\left.\begin{array}{lll} b \to c & \leq & a \to (b \to c) \\ a \to (b \to c) & \leq & a \to c \end{array}\right\} \Rightarrow b \to c \leq a \to c\ .$$

7. Montrons l'égalité : $a \to (a \to b) = a \to b$

   On a $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (P_2)

   En remplaçant c par b on obtient

   $(a \to (a \to b)) \to ((a \to a) \to (a \to b)) = 1$ et donc

   $(a \to (a \to b)) \to (1 \to (a \to b)) = 1$ (car $a \to a = 1$)

   $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$ (car $1 \to (a \to b) = (a \to b)$ de 4)

   $$a \to (a \to b) \leq a \to b. \qquad (i)$$

   D'autre part

   $(a \to b) \to (a \to (a \to b)) = 1$ de (P_1)

   $$a \to b \leq a \to (a \to b) \qquad (ii)$$

   de (i) et (ii) on obtient l'égalité : $a \to (a \to b) = a \to b$.

8. Montrons l'égalité : $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$

   On a $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (P_2).

   Ce qui donne $a \to (b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c) \to (*)$

   $$\left.\begin{array}{lll} b & \leq & a \to b \text{ de } (\mathrm{P}_1) \\ a \to b & \leq & (a \to (b \to c)) \to (a \to c) \text{ de } (2) \end{array}\right\} \Rightarrow b \leq (a \to (b \to c)) \to (a \to c).$$

   Donc d'après (2) aura $a \to (b \to c) \leq b \to (a \to c)$. $\qquad (i)$

   Dans $(*)$ remplace $\begin{array}{ccc} a & \text{par} & b \\ b & \text{par} & a \end{array}$ on obtient $b \to (a \to c) \leq (b \to a) \to (b \to c)$

$$\left.\begin{array}{r} b \to a \leq (b \to (a \to c)) \to (b \to c) \text{ de } (2) \\ a \leq b \to a \text{ de } (P_1) \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq (b \to (a \to c)) \to (b \to c)$$

Et donc de (2) on obtient $b \to (a \to c) \leq a \to (b \to c)$. (ii)

(i) et (ii) donnent l'égalité : $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

9. Pour montrer $(b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c)$.

$$\left.\begin{array}{r} a \to (b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c).(P_2) \\ b \to c \leq a \to (b \to c).(P_1) \end{array}\right\} \Rightarrow b \to c \leq (a \to b) \to (a \to c).$$

■

2.3 Treillis de Heyting (Treillis de Brouwer)

Définition 2.3.1 *C'est un treillis $(E, \leq, \wedge, \vee)$ vérifiant, quel que soit a, b de E l'ensemble $\{x \in E|\ \ a \wedge x \leq b\}$ possede un plus grand élément. noté $a \to b$.*

$$\left\| \begin{array}{c} a \wedge (a \to b) \leq b \\ a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq a \to b \end{array}\right.$$

Exemple 2.3.1 **1.** *Une algèbre de Boole est toujours un treillis de Heyting avec :*

$a \to b = a' \vee b$.

En effet
$$\begin{aligned} a \wedge (a \to b) &= a \wedge (a' \vee b) \\ &= (a \wedge a') \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee\ (a \wedge b) \\ &= 0 \vee\ (a \wedge b) \leq b \end{aligned}$$

$a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq a' \vee b$

Implication directe $(\Rightarrow)$

$$\begin{array}{lcl} a \wedge x & \leq & b \text{ (par hypothèse)} \\ a' \vee (a \wedge x) & \leq & a' \vee b \\ (a' \vee a) \wedge (a' \vee x) & \leq & a' \vee b \\ 1 \wedge (a' \vee x) & \leq & a' \vee b \\ a' \vee x & \leq & a' \vee b \\ x & \leq & a' \vee b \text{ (car } x \leq a' \vee x) \end{array}$$

Implication réciproque ($\Leftarrow$)

$$\begin{array}{lcl} x & \leq & a' \vee b \text{ (Par hypothèse)} \\ a \wedge x & \leq & a \wedge (a' \vee b) \\ a \wedge x & \leq & (a \wedge a') \vee (a \wedge b) \\ a \wedge x & \leq & 0 \vee (a \wedge b) \\ a \wedge x & \leq & 0 \vee (a \wedge b) \\ a \wedge x & \leq & a \wedge b \leq b. \end{array}$$

2. *Toute chaine avec un plus grand élément est un treillis de Heyting avec :*

$$a \to b = \max\{x \in C |\, \min(a,x) \leq b\} = \begin{cases} 1 & si\ a \leq b; \\ b & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *Toute treillis de Heyting est un treillis distributif.*

Preuve. Soit T un treillis de Heyting Montrons que T est distributif,

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$, $x, y, z \in T$.

Montrons d'abord que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$.

(i) $\left.\begin{array}{l} y \leq y \vee z \\ z \leq y \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z) \\ x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z) \end{array}\right\} \Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$

(ii) On va démontrer $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \geq x \wedge (y \vee z)$ par deux méthodes.

Méthode 1 : On considère l'ensemble F défini par : $F = \{t \in E \mid x \wedge t \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\}$.

Cet ensemble a un plus grand élément t_0

$\left.\begin{array}{l} x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \in F \\ z \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \leq t_0 \\ z \leq t_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y \vee z \leq t_0$ donc $y \vee z \in F$

$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

De (i) et (ii) on conclu $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Méthode 2 : On prend $A = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = A \\ x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \leq x \to A \\ z \leq x \to A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad y \vee z \leq x \to A \\ \\ \Rightarrow \quad x \wedge (y \vee z) \leq A. \end{array}$$

Donc $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (ii)

- (i) et (ii) donnent $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

■

Proposition 2.3.2 *Un treillis de Heyting possède un plus grand élément.*

Preuve. On considère l'ensemble $F = \{t \in E \mid x \wedge t \leq x\}$.

Soit $x \in E$, $F = \{t \in E \mid x \wedge t \leq x\} = E$ cet ensemble a un plus grand élément $x \to x = 1$ (Car E est un treillis de Heyting).

Donc $\forall t \in E$, $x \wedge t \leq x \Leftrightarrow t \leq x \to x$, donc $\forall t \in E$, $t \leq x \to x$

Donc $x \to x$ est le plus grand élément de E. ■

Remarque 2.3.1 *Un treillis de Heyting ne possède pas nécessairement un* 0.

Exemple 2.3.2 $(\mathbb{N}, \geq)$ *est une chaine dont le plus grand élément est* 0.

Donc c'est un treillis de Heyting , avec $a \to b = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \geq b; \\ b & \textit{sinon.} \end{cases}$

Proposition 2.3.3 *[8]Soit E un treillis complet. E est une algèbre de Heyting ssi elle satisfait la distributivité infinie:*

$$a \wedge (\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \wedge b_i).$$

Preuve.

1. Dans le sens $\Rightarrow$)

$$\begin{array}{rcl} a \wedge (\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i) \leq z & \Leftrightarrow & (\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i) \leq a \to z \\ & \Leftrightarrow & b_i \leq a \to z, \forall i \\ & \Leftrightarrow & b_i \wedge a \leq z, \forall i \\ & \Leftrightarrow & \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \wedge b_i) \leq z. \end{array}$$

Puisque z est arbitraire, on prend respectivement :

$z = a \wedge (\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i)$;

$z = \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \wedge b_i)$.

2. Dans le sens $\Leftarrow$)

Supposons que E soit un treillis complet satisfaisant la distributivité infinie.

