



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Etude d'existence de solutions pour une classe de problèmes
non locaux singuliers*

Présentée par :

BENTAYEB Ahlam

Soutenu publiquement le : 14/06/2022

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> SENGOUGA ABDELMOUHCENE	MCA ,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> BOUAFIA DAHMANE	MCA,	Université de M'sila	Examineur.
<i>M^r</i> FERAHTIA NASSIM	MCB,	Université de M'sila	Examineur.
<i>M^r</i> MOKTARI ABDELHAK	MCA,	Université de M'sila	Encadreur.



Remerciement



*Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant , qui nous a donné la force , et
la courage et la patience d'accomplir ce présent travail
je tiens tout à remercier **MOKTARI ABDELHAK** d'avoir accepté d'encadrer
ce mémoire avec beaucoup de patience.
je le remercie vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui
restera un modé pour moi.
je remercie ensuite Monsieur **SENGOUGA ABDELMOUHCENE** d'avoir
accepté d'ête président du jury
et aux Messieurs **BOUAFIA DAHMANE** et **FERAHTIA NASSIM**
d'en être examinateurs
et d'avoir accepté d'assister á la présentation de ce travail je tiens enfin á
remercier tout particulièrement ma famille
qui m'a accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser
ce travail ainsi que toutes les personnes qui m'ont soutenue.*

Dédicaces

Avant tout je remerci le seigneur tout -puissant de m'avoir accordé "volonté " et "patience", pour pouvoir accomplir ce modeste travail je dédie le présent projet à

** Ma chère mère qui m'a indiqué le bon chemin à entreprendre.*

** Ma petite fille qui m'a encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.*

** Mon encadreur " **ABDELHAK MOKHTARI**"*

** Tout les enseignants du département mathématique*

** Á tout qui ont contribué de loin ou de prés á ce travail.*

Table des matières

Notations	v
Introduction	2
1 Préliminaires et quelques outils de base	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$	4
1.1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$	7
1.1.3 Injections de Sobolev	8
1.1.4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$	9
1.2 Opérateurs dans les espaces de Hilbert	10
1.3 Dérivé des fonctionnelles	11
1.3.1 Dérivé au sens de Gâteaux	11
1.3.2 Points critiques	11
2 Méthode de sous et sur-solution	13
2.1 Valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$	13
2.2 Modèle d'étude simple	15
2.3 Principe de base pour un problème de Kirchhoff	19
3 Etude d'un problème de kirchhoff singulier par la méthode de sous et sur-solution	23
3.1 Définitions et résultats préliminaires	23
3.1.1 Résultat principal	26
4 Existence de solutions pour un problème de kirchhoff par une méthode variationnelle	32
4.1 positions du problème	32
4.1.1 Formulation variationnelle et résultat principale	33
4.2 Preuve du résultat principal	33

4.2.1	Minimisation de I	33
4.2.2	Minimum de I est une solution de (4.1)	36
4.2.3	Positivité de solution	40
	conclusion générale	41
	Bibliographie	42

Notations

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

- \mathbb{R} Ensemble des nombres réels
- \mathbb{R}^+ Ensemble des réels positifs
- \mathbb{R}^n Espace euclidien de dimension N
- Ω Ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue
- $\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω
- ∇u Gradient de u , $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$
- $\operatorname{div}(v)$ Divergence du vecteur v , $\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N}$
- Δu Laplacien de u , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$
- $C(\Omega)$ Espace des fonctions continues sur Ω
- $C^k(\Omega)$ Espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω , k entier positif
- $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue
- $L^p(\Omega)$ $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$ ($1 \leq p < \infty$, constant)
- $L^\infty(\Omega)$ $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } \exists c \geq 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}$
- p' conjugué de Hölder de p , $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$
- $D(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω , à support compact dans Ω
- $W^{1,p}(\Omega)$ Espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distributions d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$, muni de la norme $\|u\|_{W^{1,p}} = \sum \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$
- $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c-à-dire $\overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}}$
- $p.p$ presque par tout
- $T.A.F$ Théorème des accroissements finis
- $T.C.D$ Théorème de convergence dominée de Lebesgue
- $H^1(\Omega)$ $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$
- $H_0^1(\Omega)$ $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$
- $E \hookrightarrow F$ E s'injecte continument dans F

$E \hookrightarrow_c F$ E s'injecte d'une manière compacte dans F

\rightharpoonup converge faiblement

\rightarrow converge fortement

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles "EDP" est l'une des sujets de grande importance dans l'analyse non linéaire. Dans notre mémoire, nous avons intéressé à étudier l'existence de solutions positives pour une classe des problèmes de type kirchhoff de la forme :

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = \lambda \left(f(u) - \frac{1}{u^\alpha} \right) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

et

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = u^5 + \frac{\lambda}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Comme les premières équations (1) et (2) contiennent une intégrale sur Ω , elle n'est plus une identité ponctuelle; c'est pourquoi elle est souvent appelée problème non local. Ce problème modélise plusieurs systèmes physiques et biologiques, dans lesquels u désigne un processus qui dépend de la moyenne de lui-même, tel que la densité de population, voir [9]. Le problème (1) est lié à la version stationnaire de l'équation de kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Qui a été présenté par kirchhoff en 1883, voir [16]. Cette équation est une extension de l'équation d'Alembert en prenant les effets des changements dans l'équation la longueur de la corde pendant les vibrations. Les paramètres de (3) ont la valeur sens suivants : L est la longueur de la chaîne, h est l'aire de la section, E est le module d'Young du matériau, ρ est la masse volumique et p_0 est la module initial tension.

Ces dernières années, les problèmes qui contenant des opérateurs de type de kirchhoff ont été étudiés dans des nombreux articles, nous référons à [2, 3, 6, 7, 14, 18, 19, 22, 24, 23, 25], dans lesquels les auteurs ont utilisé des méthodes variationnelles et des méthodes topologiques pour

obtenir l'existence de solutions de (1) et (2) dans les cas où f est satisfait condition de croissances p -souslinéaire, ou p -linéaire à l'infini.

Ce travail est divisé en, quatre chapitres. Dans le premier chapitre on donne des définitions et des notations qui seront utilisés dans la suite du travail comme les espaces de sobolev, les opérateurs dans les espaces de Hilbert, Dérivé au sens de Gâteaux et points critiques. Le deuxième chapitre consacre à présenter la méthode de sous et sur- solutions pour un model simple d'"EDP". Dans le troisième chapitre on étudie l'existence de solutions d'un problème de Kirchhoff singulier en utilisant une méthode de sous et sur-solution. Dans le dernier chapitre on démontre l'existence d'une solution de problème Kirchhoff par une autre méthode qui est la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie associée à notre problème, cette approche est l'une des méthodes variationnelles.

PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES OUTILS DE BASE

Dans ce premier chapitre on présente quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On citera en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce que suit, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue.

Définition 1.1. ([13]) Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

On peut vérifier facilement que $\|\cdot\|_{L^p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^p(\Omega)$ est un espace normé.

Définition 1.2. ([13]) On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable. } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est une espace normé quand le muni par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Théorème 1.1. ([13])

1. L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
2. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,
3. L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Proposition 1.1. (Inégalité de Hölder) ([13]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Proposition 1.2. (Inégalité de Hölder généralisé) ([13]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ et soit $r > 0$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$, on a :

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 1.2. (Théorème de Rillich) [13] Si Ω est une borné régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergent dans $L^2(\Omega)$ on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact.

Théorème 1.3. (Inégalité de cauchy -schwarz)[13] Soit $f, g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.4. (Convergence dominée de Lebesgue) ([13]) Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,
2. il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

-
1. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions (f_n) .

Théorème 1.5. (Convergence dominée de Lebesgue inverse) ([13]) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$, tels que : $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Le résultat suivant introduit quelques propriétés topologiques des espaces de Lebesgue.

Lemme 1.1. (lemme Brezis- Lieb)[20] Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonction de $L^p(\Omega)$ convergeant p. p. vers f . Alors $f \in L^p(\Omega)$ et :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|f - f_n\|_{L^p(\Omega)}^p \right).$$

Lemme 1.2. (lemme de Hopf)[20] Soient Ω un ouvert borné connexe et

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{ij} u + b \cdot \nabla u + cu,$$

On suppose que $c \geq 0$, que

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p sur } \Omega \\ a(x) \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

est satisfaite et que $a_{i,j}, b, c \in C(\overline{\Omega})$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifie $Lu \leq 0$ et si u atteint un maximum ≥ 0 à l'intérieur de Ω , alors u est constante sur Ω .

Définition 1.3. (la convergence faible et forte) ([13]) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et soit E' son dual topologique². On dit que (x_n) converge faiblement dans E s'il existe un élément $x \in E$ telle que :

$$\forall f \in E', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{ou} \quad (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle)$$

Notation On notera $(x_n) \rightharpoonup x$ dans E , c'est à dire la convergence faible dans E . On notera de même $(x_n) \rightarrow x$ dans E , c'est à dire la convergence forte dans E (la convergence en norme).

Lemme 1.3. (lemme de Fatou) (Voir[13]) Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ tel que :

1. Pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω ,
2. $\sup \int_{\Omega} f_n(x) dx < +\infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

2. l'espace des formes linéaire et continues sur E , $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

1.1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et de support compacte inclus dans Ω .

Définition 1.4. ([13]) L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega), \text{ tel que : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \overline{1,n} \right\}$$

En particulier, pour $p = 2$, on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

∇u est appelé la dérivé au sens faible de g . L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $\|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$).

