

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Mécanique

## MEMOIRE

Présenté pour l'Obtention du Diplôme de

## MAGISTER

En Génie Mécanique

Option : Energétique

Par

M<sup>elle</sup> BAKHTI Fatima-Zohra

## THEME

---

# SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CONDUITE VERTICALE

---

Soutenu le : 07 / 07 / 2004

### Devant le Jury:

Pr. Z. NEMOUCHI	Prof.	Président	Université de Constantine
Dr. M. Si-AMEUR	M.C	Rapporteur	Université de Batna
Dr. B. BOUDERAH	M.C	Examineur	Université de M'sila
Dr. S. BOUDEBOUS	M.C	Examineur	Université de Constantine
Mr. A.M. CHAHHAT	C.C	Membre invité	Université de M'sila

# Résumé

Dans ce travail, nous présentons une étude numérique du phénomène de la convection naturelle laminaire et turbulente dans une conduite verticale, dont la paroi est maintenue à une température constante. Les équations régissant ce phénomène, ont été résolues par une approche numérique basée sur la méthode des volumes finis.

Dans le cas laminaire, nous avons représenté les champs de vitesses, de températures, et de pressions, ainsi que la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh.

Les simulations numériques ont été faites en considérant des valeurs du nombre de Rayleigh qui varient entre 1 et  $10^5$ , et cela pour des rapports d'aspect égaux 3, 5, 8 et 12.

Nous avons examiné aussi la convection turbulente, en utilisant la simulation numérique directe comme outil d'investigation, les nombres de Rayleigh et le rapport d'aspect sont égaux à  $10^4$  et 3 respectivement. Nous avons représenté également dans ce cas les champs hydrodynamiques et thermiques ainsi que des visualisations des isovaleurs de la vorticité.

Les résultats obtenus, dans le cas laminaire sont comparés à ceux de la littérature et un bon accord a été trouvé.

## **Mots clés :**

Convection naturelle / Simulation numérique directe / Turbulence / conduite verticale

## ملخص

في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة ظاهرة الحمل الحراري الحر داخل اسطوانة عمودية سطحها الخارجي يخضع إلى درجة حرارة أكبر من درجة حرارة المحيط الخارجي ، مما يؤدي إلى انسياب تصاعدي للهواء داخل الأنبوب. باستعمال النظرية العددية للحجوم المنتهية ، قمنا بحل المعادلات الغير خطية التي تتحكم في هذا الانسياب.

في حالة الانسياب الرقائقي، قمنا بتحاكي عددي من أجل قيم لعدد غايلي تتراوح ما بين 1 و 10<sup>5</sup> وهذا من أجل نسب أبعاد تساوي 3 ، 5 ، 8 ، 12 .

قمنا بدراسة الانسياب المضطرب باستعمال التحاكي العددي المباشر وهذا من أجل قيمة واحدة لعدد غايلي تساوي 10<sup>4</sup> وقيمة نسبة أبعاد تساوي 3 . النتائج المحصل عليها في حالة الانسياب الرقائقي قورنت مع النتائج المتاحة، وقد وجد توافق كبير بينهما.

**الكلمات المفتاح :** الحمل الحراري الحر / التحاكي العددي المباشر / الانسياب المضطرب / اسطوانة عمودية

## Abstract

A numerical study of natural laminar and turbulent convection phenomenon in a vertical duct, with a wall temperature. The governing equation are solved by a finite volume method.

For laminar regime we represented field of velocity, temperature, and pressure as well as the variation of the average Nusselt number according to the number of Rayleigh.

The numerical simulation have been made while considering values of the number of Rayleigh that vary between 1 and 10<sup>5</sup>, and it for aspect ratio equals 3, 5, 8 and 12

One also examined the turbulent convection, as using the direct numerical simulation, numbers of Rayleigh and aspect ratio is respectively equal to 10<sup>4</sup> and 3. One also represented in this case the hydrodynamic and thermal fields as well as fields of vortices .

The gotten results, in case laminar are compared to those of the literature and a good agreement has been found.

### **Key words :**

Natural convection / Direct numerical simulation / Turbulence / Vertical duct

# Remerciements

J'adresse mes vifs remerciements et toute ma gratitude à mon promoteur Dr. M. Si-Ameur Maître de Conférence à l'université de Batna d'avoir proposé, dirigé et suivi ce travail .

Je remercie aussi Mr. A.M. Chahhat Chargé de cours à l'université de M'sila qui a assuré la co-direction de ce mémoire .

Je suis très reconnaissante, à l'honneur que m'a fait Dr. Z. Nemouchi Professeur à l'université de Constantine en acceptant de présider le Jury et cela malgré ses multiples occupations.

Outre le témoignage de ma grande estime, que Dr. S. Boudebous reçoit ici mes sincères et vifs remerciements pour sa sympathie, sa disponibilité, ses documents. Bref, son aide très précieuse. Et enfin pour m'avoir honoré de sa présence comme membre de Jury.

J'adresse mes remerciements à Dr. B. Bouderah Vice Recteur de l'université de M'sila pour l'intérêt qu'il a porté à ce

modeste travail, en acceptant de faire partie de Jury.

Je remercie enfin toute personne m'ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail, spécialement tous les enseignants du département de Génie Mécanique de l'université de M'sila.

Je dédie ce modeste travail

A

La mémoire de mon père et ma sœur Hafidha  
que dieu les accueille dans son vaste  
paradis.

Ma très chère mère que dieu me la garde.

Toute ma famille.

Toutes mes amies.

# SOMMAIRE

<b>La liste des Figures.....</b>	<b>i</b>
<b>La liste des Tableaux.....</b>	<b>iii</b>
<b>Nomenclature.....</b>	<b>iv</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>1</b>

## CHAPITRE I :

<b>ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>5</b>
I.1. Notions sur la Convection.....	5
I.1.1. Définition.....	5
I.1.2. Types de Convection .....	5
I.1.3. La convection Naturelle.....	6
I.1.4. Les Dépendances du Nombre de Nusselt.....	7
I.2. Types d'écoulements .....	7
I.3. Notions sur la Turbulence.....	10
I.3.1. Propriétés des Ecoulements Turbulents.....	12
I.3.2. Echelles Caractéristiques de la turbulence .....	14
I.3.3. Les Différentes Approches Numériques de la Turbulence...	15
I.4. Travaux Antécédents .....	20
I.4.1. Régime Laminaire.....	20
I.4.2. Régime Turbulent.....	24

## CHAPITRE II :

<b>FORMULATION MATHEMATIQUE.....</b>	<b>27</b>
II.1. Introduction.....	27
II.2. Equations Générales de Transport.....	27
II.2.1. Equation de Continuité.....	27
II.2.2. Equations de Quantité de Mouvement.....	27
II.2.3. Equation de Conservation d'énergie .....	30

II.3. Définition du problème Physique .....	31
II.4. Hypothèses Simplificatrices Fondamentales .....	31
II.5. Equations Représentatives du problème étudié .....	32
II.6. Conditions initiales et aux Limites .....	33
II.7. Adimensionnement des Equations .....	35
II.8. Conditions aux Limites sans Dimensions.....	37
II.9. Calcul de la Vitesse d'entrée.....	37
II.10. Calcul du Nombre de Nusselt Moyen.....	40
II.11. Généralisation du modèle mathématique.....	41

### **CHAPITRE III :**

<b>METHODE NUMERIQUE .....</b>	<b>42</b>
III.1. Introduction.....	42
III.2. Représentation de la Méthode des Volumes Finis.....	42
III.3. Maillage.....	43
III.4. Discrétisation des Equations de Transport.....	46
III.4.1. Discrétisation Temporelle .....	48
III.4.2. Discrétisation Spatiale.....	50
III.4.3. Schémas de Discrétisation Spatiale.....	52
III.4.4. Discrétisation des Termes Sources .....	56
III.5. Discrétisation des Conditions aux Limites .....	57

### **CHAPITRE IV: RESOLUTION DES EQUATIONS**

<b>ALGEBRIQUES .....</b>	<b>59</b>
IV.1. Introduction.....	59
IV.2. Algorithme SIMPLE.....	60
IV.3. Séquences de l'Algorithme SIMPLE.....	64
IV.4. La Méthode de Sous- Relaxation .....	64
VI.5. Critère de Convergence .....	66
VI.6. Méthode de Résolution des Systèmes d'équations Algébriques ..	67

IV.6.1. Méthode de Balayage .....	67
IV.6.2. Méthode de Résolution TDMA.....	70
IV.7. Structure du code de calcul .....	72
<b>CHAPITRE V :</b>	
<b>RESULTATS ET DISCUSSIONS .....</b>	<b>75</b>
<b>V.A. Résultats dans le Cas laminaire .....</b>	<b>75</b>
V.A.1. Introduction .....	75
V.A.2. Effet du Maillage sur les Résultats de Calcul.....	76
V.A.3. Influence des Valeurs de Sous-Relaxation sur les Résultats de Calcul .....	77
V.A.4. Champs des Vitesses et des Températures.....	78
V.A.4.1. Champs des Vitesses .....	78
V.A.4.2. Champs des Températures.....	79
V.A.5. Champs de Pressions .....	85
V.A.6. Validation du Code de Calcul .....	87
<b>V.B. Résultats dans le Cas Turbulent .....</b>	<b>90</b>
V.B.1. Introduction.....	90
V.B.2. Champs des Vitesses.....	91
V.B.3. Champs des Températures .....	92
V-B-4-Champs des Pressions.....	94
V-B-5-Champs de Vorticité.....	95
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>97</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>99</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>104</b>
Annexe A.....	104
Annexe B.....	105

# LISTE DES FIGURES

<b>Fig(I-1) :</b>	Régime laminaire $Re < 2400$ .....	<b>8</b>
<b>Fig(I-2) :</b>	Régime turbulent $Re > 5000$ .....	<b>9</b>
<b>Fig(I-3) :</b>	Turbulence géophysique. Image fournie par METEOSAT II . Montrant une forte depression située au-dessus de l'Atlantique.....	<b>10</b>
<b>Fig(I-4) :</b>	Enregistrement d'un signal de vitesse turbulent .....	<b>12</b>
<b>Fig(I-5) :</b>	Schéma illustre des tourbillons de différentes tailles .....	<b>14</b>
<b>Fig(I-6) :</b>	Simulation numérique directe d'un écoulement turbulent : champ de vorticité .....	<b>16</b>
<b>Fig(I-7) :</b>	Simulation des grandes échelles d'un écoulement derrière une marche descendante .....	<b>19</b>
<b>Fig(II-1) :</b>	La configuration étudiée et les conditions aux limites .....	<b>31</b>
<b>Fig(III-1) :</b>	Volume de contrôle principal.....	<b>43</b>
<b>Fig(III-2) :</b>	Localisation des variables.....	<b>44</b>
<b>Fig(III-3) :</b>	Maillage du domaine de calcul.....	<b>44</b>
<b>Fig(III-4) :</b>	Maillage décalé .....	<b>45</b>
<b>Fig(IV-1) :</b>	Domaine de calcul.....	<b>67</b>
<b>Fig(IV-2) :</b>	Principe de la méthode de balayage.....	<b>68</b>
<b>Fig(V-1) :</b>	Profils de vitesses et de températures pour $Ra=10$ , à l'entrée , au milieu et à la sortie de la conduite.....	<b>80</b>
<b>Fig(V-2) :</b>	Profils de vitesses et de températures pour $Ra=100$ , à l'entrée , au milieu et à la sortie de la conduite.....	<b>81</b>
<b>Fig(V-3) :</b>	Profils des vitesses et des températures pour $Ra=1000$ , à l'entrée , au milieu et à la sortie de la conduite.....	<b>82</b>
<b>Fig(V-4) :</b>	Les champs des vitesses pour $A=3$ et $Ra=100$ .....	<b>83</b>
<b>Fig(V-5) :</b>	Les lignes de courant pour $A=3$ et $Ra=100$ .....	<b>83</b>

<b>Fig(V-6) :</b>	Les champs des températures pour $A=3$ et pour des valeurs du nombre de Rayleigh égalent 10,100 et 1000 .....	<b>84</b>
<b>Fig(V-7) :</b>	Les champs de pression pour $A=3$ et pour des valeurs du nombre de Rayleigh égalent 10,100 et 1000.....	<b>84</b>
<b>Fig(V-8) :</b>	Evolution de la pression le long de la conduite pour $Ra=10,100,1000$ .	<b>86</b>
<b>Fig(V-9) :</b>	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Ra$ : comparaison avec des résultats de la littérature.....	<b>87</b>
<b>Fig(V-10) :</b>	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Ra$ : comparaison avec des résultats de la littérature.....	<b>88</b>
<b>Fig(V-11) :</b>	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Ra$ des différents auteurs.....	<b>89</b>
<b>Fig(V-12) :</b>	Profils de vitesses et de températures moyennes pour $Ra=10^4$ , à l'entrée, au milieu et à la sortie de la conduite.....	<b>93</b>
<b>Fig(V-13) :</b>	Evolution de la pression moyenne le long de la conduite pour $Ra=10^4$ .....	<b>94</b>
<b>Fig(V-14) :</b>	Isovaleurs de la vorticité pour différents temps.....	<b>96</b>
<b>Fig(A-1) :</b>	Principe de la méthode des trapèzes.....	<b>104</b>

# LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau(II-1) :</b>	Présentation des différents termes de l'équation de transport considérée.....	<b>41</b>
<b>Tableau(V-2) :</b>	Comparaisons du nombre de Nusselt moyen pour différents maillages et pour un rapport d'aspect $A=3$ .....	<b>76</b>
<b>Tableau(V-3) :</b>	Comparaisons du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de sous-relaxation.....	<b>77</b>

# NOMENCLATURE

$A$	: Rapport d'aspect de la conduite	[-]
$a$	: Diffusivité thermique	[m <sup>2</sup> /s]
$A_N, A_S, A_E, A_W, A_p$	: Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées	[-]
$a, b, c, d$	: Eléments de la matrice tridiagonale	[-]
$a_n, a_s, a_e, a_w$	: Aires des faces du volume de contrôle	[-]
$A   P  $	: Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Peclet.	[-]
$b$	: Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées	[-]
$C_p$	: Chaleur spécifique à pression constante	[J/Kg.K]
$d$	: Diamètre de la conduite	[m]
$D_n, D_s, D_e, D_w$	: Termes de diffusion dans le système d'équations algébriques	[-]
$\vec{F}$	: Force volumique	[N]
$f$	: Facteur compris entre 0 et 1 pour la discretisation temporelle	[-]
$F_n, F_s, F_e, F_w$	: Termes de convection dans le système d'équations algébriques	[-]
$\vec{g}$	: Accélération de pesanteur	[m/s <sup>2</sup> ]
$Gr$	: Nombre de Grashof	[-]
$hm$	: Coefficient de convection moyen	[w/m <sup>2</sup> .k]
$I$	: Indice des nœuds suivant R	[-]
$J$	: Indice des nœuds suivant Z	[-]
$L$	: Longueur de la conduite	[m]

NI	: Le nombre total des nœuds suivant R	[-]
NJ	: Le nombre total des nœuds suivant Z	[-]
Nu	: Le nombre de Nusselt	[-]
$\overline{Nu}$	: Le nombre de Nusselt moyen	[-]
P	: Nombre de Peclet	[-]
p	: Pression	[N/m <sup>2</sup> ]
P	: Pression adimensionnelle	[-]
p*	: Pression motrice	[N/m <sup>2</sup> ]
	: Estimation de la pression	[-]
Pr	: Le nombre de Prandtl	[-]
Ps	: Source volumique de chaleur	[Kg/m.s <sup>3</sup> ]
q	: Débit volumique	[m <sup>3</sup> /s]
q <sub>0</sub>	: Débit volumique à l'entrée de la conduite	[m <sup>3</sup> /s]
r	: Coordonnée radiale	[m]
R	: Coordonnée radiale adimensionnelle	[-]
Ra	: Nombre de Rayleigh	[-]
R <sub>0</sub>	: Le rayon de la conduite	[m]
Re	: Le nombre de Reynolds	[-]
S	: Surface latérale du cylindre	[m <sup>2</sup> ]
Sc	: La partie indépendante de la variable $\Phi$ du terme source	[-]
Sp	: La partie dépendante de la variable $\Phi$ du terme source	[-]
$\overline{S_\Phi}$	: Le terme source moyen de la variable $\Phi$	[-]
t	: temps	[s]
T	: Température	[°k]
T <sub>p</sub>	: Température de la paroi	[°k]
T <sub>0</sub>	: Température ambiante	[°k]
$\vec{u}$	: Vecteur vitesse	[m/s]
u	: Composante axiale de la vitesse	[m/s]
U :	: Composante adimensionnelle de la vitesse axiale	[-]
U*	: Estimation de la vitesse axiale	[-]

$U'$	: Correction de la vitesse axiale	[-]
$u_{max}$	: Vitesse maximale	[m/s]
$U_{max}$	: Vitesse maximale adimensionnelle	[-]
$u_e$	: Vitesse d'entrée	[m/s]
$U_e$	: Vitesse d'entrée adimensionnelle	[-]
$v$	: Composante radiale de la vitesse	[m/s]
$V$	: Composante adimensionnelle de la vitesse radiale	[-]
$V^*$	: Estimation de la vitesse radiale	[-]
$V'$	: Correction de la vitesse radiale	[-]
$z$	: Coordonnée axiale	[m]
$Z$	: Coordonnée axiale adimensionnelle	[-]

## Symboles Grecs

$\alpha$	: Coefficient de sous- relaxation	[-]
$\beta$	: Coefficient de dilatation à pression constante	[°K <sup>-1</sup> ]
$\Delta T$	: Ecart de température entre la paroi et le milieu ambiant	[°K]
$\Delta R$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant R	[-]
$\Delta Z$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant Z	[-]
$\Delta \tau$	: Pas de temps adimensionnel	[-]
$\theta$	: Température adimensionnelle	[-]
$\lambda$	: Conductivité thermique	[W/m.°k]
$\mu$	: Viscosité dynamique	[Kg/m.s]
$\omega$	: Vorticité	[1/s]
$\nu$	: Viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	: Masse volumique	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_0$	: Masse volumique à $T_0$	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau$	: Temps adimensionnelle	[-]
$\Phi$	: Variable dépendante généralisée	[-]
$\phi$	: Fonction de dissipation	[Kg/m.s <sup>3</sup> ]



# INTRODUCTION GENERALE

L'étude des transferts thermiques par convection naturelle dans les conduites verticales a suscité un intérêt grandissant durant ces dernières décennies. Cet intérêt est dicté par le rôle joué par telles configurations dans de nombreuses applications industrielles dans différents domaines : le refroidissement des composants électroniques, la climatisation, les échangeurs de chaleur, les centrales nucléaires ... etc.

De nombreuses études ont été réalisées en utilisant : l'expérimentation numérique (simulation numérique) et pratique (expérience de laboratoire), ainsi que les développements théoriques.

Il est vraisemblable que l'expérimentation de laboratoire est d'une importance cruciale pour valider les deux autres approches, néanmoins elle reste handicapée par le coût élevé du matériel et la difficulté de réalisation.

La simulation numérique est confrontée aux problèmes de calcul et de stockage dans la mémoire dans le cas de calcul tridimensionnel, et particulièrement en géométrie complexe, en présence de phénomènes physiques complexes (tels que la turbulence, les écoulements réactifs...). Néanmoins elle reste la méthode la moins coûteuse, et la plus utilisable. L'évolution rapide des capacités des calculateurs au cours de ces vingt dernières années, a permis un progrès notable dans la compréhension du phénomène de la convection naturelle, notamment dans les écoulements turbulents.

Une description pertinente de ces écoulements, nécessite des codes de calcul qui puissent représenter de manière efficace avec un coût raisonnable le caractère à priori instationnaire de ces phénomènes. Les méthodes basées sur une description statistique en moyenne temporelle de la turbulence, mêmes si elles permettent d'appréhender les caractéristiques moyennes d'un écoulement, ne permettent pas de rendre compte de son

aspect dynamique. La simulation numérique directe de la turbulence (DNS) est actuellement la seule méthode capable d'obtenir cet aspect dynamique. Ce type de simulation, qui consiste en la résolution numérique des équations de Navier-Stokes sans aucune modélisation, reste encore limité à des études portant plutôt sur la transition vers la turbulence que sur l'étude des écoulements turbulents proprement dits. Ceci est dû aux limitations matérielles des calculateurs du fait du trop grand nombre de nœuds nécessaire pour représenter toutes les échelles spatiales d'un écoulement pleinement développé.

Dans le présent mémoire, nous étudions la convection naturelle laminaire et turbulente dans une conduite verticale dont la paroi est maintenue à une température constante supérieure à celle du milieu ambiant, donnant naissance à un écoulement ascendant de l'air à travers cette conduite.

Dans le cas laminaire, les simulations numériques ont été faites pour des nombres de Rayleigh allant de 1 jusqu'à  $10^5$  et cela pour différents rapports d'aspect.

Pour le régime turbulent, nous avons des résultats qualitatifs pour une seule valeur du nombre de Rayleigh  $Ra = 10^4$  et un rapport d'aspect  $A=3$ . Nous avons utilisé La simulation numérique directe (DNS) comme outil d'investigation.

Pour atteindre ces objectifs, nous avons été amené à résoudre les équations de continuité et de Navier -stokes couplées à l'équation d'énergie, en régime stationnaire dans le cas laminaire, et instationnaire dans le cas turbulent.

La résolution numérique de ces équations s'appuie sur la méthode des volumes finis décrite par Patankar [1], la discrétisation des équations est achevée en utilisant le schéma de la loi de puissance « PLDS » : (*Power Low Differencing Scheme*) pour la discrétisation des termes de convection et le schéma implicite pour la discrétisation temporelle. L'algorithme « SIMPLE » : (*Semi-Implicite Method for Pressure Linked Equation*) a été adopté pour assurer le couplage pression- vitesse, et les équations discrétisées obtenues ont été résolues en utilisant la méthode de balayage associé à l'algorithme de Thomas « TDMA » : (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*).

Notre choix des conditions aux limites a été basé sur des études antérieures de Dyer [2], Curie et Newman [3] et Marcondes et Maliska [4].

Pour la vitesse d'entrée ; qui constitue en elle-même un problème majeur dans les écoulements de la convection naturelle dans des espaces confinés ou semi-confinés, nous avons proposé une expression explicite approximative pour déterminer sa valeur.

Nous avons choisi comme base de travail le code de calcul « TEAM » : (*Turbulent Elliptic Algorithm Manchester*), initialement conçue pour s'adapter aux problèmes des jets turbulents libres incompressibles en régime permanent, par Hung, Launder et Lischziner (UMIST), au début des années 1980, dont Nous avons effectué les modifications suivantes :

- ◆ *Orientation des mailles pour un conduit vertical.*
- ◆ *Introduction des conditions aux limites appropriées.*
- ◆ *Perfectionnement des facteurs de balayage et de sous-relaxation.*
- ◆ *Raffinage du maillage pour assurer une capture des changements rapides.*
- ◆ *Enlèvement du modèle  $k-\varepsilon$  initialement associé au code et le maintien de la simulation numérique directe.*

Lors de nos expériences numériques, nous avons constaté l'effet du facteur de sous relaxation sur la qualité de nos résultats, nous avons décidé d'analyser cet effet, et de déterminer le choix adéquat de ce facteur.

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre, présente des notions sur la convection naturelle et les écoulements turbulents, ainsi qu'une recherche bibliographique des différents travaux qui ont traité ce type de phénomène.

Le deuxième chapitre comprend la formulation mathématique du problème physique, cette dernière est basée sur la variation de la quantité de mouvement, et la conservation de la masse et de l'énergie. Un exposé sur le choix des conditions aux limites, ainsi que des détails sur la méthode de calcul du nombre de Nusselt moyen sont donnés à la fin de ce chapitre.

Quant au troisième chapitre, il expose une explication détaillée de la méthode numérique adoptée pour discrétiser les équations de transport.

Une fois la forme algébrique des équations est obtenue, le chapitre quatre s'occupe de la procédure de résolution

Le cinquième chapitre a été consacré à la présentation des résultats obtenus et leurs interprétations dans le cas du régime laminaire et turbulent. Pour valider le code de calcul, les résultats dans le cas laminaire sont comparés avec ceux de la littérature.

En conclusion, nous dressons le bilan du travail réalisé, et ouvrons des perspectives sur la suite de ce sujet.

# CHAPITRE I

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### I.1. Notions sur la Convection :

#### I.1.1. Définition :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasiné dans les particules fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.[5]

#### I.1.2. Types de Convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par *convection libre* et *convection forcée*. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite *mixte*.

### I.1.3. La Convection Naturelle:

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité dues à la non –uniformité de la température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre.[6]

L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents et les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle.

Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie.

En 1903, à l'époque même où *Rayleigh* s'intéresse à la convection, *Boussinesq* propose une simplification de ces équations de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique.