Soit $(a,b) \in E^2$. Définissons :

$a \to b = \underset{a\wedge x\leq b}{\vee} x = \vee\{x|a \wedge x \leq b\}$ $\quad$ ($a \to b$ existe, car E est un treillis complet)

a. $a \wedge (a \to b) \leq b$ $\quad$?

$a \wedge (a \to b) = a \wedge (\underset{a\wedge x\leq b}{\vee} x) = \underset{a\wedge x\leq b}{\vee}(a \wedge x) \leq \vee b = b.$

De telle sorte que si $y \wedge a \leq b$, alors nous aurons $y \leq \vee\{x|a \wedge x \leq b\} = a \to b$.

Réciproquement, si $y \leq a \to b$, alors $y \wedge a \leq \underbrace{(\underset{a\wedge x\leq b}{\vee} x) \wedge a \leq \underset{a\wedge x\leq b}{\vee}(a \wedge x)}_{distributivit\acute{e}} \leq \vee b = b.$

■

Proposition 2.3.4 *Tout treillis de Heyting* $(L, \vee, \wedge, \to, 0, 1)$ *est un treillis résiduel*

Preuve.

(i) (R_1) $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ est un treillis fermé;

(ii) (R_2) $(L, \wedge, 1)$ est un monoïde commutatif (car $\wedge$ loi interne associative, commutatif et admet un élément neutre 1

puisqur : $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$);

(iii) (R_3) Pour tout $x, y, z \in L$, $x \leq y \to z \Leftrightarrow x \wedge y \leq z$ (Car L est un treillis de Heyting).

■

Proposition 2.3.5 *Tout treillis de Heyting est une algèbre implicative positive.*

Preuve. Pour démontrer proposition on va montrer la propriété suivante :

$$a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$) Si $a \leq b$ alors $\forall\, x,\ \ a \wedge x \leq a \leq b$, donc $\quad \{x \in E|a \wedge x \leq b\} = E$ donc $a \to b = 1$

$\Leftarrow$) Si $a \to b = 1$ alors $\forall x, \quad x \leq a \to b$

$\Rightarrow \forall x \quad a \wedge x \leq b$ $\qquad$ (Car E est un treillis de Heyting)

(On prend $x = 1$) $\qquad \Rightarrow a \leq b$.

- $\left.\begin{array}{c} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b \quad \text{de} \quad *$

- $a \to (b \to a) = 1$?

  Ona $b \wedge a \leq a$, donc $a \in \{x / b \wedge x \leq a\}$ dont le plus grand élément est $b \to a$, d'ou $a \leq b \to a \Rightarrow a \to (b \to a) = 1$

- $a \to 1 = 1$?

  On considère l'ensemble $F = \{t \in E \mid a \wedge t \leq 1\}$,Alors $F = E$ cet ensemble a un plus grand élément 1, donc $a \to 1 = 1$.

  Comme on obtenir le résultat directement de $*$ en posant $b = 1, a \leq 1 \Leftrightarrow a \to 1 = 1$.

- Montrons que $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

Pour cela on pose $x = a \to b$, $y = a \to c$ et $z = b \to c$.

$$\left.\begin{array}{c} a \wedge x = a \wedge (a \to b) \leq b \\ a \wedge (a \to z) \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow a \wedge x \wedge (a \to z) \leq b \wedge z = b \wedge (b \to c) \leq c;$$

$\Rightarrow a \wedge x \wedge (a \to z) \leq c$,

$\Rightarrow x \wedge (a \to z) \leq a \to c$,

$\Rightarrow x \wedge (a \to z) \leq y$,

$\Rightarrow a \to z \leq x \to y$,

$\Rightarrow a \to (b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c)$,

$\Rightarrow (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1 \quad \text{de} \quad * \;\blacksquare$

Proposition 2.3.6 *Pour un treillis de Heyting, on a les propriétés suivantes :*

1. $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c$.

2. $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

3. $b \wedge (a \to b) = b$.

4. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

Preuve.

1)

$a \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq a \wedge (a \to c) \leq c$ (car, $a \to c \leq a \to c$)

$b \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq b \wedge (b \to c) \leq c$ (car, $b \to c \leq b \to c$)

$\Rightarrow (a \vee b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) = (a \wedge (a \to c) \wedge (b \to c)) \vee (b \wedge (a \to c) \wedge (b \to c)) \leq c \vee c = c.$

Donc ona $(a \vee b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq c$

$\Leftrightarrow (a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c.$ (car, dans un treillis de Heyting $a \wedge x \leq b \;\Leftrightarrow x \leq \; a \to b$)

2)

$$\left.\begin{array}{c} b \leq a \to b \\ a \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a \wedge b \leq a \wedge (a \to b) \qquad \text{(i)}$$

$$\left.\begin{array}{c} a \wedge (a \to b) \leq b \\ a \wedge (a \to b) \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b \qquad \text{(ii)}$$

(i) et (ii) donnent $a \wedge (a \to b) = a \wedge b.$

3)

$$\left.\begin{array}{c} b \leq a \to b \\ b \leq b \end{array}\right\} \Rightarrow b \leq b \wedge (a \to b) \qquad \text{(i)}$$

$a \to b \leq 1$

$\Rightarrow a \to b \leq b \to b$ (car $b \to b = 1$)

$\Rightarrow b \wedge (a \to b) \leq b$ (car, dans un treillis de Heyting $a \wedge x \leq b \;\Leftrightarrow x \leq \; a \to b$) (ii)

de (i) et (ii) donnent

$b \wedge (a \to b) = b$

4)

$$a \to (b \wedge c) \leq a \to (b \wedge c) \Leftrightarrow a \wedge (a \to (b \wedge c)) \leq b \wedge c \quad (\,*\,)$$

$a \wedge (a \to (b \wedge c)) \leq c$ (de $*$);

$a \wedge (a \to (b \wedge c)) \leq c \Leftrightarrow a \to (b \wedge c) \leq a \to c$ (i)

$a \wedge (a \to (b \wedge c)) \leq b$ (de $*$);

$a \wedge (a \to (b \wedge c)) \leq b \Leftrightarrow a \to (b \wedge c) \leq a \to b$ (ii)

de (i) et (ii) donnent

$a \to (b \wedge c) \leq (a \to b) \wedge (a \to c) \ldots\ldots (**)$

$(a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to b \Leftrightarrow a \wedge ((a \to b) \wedge (a \to c)) \leq b$ (H1)

$(a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to c \Leftrightarrow a \wedge ((a \to b) \wedge (a \to c)) \leq c \qquad \text{(H2)}$

de (H1) et (H2)

$a \wedge ((a \to b) \wedge (a \to c)) \leq b \wedge c \Leftrightarrow \; (a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to (b \wedge c) \qquad (***)\,.$

(**) et (***) donnent l'égalité demandée ■

Chapitre 3

SYSTÈMES DÉDUCTIFS

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence la relation qui existe entre des systèmes déductifs irréductibles et des systèmes déductifs complètement irréductibles. Pour montrer que de la déduction possèdent la propriété des systèmes déductifs, on va s'appuyer sur une caractérisation les thèses possédant la propriété des systèmes déductifs.

3.1 Définitions sur les systèmes déductifs

Soit $< A, \rightarrow >$ un système formé par un ensemble non vide A, et une opération binaire $\rightarrow$ (qu'on peut nommer opération d'implication) définie sur A.