Proposition 1.3. ([13]) L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand le muni par le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = [\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalent de la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.4. ([13])

1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
2. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$,
3. L'espace $H^1(\Omega)$ est espace de Hilbert séparable.

1.1.3 Injections de Sobolev

Le but de cette section est de découvrir quelques injections continues et compactes concernant aux espaces de Sobolev. Rappelons qu'un opérateur linéaire T entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normé) E et F est dit compact si l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compact (adhérence compacte) dans F . Plus précisément Pour toute suite (x_n) une suite bornée dans E , on peut extraire une sous suite $u_n = (T(x_{n_k}))$ de la suite $u_n = T(x_n)$ converge dans F . Si E s'injecte continument dans F , le caractre compacte de cette injection entraine que toute suite faiblement convergente est fortement convergente dans l'espace d'arrivée.

Définition 1.5. ([13])

1. E s'injecte d'une manière continue dans F , signifie que $E \subset F$ et l'injection canonique $j : E \rightarrow F$ est continue et on le note par $E \hookrightarrow F$.
2. E s'injecte d'une manière compacte dans F , signifie que $E \subset F$ et l'injection $j : E \rightarrow F$ est compacte et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.

Si $1 \leq p \leq N$, l'exposant de Sobolev de p est définie par :

$$p^* = \frac{NP}{N - P}$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}$$

Théorème 1.6. ([13]) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 , borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:

1. Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.7. (Rellich-Kondrachov) ([13]) On suppose que Ω bornée de classe C^1 . On a

1. Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$.

1.1.4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.6. ([13]) tant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est -à-dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.5. ([13]) L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 1.1. Lors que $\Omega = \mathbb{R}^N$. On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.8. ([13]) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.6. (Inégalité de Poincaré) (Voir[13]) Soit Ω un ouvert borné, alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$ et p) telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème de lax-milgram

problème varationnelle abstrait

Soit E un espace de hilbert, réel muni de produit scalaire (\cdot, \cdot) , et de la norme associée $\|\cdot\|_E$.

Soit une forme bilinéaire sue $E \times E$, et soit f une forme linéaire sur E .

Définition 1.7. On dit que la forme bilinéaire a est continue si il existe une constante $M > 0$, tel que pour tout $u, v \in E$ on a

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_E \|v\|_E$$

Définition 1.8. On dit que la forme bilinéaire a est symétrique si, pour tout $u, v \in E$ on a

$$a(u, v) = a(v, u)$$

Définition 1.9. On dit que la forme bilinéaire a est coercive sur E si, il existe une $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on a

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_E^2$$

Théorème 1.9. (Théorème de Lax-Milgram) Soit E un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive et L une forme linéaire continue sur E . Alors le problème suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{cases}$$

admet une solution unique.

formules de Green

Théorème 1.10. soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 . Alors si $u, \phi \in H^1(\Omega)$ on a la formule Green suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial \Omega} u \phi \eta_i \, ds \quad i = 1, \dots, N$$

Théorème 1.11. (principe de maximum fort pour le laplacien) On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, où Ω est un ouvert borné et connexe.

— si

$$-\Delta u \leq 0 \quad \Omega.$$

et u atteint son maximum en un point à l'intérieur de Ω , alors u est une constante sur $\bar{\Omega}$.

— si

$$-\Delta u \geq 0 \quad \Omega.$$

et u atteint son minimum en un point à l'intérieur de Ω , alors u est une constante sur $\bar{\Omega}$.

([17]théorème 4)

1.2 Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Théorème 1.12. (Théorème de Hilbert-schmidt)[13] pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint T dans un espace de Hilbert séparable H , il existe un système orthonormé (e_k) de vecteurs propres

aux valeurs propres non nulles (e_k), telle que tout élément $u \in H$ peut s'écrire de manière unique, sous la forme

$$u = \sum_k c_k e_k + u'$$

ou $u' \in \text{Ker}T$, c'est-à-dire $Tu' = 0$, en outre

$$Tu = \sum_k \lambda_k c_k e_k$$

et si la suite (e_k) est infinie, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0$$

Corollaire 1.1. *si l'opérateur auto-adjoint compact T est inversible, ses valeurs propres peuvent former une base dans H .*

Corollaire 1.2. *Si T est un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert séparable H une base orthonormée formée des vecteurs propres de T .*

1.3 Dérivé des fonctionnelles

1.3.1 Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 1.10. ([20]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Gâteaux (G -différentiable) en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E'$ (A linéaire et continue), noté par $I'_G(u)$ tel que, pour tout $v \in E$, où $I(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $DI(u)$ existe c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle A, v \rangle$$

Si I est différentiable au sens de Gâteaux en u .

1.3.2 Points critiques

Définition 1.11. ([20]) Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E . Supposons que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un **point critique** de I , si :

$$I'(u) = 0$$

- Si u n'est pas un point critique, alors on dit que u est un point régulier de I .
- Si $c \in \mathbb{R}$, alors on dit que c est une valeur critique de I , s'il existe $u \in \Omega$ tel que

$$I(u) = c \quad \text{et} \quad I'(u) = 0$$

- Si c n'est pas valeur critique, alors on dit que c est une valeur régulière de I .

Pour plus des détails , vous pouvez consulter voir[4], [20]

MÉTHODE DE SOUS ET SUR-SOLUTION

Dans ce chapitre, on va appliquer la méthode de sous et sur-solution sur un model simple d'EDP elliptique pour comprendre ses étapes.

2.1 Valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$

En guise de simplification, on considère dans cette section $L = -\Delta$. On s'intéresse au problème suivant[5] :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

La solution faible de (2.1) s'appelle fonction propre de $-\Delta$ et λ est la valeur propre associée.

Définition 2.1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un nombre complexe λ est une valeur propre de T si il existe une fonction $h \in H, h \neq 0$ tel que $Th = \lambda h$. la fonction h est appelée une fonction propre de T .

Définition 2.2. [13] On appelle base hilbertienne (ou simplement base s'il n 'ya pas de confusion possible¹) une suit (e_n) d'éléments de H telle que :

i) $|e_n| = 1 \forall n, (e_m, e_n) = 0 \forall m, n \ m \neq n$.

ii) l'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H .

Théorème 2.1. les valeurs propres de $-\Delta$ sont réelles est positives .

Théorème 2.2. [5] Il existe une base orthonormale $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ dans $L^2(\Omega)$ tel que $\omega_k \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{cases} -\Delta\omega_k = \lambda_k\omega_k & \text{dans } \Omega \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

où les valeurs propres λ_k vérifient

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad (2.3)$$

1. sur tout ne pas confondre avec une base algébrique i.e une famille (e_i) de H tel que tout élément de H s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire finie des (e_i)

Preuve de (Théorème 2.2). On définit l'opérateur $T = (-\Delta)^{-1}$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ qui à f associe $Tf = u$ solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

On montre que $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est borné (continue) et compact. le problème (2.4) admet une solution faible unique $u \in H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème de lax-Milgram, d'où l'opérateur T est bien défini. On multiplie l'équation de (2.4) par u et on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc d'après l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.5)$$

et par suite

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.6)$$

La continuité de T découle de (2.6). Et grâce à l'injection compacte de l'espace $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ voir le (théorème 1.7), on déduit de l'estimation (2.5) que T est compact.

Montrons maintenant que T est symétrique (auto-adjoint) c'est-à-dire :

$$(Tf, g) = (f, Tg), \quad \text{pour tout } f, g \in L^2(\Omega) \quad (2.7)$$

Posons $u = Tf$ et $v = Tg$. Alors on a :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

On multiplie l'équation (2.8) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et on intègre par parties, on applique la formule de Green, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta uv dx = -\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \eta v ds + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

puis que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on peut voir :

$$-\int_{\Omega} \Delta uv dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

alors on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx = (f, v) = (f, Tg)$$

On multiplie (2.9) par $u \in H_0^1(\Omega)$ et en appliquant la formule de Green, on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta v u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot \eta u \, ds + \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dx \text{ on a } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

de sorte que

$$-\int_{\Omega} \Delta v u \, dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dx$$

qui donne

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dx = \int_{\Omega} u g \, dx = (u, g) = (Tf, g)$$

En comparant ces deux dernières équations, on obtient (2.7).

D'après le théorème (1.12) il existe une base orthonormale $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ dans $L^2(\Omega)$. les valeurs propres de T représente une suite $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ tel que

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots \text{ et } \mu_k \rightarrow 0$$

D' où les valeurs propres de $-\Delta$ sont $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}, k = 1, 2, \dots$ qui vérifient :

$$\int_{\Omega} |\nabla \omega_k|^2 \, dx = \int_{\Omega} \lambda_k |\omega_k|^2 \, dx,$$

ce qui implique que $\lambda > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) et $\lambda_k \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow +\infty$

Comme $L^2(\Omega)$, est un espace de Hilbert séparable et T est compact dans $L^2(\Omega)$, il admet une base orthonormale constituée des fonctions propres $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ de l'opérateur $-\Delta$ (qui sont les même fonctions propres de l'opérateur compact $T = (-\Delta)^{-1}$). \square

Remarque 2.1. De plus, on peut voir que :

$$\int_{\Omega} \nabla \omega_j \nabla \omega_k \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} \omega_j \omega_k \, dx, \text{ si } j \neq k$$

d' où cette suite $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ est orthogonale dans $H_0^1(\Omega)$.