*Les hypothèses de Boussinesq* consistent à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la température et de la pression. Elles supposent aussi que le fluide est incompressible mais il conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède « le moteur de la convection » directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique du fluide.[ 7]

### I.1.4. Les Dépendances du Nombre de Nusselt:

La transmission de la chaleur entre la paroi et le fluide est caractérisée par le nombre de Nusselt moyen. En convection naturelle, la dépendance de celui-ci avec le nombre de Rayleigh s'exprime par la relation suivante :

$$\overline{Nu} = C.Ra^\gamma \quad (I-1)$$

Dans laquelle  $C$  est une constante qui dépend généralement de la forme et du chauffage de la paroi ainsi que du nombre de Prandtl, et  $\gamma$  un exposant dont sa valeur dépend du régime de l'écoulement ( $\gamma = 1/4$  pour le régime laminaire et  $2/7 < \gamma < 1/3$  pour le régime turbulent). [8]

La gamme des nombres de Rayleigh rencontrés dans certaines situations industrielles s'étend sur 5 à 10 décades de plus que celles réalisables en laboratoire. L'évolution des transferts thermiques dans ces situations nécessite donc une extrapolation importante de la loi de dépendance  $Nu(Ra)$  telle que mesurée en laboratoire, ce qui n'est possible qu'à partir d'une loi bien établie.

L'étude de la convection dans ces situations nécessite donc une attention particulière afin d'extrapoler d'une manière optimale la loi de dépendance  $Nu(Ra)$ .

Dans le régime turbulent, la validation expérimentale de la loi théorique de la variation de  $Nu$  en fonction de  $Ra$  est délicate car elle suppose de travailler d'une part avec des  $Ra$  suffisamment élevés pour être en régime turbulent, et d'autre part sur une plage de  $Ra$  suffisamment importante pour déterminer l'exposant  $\gamma$  avec précision.

## I.2. Types d'écoulements:

Comme le transfert d'énergie par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, il est primordial de comprendre le couplage entre la dynamique du fluide et l'échange de chaleur du problème étudié.

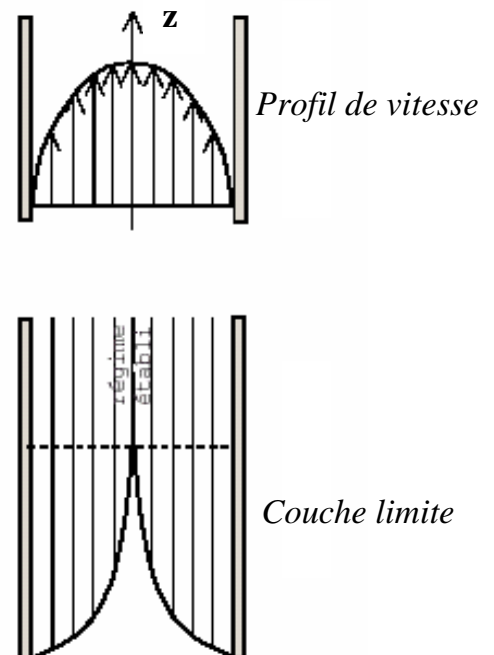
Concrètement, on peut aborder la dynamique des fluides en considérant l'écoulement comme laminaire dans une première étape et turbulent dans une deuxième (ce qui représente la majorité des cas industriels).

*L'écoulement laminaire* est un régime pour lequel le fluide s'écoule le long de la paroi sous forme de filets qui restent parallèles. Ceci a lieu pour des faibles vitesses du fluide, et l'échange de température entre les filets ne peut se faire que par conduction (coefficient de conductivité du fluide  $\lambda$ ) car il n'y a aucun mélange de matière.

En revanche, *l'écoulement turbulent* est un régime pour lequel la vitesse moyenne du fluide est beaucoup plus importante. Il y a un véritable mélange des particules fluide. Dans un écoulement turbulent le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons qui transportent la masse de fluide à travers ses filets. Ces petits volumes de fluide en se mélangeant avec d'autres volumes jouent le rôle de porteuses d'énergie. Par conséquent un accroissement de la turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

Puisque le thème du présent mémoire aborde la convection naturelle laminaire et turbulente dans un conduit vertical, il est intéressant de présenter ci-dessous d'une manière succincte la qualité du profil de vitesse dans les deux régimes.

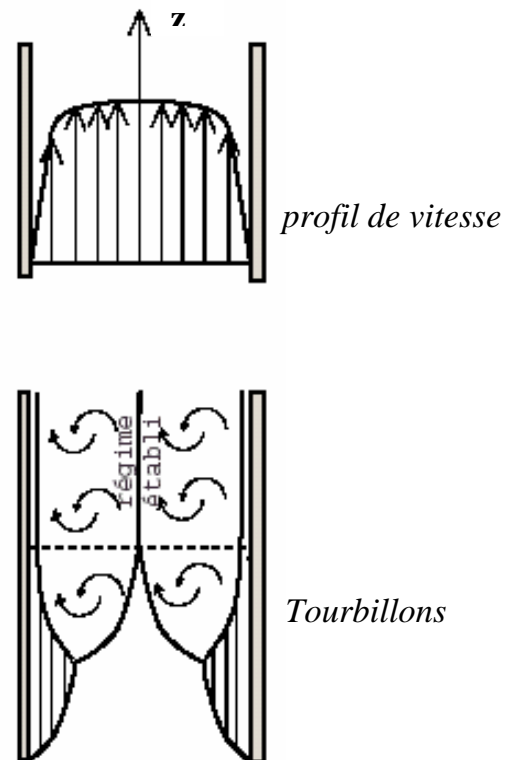
En régime laminaire la répartition des vitesses dans le tube est parabolique, la vitesse maximale est sur l'axe du tube tandis qu'elle est nulle sur les parois. On admet que ce scénario est valable quand le nombre de Reynolds est inférieur à 2400 (voir Fig( I-1 )).



**Fig ( I-1 )** : Régime laminaire  $Re < 2400$

Quand la vitesse imposée au fluide augmente, les phénomènes sont différents. A l'entrée du tube, tout se passe comme précédemment, il existe une couche limite dont l'épaisseur augmente avec  $z$ . Puis à partir d'une zone de transition, il apparaît dans l'écoulement de véritables « tourbillons ». Le régime devient *turbulent*. Malgré tout, on constate qu'il existe au voisinage de la paroi une couche limite dont l'épaisseur est très faible. Dans cette couche, on admet que le régime est laminaire (écoulement du fluide sous forme de filets).

La figure ci-dessous donne une représentation qualitative des phénomènes observés. On admet que dans un tube lisse le régime turbulent peut s'établir si le nombre de Reynolds est supérieur à 5000 ( Fig( I-2 ) ).



**Fig (I-2) :** Régime turbulent  $Re > 5000$

Le régime est dit intermédiaire ou critique quand le nombre de Reynolds est compris entre 2400 et 5000.

### I.3. Notions sur la Turbulence :

La compréhension des phénomènes turbulents représente à l'heure actuelle un défi majeur aussi bien pour les scientifiques que pour les ingénieurs. La turbulence fait partie de notre expérience quotidienne. On la trouve un peu partout, dans les fluides qui constituent notre environnement immédiat : l'air, l'eau, comme par exemple : la circulation du sang à l'intérieur des vaisseaux sanguins, les écoulements de l'air autour d'une automobile ou d'un avion (en fait, tous les moyens de transport utilisés par l'homme sont directement confrontés à des milieux turbulents), les mouvements de fluides stellaires, comme la circulation gazeuse autour des planètes, jets de plasma d'étoiles.



**Fig(I-3 )** : Turbulence géophysique. *Image fournie par METEOSAT II*

*Montrant une forte dépression située au-dessus de l'Atlantique.* [ 9]

On pourrait dire que la turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux, où des mécanismes internes d'échanges d'énergie assurent la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques, répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques.[10]

Un écoulement turbulent est composé de « filets fluides » qui, au lieu de conserver leur individualité en glissant uniquement les uns sur les autres comme dans un écoulement laminaire, échangent entre eux des particules fluides. Ainsi, le fluide zigzague, s'enroule sur lui-même et semble se déplacer au hasard autour de la direction générale de l'écoulement. Cet état désordonné survient en réalité lorsque la vitesse du fluide devient supérieure à une limite au-delà de laquelle la viscosité ne suffit plus à régulariser les mouvements.

Dans un écoulement turbulent, des tourbillons de différentes tailles apparaissent, formant ce qui est communément appelé un spectre. Les grands tourbillons sont associés aux basses fréquences et les petits tourbillons aux hautes fréquences. Plus le nombre de Reynolds est important, plus l'écoulement est turbulent et plus la largeur du spectre est importante. Bien qu'ils soient bien différenciés les uns des autres, les tourbillons sont liés par un processus de transmission de l'énergie appelé couramment « cascade d'énergie ».

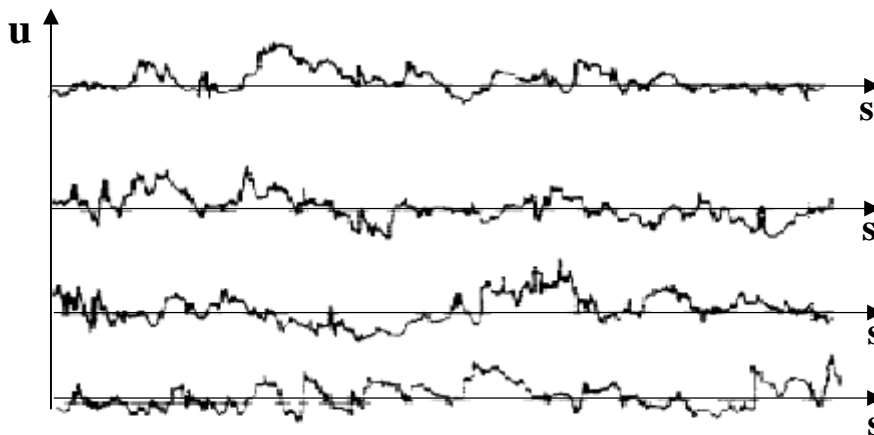
Les grands tourbillons interagissent dans un premier temps avec l'écoulement moyen, leurs échelles de longueur étant similaires. La présence de gradients de vitesse moyenne dans l'écoulement provoque la distorsion de ces tourbillons. Lors de ce processus d'étirement, l'énergie cinétique est extraite de l'écoulement moyen pour alimenter les mouvements turbulents de grande échelle. La plus grande part de l'énergie cinétique étant contenue dans les tourbillons de plus grande taille, cela permet de maintenir la turbulence. A force d'être étirés, les gros tourbillons sont scindés en tourbillons de plus en plus petits. L'énergie cinétique est alors transmise des tourbillons de grande taille vers ceux de petite taille jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives, dissipent cette énergie en détruisant les petits tourbillons et la convertissent en énergie thermique interne.[11]

### I.3.1. Propriétés des Ecoulements Turbulents :

L'intuition nous permet de percevoir ce qu'est la turbulence, mais il est difficile de lui donner une définition précise, seulement on peut la caractériser par un certain nombre de propriétés physiques observables, comme par exemple :

#### *-Irrégularité en espace et en temps :*

Les grandeurs physiques telles que la vitesse et la pression varient de façon apparemment aléatoire ( voir fig(I-4) ), ce qui rend impossible une approche déterministe de la turbulence; on ne peut pas décrire un mouvement turbulent, dans tous ses détails, comme une fonction du temps et de la position, mais il est possible d'en faire une description statistique en calculant, par exemple, des valeurs moyennes de la vitesse et de la pression .



**Fig(I-4) :** Enregistrement d'un signal de vitesse turbulent

#### *-Ecoulement rotationnel :*

L'apparition de la turbulence est due parfois à la présence des parois ou d'obstacles, ce qui entraînent la création de la vorticité à l'intérieur du fluide; un écoulement turbulent présente toujours des fluctuations du rotationnel de la vitesse.

**-Diffusivité élevée :**

Un champ turbulent diffuse fortement toute quantité transportable comme la température ou un colorant, ainsi que la quantité de mouvement. En réalité, la diffusion turbulente est due aux termes de convection au niveau des fluctuations.

**-Phénomène tridimensionnel :**

Les mouvements turbulents fluctuants sont toujours tridimensionnels et instationnaire.

**-Dissipation :**

La turbulence est fortement dissipative du fait de la présence de forts gradients de vitesse instantanés. Les taux de déformation instantanés deviennent en effet très importants et la dégradation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur est alors très forte.