Définition 3.1.1 *Une partie D de A est un système déductif (de A), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

S1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) \in D$ *quels que soient les éléments* $x, y, z \in A$;

S2) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in D$ *quels que soient les éléments* $x, y, z \in A$.

mp) *MP(Règle de Modus Ponens) Si* $a \in D, a \rightarrow b \in D$, *alors* $b \in D$. *(stabilité par Modus Ponens)*

Un système déductif sera dit propre Si $D \neq A$,

Exemple 3.1.1 *Soit* $A = \{0, 2, 1\}$ *et considérons l'opération binaire* $\rightarrow$ *(appelée implication intuitioniste) définie par la table ci-jointe. On a les seules systèmes déductifs sont* $D_1 = \{1\}, D_2 = \{2, 1\}$ *et* $D_3 = A$.

$D_4 = \{0, 1\}$ *ils ne sont pas systèmes déductifs (car* $0 \in D_4$ *et* $0 \rightarrow 2 = 1 \in D_4$ *et* $2 \notin D_4$ *donc ne vérifie pas MP)* $D_5 = \{0, 2\}$, $D_6 = \{0\}$ *et* $D_7 = \{2\}$ *ils ne sont pas systèmes déductifs car* $0 \rightarrow (0 \rightarrow 0) = 1 \notin D_i \quad i = 5, 6, 7$.

$\rightarrow$	0	2	1
0	1	1	1
2	0	1	1
1	0	2	1

Théorème 3.1.1 *L'intersection d'une famille quelconque de systèmes déductifs est un système déductif.*

Preuve. Soit D_i système déductif,

$D = \cap\, D_i$ système déductif car pour tout $x, y, z \in A$

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow (y \rightarrow x) \in D_i \\ (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in D_i \end{array}\right\} \text{(car } D_i \text{ système déductif), donc}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow (y \rightarrow x) \in D \\ (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in D \end{array}\right\} \text{Donc } D \text{ système déductif.} \quad \blacksquare$$

Définition 3.1.2 *Notons par* T_0 *l'ensemble de tous les éléments de* A *de la forme* $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ *ou de la forme* $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$*.Nous dirons que* T_0 *est l'ensemble de thèses élémentaires de* A*. L'intersection* T *de tous les systèmes déductifs de* A*, sera appelée ensemble de thèses de* A*. Le système* $< A, \rightarrow >$ *sera dit déductivement consistant si* $T \neq A$ *et dans le cas contraire déductivement inconsistant.*

Exemple 3.1.2 *Soit* $A = \{0, 2, 1\}$ *et considérons l'opération binaire* $\rightarrow$ *définie par la table ci-dessus*

$\rightarrow$	0	2	1
0	1	1	1
2	2	1	1
1	0	2	1

le système $< A, \rightarrow >$ *est tel que* $T_0 = \{2,1\}.T = A$ *(car* $T_0 = \{2,1\} \subset T$*) Donc* $T_0 = \{2,1\}$ *ou* $T = A$. $T \neq \{2,1\}$, *(car* $\{2,1\}$ *ils ne sont pas systèmes déductifs (*$2 \in \{2,1\}$ *et* $2 \rightarrow 0 = 2 \in \{2,1\}$ *et* $0 \notin \{2,1\}$ *donc ne vérifie pas MP).*

3.2 Caractérisation des thèses

Théorème 3.2.1 *Quel que soit* $a \in A$, $a \rightarrow a \in T$, *(Ou* T *est l'ensemble des thèses de* A *).*

Preuve. En remplaçant y par $(a \rightarrow a)$ dans $S1$ nous avons

$$a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a) \in T \quad (1)$$

Remplaçons dans $S2$ y par $(a \rightarrow a)$ et z par a, alors :

$$(a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow ((a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a)) \in T \quad (2)$$

De (1) et (2) par M. P.

$$(a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a) \in T \quad (3)$$

Remplaçons dans $S1$ y par a

$$a \rightarrow (a \rightarrow a) \in T \quad (4)$$

De (3) et (4) par M. P. on tire $a \rightarrow a \in T$. ■

Théorème 3.2.2 *Si* $t \in T$, *alors* $a \rightarrow t \in T$, *pour tout* $a \in A$.

Preuve. Par S1

$$t \rightarrow (a \rightarrow t) \in T \quad (1)$$

De (1) et M.P, on tire $a \rightarrow t \in T$. ■

Théorème 3.2.3 *Si*

$$\begin{cases} a \rightarrow b \in T & (1) \\ b \rightarrow c \in T & (2) \end{cases} \textit{alors, } a \rightarrow c \in T.(3)$$

Preuve. De (2) et le théorème 3.2.2 on déduit

$$a \to (b \to c) \in T. \qquad (4)$$

En utilisant (4), S2 et M. P. on obtient

$$(a \to b) \to (a \to c) \in T. \qquad (5)$$

De (1) et (5) par M.P. on tire (3). ■

Théorème 3.2.4 (Compatibilité à gauche $\to$) *Si* $b \to c \in T$, *alors* $(a \to b) \to (a \to c) \in T$.

Preuve. Du théorème précédent ona

$$(a \to (b \to c)) \in T ...... (1) \quad (\text{car, si } t \in T, \ a \to t \in T, t = b \to c)$$

.

De (1) et $(S2)$ et M. P on en déduit

$$(a \to b) \to (a \to c) \in T.$$

■

Théorème 3.2.5 *Si* $t \in T$, *alors* $(t \to a) \to a \in T$.

Preuve. Par le théorème 3.2.1 (i.e. $\forall x \in A, \ x \to x \in T$), posons $x = (t \to a)$,on aura

$$(t \to a) \to (t \to a) \in T. \qquad (1)$$

Par S2 i.e. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \in T$ avec $x = (t \to a), y = t, z = a$. On obtient :

$$((t \to a) \to (t \to a)) \to (((t \to a) \to t) \to ((t \to a) \to a)) \in T. \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire

$$((t \to a) \to t) \to ((t \to a) \to a) \in T. \quad (3)$$

$$\text{or } t \in T, \text{ donc}(t \to a) \to t \in T. \qquad (4)$$

De (3), (4) et M.P $(t \to a) \to a \in T$. ■

Théorème 3.2.6 (compatibilité à droite de $\rightarrow$) *Si* $a \rightarrow b \in T$, *alors* $(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) \in T$.

Preuve. De $a \rightarrow b \in T$, Du théorème 3.2.5 (Si $t \in T$, alors $(t \rightarrow a) \rightarrow a \in T$, avec $t = a \rightarrow b \in T$, $a = a \rightarrow c$) on en déduit

$$((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c) \in T \qquad (1)$$

Mais par S2

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \in T. \qquad (2)$$

De (2),(1) et le théorème 3.2.3 on déduit

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c) \in T. \qquad (3)$$

Par (S1)

$$(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \in T. \qquad (4)$$

De (3), (4) et le théorème 3.2.3

$$(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) \in T.$$

■

Théorème 3.2.7 $(a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) \in T$.