2.2 Modèle d'étude simple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans cette section on va présenter la méthode de sous et sur- solution (appelée aussi méthode de schémas monotones) pour résoudre le problème modèle (2.10).

Définition 2.3. i) On dit que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sous -solution faible du problème (2.10) si :

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla v \, dx \leq \int_{\Omega} f(\underline{u})v \, dx \quad (2.11)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ p.p dans Ω .

ii) De même, on dit que $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (2.10) si :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla v \, dx \geq \int_{\Omega} f(\bar{u})v \, dx \quad (2.12)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ p.p dans Ω .

iii) On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (2.10) si :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx, \quad (2.13)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.2. Si $\bar{u}, \underline{u} \in C^2(\Omega)$, alors (2.11) et (2.12) sont respectivement équivalentes à :

$$-\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}), \quad -\Delta \bar{u} \geq f(\bar{u}) \text{ dans } \Omega$$

Supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 tel que :

$$|f'(t)| \leq C, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

on va montrer le résultat suivant .

Théorème 2.3. Supposons que le problème (2.10) admet une sous et sur-solution faible \underline{u}, \bar{u} tel que :

$$\underline{u} \leq 0, \quad \bar{u} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{au sens de la trace et } \underline{u} \leq \bar{u} \text{ p.p dans } \Omega. \quad (2.15)$$

Alors, il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{p.p dans } \Omega$$

Preuve. Grâce à l'hypothèse (2.14), il existe $\mu > 0$ assez grand telle que la fonction

$$t \rightarrow f(t) + \mu t$$

est croissante.

1. On pose $u_0 = \underline{u}$, on construit alors par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $H_0^1(\Omega)$ comme suivant : Supposons que $u_k \in H_0^1(\Omega)$ est bien définis et on pose u_{n+1} la solution faible du problème linéair suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + \mu u_{n+1} = f(u_n) + \mu u_n & \text{dans } \Omega \\ u_{n+1} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.16)$$

Rappelons que ce problème linéair admet une solution faible unique u_{n+1} . il suffit d'appliquer le théorème Lax- Milgram.

2. Ensuite on montre que cette suite est croissant, c'est-à-dire :

$$u_0 = \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots, \text{ p. p. dans } \Omega.$$

Raisonnons par récurrence. Montrons que $u_0 \leq u_1$ p. p. dans Ω . On a pour $n = 0$

$$\int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v + \mu u_1 v) dx = \int_{\Omega} (f(u_0)v + \mu u_0 v) dx, \quad v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.17)$$

Comme $u_0 = \underline{u}$ est sous-solution du problème (2.10), alors on a :

$$\int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \nabla v + \mu u_0 v) dx \leq \int_{\Omega} (f(u_0)v + \mu u_0 v) dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (2.18)$$

On choisit :

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega), \quad (u_0 - u_1)^+ \geq 0 \text{ p. p. dans } \Omega$$

et on retranche (2.18) de (2.17), on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla(u_0 - u_1) \cdot \nabla(u_0 - u_1)^+ + \mu(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ dx \leq 0$$

Mais on a

$$\nabla(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} \nabla(u_0 - u_1), & \text{sur } \{u_0 \geq u_1\} \\ 0 & \text{sur } \{u_0 \leq u_1\} \end{cases}$$

par conséquent, on a :

$$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} (|\nabla(u_0 - u_1)|^2 + \mu(u_0 - u_1)^2) dx \leq 0,$$

ce qui implique que $u_0 \leq u_1$ p. p. dans Ω . Supposons maintenant que $u_{n-1} \leq u_n$ p. p. dans Ω et montrons que $u_n \leq u_{n+1}$ p. p. dans Ω . De (2.16) on a par définition :

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n \cdot \nabla v + \mu u_n v) dx = \int_{\Omega} (f(u_{n-1})v + \mu u_{n-1} v) dx,$$

et

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{n+1} \cdot \nabla v + \mu u_{n+1} v) dx = \int_{\Omega} (f(u_n)v + \mu u_n v) dx, \quad (2.19)$$

pour $v \in H_0^1(\Omega)$. Par soustraction avec $v = (u_n - u_{n+1})^+$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla(u_n - u_{n+1}) \nabla(u_n - u_{n+1})^+ + \mu(u_n - u_{n+1})(u_n - u_{n+1})^+) dx \\ &= \int_{\Omega} ([f(u_{n-1}) + \mu u_{n-1}] - [f(u_n) + \mu u_n])(u_n - u_{n+1})^+ dx \end{aligned}$$

Comme $u_{n-1} \leq u_n$, le second membre de cette équation est négatif à cause de la croissance de $t \rightarrow f(t) + \mu t$. D'où :

$$\int_{\{u_n \geq u_{n+1}\}} (|\nabla(u_n - u_{n+1})|^2 + \mu(u_n - u_{n+1})^2) dx \leq 0$$

et par conséquent, $u_n \leq u_{n+1}$ p. p. dans Ω .

3. On montre que $u_n \leq \bar{u}$ p. p. dans Ω , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, si $n = 0$ alors on a par hypothèse $u_0 = \underline{u} \leq \bar{u}$ p. p. dans Ω . Supposons que $u_n \leq \bar{u}$ p. p. dans Ω . Comme \bar{u} est une sur-solution de (2.10), alors on a :

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u} v + \mu \bar{u} v) dx \geq \int_{\Omega} (f(\bar{u} v + \mu \bar{u} v)) dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ p. p. dans } \Omega$$

On retranche cette équation de (2.19) avec $v = (u_{n+1} - \bar{u})^+$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\{u_{n+1} \geq \bar{u}\}} (|\nabla(u_{n+1} - \bar{u})|^2 + \mu(u_{n+1} - \bar{u})^2) dx \\ &= \int_{\Omega} ([f(u_n) + \mu u_n] - [f(\bar{u}) + \mu \bar{u}])(u_{n+1} - \bar{u})^+ dx \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui donne $u_{n+1} \leq \bar{u}$ p. p. dans Ω .

4. On a montré ci-dessus que :

$$\underline{u} \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots \leq \bar{u}, \text{ p. p. dans } \Omega \quad (2.20)$$

D'où $(u_n)_n$ converge presque partout vers une fonction u et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Grâce à l'hypothèse il existe $C > 0$ tel que $|f'(t)| \leq C$, on a par le théorème des accroissements finis $|f(t)| \leq C(|t| + 1)$, $t \in \mathbb{R}$. D'où

$$f(\|u_n\|_{L^2(\Omega)}) \leq C(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + 1) \leq C(\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + 1) = C' \quad (2.22)$$

($C' > 0$), ce qui donne d'après (2.16) que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_{n+1}|^2 + \mu(u_{n+1})^2) dx = \int_{\Omega} (f(u_n) + \mu u_n) u_{n+1} dx \leq C \quad (2.23)$$

Par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, d'où il existe une sous suite de (u_n) notée de même converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Donc $u \in H_0^1(\Omega)$.

Finalement on vérifie que u est une solution faible de problème (2.10). Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ On a d'après (2.16)

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{n+1} \cdot \nabla v + \mu u_{n+1} v) dx = \int_{\Omega} (f(u_n) v + \mu u_n v) dx \quad (2.24)$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{\Omega} (\nabla u + \mu u v) dx = \int_{\Omega} (f(u) v + \mu u v) dx$$

d'où

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx$$

Ce qui finit la preuve.

2.3 Principe de base pour un problème de Kirchhoff

Dans cette section, nous donnons un principe général de méthode de sous et sur-solution pour le problème :

$$\begin{cases} -M(t) \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.25)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$, $p \in C(\Omega)$ avec $1 < p^- = \inf_{\Omega} p \leq p^+ = \sup_{\Omega} p < \infty$, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M(t)$ est une fonction continue et croissante Avec $t = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx$ et satisfait la condition suivante tel que $X = W_0^{1,p}(\Omega)$.

(M_0) $M : [0, +\infty[$ est une fonction continue et croissante avec $m_0 < M(t) < m_{\infty}$.

Définition 2.4. [12]

1) on dit que $u \in X$ est une solution faible de (2.25) si :

$$M \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx$$

2) $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est appelée une sous- solution (respectivement une sur-solution) de (2.25) si : $u \leq$ (respectivement \geq) 0 sur $\partial\Omega$ et, pour tout $\varphi \in X$ avec $\varphi \geq 0$, on a :

$$M \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx \leq (\text{respectivement } \geq) \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx$$

Théorème 2.4. [12] Si (M_0) est vérifiée et $f(x, u) = f(u)$, $f \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$, alors (2.25) admet une solution faible unique solution.

Les résultats suivants jouent un rôle important dans ce qui suit. Les lecteurs peuvent consulter les travaux [10, 11].

Lemme 2.1. suppose que $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait la condition

$$(H_1) : m_0 \leq M(t) \leq m_\infty \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_0^+, \text{ ou } \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$$

si les fonctions $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfait :

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx \leq M \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right) \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi dx \quad (2.26)$$

pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\varphi > 0$, alors $u < v \in \Omega$.

D'après ce lemme (2.1), on peut déduire le résultat de base suivant :

Théorème 2.5. ([1, 12]) soit $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant la condition (H_1) , supposons que f satisfait la condition de croissance sous-critique :

$$|f(x, t)| \leq c(1 + |t|^{q-1}) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $1 < q < p^*$. la fonction $f(x, t)$ est strictement croissante par rapport à t sur \mathbb{R} . S'il existe une sous-solution $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ et sur-solution $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ du problème (2.25), alors (2.25) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* dans l'intervalle $[u_*, u^*]$, c'est-à-dire, $\underline{u} < u_* < u^* < \bar{u}$ et si u est pour toute solution de (2.25) tel que $\underline{u} < u < \bar{u}$. alors on a $u_* \leq u \leq u^*$.