**-Coexistence de tourbillons de tailles très diverses :**

Il existe toute une cascade de tourbillons d'échelles de plus en plus fines, créée par les processus non linéaires engendrés par les termes d'inertie dans les équations du mouvement.[12]

**-Caractère chaotique :**

Les mouvements turbulents sont non prédictibles, c'est à dire qu'en connaissant de façon détaillée la configuration de l'écoulement à un certain instant, même si l'écoulement est régi par des équations bien déterminées, dans la pratique, on ne peut pas prédire l'évolution ultérieure de l'écoulement pour des longs temps, un exemple classique est celui des prévisions météorologiques, ces dernières ne peuvent se faire au-delà d'une semaine, et leur qualité décroît avec le temps. [ 10 ]

### I.3.2. Echelles Caractéristiques de la Turbulence :

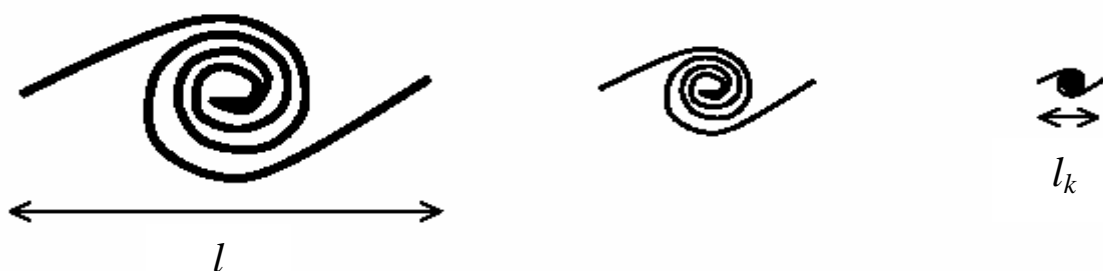
La turbulence se caractérise par la présence d'un spectre de tourbillons (ou structures) de dimensions, de vitesses et de fréquences de fluctuation différentes. Cependant, on peut distinguer deux types de structures caractéristiques, la première est celle des grosses structures dont la dimension est de l'ordre de la largeur de l'écoulement (échelle intégrale), les fluctuations turbulentes représentées par les grosses structures ayant des grandes longueurs d'ondes (basse fréquence) sont décrites par une vitesse typique  $u$  et une échelle  $l$  appelé macro-échelle. On peut par conséquent définir un temps caractéristique  $\tau = l / u$ .

Les grosses structures tirent leurs énergie de l'écoulement moyen qui se caractérise par la vitesse  $U$  et une échelle typique  $L$ . On définit un temps caractéristique de l'écoulement moyen par  $T=L/U$ . Il y aura un transfert d'énergie efficace lorsque  $\tau = T$ .

La deuxième est celle des petites structures ayant des longueurs d'ondes petites (hautes fréquences) sont décrites par une échelle  $l_k$  et une vitesse caractéristique  $v_k$ , on déduit alors un temps caractéristique  $\tau_k = l_k / v_k$  où  $l_k$  est appelé échelle de Kolmogorov.

L'énergie des petites structures est dissipée par l'action des contraintes visqueuses, les petites échelles sont de l'ordre de l'épaisseur d'une couche visqueuse qui se développe pendant une durée  $\tau_k$ .

Le phénomène de cascade entre les deux échelles est expliqué par le transfert d'énergie effectué des grosses structures vers les plus petites. [ 13]



**Fig (I-5) :** Schéma illustre des tourbillons de différentes tailles

### I.3.3. Les Différentes Approches Numériques de la Turbulence :

Comme on l'a déjà dit, la plupart des écoulements rencontrés dans le domaine de la pratique industrielle sont de nature turbulente et beaucoup de phénomènes, tels que le transfert de chaleur ou de masse, sont liés au mouvement du fluide, donc leur étude nécessite le calcul préalable de l'écoulement considéré. Ainsi, la prédétermination numérique des écoulements turbulents est très importante pour les applications pratiques.

Dans cette sous-section on présente quelques méthodes de prédétermination d'écoulements turbulents, qui permettent d'obtenir des quantités caractéristiques de l'écoulement, autres que celles obtenues par expérimentation directe sur la configuration étudiée.

#### ◆ *La simulation numérique directe (DNS) :*

Cette technique appelée DNS en anglais (*Direct Numerical Simulation*) consiste à résoudre les équations de transport de façon instationnaire sans aucune modélisation, elle s'est révélé très utile pour la compréhension des phénomènes physiques complexes mis en jeu dans les écoulements turbulents.

Cette approche se manifeste par les avantages suivants :

1-Beaucoup plus d'information d'intérêt statistique peut être obtenue(puisque le champ entier d'écoulement est connu en chaque pas de temps et en chaque pas spatial ).

2-Les paramètres peuvent être variés facilement.

3-Les effets des structures à grandes échelles peuvent être directement appréciés.[ 14]

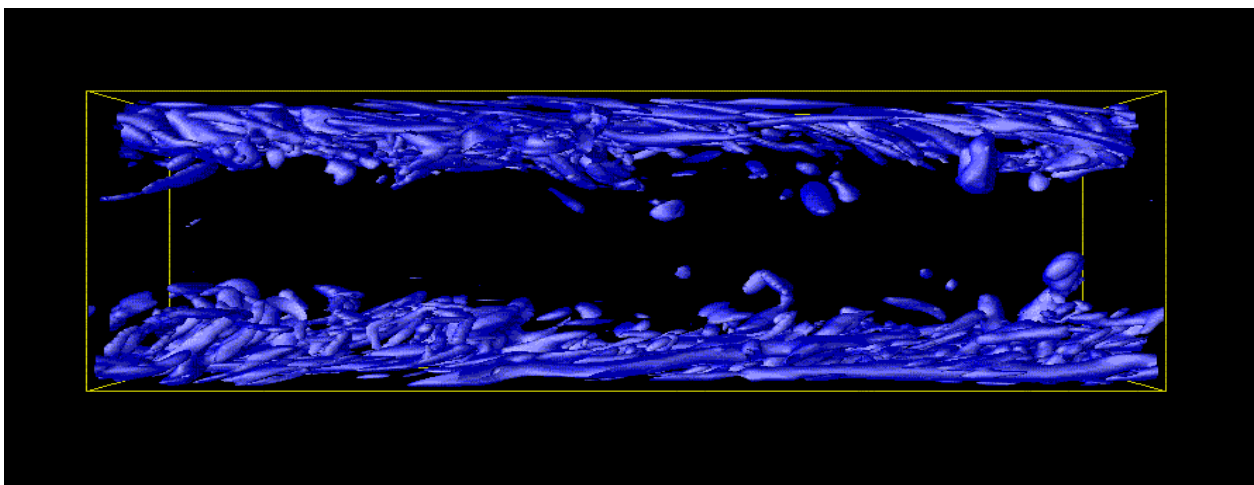
La simulation complète de toutes les échelles d'un écoulement turbulent, nécessite des grilles de calcul très fines, on peut montrer que le rapport entre l'échelle des gros tourbillons (échelle intégrale ) et l'échelle de Kolmogorov est proportionnel à  $Re^{3/4}$ , ce qui implique que pour capturer toutes les échelles qui apparaissent dans un écoulement turbulent, il faut utiliser une grille de calcul avec un nombre de points dans chaque direction de l'espace proportionnel à  $Re^{3/4}$ , donc implicitement, le nombre de points

sur une grille tridimensionnelle sera de l'ordre de  $Re^{9/4}$ . On peut aussi montrer, que le temps de calcul est proportionnel à  $Re^{11/4}$ .

En regardant le coût de ce calcul direct (en place mémoire et en temps CPU), on comprend bien que ce type de simulation, pour des applications industrielles (géométrie complexe, nombre de Reynolds élevé), se trouve actuellement fortement limitée par la puissance des ordinateurs.[10]

*Quelques valeurs caractéristiques :*

- $l_k = 1\text{mm}$  pour un écoulement atmosphérique.
- $l_k = 0.1\text{mm}$  pour une turbulence de grille obtenue en laboratoire.
- Pour une simulation directe d'un jet turbulent en développement spatial, environ  $10^7$  points de grille sont nécessaires pour un Reynolds de 1000 (assez faible). Le temps de calcul sur Fujitsu VPP300(2.2 GFlops) est de 50 heures avec une occupation de la mémoire vive de  $Mv = 1\text{Go}$
- Dans les applications les plus courantes, les nombres de Reynolds des jets utilisés sont au moins 1000 fois plus grands, ce qui demande  $5.62 \cdot 10^{13}$  points de grille ( 5 millions de Go !) pour 50 milliards d'heures de calcul sur la même machine
- D'une façon générale, les nombres de Reynolds accessibles par la simulation directe sont très inférieurs à ceux associés aux écoulements d'intérêt géophysique ou industriel. La DNS reste encore du domaine de la recherche.[ 9 ]



**Fig(I-6):** Simulation numérique directe d'un écoulement turbulent en canal :  
champ de vorticité [15 ]

◆ *Les méthodes Statistiques :*

Malgré le caractère aléatoire de la turbulence, il est possible par une approche statistique de modéliser les écoulements turbulents. Cette approche consiste à l'aide d'un système d'équations approprié à filtrer les irrégularités de la turbulence pour retenir qu'une valeur moyenne.

Le passage des équations déterministes aux équations statistiques repose sur la décomposition de Reynolds où tout champ  $\Phi(\phi - u, T \text{ ou } P)$  se décompose en un champ moyen  $\bar{\Phi}$  et un champ fluctuant  $\phi'$  de moyenne nulle :

$$\Phi(x, t) = \bar{\Phi}(x, t) + \phi'(x, t) \quad (\text{I-2})$$

La valeur moyenne est définie par la relation suivante :

$$\bar{\Phi}(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(x, t) dt \quad (\text{I-3})$$

La moyenne est à l'origine une moyenne d'ensemble (moyenne stochastique), c'est à dire qu'elle est prise sur un ensemble d'expériences effectuées dans des conditions identiques. L'hypothèse d'ergodicité [ Favre , 1976] – Il est équivalent de considérer une expérience répétée une infinité de fois ou une seule expérience menée à l'infini dans le temps- permet le passage à des moyennes temporelles, et par conséquent un traitement statistique des équations.[11]

En utilisant la décomposition (I-2) dans les équations de Navier-Stokes, on obtient les équations pour les grandeurs moyennes, connues comme *les équations de Reynolds*. On procède ensuite à la résolution des équations moyennées obtenues. Mais, il faut compter qu'après le traitement statistique qu'on a fait, on a une perte d'informations sur les équations, ce qui traduit par le fait que le système obtenu est

ouvert. L'information perdue doit donc être reconstruite, puis réintroduite dans le système à l'aide de modèles de fermetures convenables (modélisant le tenseur de Reynolds qui apparaît et qui est responsable de toutes les fluctuations dans l'écoulement).

On distingue deux grandes catégories de modélisation :

• **Modèles à viscosité turbulente (modèle du 1<sup>er</sup> ordre)** : basé sur l'hypothèse de Boussinesq qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide de la viscosité turbulente  $\mu_t$ . Relativement facile à utiliser, mais la qualité de modélisation de  $\mu_t$  influe directement sur la qualité de l'écoulement moyen.

• **Modèles du 2<sup>ème</sup> ordre** : les tensions de Reynolds sont calculées directement, la modélisation se porte alors sur des moments d'ordre supérieur. La mise en œuvre est plus délicate mais les résultats sont de meilleure qualité.

On pratique également une distinction selon le nombre d'équations d'évolution supplémentaires du modèle (n'introduisant pas de nouvelles inconnues).