Preuve. Par S2, $y = a, z = b$

$$(a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b)) \in T. \qquad (1)$$

En appliquant à (1) le théorème 3.2.6, (i.e. $a \rightarrow b \in T$, alors $(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) \in T$ et en posant $c = a \rightarrow b$), nous aurons

$$(((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow ((a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)) \in T. \qquad (2)$$

Du théorème 3.2.5 donne

$$((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) \in T \qquad (3)$$

De (2) et (3) par M.P.

$$(a \to (a \to b)) \to (a \to b) \in T.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème 3.2.8 (Loi de l'échange)

$$(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T.$$

Preuve. Nous savons (S2)

$$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in T. \quad (1)$$

Et de S1, nous avons

$$b \to (a \to b) \in T \qquad (2)$$

De (2) on en déduit en utilisant le théorème 3.2.6, (i.e, Si, $a \to b \in T$, alors $(b \to c) \to (a \to c) \in T$.) avec $c = a \to c$

$$((a \to b) \to (a \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T. \quad (3)$$

De (1) et (3) par la règle de la transitivité on tire

$$(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T. \quad (4)$$

■

Théorème 3.2.9 *Nous avons :*

$$((a \to b) \to (a \to c)) \to (a \to (b \to c)) \in T.$$

Preuve. De S1

$$b \to (a \to b) \in T. \quad (1)$$

On déduit par le théorème 3.2.6 (compatibilité à droite de $\to$, avec $c = a \to c$)

$$((a \to b) \to (a \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T. \quad (2)$$

Par la loi de l'échange (i.e. $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T$).En remplaçant a par b et b par a on obtient :

$$(b \to (a \to c)) \to (a \to (b \to c)) \in T. \qquad (3)$$

De (2) et (3) on tire par transitivité :

$$((a \to b) \to (a \to c)) \to (a \to (b \to c)) \in T.$$

■

Théorème 3.2.10 $a \to ((a \to b) \to b) \in T$.

Preuve. Par la loi de l'échange (i.e. $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) \in T$), nous pouvons écrire en remplaçant a par $a \to b$, b par a et c par b.

$$((a \to b) \to (a \to b)) \to (a \to ((a \to b) \to b)) \in T. \qquad (1)$$

De (1), théorème 3.2.1 et M.P. on tire

$$a \to ((a \to b) \to b) \in T.$$

■

Théorème 3.2.11 $(a \to b) \to (((a \to b) \to b) \to b) \in T$.

Preuve. Il suffit de remplacer a par $a \to b$ dans le théorème 3.2.10 on tire

$$(a \to b) \to (((a \to b) \to b) \to b) \in T.$$

■

Théorème 3.2.12 $(((a \to b) \to b) \to b) \to (a \to b) \in T$.

Preuve. De le théorème 3.2.10

$$a \to ((a \to b) \to b) \in T. \qquad (1)$$

De (1) et par le théorème 3.2.6 (compatibilité à droite de $\to$, avec $c = b$) on tire

$$(((a \to b) \to b) \to b) \to (a \to b) \in T.$$

■

Théorème 3.2.13 $((a \to b) \to ((b \to a) \to a)) \to ((b \to a) \to ((a \to b) \to b)) \in T$.

Preuve. Par la loi de l'échange, en remplaçant a par $a \to b$, b par $b \to a$ et c par a. nous obtenons

$$((a \to b) \to ((b \to a) \to a)) \to ((b \to a) \to ((a \to b) \to a)) \in T. \qquad (1)$$

Par l'axiome S2 nous avons :

$$((a \to b) \to (a \to b)) \to ((a \to b) \to a) \to ((a \to b) \to b)) \in T. \qquad (2)$$

De (2) on tire en utilisant le théorème 3.2.1 i.e. $((a \to b) \to (a \to b) \in T$ et M.P.

$$((a \to b) \to a) \to ((a \to b) \to b) \in T. \qquad (3)$$

De (3) on déduit en utilisant le théorème 3.2.4 (compatibilité à gauche de $\to$, avec $a = b \to a$). :

$$((b \to a) \to ((a \to b) \to a)) \to ((b \to a) \to ((a \to b) \to b)) \in T. \qquad (4)$$

En appliquant la transitivité à (1) et (4) on obtient le théorème. ∎

Théorème 3.2.14 $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) \in T$.

Preuve. Par S2 nous avons :

$$((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in T. \qquad (1)$$

En appliquant le théorème 3.2.4 (compatibilité à gauche de $\to$, avec $a = b \to c$) à (1) nous aurons :

$$((b \to c) \to (a \to (b \to c))) \to ((b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))) \in T. \qquad (2)$$

En appliquant à (2) : S1) et M.P. on tire :

$$(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in T. \qquad (3)$$

En appliquant à (3) la loi de l'échange on obtient le théorème. ∎

Définition 3.2.1 *Nous dirons que deux formules a et b sont logiquement équivalentes si $a \to b \in T$ et $b \to a \in T$ et nous écrirons*

$a \equiv b(\ mod\ T)$.

Théorème 3.2.15 *la relation $\equiv$ (mod T) est une relation d'équivalence compatible avec l'opération $\to$.*

Preuve.

Réflexive : $x \to x \in T$ (d'apré le théorème 3.2.1)donc $x \equiv x(\ mod\ T)$.

Symétrique :

si $x \equiv y(\ mod\ T) \Longrightarrow x \to y \in T$ et $y \to x \in T \quad \Longrightarrow y \equiv x(\ mod\ T)$.

Transitive :

si $\left.\begin{array}{l} x \equiv y(mod\ T) \Longrightarrow x \to y \in T \text{ et } y \to x \in T \\ y \equiv z(mod\ T) \Longrightarrow y \to z \in T \text{ et } z \to y \in T \end{array}\right\}$

$x \to y \in T$ (1)

$y \to z \in T$ (2)

Par transitivité on aura $x \to z \in T$. $\quad (I)$

$z \to y \in T$ (3)

$y \to x \in T$ (4)

(3) et (4) donnet $z \to x \in T$. $\quad (II)$

de (I) et (II), $x \equiv z(mod\ T)$.

Compatible avec l'opération $\to$ à droite :

$x \equiv y(mod\ T) \Longrightarrow x \to z \equiv y \to z(mod\ T)$?

$x \equiv y(mod\ T) \Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} x \to y \in T & (1) \\ y \to x \in T & (2) \end{array}\right\}$

$y \to x \in T$ d'aprés ce qui précède on aura

$$(x \to z) \to (y \to z) \in T \quad (I)$$

de même $x \to y \in T$, on en déduit

$$(y \to z) \to (x \to z) \in T \quad (II)$$

de (I) et (II)

$x \to z \equiv y \to z(mod\ T)$.

Compatible avec l'opération $\to$ à gauche :

$x \equiv y(mod\ T) \Longrightarrow z \to x \equiv z \to y(mod\ T)$?

$$x \equiv y(mod\ T) \Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} x \to y \in T & (1) \\ y \to x \in T & (2) \end{array}\right\}$$

de S1 $(x \to y) \to (z \to (x \to y)) \in T$ (3)

de (1) et (3) par M.P. on tire $z \to (x \to y) \in T$ (4)

de S2 et (4) par M.P

$$(z \to x) \to (z \to y) \in T \quad (I)$$

de S1 $(y \to x) \to (z \to (y \to x)) \in T$ (5)

de (2) et (5) par M.P. on tire (6) $z \to (y \to x) \in T$

de S2 et (6) par M.P

$$(z \to y) \to (z \to x) \in T \quad (II)$$

de (I) et (II)

$z \to x \equiv z \to y(mod\ T)$. ■

3.3 Théorème de déduction

Définition 3.3.1 *Si H est une partie d'une algèbre $\langle A, \to \rangle$ nous donnerons le nom de système déductif engendré par H à l'intersection $D(H)$ de tous les systèmes déductifs qui contiennent l'ensemble H .*

Il est clair que $D(\emptyset) = T$ et que Si $t \in T$ alors $D(\{t\}) = T$.