Preuve. On note $K : L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$, $K(h) = u$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -M(t) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

Rappelons que l'opérateur K vérifie des propriétés ([12])

On définit l'opérateur T :

$$T : L^q(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

$$u \rightarrow T(u) = K(f(x, u))$$

D'abord, on commence par démontrer que T est complètement continue, en effet T est continue

Soit $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$ On montre que $T(u_n) \rightarrow T(u)$ dans $L^q(\Omega)$ on a

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{L^q(\Omega)} = \|K(f(x, u_n)) - K(f(x, u))\|_{L^q(\Omega)}$$

et comme X s'injecte d'une manière continue de $L^q(\Omega)$ telle que $q \in [1, p^*]$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|K(f(x, u_n)) - K(f(x, u))\|_X$$

On pose $\varphi_n = f(x, u_n)$ et $\varphi = f(x, u)$ on va montrer que :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

on a

$$\int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|^{\frac{q}{q-1}} dx = \int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)|^{\frac{q}{q-1}} dx$$

D'après l'hypothèse sur f , on a :

$$|f(x, u_n)| \leq c(1 + |u_n|^{q-1})$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_n|^{q-1} dx &\leq \left(\int_{\Omega} 1^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} (|u_n|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |u_n|^q dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &= |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1} \end{aligned}$$

Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$, alors la suite (u_n) est bornée dans $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ Donc $\exists C' > 0$:

$$|f(x, u_n)| \leq C' \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

D'après *T. C. D.*, on déduit

$$\|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Comme $K : L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega) \rightarrow X$ est continue, alors :

$$f(x, u_n) \rightarrow f(x, u) \text{ dans } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

par la continuité de l'opérateur K on a

$$T(u_n) = K(\varphi_n) \rightarrow K(\varphi) \text{ dans } L^q(\Omega)$$

Ce qui montre que T est continue.

T est compact : Soit (u_n) une suite bornée dans $L^q(\Omega)$ comme $K : L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega) \rightarrow X$ est bornée (voir [12]), alors il existe une sous-suite (φ_{n_k}) converge faiblement dans X . D'après l'injection compacte $X \hookrightarrow L^q(\Omega)$, on a (φ_{n_k}) converge fortement dans $L^q(\Omega)$, donc T est compact.

Finalement T est complètement continue. pour terminer la preuve vous pouvez consulter [12].

□

Dans la pratique, on sait souvent que la sous-solution \underline{u} et la sur-solution \bar{u} sont de $L^\infty(\Omega)$ donc la restriction sur la condition de croissance de f est inutile. par conséquent, le théorème suivant est plus adapté à notre cadre.

Proposition 2.1. ([1, 12]) Soit $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant la condition (H_1) . Supposons que \underline{u} est une sous-solution et \bar{u} est une sur-solution du problème (2.25) dans l'espace $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\underline{u} \leq \bar{u}$ dans Ω . si $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est strictement croissante par rapport à $t \in [\inf_{\Omega} \underline{u}, \sup_{\Omega} \bar{u}]$, alors la conclusion de la proposition est valide.

ETUDE D'UN PROBLÈME DE KIRCHHOFF SINGULIER PAR LA MÉTHODE DE SOUS ET SUR-SOLUTION

Dans ce chapitre on étudie l'existence d'une solution positive d'un problème de Kirchhoff avec second membre non linéaire singulier, la preuve du résultat principale est basé sur une méthode de sous et sur-solution voir par exemple[12, 15] le problème étudié est donne par :

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = \lambda \left(f(u) - \frac{1}{u^\alpha} \right) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^N avec une frontiere $\partial\Omega$ de classe $C^{2+\gamma}$ tel que $0 \leq \gamma \leq 1$, et $0 \leq \alpha \leq 1$, $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et croissante et $\lambda > 0$, $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante qui est asymptotiquement linéaire au voisinage de ∞ , les fonctions M et f satisfont les conditions suivantes :

$$(H_1) \quad m_0 \leq M(t) \leq m_\infty \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_0^+, \text{ ou } \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$$

$$(H_2) \quad f \in C^2(0, \infty), \quad f(0) \geq 0, \quad f' > 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 0.$$

3.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition 3.1. (Sous-solution)[15] Une fonction ψ est appelée une sous- solution de problème (3.1) si elle est dans $C^2 \cap C(\bar{\Omega})$ tel que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ et verifie :

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \omega dx \leq \int_{\Omega} \lambda \left(f(\psi) - \frac{1}{\psi^\alpha} \right) \omega dx, \quad \forall \omega \in W \quad (3.2)$$

tel que

$$W = \{\omega \in C_0^\infty(\Omega) : \omega \geq 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Définition 3.2. (sur solution)[15] Une fonction ϕ est appelée une sur- solution de problème (3.1) si elle est dans $C^2 \cap C(\bar{\Omega})$ telle que $\phi = 0$ sur $\partial\Omega$ et verifie :

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \omega dx \geq \int_{\Omega} \lambda \left(f(\phi) - \frac{1}{\phi^\alpha} \right) \omega dx, \quad \forall \omega \in W \quad (3.3)$$

le résultat suivant est important pour la suite :

Lemme 3.1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 0$ alors il exist $a, b > 0$ telle que :

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} \leq as - b, \quad \forall s \geq 0.$$

Preuve de (lemme(3.1)). On fixe $c_1 > 0$, et on considère

$$g(s) = \frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} - \frac{c_1}{s}, \quad \forall s > 0$$

Comme $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$, alors par définition on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \forall s \in [A, +\infty] \text{ tel que } s > A \Rightarrow \left| \frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} + \frac{c_1}{s} \right| \leq \varepsilon$$

Il est clair que

$$\frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} - \frac{c_1}{s} \leq \left| \frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} - \frac{c_1}{s} \right| \leq \varepsilon,$$

Donc

$$\frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} - \frac{c_1}{s} \leq \varepsilon,$$

en multipliant par s , on obtient :

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} + c_1 \leq \varepsilon s$$

Alors

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} \leq \varepsilon s - c_1, \quad \forall s > A$$

Soit $s \in [0, A]$, comme f est continue sur $[0, A]$, alors f est borné c-à-d

$$\exists c_2 > 0, |f(s)| \leq c_2$$

on a

$$f(s) \leq |f(s)| \leq c_2$$

Alors

$$f(s) \leq c_2 \tag{3.4}$$

d'autre part on a $0 \leq s < A$, donc

$$\frac{1}{s^\alpha} \geq \frac{1}{A^\alpha}$$

et par suite

$$-\frac{1}{s^\alpha} \leq -\frac{1}{A^\alpha} \tag{3.5}$$

En addition les deux equation (3.4) et (3.5)

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} \leq c_2 - \frac{1}{A^\alpha}$$

Par coséquent, pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} \leq \varepsilon s - \left(c_1 - c_2 + \frac{1}{A^\alpha} \right)$$

On prend c_1 suffisament grand de sorte que

$$b = c_1 - c_2 + \frac{1}{A^\alpha} > 0,$$

On conclut

$$\exists \alpha = \varepsilon, \exists b = c_1 - c_2 + \frac{1}{A^\alpha} > 0,$$

on obtient

$$f(s) - \frac{1}{s^\alpha} < as - b.$$

□

Le résultat suivant est très classique et important

Lemme 3.1. *Le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

admet une solution positive unique $e \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $e > 0$ dans Ω et $\frac{\partial e}{\partial \eta} < 0$ sur $\partial\Omega$.

Dans ce qui suit, nous aavons également besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2. [15] *Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$, alors pour tous $\lambda > 0$, il existe $m(\lambda) > 0$ tel que :*

$$m_0 m(\lambda) \geq \lambda (f(m(\lambda) \|e\|_\infty)).$$

Preuve. Comme $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 0$, alors par définition on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall s > A, \left| \frac{f(s)}{s} \right| \leq \varepsilon,$$

par conséquent on a

$$f(s) \leq \varepsilon s \quad (3.7)$$

On choisissant

$$\varepsilon = \frac{m_0}{\lambda \|e\|_\infty} > 0$$

et

$$s = m(\lambda) \|e\|_\infty > A$$

Donc

$$m(\lambda) \geq \frac{A}{\|e\|_\infty}$$

on remplace dans la relation (3.7), on obtient

$$f(m(\lambda) \|e\|_\infty) \leq m(\lambda) \|e\|_\infty \frac{m_0}{\lambda \|e\|_\infty} = \frac{m(\lambda)m_0}{\lambda}$$

par conséquent on obtiendrait

$$\lambda f(m(\lambda) \|e\|_\infty) \leq m(\lambda)m_0$$

3.1.1 Résultat principal

Voici le résultat principale de ce chapitre

Théorème 3.1. [15] *Supposons que les conditions (H_1) et (H_2) sont vérifiées, et $f(0) > 0$. alors il existe deux constantes positives μ_1, μ_2 tel que $\mu_1 < \mu_2$ et le problème (3.1) n'admet pas une solution positive pour $\lambda < \mu_1$ mais admet une solution positive pour $\lambda > \mu_2$.*

Preuve. Nous la preuve est basé sur la méthode des sous et sur-solution. la preuve est similaire a ceux presentes dans [21]. comme $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$, alors d'après lemme(3.1) il existe deux constantes $a > 0, b > 0$ tel que : $f(s) - \frac{1}{s^\alpha} < as - b$. Soit λ_1 la première valeur propre et $\phi > 0$ la fonction propre correspondante de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions aux limites de Dirchlet. par la bsurd on suppose que $u > 0$ est une solution positive (3.1)

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\Omega} (-\Delta u) \phi dx \leq \lambda \int_{\Omega} (au - b) \phi dx \quad (3.8)$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) \phi dx = \int_{\Omega} u(-\Delta \phi) dx = \int_{\Omega} \lambda_1 u \phi dx$$

On remplace dans (3.8)

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\Omega} \lambda_1 u \phi dx \leq \lambda \int_{\Omega} (au - b) \phi dx$$

et par suite

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\Omega} u(\lambda_1 - a\lambda) \phi dx \leq \int_{\Omega} (-\lambda b) \phi dx$$

Si u est une solution du (3.1) alors on a

$$\lambda_1 - a\lambda > 0 \Rightarrow \lambda > \frac{\lambda_1}{a}$$

ce qui implique que si $\lambda < \frac{\lambda_1}{a}$ le problème (3.1) n'admet pas une solution.