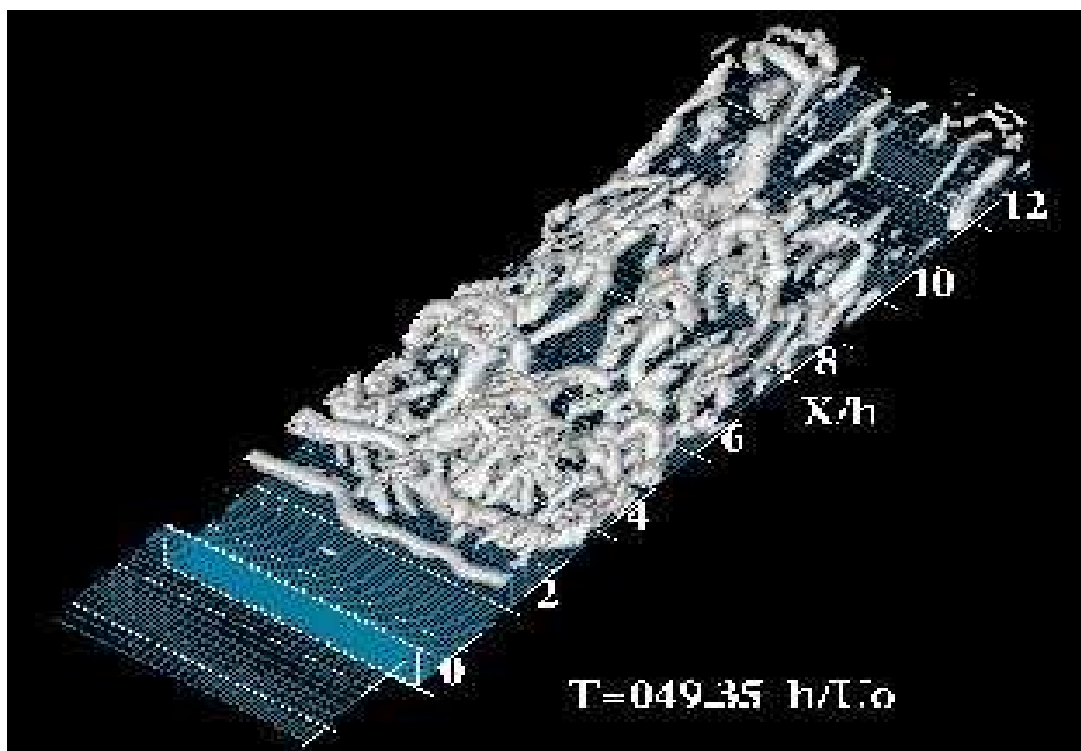
- 0 équation (longueur de mélange)	}	<i>modèles du 1<sup>er</sup> ordre</i>
- 1 équation ( k , énergie cinétique turbulente)		
- 2 équations ( k- $\epsilon$ , k - $\omega$ ,...)		
- 7 équations ( $R_{ij}$ - $\epsilon$ ,...)		<i>modèles du 2<sup>ème</sup> ordre</i>

Le choix entre ces différentes modélisations doit s'effectuer en fonction du problème traité.[9]

**◆ Simulation des grandes échelles (LES) :**

C'est une technique de calcul intermédiaire entre le calcul direct et l'approche statistique. Cette méthode consiste à calculer l'écoulement à partir des équations de transport sur un maillage plus lâche et à modéliser les mouvements d'échelles inférieures aux dimensions de la maille. Il s'agit donc d'une simulation numérique des grosses structures turbulentes.

Cette méthode est coûteuse de point de vue de l'ampleur des calculs numériques sans être toutefois toujours prohibitive. Elle devrait être particulièrement utile pour les écoulements dans lesquels les grandes structures jouent un rôle déterminant. [12]



**Fig(I-7):** Simulation des grandes échelles (LES) d'un écoulement derrière une marche descendante [16]

## **I.4. Travaux Antécédents :**

Dans différentes situations physiques et applications technologiques, la convection naturelle dans une conduite verticale joue un rôle important. L'étude d'un tel phénomène, dont l'importance est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels a conduit à une masse importante de publication spécialisée qui s'est accumulée au fur des années.

### **I.4.1. Régime Laminaire**

Une revue de la littérature montre que la convection naturelle laminaire dans une conduite verticale a été étudiée par plusieurs auteurs : Elenbaas [17] a conduit la première étude expérimentale qui a servi dans la suite comme solution de référence. Il a été le premier chercheur qui a présenté une étude détaillée sur la convection naturelle dans une conduite verticale, en utilisant deux plaques lisses d'Aluminium. Il a aussi fourni un modèle analytique pour le nombre de Nusselt moyen basé sur deux solutions proposées aux équations de continuité, de quantité mouvement et d'énergie. Bodoia et Osterle [18] ont obtenu la première solution numérique de la convection naturelle dans une conduite verticale, leur but est de prédire la longueur nécessaire pour achever complètement l'écoulement développé en fonction de la largeur du canal et la température de la paroi. Leurs résultats étaient en bon accord avec ceux d'Elenbaas [17].

Engel et Mueller[19] ont proposé une méthode analytique basée sur le développement en série de l'inverse du nombre de Prandtl pour étudier la convection naturelle laminaire dans les conduites verticales, ils ont utilisé la méthode intégral de Von Karman et E. Pohlhausen pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie pour des nombres de Grashof élevés et pour différentes conditions d'entrée et aux limites. Leurs résultats étaient en bon accord avec ceux de Bodoia[18].

Davis et Perona[20] ont considéré un tube vertical ouvert de paroi chauffée, l'écoulement ascendant de l'air dans cette conduite est dû à la convection naturelle. Ils ont supposé une vitesse constante à l'entrée de la conduite. Les équations régissant ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des différences finis, pour une température de la paroi constante et un flux constant. Une corrélation graphique a été trouvée entre la longueur addimensionnelle du tube et deux quantités représentant le débit volumique et le taux de dissipation thermique, ces résultats ont été comparés avec ceux d'Elenbaas[17], et un excellent accord a été obtenu. Kageyama et Izumi [21] ont considéré la même géométrie cylindrique, les équations de la convection ont été discrétisées par la méthode des différences finis. L'analyse présentée a été basée sur la supposition que le profil de la vitesse d'entrée est uniforme. Ils ont vérifié analytiquement et numériquement que, dans le cas où la température de la paroi est constante, la vitesse d'entrée a une asymptote de valeur  $1/8$ , par contre si la paroi est soumise à un flux constant, la vitesse d'entrée est proportionnelle à  $(L/Pr)^{1/2}$ , pour  $L > L_e$ , où  $L_e$  est la longueur d'entrée.

Aung et al.[22] ont présenté une combinaison d'études expérimentale et numérique de la convection naturelle entre deux plaques parallèles, les parois de ces dernières sont soumises à une température constante et à un flux uniforme, dans les deux cas les résultats obtenus ne sont pas les mêmes. Quintière et Muller [23] ont présenté une étude analytique approximative de la convection naturelle dans une conduite verticale, basée sur la linéarisation des équations gouvernant ce phénomène, les résultats de ce travail incluent des modèles de la température, de la vitesse et de la chute de pression. Bien que ce travail soit l'une des analyses théoriques les plus complètes du problème du canal jusqu'à cette date, la complexité des expressions des résultats exige l'usage d'un programme informatique pour résoudre ces équations.

Dyer [2] présente une étude théorique et expérimentale de la convection naturelle dans une conduite dont la paroi est soumise à un flux constant, trois conditions de vitesse et de pression à l'entrée sont examinées, elles ont toutes fourni la même expression du nombre de Nusselt pour des faibles nombres de Rayleigh, et les différences entre

les expressions du nombre de Nusselt obtenues aux nombres de Rayleigh élevés ont été trouvées faibles. Un modèle simplifié du nombre de Nusselt moyen pour un canal isotherme, symétriquement chauffé a été proposé par Churchill[24] qui a utilisé sa technique de résolution des équations de transport publiée précédemment (Churchill et Usagi [ 25] ) pour résoudre le problème de la convection.

Hess et Miller[26] se sont intéressés à l'étude expérimentale de la convection naturelle dans un cylindre vertical soumis à un flux thermique constant, ils ont utilisé un volocimètre laser Doppler pour mesurer la vitesse axiale du fluide, les nombres de Rayleigh modifiés varient entre  $4,5 \cdot 10^9$  et  $6,4 \cdot 10^{10}$  ce qui correspond à la limite supérieure du régime laminaire. Leurs résultats sont en bon accord avec les résultats numériques disponibles. Nakamura et al.[27] ont étudié le même phénomène physique entre deux plaques parallèles, en tenant compte de l'influence de l'entrée du canal sur les résultats du calcul et en prenant comme variables du problème la fonction du courant et la vorticité. Bar-Cohen et Rohsnow [28] ont examiné la convection naturelle entre deux plaques parallèles, ils ont proposé une nouvelle corrélation illustre la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect A.

Saparrow et al. [29] ont examiné la convection naturelle dans une conduite verticale, à paroi isotherme. Les résultats expérimentaux sont représentés pour une gamme de valeurs de Rayleigh modifié  $(S/H) \cdot Ra$  de  $2 \cdot 10^2 - 10^5$ , où S, H sont respectivement la largeur et la hauteur de la conduite. En utilisant les équations paraboliques de la convection, les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec ceux expérimentaux. Payvar[30] a étudié la convection naturelle dans une conduite parallélépipédique en considérant les caractéristiques du fluide constantes sauf la viscosité qui varie exponentiellement en fonction de la température. Les résultats obtenus montrent que la variation de la viscosité a une influence sur la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh , surtout pour les liquides.

Shaarawi et Negm [31] ont abordé une étude de la convection naturelle laminaire dans un espace annulaire formé par deux cylindres coaxiaux verticaux. Le cylindre interne a une épaisseur plus faible que celle du cylindre externe et sa paroi est adiabatique, tandis que la paroi de ce dernier est soumise à une température constante. Les équations ont été discrétisées en utilisant la méthode des différences finies pour obtenir les champs hydrodynamique et thermique de l'écoulement, en tenant compte de l'effet du rapport des conductivités thermiques de la paroi solide et du fluide.

Marcondes et Maliska [4] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle dans un tube de forme  $L$ , ils ont utilisé la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations elliptiques régissant ce phénomène, ils ont montré que pour certaines situations de l'écoulement l'utilisation d'une formulation elliptique est impératif pour prédire correctement l'écoulement dans une conduite ouverte.

Cheng et al [32] ont étudié le même problème de Payvar[30] en considérant différentes conditions aux limites relatives à la température des parois de la conduite, c'est à dire qu'ils prennent une seule paroi chauffée, deux parois symétriques ou adjacentes chauffées et enfin trois parois chauffées. Ils ont proposé et comparé deux solutions du problème, l'une elliptique et l'autre parabolique. Ils ont conclu que les résultats obtenus par cette dernière sont en bon accord avec la première malheureusement plus coûteuse en temps de calcul.

Boudebous et al.[33] ont étudié la convection naturelle laminaire dans un conduit hyperbolique creux, de révolution de longueur finie et dont la paroi est soumise à une température constante, les équations régissant ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des différences finies. En l'absence des résultats numériques et expérimentaux relatifs à la géométrie considérée, ils ont choisi pour valider le code de calcul élaboré de comparer leurs résultats pour un conduit hyperbolique d'excentricité égale à 100 (qui peut être assimilé à un cylindre) avec les résultats d'Elenbaas[17].

Desrayaud et Fichera [34] ont adopté la méthode des volumes finies pour discretiser les équations de la convection dans une conduite verticale dont la paroi est soumise à une température constante, ils ont choisi un profil parabolique de la vitesse d'entrée, ils ont proposé une corrélation graphique de la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$  ( $Ra^*=Ra/A$ ), où  $A$  est le rapport d'aspect. Les résultats obtenus sont en bon accord avec la corrélation de Bar-cohen [28].

#### **I.4.2. Régime turbulent :**

Le nombre d'études basé sur la simulation numérique de la convection naturelle dans les conduites verticales est très faible par rapport aux études de la convection turbulente le long d'une plaque plane ou dans des enceintes fermées.

L'une des premières études relatives à la convection naturelle turbulente dans un cylindre vertical a été faite par Abdelmaguid et Spalding [35], ces auteurs sont les premiers qui ont utilisé le modèle  $K-\epsilon$  développé par Launder et Spalding[36]. Les équations du problème sont discrétisées par la méthode des différences finies et le système d'équations est résolu par un code déjà disponible (STABLER :Steady Three-dimensional Analysis of Boundary –Layer Equations Revised). Les simulations ont été effectuées avec des valeurs comprises entre  $2,5 \cdot 10^4$  et  $6 \cdot 10^4$  pour le nombre de Grashof. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement par Buhr et al [37].

Chung et Thompson[38] se sont intéressés à l'étude d'un écoulement de convection naturelle turbulente dans des canaux verticaux. Les nombres de Reynolds et Prandtl ont été fixés à  $10^4$  et  $1,12 \cdot 10^{-2}$  respectivement. Le modèle  $K-\epsilon$  de Jones et Launder [39] a été adopté pour la fermeture du système d'équations, et la méthode des éléments finis a été choisie pour sa discretisation. Les champs de vitesses et de températures ainsi que les caractéristiques de la turbulence ont été donnés en fonction du rapport du nombre de Grashof et du carré du nombre de Reynolds.

Tanaka et al. [40] ont considéré la même géométrie cylindrique dont la paroi est soumise à un flux constant, ils ont considéré aussi que l'écoulement est pleinement établi. Les équations de ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des volumes finis. Ils ont adopté le modèle K- $\epsilon$  à faible nombre de Reynolds conçu par Jones et Launder [41] avec une version modifiée due à Kawamura [42]. Les résultats numériques relatifs aux champs de vitesse ainsi qu'au nombre de Nusselt moyen ont été confirmés par une étude expérimentale.