Plus généralement si $H \subseteq T$ alors $D(H) = T$.

Exemple 3.3.1 *Soit $A = \{0, 2, 1\}$ et $\to$ est l'implication intuitioniste.*

Soit $H = \{2\}$, les systèmes déductifs contenant H sont : $D_1 = \{2, 1\}$ et $D_2 = A$. On tire $D(H) = D_1 \cap D_2 = \{2, 1\}$.

Définition 3.3.2 *Étant donnée une succession $h_1, h_2, ..., h_n$ d'éléments de A, nous dirons que x est une conséquence de la succession donnée et nous écrirons*

$$h_1, h_2, ..., h_n \vdash x$$

si,

$$h_1 \to (h_2 \to (h_3 \to ... \to (h_n \to x))) \in T.$$

Théorème 3.3.1 *Si* $h_1, ..., h_{k-1}, \underline{h_k, h_{k+1}}, h_{k+2}, ...h_n \vdash x$, *alors* $h_1, ..., h_{k-1}, \underline{h_{k+1}, h_k}, h_{k+2}, ...h_n \vdash x$.

Preuve. Par hypothèse :

$$a = h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_k \to (h_{k+1} \to ... \to (h_n \to x)))) \in T.$$

Pour simplifier l'exposition posons

$$X = h_{k+2} \to (... \to (h_n \to x)..).$$

Donc par hypothèse :

$$a = h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_k \to (h_{k+1} \to X))..) \in T. \qquad (1)$$

Par la loi de l'échange nous savons que

$$(h_k \to (h_{k+1} \to X)) \to (h_{k+1} \to (h_k \to X)) \in T. \quad (2)$$

De (2) on déduit par le théorème 3.2.4 que

$$(h_{k-1} \to (h_k \to (h_{k+1} \to X))) \to (h_{k-1} \to (h_{k+1} \to (h_k \to X))) \in T. \qquad (3)$$

En appliquant de nouveau $k-2$ fois de suite, le théorème 3.2.4 à (3) en prenant successivement $\alpha = h_{k-2}, h_{k-3}, ..., h_1$ nous obtenons finalement

$$a \to (h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_{k-1} \to (h_{k+1} \to (h_k \to X)))...)) \in T. \qquad (4)$$

Comme $a \in T$ de (4) par M.P. on tire :

$$h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_{k-1} \to (h_{k+1} \to (h_k \to X)))...) \in T.$$

c.a.d.

$$h_1, ..., h_{k-1}, h_{k+1}, h_k, h_{k+2}, ...h_n \vdash x.$$

Et le théorème est démontré. ■

Corollaire 3.3.1 *Si $h_1, h_2, ., h_n \vdash x$ et si $k_1, ., k_n$ est une permutation de $h_1, h_2, ., h_n$ alors $k_1, k_2, .., k_n \vdash x$ (i.e. la notion de conséquence x d'une succession d'hypothèses $h_1, h_2, ., h_n$ est de telle nature que ce fait ne dépend de l'ordre dans lequel sont données les hypothèses).*

Lemme 3.3.1 *Si $h_1, h_1, h_2, ., h_n \vdash x$ alors $h_1, h_2, ., h_n \vdash x$.*

Preuve. Par hypothèse :

$$h_1 \to (h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_n \to x))) \in T.$$

Pour simplifier l'exposition posons

$$X = (h_2 \to ... \to (h_n \to x)).$$

Donc par hypothèse :

$$h_1 \to (h_1 \to X) \in T. \qquad (1)$$

Du théorème 3.2.7

$$(h_1 \to (h_1 \to X)) \to (h_1 \to X) \in T. \qquad (2)$$

De (1) et (2) par M.P, on tire

$$h_1 \to X \in T.$$

$$h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_n \to x)) \in T.$$

■

Définition 3.3.3 *Si H est une partie (finie ou infinie) de A, nous dirons que x est une conséquence de H s'il existe une partie finie $\{h_1, ..., h_n\}$ de H tel que $h_1, ..., h_n \vdash x$ et nous écrirons $H \vdash x$. L'ensemble de toutes les conséquences de l'ensemble H sera représenté par $C(H)$.*

Théorème 3.3.2 *$C(H)$ est un système déductif de A.*

Preuve. Comme $\emptyset \subseteq H$ et $C(\emptyset) = T$ ou voit que $T \subseteq C(H)$.

Il nous reste à démontrer que si $x \in C(H)$ et $x \to y \in C(H)$ alors $y \in C(H)$.

Si $x \in C(H)$ il existe une partie finie $X = \{h_1, ..., h_n\}$ de H telle que

$$h_1 \to (h_2 \to ... \to (h_n \to x)) \in T. \qquad (1)$$

Si $x \to y \in C(H)$ il existe une partie finie $K = \{k_1, ..., k_m\}$ de H, telle que

$$k_1 \to (.. \to (k_m \to (x \to y))...) \in T. \qquad (2)$$

Mais de (2) on déduit par la loi de l'échange et modus ponens

$$x \to (k_1 \to ... \to (k_m \to y)...) \in T \qquad (3)$$

D'où par le théorème 3.2;4 (compatibilité à gauche$\to$, avec $a = h_n$)

$$(h_n \to x) \to (h_n \to (k_1 \to .....(k_m \to y)....)) \in T$$

En réitérant nous aurons

$$(h_1 \to (..... \to (h_n \to x)) \to (h_1 \to (... \to (h_n \to (k_1 \to ... \to (k_m \to y)...)...)) \in T. \quad (4)$$

De (1) et (4) on déduit par M.P.

$$h_1 \to (... \to (h_n \to (k_1 \to ... \to (k_m \to y)...)...) \in T. \quad (5)$$

Et cela montre que

$y \in C(H)$.

Si la partie X est vide alors $x \in T$ et de (3) on déduit $y \in C(H)$.

Si $X = \emptyset$ et $K = \emptyset$ alors $x \in T$ et $x \to y \in T$ on déduit $y \in T$ donc $y \in C(H)$.

Si $X \neq \emptyset$ et $K = \emptyset$, alors $x \to y \in T$.

D'où par le théorème 3.2.4

$$(h_n \to x) \to (h_n \to y) \in T.$$

En réitérant nous aurons

$$(h_1 \to ... \to (h_n \to x)) \to (h_1 \to ...(h_n \to y)) \in T. \quad (4\prime)$$

De (1) et (4$\prime$) par M.P. on tire

$$h_1 \to (...(h_n \to y) \in T. \quad (5^{'})$$

Et cela montre que $y \in C(H)$ et le théorème est démontré. ■

Théorème 3.3.3 (De la compacité) *[1]*

Si H est une partie de A, alors $D(H) = C(H)$.

Preuve. 1^{er}.cas : $H = \emptyset$. Dans ce cas, $D(H) = T$ et d'autre part
$C(\emptyset) = \{x : \emptyset \vdash x\} = \{x : x \in T\} = T$
et le théorème est valable dans ce cas particulier.
$2^{ème}$.cas : $H \neq \emptyset$.

1. $C(H)$ est un système déductif (d'après le théorème précédent)

2. $H \subseteq C(H)$ (pour $h \in H$ de $h \to h \in T$ on déduit que $h \in C(H)$)

3. $C(H)$ est le plus petit système déductif qui contient H.