On pose $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{a}$ si $\lambda < \mu_1$. Alors n'admet pas un solution.

Soit $\phi > 0$ tel que $\|\phi\|_\infty = 1$ on pose $\psi = \lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}}$ et $r \in [\frac{1}{1+\alpha}, 1]$

Calculons $\nabla\psi$

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \phi^{\frac{2}{1+\alpha}-1} \nabla\phi \\ &= \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \nabla\phi \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \operatorname{div}(\nabla\psi) \\ &= \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}-1} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \frac{\partial^2\phi}{\partial^2x} \right) \\ &= \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 + \phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \Delta\phi \right) \end{aligned}$$

On a

$$M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\omega dx \quad (3.9)$$

On remplace la valeur de $\Delta\psi$ dans l'équation (3.9)

$$\begin{aligned} &\left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} (-\Delta\psi)\omega dx \\ &= \left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \frac{-2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 + \phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \Delta\phi \right) \omega dx \end{aligned}$$

comme $-\Delta\phi = \lambda_1\phi$ on obtient

$$\begin{aligned} &\left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} (-\Delta\psi)\omega dx \\ &= \left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \frac{-2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(-\phi^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \lambda_1\phi + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 \right) \omega dx \\ &= \left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \frac{-2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(-\lambda_1\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 \right) \omega dx \\ &= \left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(\lambda_1\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 \right) \omega dx \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_1) on trouve :

$$\begin{aligned} &\left(M \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\omega dx \\ &\leq m_\infty \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \lambda_1\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \omega dx - m_0 \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla\phi|^2 \omega dx \end{aligned}$$

Donc ψ est une sous -solution du problème (3.1) si et seulement si

$$\begin{aligned} & \left(M \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \omega dx \\ & \leq m_{\infty} \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \omega dx - m_0 \frac{2\lambda^r}{1+\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla \phi|^2 \right) \omega dx \\ & \leq \int_{\Omega} \lambda \left[f(\psi) - \frac{1}{\psi^{\alpha}} \right] \omega dx \end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$, $m > 0$ et $\mu > 0$ tel que $|\nabla \phi|^2 \geq m$ dans $\overline{\Omega}_{\delta}$ et $\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \in [\mu, 1]$ dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta}$ avec

$$\overline{\Omega}_{\delta} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

et tel que $|\nabla \phi| \neq 0$ sur $\partial\Omega$ et dans $\overline{\Omega}_{\delta}$ si λ suffisamment grand. \square

On montre que

$$-m_0 \lambda^r \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla \phi|^2 \leq \lambda \left(-\frac{1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^{\alpha}} \right) \quad (3.10)$$

On multiplie l'équation (3.10) et on divise on même ton par $\lambda^{\alpha r}$ et comme $|\nabla \phi|^2 > m$ alors

$$\leq m_0 m \lambda^{r(1+\alpha)} \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left(\frac{-1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^{\alpha}} \right) \quad (3.11)$$

par conséquent il vient

$$-m_0 \lambda^r \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla \phi|^2 \leq \lambda \left(\frac{-1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^{\alpha}} \right)$$

on a les équivalence suivants

$$\begin{aligned} & m_0 m \lambda^{r(1+\alpha)-1} \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \geq 1 \\ & \Leftrightarrow \lambda^{r(1+\alpha)-1} \geq \frac{(1+\alpha)^2}{2(1-\alpha)m_0 m} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\lambda \geq \left(\frac{(1+\alpha)^2}{2(1-\alpha)m_0 m} \right)^{\frac{1}{r(1+\alpha)-1}}$$

donc

$$r(1-\alpha) - 1 > 0$$

par conséquent

$$r > \frac{1}{1+\alpha}$$

comme $r(1 - \alpha) - 1 < 0$ dans $\overline{\Omega}_\delta$, pour λ suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} m_\infty \lambda^r \frac{2}{1 + \alpha} \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} &\leq \lambda f(0) \\ \frac{2}{1 + \alpha} m_\infty \lambda^r \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} &\leq m_\infty \lambda^r \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right) \lambda_1 \end{aligned}$$

et comme $\phi^{\frac{2}{1+\alpha}}$ est borné Alors on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \alpha} m_\infty \lambda^r \lambda_1 &\leq \lambda f(0) \\ \lambda^{r-1} &\leq \frac{f(0)(1 + \alpha)}{2m_\infty \lambda_1} \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda \geq \left(\frac{2m_\infty \lambda_1}{(1 + \alpha)f(0)} \right)^{\frac{1}{1-r}}$$

Comme $\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} > 0$ et f est strictement croissante, on obtient

$$f(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}}) > f(0)$$

d'où

$$\lambda f(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}}) > \lambda f(0)$$

donc

$$m_\infty \lambda^r \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right) \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \leq \lambda f(0) \leq \lambda f(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})$$

Par conséquent, dans $\overline{\Omega}_\delta$ on a

$$\begin{aligned} M \left(\int_\Omega |\nabla \psi|^2 dx \right) \int_\Omega \nabla \psi \nabla \omega dx \\ \leq \int_\Omega \lambda \left(f(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}}) - \frac{1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^\alpha} \right) \omega dx = \int_\Omega \lambda \left(f(\psi) - \frac{1}{\psi^\alpha} \right) \omega dx \end{aligned}$$

Alors, dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$ on a $\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \geq \mu$ et

$$\lambda \left(f(\psi) - \frac{1}{\psi^\alpha} \right) \geq \lambda \left(f(\lambda^r \mu) - \frac{1}{(\lambda^r \mu)^\alpha} \right)$$

pour λ suffisamment grand

comme

$$\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \in [\mu, 1]$$

on peut voir que

$$\mu < \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \tag{3.13}$$

On multiplie l'équation (3.13) par λ^r , on a

$$\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \lambda^r \geq \mu \lambda^r$$

Alors

$$\frac{1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^\alpha} \leq \frac{1}{(\mu \lambda^r)^\alpha} \quad (3.14)$$

et comme f est continue et strictement croissante, on voit que

$$f(\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \lambda^r) \geq f(\mu \lambda^r) \quad (3.15)$$

par addition (3.15) et (3.14) et on multiplie par λ on obtient

$$\lambda \left(f(\phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \lambda^r) - \frac{1}{(\lambda^r \phi^{\frac{2}{1+\alpha}})^\alpha} \right) \geq \lambda \left(f(\mu \lambda^r) - \frac{1}{(\mu \lambda^r)^\alpha} \right)$$

on peut déduire que

$$\begin{aligned} M \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \omega dx \\ \leq m_{\infty} \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \int_{\Omega} \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \omega dx - m_0 \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \int_{\Omega} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \phi^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} |\nabla \phi|^2 \omega dx \\ \leq m_{\infty} \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \int_{\Omega} \lambda_1 \phi^{\frac{2}{1+\alpha}} \omega dx \\ \leq m_{\infty} \int_{\Omega} \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \lambda_1 \omega dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

et

$$m_{\infty} \int_{\Omega} \lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \lambda_1 \omega dx \leq \int_{\Omega} \lambda \left(f(\lambda^r \mu) - \frac{1}{(\lambda^r \mu)^\alpha} \right) \omega dx \quad (3.17)$$

D'autre part

$$\lambda^r \frac{2}{1+\alpha} \lambda_1 \leq \lambda \left(f(\lambda^r \mu) - \frac{1}{(\lambda^r \mu)^\alpha} \right)$$

Alors

$$\lambda^{r-1} \frac{2}{1+\alpha} \lambda_1 + \frac{1}{(\lambda^r \mu)^\alpha} \leq f(\lambda^r \mu)$$

On pose

$$h(\lambda) = \lambda^{r-1} \frac{2}{1+\alpha} \lambda_1 + \frac{1}{(\lambda^r \mu)^\alpha}$$

on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda^r \mu) = L \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante})$$

C'est-à-dire

$$\exists \lambda_0, \quad \forall \lambda > \lambda_0, \quad h(\lambda) < f(\lambda^r \mu)$$

puisque $r - 1 < 0$, pour λ suffisamment grand, dans $\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$ on a :

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \omega dx \leq \lambda \int_{\Omega} \left(f(\psi) - \frac{1}{\psi^\alpha} \right) \omega dx \quad (3.18)$$

Alors D'après (3.16), (3.17), (3.18) on déduit que ψ est une sous -solution positive du problème (3.1).