Le même type d'écoulement et de géométrie considérés précédemment a été également étudié par Sohn et Cheung[43]. Le modèle K-D de To et Humphrey [44] et la méthode des différences finies ont été utilisés pour la résolution des équations du problème. Les résultats sont présentés sous forme de corrélation pour le débit de l'écoulement et le coefficient de transfert thermique en fonction des nombres de Grashof, Reynolds et Prandtl, ainsi que d'autres paramètres tel que, le rapport des flux de chaleur entre la paroi froide et chaude du canal.

Lyons et al.[45] ont utilisé la simulation numérique directe de l'écoulement turbulent avec le transfert passif entre les parois du canal. L'équation instationnaire tridimensionnelle de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie sont résolues numériquement avec une grille de 1069460 points. Ils ont utilisé un maillage uniforme car toutes les échelles de turbulence sont importantes. Le nombre de Reynolds basé sur la demi-largeur du canal et sur la vitesse débitante, est de 2262 et le nombre de Prandtl est égale à un.

Boudjemadi et al [46] ont utilisé la simulation numérique directe(DNS) pour le calcul de la convection naturelle turbulente dans une conduite verticale différentiellement chauffé. Les équations régissant ce phénomène ont été discrétisées en utilisant une combinaison de la méthode spectrale et différences finies. La transformation de Fourier des systèmes tridiagonaux a été choisie pour résoudre ces équations, et cela pour deux nombres de Rayleigh  $Ra=10^5$  et  $Ra=5,4 \cdot 10^5$ . Une base de données qui contient jusqu'au deuxième ordre des bilans a été rassemblée, et la physique des contraintes de

Reynolds et les flux de chaleur turbulents sont analysés à la lumière des équations de conservation appliquées.

Verstreegh et Nieuwstadt [47] ont utilisé la simulation numérique directe (DNS) de la convection naturelle dans une conduite verticale infinie différentiellement chauffée pour quatre valeurs du nombre de Rayleigh qui varie de  $5,4 \cdot 10^5$  à  $5,0 \cdot 10^6$  et pour un  $Pr = 0,709$ , le travail a été concentré sur la variation des contraintes de Reynolds turbulentes et les flux de chaleur et leurs bilans. Ils ont interprété le bilan comme un processus physique qui détermine cet écoulement. Ils ont calculé les contraintes et les bilans en se basant sur la structure trouvée de l'analyse de la stabilité linéaire de la structure laminaire. Les bilans les plus tardifs sont comparés avec ceux complètement établis, pour estimer l'influence de la grande échelle des structures cohérentes sur les bilans.

Yu et al. [48] ont étudié les caractéristiques d'un écoulement turbulent établi de la convection naturelle dans un tube rond uniformément chauffé, et pour une grande gamme du nombre de Reynolds et une gamme complète du nombre de Prandtl. Ces auteurs ont proposé des nouveaux modèles qui sont exprimés directement dans les termes des contraintes et les flux de chaleur. Leurs résultats sont légèrement plus précis que ceux de Heng et al. [49] qui ont utilisé le même modèle de base.

# CHAPITRE II

## Formulation Mathématique

### II.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons seulement les équations modélisant le problème traité, elles expriment les lois de conservation de masse (de continuité), de quantité de mouvement (de Navier-Stokes) et d'énergie. Les démonstrations nécessaires à l'obtention de ces équations sont bien expliquées, et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de la mécanique des fluides et de transfert thermique, par exemple les références [50], [51], [52].

### II.2. Equations générales de transport :

#### II.2.1. Equation de continuité

C'est l'équation qui exprime le principe de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \quad (\text{II} - 1)$$

-Pour un écoulement incompressible l'équation (II-1) devient :

$$\text{div} (\vec{u}) = 0 \quad (\text{II} - 2)$$

#### II.2.2. Equations de quantité de Mouvement :

L'application de la deuxième loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de quantité de mouvement (Navier – Stokes).

Pour un écoulement incompressible ( $\rho = \text{Cte}$ ) à viscosité constante ( $\mu = \text{Cte}$ ), les équations de Navier- Stokes s'écrivent comme suit :

$$\rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}p} + \mu \cdot \Delta \vec{u} \quad (\text{II-3})$$

où :

$\frac{d}{dt}$  : la dérivée lagrangienne

$\vec{F}$  : représente les forces volumiques (l'exemple le plus courant : la pesanteur, pour laquelle  $\vec{F} = \rho \cdot \vec{g}$ ).

Dans notre cas, pour les forces de volume, on ne tient compte que de la force de pesanteur. De plus, les écarts de température sont souvent faibles devant une température absolue de référence. De ce fait il est encore possible de simplifier les équations de quantités de mouvement, ce qui conduit aux approximations de **Boussinesq** :

La variation de la masse volumique en fonction de la température est linéaire, on écrit donc :

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 - \beta(T - T_0))$$

Sachant que:  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  est le coefficient de dilatation à pression constante.

$T_0$  : la température de référence.

$\rho_0$  : la masse volumique à  $T_0$ .

L'équation (II-3) s'écrit alors ;

$$\rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}p} + \mu \cdot \Delta \vec{u} \quad (\text{II-4})$$

$$\rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}p}^* - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0) \cdot \vec{g} + \mu \cdot \Delta \vec{u} \quad (\text{II-5})$$

Dans la décomposition  $\rho = \rho_0 - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0)$  ; le premier terme  $\rho_0$  ne contribue pas au mouvement il est simplement pris en compte dans le terme de pression motrice par  $p^* = p + \rho_0 \cdot g \cdot z$ . Le deuxième terme est le moteur du mouvement et doit bien sûr être gardé dans les équations de Navier-Stokes .

Par contre, la décomposition de  $\rho$  ne fait que modifier légèrement le terme d'inertie par rapport à  $\rho_0 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$  et on peut faire l'approximation :

Si :  $\beta \cdot (T - T_0) \ll 1$   $\rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \approx \rho_0 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$  , le terme  $\beta \cdot (T - T_0) \cdot \rho_0 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$  étant d'un ordre de grandeur inférieur.

Finalement, on retiendra l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p^* - \beta \cdot (T - T_0) \cdot \vec{g} + \nu \cdot \Delta \vec{u} \quad (\text{II-6})$$

Avec  $p^* = p + \rho_0 \cdot g \cdot z$  la pression motrice

### II.2.3. Equation de conservation de l'énergie :

Elle se déduit par la relation traduisant le premier principe de la thermodynamique

L'équation de conservation d'énergie s'écrit comme suit :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{dT}{dt} = \text{div}[\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}] + T \cdot \beta \cdot \frac{dp}{dt} + \varphi + P_s \quad (\text{II-7})$$

Tels que :

$\lambda$  : Conductivité thermique

$\beta$  : Coefficient de dilatation à pression constante

$C_p$  : La chaleur spécifique

$P_s$  : La source volumique de la chaleur

$\varphi$  : La fonction de dissipation

Pour un écoulement à dissipation négligeable ou à vitesse modérée pour les gaz ( $\frac{dp}{dt}$  négligeable), à conductivité thermique  $\lambda$  constante, sans source interne ( $P_s=0$ ),

l'équation (II-7) se simplifie en :

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \Delta T \quad (\text{II-8})$$

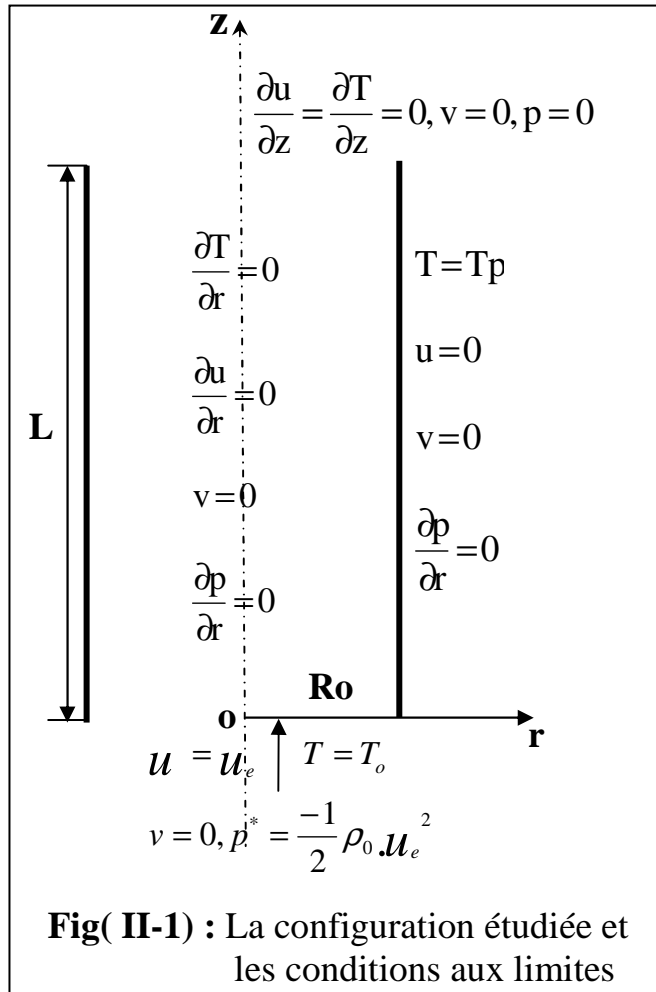
$a = \lambda / \rho \cdot C_p$  : la diffusivité thermique

### II.3. Définition du problème physique :

La configuration étudiée ainsi que les conditions aux limites sont schématisées sur la figure ci dessous.

Il s'agit d'une conduite cylindrique verticale de longueur  $L$  et de rayon  $R_o$  (Fig II-1), et de rapport d'aspect  $A=L/2R_o$ . La paroi de cette conduite est maintenue à une température constante  $T_p$  supérieure à celle du milieu ambiant, donnant naissance à un écoulement convectif ascendant de fluide à travers cette conduite.

En considérant la géométrie du lieu d'écoulement le choix adéquat est celui d'un système de coordonnées cylindriques (Fig II-1).



### II.4. Hypothèses Simplificatrices Fondamentales :

1. L'écoulement est stationnaire dans le cas laminaire, instationnaire dans le cas turbulent, bidimensionnelle et axisymétrique .
2. Le fluide est Newtonien, incompressible et obéissant l'approximation de Boussinesq , cette approximation consiste à considérer que la masse volumique du fluide ne varie que dans le terme des forces de volume (dilatation ) ce qui donne naissance au phénomène de la convection thermique .

3. Les propriétés physiques du fluide ( $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $C_p$ ) sont supposées constantes selon l'approximation de Boussinesq..
4. La chaleur dégagée par frottements visqueux est négligeable devant tout autre phénomène en raison des faibles vitesses rencontrées en convection naturelle.

### II.5. Equations représentatives du problème étudié :

En se plaçant dans le cadre de ces hypothèses, les équations en coordonnées cylindriques s'écrivent :

- ◆ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (\text{II-9})$$

- ◆ **Equations de quantité de mouvement :**

Suivant oz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-1}{\rho_o} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] + g \cdot \beta \cdot (T - T_0) \quad (\text{II-10})$$

Suivant or :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{\rho_o} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial r} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right] - \frac{2 \cdot v \cdot v}{r^2} \quad (\text{II-11})$$

- ◆ **Equation d'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = a \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad (\text{II-12})$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad : \text{ la diffusivité thermique}$$

Finalemment :

Nous avons à déterminer 4 variables ( $u, v, p^*, T$ ) à l'aide de 4 équations ((II-9) à (II-12)) : le système est fermé .

◆ *Le cas turbulent :*

Puisqu'on traite ce cas en utilisant la simulation numérique directe comme outil d'investigation. Le recours aux équations ( (II-9) à (II-12)) en écoulement instationnaire est indispensable.