   Si D est un système déductif tel que $H \subseteq D$ (1) et si $x \in C(H)$, c.a.d. il existe un partie finie $\{h_1, .., h_n\} \subseteq H \subseteq D$ (2)

   telle que $h_1 \to (\to .. \to (h_n \to x)) \in T \subseteq D$ (3) comme $T \subseteq D$, par définition de système déductif, alors de (2) et (3) on tire

   $x \in D$ et nous venons de montrer que $C(H) \subseteq D$ et cela montre bien que

$C(H) = D(H)$. ■

Théorème 3.3.4 (De la déduction) *[1]*

Si D est un système déductif de l'algèbre A et $h \in A$ alors le système déductif engendré par l'ensemble $D \cup \{h\}$ est l'ensemble de tous les élément x tels que $h \to x \in D$.

Preuve. Posons $H = D \cup \{h\}$, $D\prime = \{x : h \to x \in D\}$ nous voulons démonter que
1) $D\prime$ est un système déductif,
2) $H = D \cup \{h\} \subseteq D\prime$,
3) $D\prime$ est Le plus petit système déductif qui contient H.
Pour démontrer 1) nous allons démontrer que :
i) $T \subseteq D\prime$
ii) Si x, $x \to y \in D\prime$ alors $y \in D\prime$.
Supposons que $t \in T$, alors $h \to t \in T$ (1); d'un autre côté $T \subseteq D$. (2)

De (1) et (2) on tire $h \to t \in D$ et alors par la définition de $D\prime$ on voit que $t \in D\prime$ et i) est démontrée.

Pour démontrer ii) supposons que $x, x \to y \in D'$, c.a.d.

$$h \to x \in D \ (1), h \to (x \to y) \in D \ (2)$$

Comme

$$(h \to (x \to y)) \to ((h \to x) \to (h \to y)) \in T \subseteq D.(3)$$

De (3), (2) et (1) on déduit par modus ponens $h \to y \in D$ donc $y \in D\prime$ et ii) est démontrée.

2) $H = D \cup \{h\} \subseteq D\prime$

Supposons que $x \in H$ alors ou bien iii) $x \in D$ ou bien iv) $x = h$.

Comme $x \to (h \to x) \in T \subseteq D$ (1) de iii) et (1) on tire $h \to x \in D$; donc $x \in D\prime$.

Si $x = h$ de $h \to h \in T \subseteq D$ on voit, d'après la définition de $D\prime$que $h \in D\prime$ et 2) est démontrée.

Pour démontrer 3) supposons que D" est un système déductif tel que

$$H = D \cup \{h\} \subseteq D". \ (3.1)$$

Nous voulons démontrer que $D\prime \subseteq D$" (3.2). Pour cela supposons que $x \in D\prime$, c.a.d.

$$h \to x \in D. \ (3.3)$$

De (3.3) et (3.1) on tire

$$h \to x \in D". \ (3.4)$$

Par (3.1) nous avons aussi

$$h \in D".(3.5)$$

De (3.4) et (3.5) on tire $x \in D$" et (3.2) est démontrée. ■

3.4 Systèmes déductifs irréductibles

Définition 3.4.1 *Un système déductif D de $< A, \rightarrow >$ sera dit irréductible si :*

1. $D \neq A$;
2. *si D_1, D_2, sont des systèmes déductifs tels que $D = D_1 \cap D_2$, alors $D = D_1$ ou $D = D_2$.*

Définition 3.4.2 *Un système déductif D de $< A, \rightarrow >$ sera dit complètement irréductible si :*

1. $D \neq A$;
2. *Etant donnée une famille $\{D_i\}_{i \in I}$ de systèmes déductifs, telle que*

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i$$

alors il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $D = D_{i_0}$.

Remarque 3.4.1 *Tout système déductif complètement irréductible est irréductible, mais dans certaines algèbres $< A, \rightarrow >$ il y a des systèmes déductifs irréductibles qui ne sont pas complètement irréductibles.*

Exemple 3.4.1 *Soit $A = [0, 1]$ l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$ et posons pour $x, y \in A$:*

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y \\ y \text{ si } x > y. \end{cases}$$

Soit a tel que $0 < a < 1$ alors l'ensemble $F(a) = \{x : a \leq x \leq 1\}$ est un système déductif irréductible qui n'est pas complètement irréductible, car si $0 < e < a$ alors $F(a) = \bigcap_e F(a - e)$ où e appartient à l'intervalle $(0, a) = \{e : 0 < e < a\}$ et $F(a - e) \neq F(a)$.

Théorème 3.4.1 *Si D est un système déductif de l'algèbre $< A, \rightarrow >$ et si $a \notin D$ $(a \in A)$ la famille C de tous les systèmes déductifs de A tels que*

1. *Si $c \in C$ alors $D \subseteq c$;*
2. $a \notin c$.

   Est inductive supérieurement.

Les systèmes déductives maximaux de la famille C serons dits des systèmes déductifs liés à a.

Plus généralement :

Définition 3.4.3 *Si a est un élément de l'algèbre $< A, \rightarrow >$ tel que $a \notin T$, alors les systèmes déductifs maximaux dans la famille des systèmes déductifs qui ne contiennent pas a seront dits "systèmes déductifs liés à a".*

Théorème 3.4.2 *[1]Pour qu'un système déductif D soit complètement irréductible il faut et il suffit que D soit lié à un élément a.*

Preuve. Soit D un système déductif complètement irréductible. D'après la définition (3.4.2) D est un système déductif propre ($D \neq A$).

Pour chaque élément $a \in A - D$ il existe, d'après le théorème 3.4.1, un système déductif D contenant D_a et lié à a.

Dans ces conditions : $D = \underset{a \in A-D}{\cap D_a}$ et comme D est complètement irréductible il existe un indice $a \in A - D$ tel que $D = D_a$, donc D est lié à l'élément a.

Supposons maintenant que D_a est un système déductif lié à l'élément $a \notin T$. Pour voir que D_a est complètement irréductible soit $\{D_i\}_{i \in I}$ une famille de systèmes déductifs tels Que

$$D_a = \underset{i \in I}{\cap} D_i.$$

Comme $a \notin D_a$ il existe un indice i tel que $a \notin D_i$ et en oûtre $D_a \subseteq D_i$. Mais D_a étant un système déductif maximal dans la famille des systèmes déductifs qui ne contiennent pas a Donc nous pouvons affirmer que $D_a = D_i$ et $D_a \neq A$ (car on a $a \notin D_a$ et $a \in A$) donc D_a est complètement irréductible. ■

Théorème 3.4.3 *Tout système déductif propre D est l'intersection de systèmes déductifs complètement irréductibles.*

Preuve. Soit D un système déductif propre. Pour chaque $a \in A - D$ il existe un système déductif D_a qui contient D et est lié à a, alors $D = \underset{a \in A-D}{\cap D_a}$, Les D_a étant complètement irréductibles ■

Corollaire 3.4.1 *Tout système déductif propre d'une algèbre $< A, \rightarrow >$ est l'intersection de systèmes déductifs irréductibles.*

3.4.1 Caractérisation des systèmes déductifs complètement irréductibles

Théorème 3.4.4 *[1]Pour qu'un système déductif propre C soit complètement irréductible, il faut et il suffit qu'il existe un élément $c \notin C$ tel que pour tout $a \notin C$ l'on ait $a \rightarrow c \in C$.*

Preuve. Soit C un système déductif complètement irréductible, alors d'après le théorème 3.4.2, C est liée à un élément $c \notin C$.