Maintenant, on construit une sur -solution $z \geq \psi$. comme $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 0$, d'après le lemme (3.2) on a pour tout $\lambda > 0$, il existe $m_0 m(\lambda) > 0$ tel que $m_0 m(\lambda) \geq f(m(\lambda) \|e\|_\infty)$, ou $e \in C^1(\Omega)$ est solution positive unique du problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{dans } \Omega \\ e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

d'après le lemme(3.1), on a $e > 0$ dans Ω et $\frac{\partial e}{\partial \eta} < 0$ sur $\partial\Omega$. soit $z = m(\lambda)e$, alors

$$\begin{aligned} & M \left(\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla z \nabla \omega dx \\ &= m(\lambda) M \left(\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla e \nabla \omega dx \\ &= m(\lambda) M \left(\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \right) \int_{\Omega} \omega dx \\ &\geq m_0 m(\lambda) \int_{\Omega} \omega dx \\ &\geq \int_{\Omega} \lambda [f(m(\lambda) \|e\|_\infty)] \omega dx \\ &\geq \lambda \int_{\Omega} \left[f(z) - \frac{1}{z^\alpha} \right] \omega dx, \quad \forall \omega \in W \end{aligned}$$

Ainsi, z est une sur-solution de plus, $m(\lambda)$ peut être choisi suffisamment grand pour que $z = m(\lambda)e \geq \psi$ dans $\overline{\Omega}$. Donc, pour λ suffisamment grand le problème (3.1) admet une solution positive $u \in [\psi, z]$ la preuve du théorème (3.1) ce qui termine .

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME DE KIRCHHOFF PAR UNE MÉTHODE VARIATIONNELLE

Dans cet chapitre, on va étudier l'existence de solutions positives pour une classe de problèmes de type kirchhoff avec un terme non linéaire singulier et un terme d'exposant critique. Ici on va appliquer une approche variationnelles[8].

4.1 positions du problème

on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u = u^5 + \frac{\lambda}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

Où Ω est un domaine borné, régulier de \mathbb{R}^3 , $\lambda > 0$ est un paramètre réel et $\gamma \in [0, 1]$ est une constante.

Nous utilisons les notations suivantes.

- * $u_n^+ = \max\{u_n(x), 0\}$; $u_n^- = \max\{-u_n(x), 0\}$
- * c, c_1, c_2, \dots désignent diverses constantes positives, qui peuvent varier inégalement à l'autre.
- * Nous désignons par S_r (respectivement B_r) la sphère (respectivement, la boule fermée.

de centre zéro et de rayon r , c-à-dire :

$$S_r = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = r\},$$

et

$$B_r = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq r\}.$$

Soit S la meilleure constante de sobolev plus précisément, elle est définie par :

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (4.2)$$

ce implique que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq S \left(\int_{\Omega} |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}}$$

D'où

$$\left(\int_{\Omega} |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}} \leq \frac{1}{S^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

par conséquent on obtiendrait

$$\|u\|_{L^6(\Omega)}^{1-\gamma} \leq S^{-\frac{1-\gamma}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\gamma} \quad (4.3)$$

ce dernier inégalité est très important pour établir le résultat d'existence pour plus de détails voir[8, 20]

4.1.1 Formulation variationnelle et résultat principale

On considère la fonctionnelle d'énergie associée comme suit :

$$I(u) = \frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Définition 4.1. [8] On dit que u est une solution faible du problème (4.1), si $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$(a + b \|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} (u^+)^5 v dx - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^{-\gamma} v dx = 0$$

Il est bien connu que le terme singulier conduit à la non-dérivabilité de la fonctionnelle I sur $H_0^1(\Omega)$ donc elle n'appartient pas à $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. par conséquent, on ne peut pas appliquer la théorie du points critiques, mais on va prouver que le problème (4.1) a encore une solution qui est un minimum local de I .

Voici l'énoncé du résultat principal de ce chapitre

Théorème 4.1. [8] Supposons que est $\gamma \in [0, 1]$, $a > 0$, $b > 0$. alors il existe $\lambda_* > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, \lambda_*]$, le problème (4.1) admet au moins une solution faible positive.

4.2 Preuve du résultat principal

4.2.1 Minimisation de I

On commence par établir les conditions géométriques.

Lemme 4.1. [8] Il existe $\lambda_0 > 0$ et $R, \rho > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$ on a :

$$I(u) \geq \rho, \forall u \in S_R = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = R\} \quad (4.4)$$

et

$$\inf_{u \in B_R} I(u) < 0. \quad (4.5)$$

Preuve de lemme (4.1) :

Etape (1) : Par linéarité de Hölder

$$\int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \leq \|u\|_{L^6(\Omega)}^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} \quad (4.6)$$

D'après l'inégalité (4.3), on a :

$$\int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx \leq S^{-\frac{1-\gamma}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}}, \quad (4.7)$$

Par linéarité de Hölder et (4.3) on a

$$\frac{1}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx \leq \frac{1}{6} |\Omega|^{\frac{-5+5}{6}} S^{-\frac{6}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^6$$

d'où

$$\frac{1}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx \leq \frac{1}{6} S^{-3} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^6 \quad (4.8)$$

En utilisant (4.7) et (4.8), on obtient

$$I(u) \geq \frac{a}{2} \|u\|^2 - \frac{S^{-3}}{6} \|u\|^6 - \frac{\lambda}{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} S^{-\frac{1-\gamma}{2}} \|u\|^{1-\gamma}$$

d'où :

$$I(u) \geq \|u\|^{1-\gamma} \left(\frac{a}{2} \|u\|^{1+\gamma} - \frac{1}{6} \|u\|^{5+\gamma} S^{-3} - \frac{\lambda}{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} S^{-\frac{1-\gamma}{2}} \right)$$

On considère la fonction auxiliaire suivante

$$g(t) = \frac{a}{2} t^{1+\gamma} - \frac{1}{6} S^{-3} t^{5+\gamma} \quad \text{et} \quad t > 0$$

on a

$$g'(t) = \frac{a(1+\gamma)}{2} t^{\gamma} - \frac{5+\gamma}{6} S^{-3} t^{4+\gamma}$$

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) \geq 0 &\Leftrightarrow t^{\gamma} \left(\frac{a(1+\gamma)}{2} - \frac{5+\gamma}{6} S^{-3} t^4 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a(1+\gamma)}{2} - \frac{5+\gamma}{6} S^{-3} t^4 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui donne également

$$t \leq \left(\frac{3a(1+\gamma)S^3}{5+\gamma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donc, on pose

$$R = \left(\frac{3a(1+\gamma)S^3}{5+\gamma} \right)^{\frac{1}{4}} > 0 \quad (4.9)$$

qui vérifie le suivant

$$\max_{t>0} g(t) = g(R) \quad (4.10)$$

D'autre part on a

$$g(t) - \frac{\lambda}{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} S^{-\frac{1-\gamma}{2}} \geq 0$$

On pose

$$c = \frac{|\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} S^{-\frac{1-\gamma}{2}}}{1-\gamma}$$

ce qui satisfait :

$$\lambda \leq \frac{g(t)}{c}$$

Comme $\lambda \in [0, \lambda_0]$, alors on a :

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{g(R)}{2c} \quad (4.11)$$

donc

$$-\lambda c \geq \frac{-g(R)}{2}$$

Pour tout $u \in S_R$ on a :

$$I(u) \geq R^{1-\gamma} (g(R) - \lambda c)$$

Donc

$$I(u) \geq R^{1-\gamma} \left(g(R) - \frac{g(R)}{2} \right)$$

Si on prend

$$\rho = R^{1-\gamma} \left(\frac{g(R)}{2} \right)$$

par conséquent on obtiendrait

$$I(u) \geq \rho \quad (4.12)$$

D'après (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12) et par conséquent on obtiendrait

$$I(u) \geq \rho, \forall u \in S_R \text{ tel que } \|u\| = R$$

Etape 2 : On montre que $\inf_{u \in B_R} < 0$, pour cela, on fixe $u \in B_R$ avec $u^+ \neq 0$, on a

$$I(tu) = \frac{a}{2} \|tu\|^2 + \frac{b}{4} \|tu\|^4 - \frac{t^6}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} t^{1-\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx$$

Alors

$$\frac{I(tu)}{t^{1-\gamma}} = \frac{a}{2} t^{1+\gamma} \|u\|^2 + \frac{b}{4} t^{3+\gamma} \|u\|^4 - t^{5+\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(tu)}{t^{1-\gamma}} = -\frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx < 0, \forall \lambda > 0$$

Nous avons $I(tu) < 0$ pour tout $u^+ \neq 0$ et t assez petit, on déduit que :

$$m_1 = \inf_{u \in B_R} I(u) < 0. \quad (4.13)$$

4.2.2 Minimum de I est une solution de (4.1)

Dans cette section on va prouver que la fonctionnelle I atteint son infimum en point $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ qui est exactement la solution du problème (4.1). Ceci l'énoncé du théorème .