*-Calcul de la vorticité :*

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{II-13})$$

## II.6. Conditions initiales et aux limites :

**-Dans le cas laminaire :**

Puisque l'écoulement est axisymétrique, nous pouvons adopter les conditions aux limites suivantes :

-Pour  $z = 0$ , et  $0 < r < R_0$  ( entrée ) :  $u = u_e$ ,  $T = T_0$ ,  $v = 0$ ,  $P^* = -\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_e^2$

- Pour  $z = L$ , et  $0 < r < R_0$  ( sortie ) :  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ,  $v = 0$ ,  $p^* = 0$

- Pour  $r = 0$ , et  $0 < z < L$  ( axe ) :  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0$ ,  $v = 0$

- Pour  $r = R_0$ , et  $0 < z < L$  ( Paroi ) :  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $T = T_p$ ,  $\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0$

**-Dans le cas turbulent:**

◆ *Conditions initiales :*

à  $t=0$

$$u(r,z,t=0)=u_e, \quad v(r,z,t=0)=0$$

$$T(r,z,t=0)=T_0, \quad p^*(r,z,t=0)=0$$

◆ *Conditions aux limites :*

Nous allons utiliser les mêmes conditions aux limites du régime laminaire, seulement, on va ajouter à la vitesse d'entrée  $u_e$  un bruit blanc pour perturber l'écoulement, l'expression de la vitesse d'entrée devient :

$$u(r,0,t) = u_e + 0.1 * \text{ran}[(\text{issed}) - 0.5] * \exp[-r^2/8] \quad (\text{II-14})$$

◆ *Choix des conditions relatives à la vitesse et à la pression : [33]*

Le choix des conditions relatives à la vitesse  $u_e$  et à la pression  $p^*$  à l'entrée de la conduite a posé un problème aux chercheurs qui se sont intéressés à la détermination des écoulements de convection naturelle dans les tubes ouverts. Certains comme Miyataka et Fujii [43], Aung et al. [22], Cheng et al. [32], Chang et al. [54] ont supposé une valeur nulle de la pression à l'entrée de la conduite, tandis que d'autres comme El-Shaarawi et Negm [31] et Aihara [50] l'ont prise égale à  $-\frac{1}{2} \cdot \rho_o \cdot u_e^2$  quand le profil de la vitesse à l'entrée est uniforme, ou égale à  $-\frac{\pi}{Q} \int_0^{R_0} u_e^3 \cdot r dr$  quand le profil de la vitesse est parabolique comme le cas de Desrayand et Fichera [34].

J.R.Dyer [2], lors de l'étude du développement d'un écoulement de convection naturelle à l'intérieur d'un cylindre vertical, a examiné les conditions à l'entrée pour les trois cas suivants :

-Un profil de vitesse uniforme et une pression nulle.

-Un profil de vitesse uniforme et une pression égale à  $-\frac{1}{2} \cdot \rho_o \cdot u_e^2$

-Un profil de vitesse parabolique et une pression égale à  $-\frac{\pi}{Q} \int_0^{R_0} u_e^3 \cdot r dr$

Les résultats obtenus numériquement et expérimentalement montrent que les profils de température ainsi que le nombre de Nusselt ne sont pas affectés dans les trois cas figurés, alors que les profils de vitesses se trouvent influencés d'une manière significative aux grands nombres de Rayleigh. Les résultats expérimentaux de Curie et Newman [3] suggèrent qu'il est tout à fait raisonnable de prendre un profil de vitesse uniforme et une pression égale à  $-\frac{1}{2} \cdot \rho_o \cdot u_e^2$  pour les études numériques des écoulements en convection naturelle. Ceci a été confirmé récemment par Marcondes et Maliska [4].

## II.7. Adimensionnement des équations :

On introduit ici, des grandeurs adimensionnelles qui permettent d'une part, d'écrire les équations avec un minimum de paramètres et d'autre part de conférer une certaine généralité aux résultats numériques.

$$Z = \frac{z}{R_o}, \quad R = \frac{r}{R_o}, \quad U = \frac{u \cdot R_o}{a}, \quad V = \frac{v \cdot R_o}{a}, \quad \theta = \frac{T - T_o}{T_p - T_o}, \quad \tau = \frac{t \cdot a}{R_o^2}, \quad P = \frac{p^* \cdot R_o^2}{\rho_o \cdot a^2}$$

Les échelles caractéristiques utilisées pour adimensionner les équations sont analogues à celles de la référence [34].

### ◆ Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} = 0 \quad (\text{II-15})$$

◆ *Equations de quantité de mouvement :*

-Suivant OZ :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \text{Pr} \cdot \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right] + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot \theta \quad (\text{II-16})$$

-Suivant OR:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial V}{\partial Z} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \text{Pr} \cdot \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right] - 2 \cdot \text{Pr} \cdot \frac{V}{R^2} \quad (\text{II-17})$$

◆ *Equation d'énergie :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Z} + V \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R} = \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} \right] \quad (\text{II-18})$$

Dans les équations de conservation de quantité de mouvement apparaissent des nombres caractéristiques adimensionnels, dont les valeurs influencent l'écoulement du fluide dans la conduite :

-Le nombre de Rayleigh :

$$\text{Ra} = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot R_o^3}{a \cdot \nu}$$

-Le nombre de Prandtl :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

## II.8. Conditions aux limites sans dimensions :

- Pour  $Z=0$ , et  $0 < R < 1$  ( entrée ) :  $U = U_e$ ,  $\theta = 0$ ,  $V = 0$ ,  $P = -\frac{1}{2} \cdot U_e^2$

- Pour  $Z=2A$ , et  $0 < R < 1$  ( sortie ) :  $\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0$ ,  $V=0$ ,  $P=0$

- Pour  $R=0$ , et  $0 < Z < 2A$  ( axe ) :  $\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{\partial P}{\partial R} = 0$ ,  $V=0$

- Pour  $R=1$ , et  $0 < Z < 2A$  ( Paroi ) :  $U=0$ ,  $V=0$ ,  $\theta=1$ ,  $\frac{\partial P}{\partial R}=0$

## II.9. Calcul de la vitesse d'entrée :

La vitesse  $U_e$  à l'entrée de la conduite constitue un problème particulier pour les écoulements de la convection naturelle dans des espaces confinés ou semi-confinés. Il n'existe aucune formule explicite pour calculer cette vitesse.

Dyer [2] et Miyataka et Fujii [53] prennent comme paramètres réduits  $Z=z/l \cdot Gr$  et  $U=d^2 \cdot u/v \cdot l \cdot Gr$  ( $d$  : la largeur de la conduite). Dans ces conditions le nombre de Grashof  $Gr$  ne figure plus dans l'équation axiale de la quantité de mouvement.

Ces auteurs choisissent une vitesse à l'entrée, puis procèdent aux calculs des champs de vitesse, de température et de pression pas à pas jusqu'à obtenir une pression nulle. A ce stade ils concluent que  $z=1$  et  $Z=L = 1/Gr$ . Le nombre de Grashof est ainsi déterminé.

Boudebous et al.[33] ont utilisé une méthode itérative pour résoudre ce problème, ils injectent une valeur estimée  $U_e$  à l'entrée de la conduite, puis ils calculent les champs de vitesses, de températures et de pression. Si la pression à la sortie de la conduite est nulle alors ils obtiennent la valeur exacte de  $U_e$ , si ce n'est pas le cas, ils ajustent la valeur de la vitesse  $U_e$  en augmentant ou en diminuant sa valeur initiale d'un petit incrément  $\Delta U$  suivant le signe de la pression à la sortie et ils refont le calcul. Cependant cette méthode est coûteuse en temps de calcul.

Dans le cadre du présent mémoire, nous proposons une expression explicite (approximative) de la vitesse d'entrée  $U_e$ . Cette expression a été établie, en procédant comme suit :

Dans les écoulements de convection naturelle, coexistent trois types de forces : les forces motrices (forces d'Archimède) auxquelles s'opposent les forces d'inertie et les forces visqueuses.

L'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de quantité de mouvement est le suivant :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho_o} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p^* - \beta \cdot \Delta T \cdot \vec{g} + \nu \cdot \Delta \vec{u} \quad (\text{II-19})$$

$$\frac{u_{\max}^2}{Ro} \qquad \beta \cdot \Delta T \cdot g \qquad \nu \cdot \frac{u_{\max}}{Ro}$$

On suppose que les forces d'inertie sont plus dominantes que les forces visqueuses (le cas le plus rencontré dans la pratique)

$$\frac{u_{\max}^2}{Ro} \approx \beta \cdot \Delta T \cdot g \quad (\text{II-20})$$

$$u_{\max} \approx \sqrt{\beta \cdot \Delta T \cdot g \cdot Ro}$$

-La forme adimensionnelle de la vitesse maximale est :

$$U_{\max} = \frac{u_{\max} \cdot Ro}{a} \quad (\text{II-21})$$

$$U_{\max} = \sqrt{\beta \cdot \Delta T \cdot g \cdot Ro} \cdot \frac{Ro}{a}$$

Après quelques simplifications on trouve :

$$U_{\max} = \sqrt{Ra \cdot Pr} \quad (\text{II-22})$$

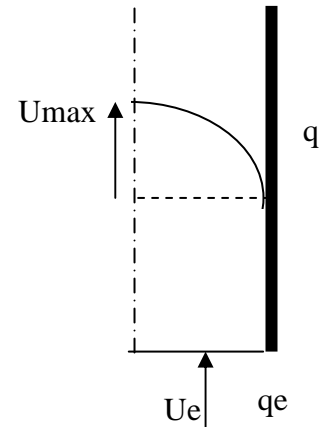
▪ Calcul de la vitesse d'entrée :

En utilisant l'égalité du débit :

$$q = q_e$$

$$q_e = U_e \cdot \pi \cdot R_o^2$$

$q_e$  : le débit à l'entrée



*-calcul du débit q :*

$$U(R) = U_{\max} \left( 1 - \left( \frac{R}{R_o} \right)^2 \right) \quad (\text{II-23})$$

$$q = \int_0^1 2 \cdot \pi \cdot R \cdot U \cdot dR \quad (\text{II-24})$$

Après les calculs on trouve :

$$q = 0.5 \cdot \pi \cdot U_{\max} \cdot R_o^2 \quad (\text{II-25})$$

On a :  $q = q_e$

Alors :

$$0.5 \cdot \pi \cdot U_{\max} \cdot R_o^2 = U_e \cdot \pi \cdot R_o^2 \quad (\text{II-26})$$

$$U_e = 0.5 \cdot U_{\max} \quad (\text{II-27})$$

$$U_e = 0.5 \cdot \sqrt{Ra \cdot Pr} \quad (\text{II-28})$$

## II.10. Calcul du nombre de Nusselt moyen

Nous adoptons la même démarche développée par Payvar[30] et adoptée par Boudebous et al.[33]

D'après le premier principe de la thermodynamique :

La quantité de chaleur cédée par la paroi est égale à celle reçue par le fluide entre l'entrée et la sortie de la conduite :

$$S \cdot h_m \cdot (T_p - T_o) = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot C_p \cdot \int_0^{Ro} u \cdot (T - T_o) \cdot r \cdot dr \quad (\text{II- 29})$$

S : la surface d'échange totale (surface latérale du cylindre )

$$S = 2 \cdot \pi \cdot R_o \cdot L \quad (\text{II-30})$$

hm : représente le coefficient moyen d'échange de la chaleur par convection.

Le nombre de Nusselt moyen est défini par la relation suivante:

$$\overline{Nu} = \frac{hm \cdot 2 \cdot R_o}{\lambda} \quad (\text{II-31})$$

L'écriture du second membre de l'équation ( II- 29 ) sous la forme adimensionnelle, et la substitution de hm et S dans cette équation nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$2 \cdot \pi \cdot R_o \cdot L \cdot \frac{\lambda \cdot \overline{Nu}}{2 \cdot R_o} \cdot (T_p - T_o) = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot R_o \cdot (T_p - T_o) \int_0^1 U \cdot \theta \cdot R \cdot dR \quad (\text{II- 32})$$

Le nombre de Nusselt moyen est donnée par :

$$\overline{Nu} = \frac{2R_o}{L} \int_0^1 U \cdot \theta \cdot R \cdot dR \quad (\text{II- 33})$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A_0} \int_0^1 U \cdot \theta \cdot R \cdot dR \quad (\text{II- 34})$$

Pour calculer l'intégrale  $\int_0^1 U \cdot \theta \cdot R \cdot dR$  on a utilisé la méthode des trapèzes, le développement de cette méthode est donné dans l'annexe A .

### II.11. Généralisation du modèle mathématique :

La totalité des équations décrivant l'écoulement d'un fluide peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection- diffusion pour la variable  $\Phi$ .

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{R}.\Phi) + \frac{\partial}{\partial Z}(\mathbf{R}.U.\Phi) + \frac{\partial}{\partial R}(\mathbf{R}.V.\Phi) = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \Gamma_{\Phi} . \mathbf{R} . \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] + \frac{\partial}{\partial R} \left[ \Gamma_{\Phi} . \mathbf{R} . \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] + \mathbf{R} . \mathbf{S}_{\Phi} \quad (\text{III-35})$$

(a)
(b)
(c)
(d)

Où :

$\Phi$ : assimilable à toute grandeur physique transportable telle que : la température ,la pression .

Les quatres termes de l'équation (II-35) sont respectivement :

- (a) : le terme qui exprime le taux de variation de  $\Phi$  dans le temps par unité de volume.
- (b) : le terme qui exprime le taux de transport de  $\Phi$  par convection .
- (c) : le terme qui exprime le taux de transport de  $\Phi$  par diffusion .
- (d) : le terme source .