Soit $a \notin C$, alors le système déductif engendré par l'ensemble $H = C \cup \{a\}$ est, d'après le théorème de la déduction, l'ensemble de tous les éléments x tels que $a \rightarrow x \in C$, c.a.d.

$$D(H) = \{x : a \rightarrow x \in C\}.$$

Comme $a \in D(H)$ alors $C \subset D(H)$ et comme C est lié à c, nous pouvons affirmer que $c \in D(H)$, c.a.d. $a \rightarrow c \in C$, pour tout $a \notin C$.

Réciproquement soit C un système déductif pour lequel il existe un élément $c \notin C$, tel que pour tout $a \notin c$ l'on ait $a \rightarrow c \in C$ et montrons que C est lié à c.

Dans le cas contraire, il existerait un système déductif $C\prime$ tel que

1. $C \subset C\prime$
2. $c \notin C\prime$

Prenons un élément $a \in C\prime - C$. De $a \notin C$ on déduit $a \rightarrow c \in C$ donc, en particulier $a \rightarrow c \in C\prime$.(3) De (3) et (4) $a \in C\prime$on en déduit $c \in C\prime$, ce qui est impossible d'après 2. ■

Théorème 3.4.5 *[1]Si C est un système déductif lié à $a \rightarrow c$, alors $a \in C$.*

Preuve. Soit C un système déductif lié à $a \rightarrow c$ et supposons que $a \notin C$, alors d'après le théorème 3.4.4, nous aurons :

$$a \rightarrow (a \rightarrow c) \in C. \qquad (1)$$

D'après le théorème 3.2.7 nous avons :

$$(a \to (a \to c)) \to (a \to c) \in T \subseteq C. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire par M.P. $a \to c \in C$ (3), ce qui est impossible car, par hypothèse C est lié à $a \to c$. ■

Théorème 3.4.6 *[1]Pour qu'un système déductif propre D soit irréductible, il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments $a, b \notin D$ il existe un élément $c \notin D$ tel que $a \to c \in D$, $b \to c \in D$.*

Preuve. Soit D un système déductif irréductible et soient a, b deux éléments de A tels que $a \notin D$ (1), $b \notin D$.(2)

Si $b = a$ le résultat est évident en prenant $c = a$. Supposons donc que $a \neq b$. Soit D_1 le système déductif engendré par D et a, c.a.d.

$$D_1 = \{x : a \to x \in D\}. \qquad (3)$$

Soit D_2 le système déductif engendré par D et b, c.a.d.

$$D_2 = \{x : b \to x \in D\}. \qquad (4)$$

Il est clair que $D \neq D_1$ (5) $D \neq D_2$ (6) , donc $D \neq D_1 \cap D_2$. (7)

Comme par hypothèse D est irréductible, nous pouvons affirmer que

$$D \subset D_1 \cap D_2. \qquad (8)$$

Il existe donc un élément c tel que

$$c \in D_1 \cap D_2.(9) \quad c \notin D \ (10)$$

De (9) on déduit $c \in D_1$ (11) $c \in D_2$. (12)

De (3) et (11) on tire $a \to c \in D$. (13)

De (4) et (12) on tire : $b \to c \in D$.(14)

Les formule (10),(13) et (14) montrent que la condition est nécessaire.

Supposons maintenant que D est un système déductif propre tel que

(I) Si $a, b \notin D$ il existe un élément $c \notin D$ tel que

$$a \to c \in D,\ b \to c \in D.$$

Nous voulons démontrer que D est irréductible.

Supposons qu'ils existent deux systèmes déductifs tels que

$$D = D_1 \cap D_2.\ (15)$$

$$D \neq D_1;\ (16) \quad D \neq D_2.(17)$$

De (15), (16) et (17) on déduit $D_1 \neq D_2$.(18) Nous pouvons même affirmer que

$$D_1 \nsubseteq D_2 (19); D_2 \nsubseteq D_1.(20)$$

De (19) il résulte qu'il existe un élément a tel que :

$$a \in D_1(21);\ a \notin D_2.(22)$$

De (20) il résulte qu'il existe un élément b tel que :

$$b \in D_2\ (23); b \notin D_1.(24)$$

En particulier $a, b \notin D$.(25)

Par la condition (I) il existe alors un élément c tel que $c \notin D$ (26);

$$a \to c \in D\ \ (27);\ b \to c \in D.(28)$$

De (21) et (27) et (15) on tire par M.P. :

$$c \in\ D_1.(29)$$

De (23), (28) et (15) on tire par M.P. :

$$c \in D_2.(30)$$

De (29) et (30) il résulte d'après (15) $c \in D$, ce qui est impossible d'après (26). ■

3.5 Le radical déductif et le théorème de la semi-simplicité déductive

Définition 3.5.1 (Système déductif maximal) *Un système déductif* M *d'une algèbre* $< A, \to >$ *sera dit maximal si*

1. M *est propre;*
2. *Si* D *est un système déductif tel que* $M \subset D$*, alors* $M = D$ *ou* $D = A$.

Théorème 3.5.1
Pour q'un système déductif M *d'une algèbre* $< A, \to >$ *soit maximal, il faut et il suffit que*

1. M *soit propre;*
2. *Si* $a \notin M$ *et* $b \notin M$ *alors* $a \to b \in M$.

Preuve.
Supposons que M soit un système déductif maximal, alors 1) est vérifiée.

D'autre part, soit $b \notin M$, M est lié à élément $b \notin M$, donc si $a \notin M$, nous aurons $a \to b \in M$, d'après le théorème 3.4.4

Soit maintenant M un système déductif de $< A, \to >$ qui vérifie les conditions 1) et 2) de l'énoncé.

Si M n'était pas un système déductif maximal il existerait un système déductif propre $M\prime$ tel que $M \subset M\prime \subset A$.

Soit (i) $a \in M\prime - M$, (ii) $b \in A - M\prime$.

Comme $a, b \notin M$ alors (iii) $a \to b \in M$.

De (i) on déduit $a \in M\prime$(iv), et de (iii) et (iv) on tire $b \in M\prime$ (car $a \to b \in M\prime$), Ce qui est impossible d'après (ii) ■

Définition 3.5.2 *Une algèbre* $< A, \to >$ *sera dite déductivement simple si* T *est un système déductif maximal.*

Corollaire 3.5.1 *Pour qu'une algèbre* $< A, \to >$ *soit déductivement simple, il faut et il suffit qu'elle soit consistante* ($T \neq A$) *et que pour tout* $a \notin T$ *et* $b \notin T$ *l'on ait* $a \to b \in T$.

Définition 3.5.3 *Étant donnée une algèbre $< A, \rightarrow >$ nous donnerons le nom de radical déductif de A à l'intersection Rad A de tous les systèmes déductifs maximaux de A.*

Dans le cas où A n'a aucun système déductif maximal alors Rad $A = A$.

Définition 3.5.4 *Une algèbre $< A, \rightarrow >$ sera dite déductivement semi-simple si*

1. *A est consistante, c.a.d. $T \neq A$;*
2. *$T = Rad\ A$.*

Théorème 3.5.2 *Quels que soient les éléments $a, b \in A$, nous avons*

$$((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \in Rad\ A.$$

Preuve. Le théorème est évident si $Rad\ A = A$. Supposons maintenant que $Rad\ A \neq A$.(1) Supposons qu'il existent des éléments $a, b \in A$, tels que

$$r = ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \notin Rad\ A.(2)$$

Par (2) il existe un système déductif maximal M tel que

$$r \notin M.(3)$$

Nous allons montrer que :

$$a \notin M.(4)$$

En effet supposons que $a \in M$. (5)

Alors comme

$$a \rightarrow r = a \rightarrow (((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a) \in T \subseteq M. \ (6)$$

De (5) et (6) on tire par M.P. $r \in M$, ce qui est impossible par (3).