Théorème 4.2. [8] *Supposons que $0 < \lambda < \lambda_0$, (λ_0 défini dans le lemme (4.1)). alors le problème (4.1) admet a une solution positive $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, satisfaisant $I(u_0) < 0$.*

Preuve . Tout d'abord, on affirme qu'il existe $u_0 \in B_R$, tel que $I(u_0) = m_1 < 0$, en effet par (4.4) et (4.5), nous pouvons déduire que

$$\frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx \geq \rho \quad \text{pour } u \in S_R$$

et

$$\frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (u^+)^6 dx \geq 0, \quad \forall u \in B_R \quad (4.14)$$

Par la définition de m_1 , on sait qu'il existe une suite minimisante $\{u_n\} \subset B_R$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = m_1 < 0$. clairement, cette suite minimisante est bien sûr borné dans B_R , alors il existe une sous-suite $(u_{n_k}) = (u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, et il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0, & \text{faible dans } H_0^1(\Omega) \\ u_n \rightarrow u_0, & \text{fortement dans } L^p(\Omega) (1 \leq p < 2^*), \\ u_n(x) \rightarrow u_0(x) & \text{p. p dans } \Omega \end{cases} \quad (4.15)$$

Puisque $0 < \gamma < 1$, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u_n^+)^{1-\gamma} dx - \int_{\Omega} (u_0^+)^{1-\gamma} dx \right| &\leq \int_{\Omega} |(u_n^+)^{1-\gamma} - (u_0^+)^{1-\gamma}| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u_n^+ - u_0^+|^{1-\gamma} dx \leq \|u_n^+ - u_0^+\|_{L^2(\Omega)}^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{1+\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Par conséquent, en utilisant (4.15) on trouve :

$$\int_{\Omega} (u_n^+)^{1-\gamma} dx = \int_{\Omega} (u_0^+)^{1-\gamma} dx + o(1) \quad (4.17)$$

On pose $\omega_n = u_n - u_0$, par le lemme de Brézis -lieb[20] on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + o(1) \quad (4.18)$$

et

$$\int_{\Omega} (u_n^+)^6 dx = \int_{\Omega} (\omega_n^+)^6 dx + \int_{\Omega} (u_0^+)^6 dx + o(1) \quad (4.19)$$

on a

$$\begin{aligned} \|u_n\|^4 &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 = \left(\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^2 dx \right)^2 \\ &+ \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \right)^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + o(1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si $u_0 = 0$, alors $\omega_n = u_n$, il s'ensuit que $\omega_n \in B_R$. si $u_0 \neq 0$, d'après (4.18), on obtient $\omega_n \in B_R$ pour n suffisamment grand. D'où, d'après (4.14) on a :

$$\frac{a}{2} \|\omega_n\|^2 + \frac{b}{2} \|\omega_n\|^4 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (\omega_n)^6 dx \geq 0 \quad (4.21)$$

par conséquent, il découle de (4.17), à (4.21) que :

$$\begin{aligned} m_1 &= I(u_n) + o(1) \\ &= \frac{a}{2} \|\omega_n\|^2 + \frac{b}{4} (\|\omega_n\|^4 + \|u_0\|^4 + 2 \|\omega_n\|^2 \|u_0\|^2) + o(1) \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (\omega_n)^6 dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (u_0^+)^6 dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} (u^+)^{1-\gamma} dx + o(1) \\ &= \frac{a}{2} \|\omega_n\|^2 + \frac{b}{4} \|\omega_n\|^4 + \frac{b}{2} \|\omega_n\|^2 \|u_0\|^2 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} (\omega_n^+)^6 dx + I(u_0) + o(1) \\ m_1 &\geq I(u_0) + \frac{b}{2} \|\omega_n\|^2 \|u_0\|^2 + o(1) \geq I(u_0) + o(1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

En faisant $n \rightarrow +\infty$, il s'ensuit que $m_1 \geq I(u_0)$. en notant que B_R est fermée et convexe, donc $u_0 \in B_R$. Par conséquent par (4.13), nous obtenons $I(u_0) = m_1 < 0$ et $u_0 \neq 0$. Ce qui montre que u_0 est un minimiseur local de I .

Maintenant, on prouve que u_0 est une solution du problème (4.1) et u_0 est positive. D'après les arguments précédents, on a u_0 est un minimiseur local de I . Alors pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \geq 0$, et pour $t > 0$ assez petit, tel que $u_0 + t\psi \in B_R$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(u_0 + t\psi) - I(u_0) \\ &= \frac{a}{2} \|u_0 + t\psi\|^2 + \frac{b}{4} \|u_0 + t\psi\|^4 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} ((u_0 + t\psi)^+)^6 dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} ((u_0 + t\psi)^+)^{1-\gamma} dx - \frac{a}{2} \|u_0\|^2 - \frac{b}{4} \|u_0\|^4 + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (u_0^+)^6 dx + \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} (u_0^+)^{1-\gamma} dx \\ &\leq \frac{a}{2} \|u_0 + t\psi\|^2 + \frac{b}{4} \|u_0 + t\psi\|^4 - \frac{a}{2} \|u_0\|^2 - \frac{b}{4} \|u_0\|^4 \\ &= \left(\|u_0 + t\psi\|^2 - \|u_0^+\|^2 \right) \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4} (\|u_0 + t\psi\|^2 + \|u_0\|^2) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

De la relation (4.23) on obtient aussi :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} [((u_0 + t\psi)^+)^{1-\gamma} - (u_0^+)^{1-\gamma}] dx \\
& \leq \frac{a}{2} (\|u_0 + t\psi\|^2 - \|u_0\|^2) + \frac{b}{4} (\|u_0 + t\psi\|^4 - \|u_0\|^4) \\
& - \frac{1}{6} \int_{\Omega} [((u_0 + t\psi)^+)^6 - (u_0^+)^6] dx \\
& = (\|u_0 + t\psi\|^2 - \|u_0\|^2) \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4} (\|u_0 + t\psi\|^2 + \|u_0\|^2) \right] \\
& - \frac{1}{6} \int_{\Omega} [((u_0 + t\psi)^+)^6 - (u_0^+)^6] dx
\end{aligned} \tag{4.24}$$

En divisant par $t > 0$ et en passant à la limite quand $t \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$\frac{\lambda}{1-\gamma} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{((u_0 + t\psi)^+)^{1-\gamma} - (u_0^+)^{1-\gamma}}{t} dx \leq (a + b\|u_0\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \psi dx - \int_{\Omega} (u_0^+)^5 \psi dx \tag{4.25}$$

D'après le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{[((u_0 + t\psi)^+)^{1-\gamma} - (u_0^+)^{1-\gamma}]}{t} dx = \lambda \int_{\Omega} ((u_0^+ + \varepsilon t\psi)^+)^{-\gamma} \psi dx$$

Où $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et

$$((u_0 + \varepsilon t\psi)^+)^{-\gamma} \psi \rightarrow (u_0^+)^{-\gamma} \psi \text{ p.p } x \in \Omega$$

lors que $t \rightarrow 0^+$, puis que

$$((u_0 + \varepsilon t\psi)^+)^{-\gamma} \psi \geq 0.$$

Ainsi en utilisant le lemme de Fatou, on a

$$\lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{-\gamma} \psi dx \leq \frac{\lambda}{1-\gamma} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{((u_0 + t\psi)^+)^{1-\gamma} - (u_0^+)^{1-\gamma}}{t} dx,$$

par conséquent, on déduit de (4.25) et de l'estimation ci-dessus que

$$(a + b\|u_0\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \psi dx - \int_{\Omega} (u_0^+)^5 \psi dx - \lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{-\gamma} \psi dx \geq 0, \quad \psi \geq 0. \tag{4.26}$$

Puisque $I(u_0) < 0$, ceci ainsi que (4.4) et (4.5) implique que $u_0 \notin S_R$, donc $\|u_0\| < R$. pour u_0 il existe. $\delta_1 \in [0, 1]$ tel que $(1+t)u_0 \in B_R$ pour $|t| \leq \delta_1$. on définit $K : [-\delta_1, \delta_1]$ par

$$K(t) = I((1+t)u_0).$$

clairement, $K(t)$ atteint son minimum à $t = 0$, à savoir :

$$K(t) = I((1+t)u_0) = \frac{a}{2} \|(1+t)u_0\|^2 + \frac{b}{4} \|(1+t)u_0\|^4$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} \int_{\Omega} ((1+t)(u_0^+)^6) dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} ((1+t)u_0^+)^{1-\gamma} dx \\
& K'(t) = 2 \left(\frac{a}{2} \|(1+t)u_0\|^2 \right) + 4 \left(\frac{b}{4} \|(1+t)u_0\|^4 \right) \\
& -6 \left(\frac{1}{6} \int_{\Omega} (1+t)^5 (u_0^+)^6 dx \right) - (1-\gamma) \left(\frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} ((1+t)^{-\gamma} (u_0^+)^{1-\gamma} dx \right)
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
K'(t) &= a \|(1+t)u_0\|^2 + b \|(1+t)u_0\|^4 \\
& - \int_{\Omega} (1+t)^5 (u_0^+)^6 dx - \lambda \int_{\Omega} (1+t)^{-\gamma} (u_0^+)^{1-\gamma} dx
\end{aligned}$$

d'où

$$k'(0) = a \|u_0\|^2 + b \|u_0\|^4 - \int_{\Omega} (u_0^+)^6 dx - \lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{1-\gamma} dx = 0 \quad (4.27)$$

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, et soit $\varepsilon > 0$. on défint $\psi \in H_0^1(\Omega)$ par :

$$\psi = (u_0^+ + \varepsilon\phi)^+$$

On injecte ψ dans l'inegalité (4.26) et entilisant (4.27), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} [(a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla \psi - (u_0^+)^5 \psi - \lambda (u_0^+)^{-\gamma} \psi] dx \\
&= \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi > 0\}} (a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla (u_0^+ + \varepsilon\phi) dx \\
&- \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi > 0\}} [(u_0^+)^5 (u_0^+ + \varepsilon\phi) - \lambda (u_0^+)^{-\gamma} (u_0^+ + \varepsilon\phi)] dx \\
&= \left(\int_{\Omega} - \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\}} \right) [(a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla (u_0^+ + \varepsilon\phi) \\
&\quad - (u_0^+)^5 (u_0^+ + \varepsilon\phi) - \lambda (u_0^+)^{-\gamma} (u_0^+ + \varepsilon\phi)] dx \\
&\leq a \|u_0\|^2 + b \|u_0\|^4 - \int_{\Omega} (u_0^+)^6 dx - \lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{1-\gamma} dx \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} [(a + b \|u_0\|^2) (\nabla u_0 \nabla \phi) - (u_0^+)^5 \phi - \lambda (u_0^+)^{-\gamma} \phi] dx \\
&\quad - \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\}} (a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla (u_0^+ + \varepsilon\phi) dx \\
&\quad + \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\}} [(u_0^+)^5 (u_0^+ + \varepsilon\phi) + \lambda (u_0^+)^{-\gamma} (u_0^+ + \varepsilon\phi)] dx \\
&\leq \varepsilon \int_{\Omega} [(a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla \phi - (u_0^+)^5 \phi - \lambda (u_0^+)^{-\gamma} \phi] dx \\
&\quad - \varepsilon \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\}} (a + b \|u_0\|^2) \nabla u_0 \nabla \phi dx.
\end{aligned} \quad (4.28)$$

puisque la mesure du domaine d'intégration $\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\} \rightarrow 0$ lors que $\varepsilon \rightarrow 0$, il s'ensuit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{u_0^+ + \varepsilon\phi \leq 0\}} \nabla u_0 \nabla \phi \, dx = 0$$

Par conséquent, en divisant par ε et en laissant $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (4.28), on voit que

$$(a + b \|u_0\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} (u_0^+)^5 \phi \, dx - \lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{-\gamma} \phi \, dx \geq 0 \quad (4.29)$$

Comme ϕ est arbitraire, cette inégalité également valable pour $-\phi$, c'est-à-dire :

$$(a + b \|u_0\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} (u_0^+)^5 \phi \, dx - \lambda \int_{\Omega} (u_0^+)^{-\gamma} \phi \, dx = 0 \quad (4.30)$$

ce qui montre que u_0 est une solution faible de (4.1).

4.2.3 Positivité de solution

En prenant la fonction teste $\phi = u_0^-$ dans (4.30), on obtient $\|u_0^-\| = 0$, ce qui implique que $u_0 \geq 0$, par conséquent u_0 est une solution non triviale de (4.1) D'autre part, à partir de (4.29), on obtient $\int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \psi \, dx \geq 0$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ ce qui signifie que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et satisfait à

$$-\Delta u_0 \geq 0, \quad \text{dans } \Omega$$

sachant que $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ donc, en utilisant le principe du maximum fort (1.11) on a $u_0 > 0$ dans Ω . De la discussion ci-dessus, nous pouvons déduire que u_0 est une solution positive de (4.1) avec $I(u_0) = m_0 < 0$. Ceci termine la preuve du théorème(4.2). \square

Conclusion

Dans notre travail, on a étudié l'existence de solutions positives pour des problèmes de Kirchhoff singuliers par deux méthodes, la méthodes de sous et sur-solution et la méthodes de minimisation. Nous avons essayé de détailler les preuves et de les réorganiser pour faciliter la compréhension des concepts et les méthodes utilisées pour le lecteur. Nous espérons que notre travail sera comme un premier pat pour d'autre travaux.

Bibliographie

- [1] AFROUZI, GA. chung, N. T shakeri, S : *Existence of positive solution for kirchhoff type equations. Electron. j. Differ. Equ.* 180, 1 – 10(2013).
- [2] Alves, C. O, corrêa, F. J. S. A, Ma, T. M : *positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type. comput. Math. Appl.* 49, 85 – 93(2005)
- [3] Bensedik, A, Bouchekif, M : *On an elliptic equation of Kirchhoff -type with a potential asymptotically linear at infinity. Math comput. Model.* 49, 1089 – 1096(2009)
- [4] Boumediene Abdellaoui, Youssouf Oussama Boukarabila, Sofaine El Hadi Miri : *Introduction aux méthodes variationnelles et application à la résolution des EDP elliptiques(Premiere version), Universite Abou Bekr Belkaid - Tlemcen Faculté des sciences Département de Mathématiques. june 2018*
- [5] Bougherara Sofaine, *polycopie de master 02 EDP universite de msila département de mathématiques*
- [6] Chung, N. T : *Multiple solutions for a $p(x)$ -kirchhoff equations with sign-changing nonlinearities. Complex Var. Elliptic Equ.* 58, 1637 – 1646(2013)
- [7] Corrêa F. j. S. A, Figueiredo, GM : *On an elliptic equation of p -kirchhoff type via variational methods. Bull. Aust. Math. Soc.* 74, 263 – 277(2006)
- [8] Chun-Yu Lei, Jia-Feng Liao, Chun-Lei Tang : *Multiple positive solutions for Kirchhoff type of problems With singularity and critical exponents j. Math. Anal. Appl.* 421(2015)521 – 538
- [9] Chipot, M, lovat, B : *Some remarks on nonlocal elliptic parabolic problems. Nonlinear Anal.* 30(7), 4619 – 4627(1997)
- [10] Dai, G,; : *three solutions for a nonlocal Dirichlet boundary value problem involving the $p(x)$ -laplacian. Appl. Anal.* 92(1), 191 – 210(2013)
- [11] Dai, G, Ma, R : *solutions for a $p(x)$ -kirchhoff type equations with Neumann boundry data. Non-linear Anal. Real World appl.* 12, 2666 – 2680(2011)

- [12] Han, X, Dai, G : *On the sub-sursolution method for $p(x)$ - Kirchhoff type equations*. *J. Inequal Appl*. 2012, 283(2012).
- [13] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [14] He, W., Qin, D., Wu, Q. : *Existence, multiplicity and nonexistence results for Kirchhoff type equations*. *Adv. Nonlinear Anal.* 10, 616 – 635(2021)
- [15] H. Zahmatkesh, S. Shakeri, A. Hadjian : *An existence result for a class of nonlocal infinite semipositone problem*. *Bol. soc. Mat. Mex.* 27, 60(2021). [https://doi.org : /10.1007/s40590 – 021 – 00369 – 6](https://doi.org/10.1007/s40590-021-00369-6)
- [16] Kirchhoff, G : *Mechanik*. Teubner, Leipzig (1883)
- [17] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence RI, 2010
- [18] Ma, T. F. : *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*. *Nonlinear Anal.* 63, 1967 – 1977(2005)
- [19] Mingqi, X., Radulescu, V. D., Zhang, B. : *Nonlocal Kirchhoff problems with singular exponential nonlinearity*. *Appl. Math. Optim.* (2020).[https : //doi.org/10.1007/s00245 – 020 – 09666 – 3](https://doi.org/10.1007/s00245-020-09666-3)
- [20] Otared Kavian. : *introduction à la théorie des points critiques, et application aux problèmes elliptiques*. O. K. Nancy , le 20 juillet 1993
- [21] Ramaswamy, M., Shivaji, R, Ye, J. : *Positive solutions for a class of infinite semipositone problems**Differ. Integral Equ.* 20(12) 1423 – 1433(2007).
- [22] Ricceri, B. : *On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters*. *J. Glob. Optim* 46(4), 543 – 549(2010).
- [23] Sun, J. J., Tang, C. : *Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations*. *Nonlinear Anal.* 74, 1212 – 1222(2011)
- [24] Xiang, M., Zhang, B., Radulescu, V. D. : *Superlinear Schrodinger-Kirchhoff type problems involving the fractional p -Laplacian and critical exponent*. *Adv. Nonlinear Anal.* 9, 690 – 709(2020)
- [25] Yang, M. H., Han, Z. Q. : *Existence and multiplicity results for Kirchhoff type problems with four superlinear potentials*. *Appl. Anal.* 91(11), 2045 – 2055(2012)

ملخص

في هذا العمل قدمنا طريقة لدراسة وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية من صنف كيرشوف بطريقتين الطريقة الاولى تسمى طريقة الحل السفلي والحل العلوي حيث يؤول دراسة مسألة ذات قيم حدية كل واحدة منها تمثل متراجحة أما الطريقة الأخرى هي البحث عن الحل الموجب للتابع الدالي المرفق للمسألة والبحث عن نقطة أصغرية محلية للتابع الدالي والتي تعتبر هي حل للمعادلة الاساسية المدروسة

الكلمات المفتاحية: حل سفلي، حل علوي، معادلة كيرشوف، نقطة أصغرية محلية.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solution pour une équation différentielle de type Kirchhoff de deux manières, pour la premier méthode appelle méthode de sous et sur solution, ou l'étude d'un problème aux limites est interprétée en deux problèmes aux limites, dont chacune repèrent une inégalité. La deuxième méthode consiste à recherche la solution positive de la fonctionnelle le problème interne attache et la recherche d'une point minimum local de la fonction interne, qui est considéré comme une solution à l'équation de base étude.

Mots clés : sur solution, sous solution, équation de Kirchhoff, point minimum local.