De (3) et (4) on déduit en utilisant le théorème 3.5.1 que

$$r \rightarrow a = (((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a) \rightarrow a \in M. \quad (7)$$

remplacer a par $a \to b$ et b par a dans le théorème 3.2.12 on tire

$$((((a \to b) \to a) \to a) \to a) \to ((a \to b) \to a) \in T \subseteq M.$$

En utilisant M.P et (7) on tire :

$$(a \to b) \to a \in M. \ (8)$$

Montrons maintenant que :

$$a \to b \notin M. \ \ (9)$$

Supposons que :

$$a \to b \in M. \ (10)$$

De (8) et (10) on déduirait par M. P. que $a \in M$ (11), ce qui est impossible d'après (4) et (9) est démontrée.

Comme M est un système déductif maximal, de (4) et (9) on déduit :

$$a \to (a \to b) \in M. \ (12)$$

Mais d'après le théorème 3.2.7

$$(a \to (a \to b)) \to (a \to b) \in T \subseteq M \ (13)$$

et alors de (12) et (13) il résulte par M.P. $a \to b \in M$ (14), ce qui est en contradiction avec (9) et la démonstration est terminée. ■

Corollaire 3.5.2 *Si M est un système déductif maximal, alors quels que soient $a, b \in A$ on a :*

$$((b \to a) \to a) \to a \in M.$$

Définition 3.5.5 *Les éléments de forme :*

$$p = ((a \to b) \to a) \to a$$

seront dits peirciens.

Lemme 3.5.1 *Soit $< A, \to >$ une algèbre consistante, si $((a \to b) \to a) \to a \in T$ pour tout $a \in A$ et $b \in A$, alors tout système complètement irréductible est maximal.*

Preuve. Soit D système complètement irréductible, D est un système déductif lié à un élément a.

Supposons que D n'est pas un système déductif maximal; alors il existe un système déductif propre $D\prime$ tel que

$$D \subset D\prime \subset A. \quad (1)$$

Comme $D\prime$ est propre, il existe un élément b tel que

$$b \notin D\prime. \ (2)$$

Comme D est lié à a, de (1) on déduit :

$$a \in D\prime \ . \ (3)$$

Montrons que :

$$a \to b \notin D\prime. \quad (4)$$

Dans le cas contraire de (3) et $a \to b \in D\prime$ on déduirait par M.P.que $b \in D\prime$, ce qui est impossible d'après (2). D étant lié à a, de (3) on déduit :

$$(a \to b) \to a \in D. \ \ (5)$$

Comme

$$((a \to b) \to a) \to a \in T \subseteq D, \quad (6)$$

de (5) et (6) on tire par M.P. $a \in D$, ce qui est impossible.

Cette contradiction montre que D est un système déductif maximal. ■

Théorème 3.5.3 (de la semi-simplicité déductive) *[1]*

Soit $< A, \to >$ *une algèbre consistante.*

Pour que l'algèbre $< A, \to >$ *soit déductivement semi-simple il faut et il suffit que*

$$((a \to b) \to a) \to a \in T$$

quels que soient a *et* $b \in A$.

Preuve. (Se base sur le lemme précédent)
La condition est nécessaire $\Longrightarrow$:

$$((a \to b) \to a) \to a \in Rad\ A \text{ (d'après le théorème3.5.2)} \quad (1)$$

de (1) et d'après 1'hypothèse $T = Rad\ A$

$$((a \to b) \to a) \to a \in T$$

Au sans $\Longleftarrow$

Comme T est l'intersection de systèmes déductibles complètement irréductibles, T est l'intersection de systèmes déductifs maximaux, c.a.d. $T = Rad\ A$. ■

Conclusion

Une algèbre de Heyting est un modèle algébrique de la logique intuitionniste. D'autre part la théorie des systèmes déductifs qui a été fondée par A. Tarski [1930].

L'étude des systèmes est capable d'intégrer et donner des réponses aux problèmes plus proprement syntaxiques, il s'accompagne et détermine notre compréhension de ce que c'est la logique.

Cette étude nous a permet la compréhension de plusieurs notions fondamentales de mathématique, parmes les quelles on trouve le théorème compacité, théorème de déduction qui dit que Si D est un système déductif de l'algèbre A et $h \in A$, alors le système déductif engendré par l'ensemble $D \cup \{h\}$ est l'ensemble de tous les élément x tels que $h \to x \in D$. Ainsi que le théorème de la semi simplicité déductif qui annonce que si $< A, \to>$ une algèbre consistante, pour que l'algèbre $< A, \to>$ soit déductivement semi-simple il faut et il suffit que

$$((a \to b) \to a) \to a \in T \text{ quels que soient } a \text{ et } b \in A.$$

Ce travail ma fourni les idées et les technique de démonstration et de déduction de manière rigoureuse qui peut m'aider dans mon cursus.

J'ai constaté que l'usage de l'outil informatique me facilite la tâche, c'est porquoi ce que souhaite pouvoir élaboré un programme calculant l'ensemble des thèses d'un système déductif dont le calcul direct est une tâche très difficile.

Bibliographie

[1] A. Monteiro ,Treillis de Heyting symétrique, Portogaliae Mathematica, volume 39, 1980, pp. 1-237.

[2] C.Gilena, Holdon,Nitu, Distributive residuated lattices, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume39, 2012, pp. 100.

[3] D. PONASSE, J. C. CARREGA, Algèbre et toplogie Booléennes, MASSON, 1979.

[4] http://algo.epfl.ch/_media/en/courses/2008-2009/dm-l4.pdf, consulté le : 23/11/2014.

[5] http://igm.univ-mlv.fr/~nicaud/poly/L2cours1234.pdf, consulté le :23/11/2014.

[6] J. Gensel, Mathématiques pour l'informatique Relations binaires, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/Manuscripts/2009/Mat122V/Redactions/Relations.pdf.

[7] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[8] www.math.uqam.ca/~belair/seminaire%20de%20logique%20/exp.06.10.5-19ReprStone2-3.pdf, consulté le : 19/03/2015.

ANNEXE

programmer en matlab pour calcul l'ensemble de thèses élémentaires

```
clc
clear
%Ce programme est basé sur sites de les éléments de l'ensemble A
fprintf('insérer la taille de la matrice \n')
n=input('');
fprintf('insérer d'éléments de la matrice \n')
for i=1:n
    for j=1:n
    B(i,j)=input('');
    end
end
A=[1:n];
c=1;
for i=1:n
    for j=1:n
    t(c)=B(A(i),B(A(j),A(i)));
    c=c+1;
    end
end
for i=1:n
  for j=1:n
   for k=1:n
   t(c)=B(B(A(i),B(A(j),A(k))),B(B(A(i),A(j)),B(A(i),A(k))));
   c=c+1;
   end
  end
end
```

```
t0(1)=t(1);
for i=2:c-1
r=0;
  for j=1:length(t0)
    if t(i)~=t0(j)
    r=r+1;
    end
  end
    if r==length(t0)
    t0(length(t0)+1)=t(i);
    end
end
A
B
fprintf('l'ensemble de thèses élémentaires de A \n')
t0
```

<u>Le résultat</u>