Leurs expressions sont données dans le tableau suivant :

Equation	$\Phi$	$\Gamma_{\Phi}$	$S_{\Phi}$
Equation de continuité	1	0	0
Equation de quantité de mouvement suivant Z	U	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial Z} + Ra . Pr . \theta$
Equation de quantité de mouvement suivant R	V	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial R} - 2 . Pr . \frac{V}{R^2}$
Equation d'énergie	$\theta$	1	0

**Tableau II-1** : Présentation des différents termes de l'équation de transport considérée

# CHAPITRE III :

# METHODE NUMERIQUE

## III.1. Introduction :

Depuis des années le développement des ordinateurs a encouragé les scientifiques à résoudre des problèmes de plus en plus complexes pour lesquels des solutions analytiques ne peuvent être trouvées. Ces types de problèmes sont généralement modélisés par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Pour obtenir une solution numérique, ces problèmes doivent être discrétisés en transformant les équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéarisés par une méthode de discrétisation avant de les résoudre par des méthodes directes ou itératives. Les trois grandes méthodes de discrétisation utilisées dans les codes de calcul sont : les volumes finis, les différences finies et les éléments finis.

## III.2. Représentation de la méthode des volumes finis :

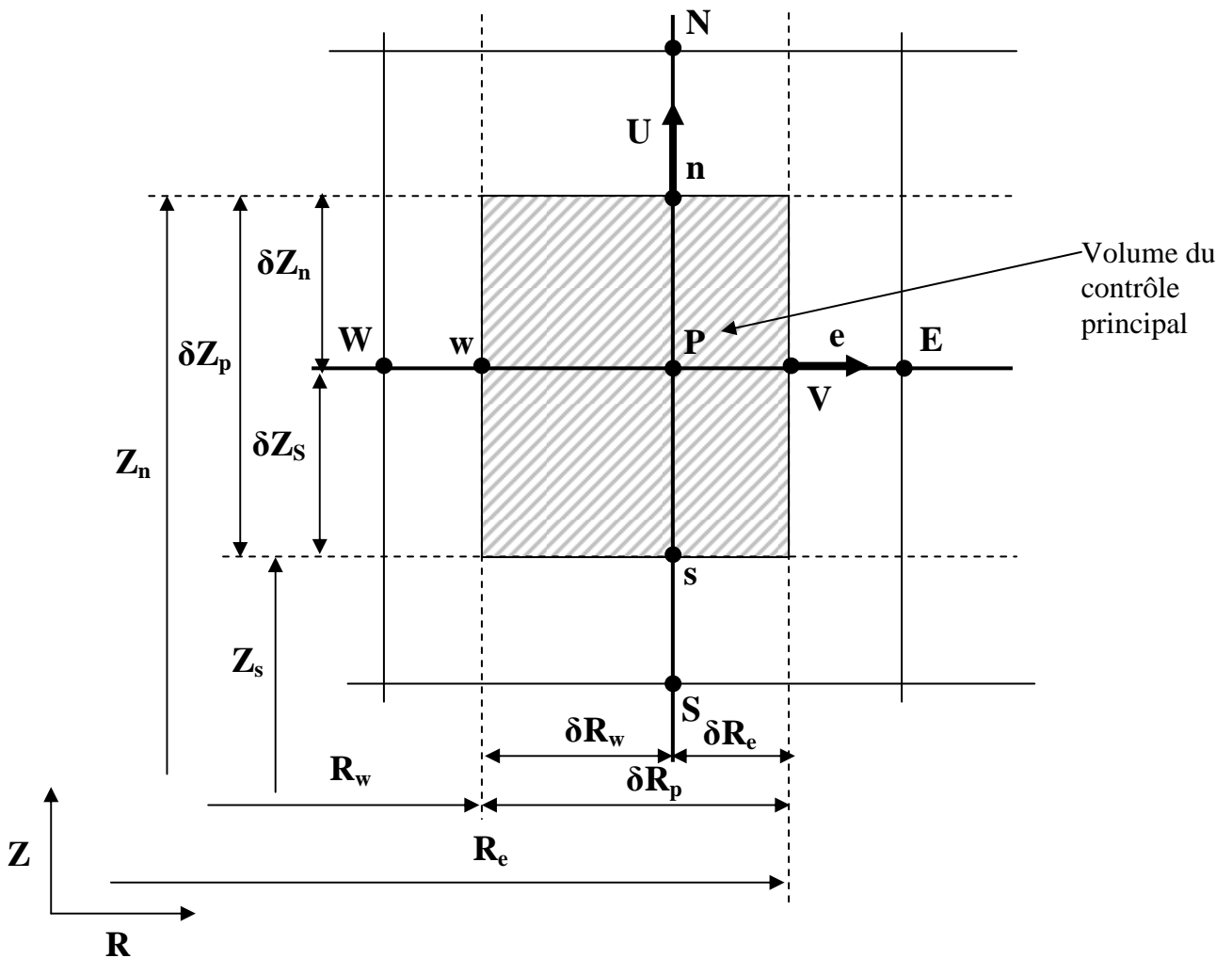
La méthode des volumes finis, choisie par notre étude, a été développée par Spalding et Patankar [1] sa grande simplicité de mise en œuvre a fait qu'elle a connu un essor fulgurant depuis les années 1970-1980, elle est à l'origine de la majorité des codes de calculs.

Elle consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle (i.e., cellules) puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement ...) sur ces petits volumes. L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs ; en bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

La discrétisation spatiale n'est pas suffisante lorsqu'il s'agit d'un écoulement non permanent. Une discrétisation temporelle, par une division du temps de simulation en différents pas de temps  $\Delta t$ , s'avère nécessaire pour procéder ensuite à une intégration de chaque équation de conservation pour chaque pas de temps.

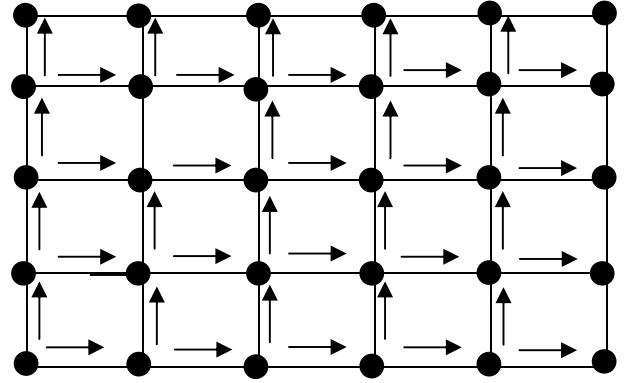
### III.3. Maillage :

Le domaine physique est divisé en un nombre de volumes finis, et en chaque volume, on considère un nœud situé à l'intérieur de ce volume. Les faces d'un volume de contrôle typique sont localisées aux points  $e, w, n, s$  (voir Fig (III-1) ). Notons  $P$  le nœud du volume de contrôle considéré,  $E, W, N, S$  sont les nœuds des volumes de contrôles adjacents respectivement à l'est, ouest, nord et sud de celui contenant  $P$ . Les quantités scalaires : pression, température sont stockées aux centres des volumes de contrôle. Par contre, les composantes ; radiale  $V$  et axiale  $U$  de la vitesse sont localisées respectivement aux faces  $e$  et  $n$  du volume de contrôle.



Fig( III-1 ) : Volume de contrôle principal

Localisation	variable
●	P,θ
→	V
↑	U



Fig(III-2) : Localisation des variables

◆ Les variations de la vitesse et de la température près de la paroi sont importantes, un maillage raffiné à ce niveau est utilisé (voir Fig (III-3) ). Pour générer ce maillage nous avons utilisé l'expression suivante :

$$R (I) = R_0 \cdot \sin \left( \frac{\pi \cdot I}{2 \cdot NI} \right)$$

Soit :

NI : le nombre de nœuds suivant R

NJ : le nombre de nœuds suivant Z

I : Indice des nœuds suivant R

J : Indice des nœuds suivant Z

◆ Dans la direction verticale on a choisi un maillage uniforme

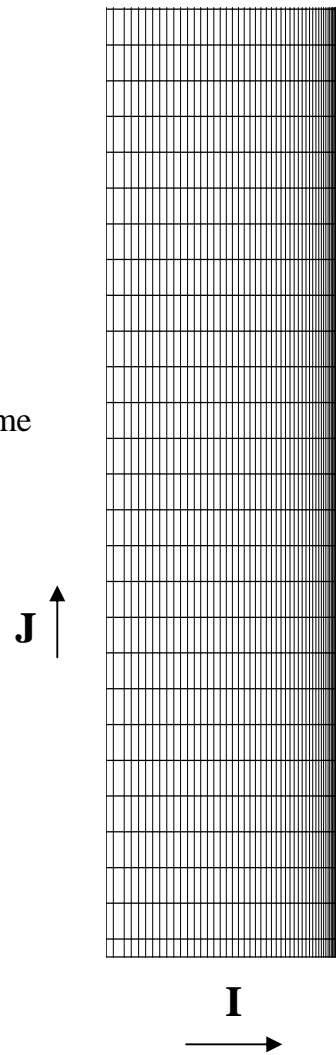


Fig (III-3) : maillage du domaine de calcul

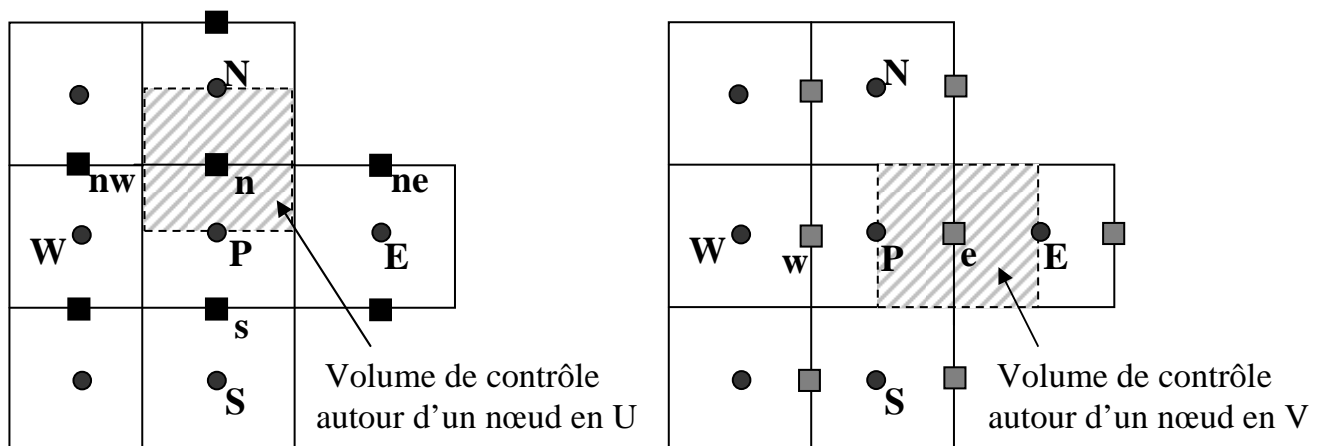
▪ **Hypothèses simplificatrices :**

A ce stade, on doit faire des approximations dans le but de pouvoir mettre l'équation de transport sous une forme algébrique.

- Les composantes de vitesse  $U$  et  $V$  dans les deux directions ainsi que la diffusivité  $\Gamma_\Phi$ , sont supposées constantes sur chaque face du volume de contrôle.
- La variable généralisée  $\Phi$  varie linéairement entre les nœuds principaux, dans les deux directions .

▪ **Maillage décalé : « Staggered grid »**

La discrétisation d'une équation de transport de diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes ( $U_s, U_n, V_e, V_w$ ). Il est donc intéressant de les calculer directement sur les interfaces sans avoir à effectuer d'interpolation. D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse en « damier » est vue comme un champ uniforme. Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées « staggered grid », une grille principale est construite sur laquelle on calcule la pression et la température. Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale (Fig(III-4)) .



■ Nœuds pour la composante U de la vitesse    ■ Nœuds pour la composante V de la vitesse

**Fig (III-4) : Maillage décalé**

### III.4. Discrétisation des équations de transport :

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, toutes les équations peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable  $\Phi$ .

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation de transport pour la variable  $\Phi$  par rapport au temps et sur chacun de volumes de contrôle.

Avant l'intégration, on réécrit l'équation (II-35) de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{R} \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_Z) + \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_R) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}_\Phi \quad (\text{III-1})$$

Où :

$\mathbf{J}_Z$  et  $\mathbf{J}_R$  les flux totaux (convection + diffusion) à travers les surfaces du volume de contrôle dans les directions Z et R, ils sont donnés par :

$$\mathbf{J}_Z = (\mathbf{U} \cdot \Phi) - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)$$

$$\mathbf{J}_R = (\mathbf{V} \cdot \Phi) - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)$$

On intègre l'équation (III-1) sur le volume de contrôle correspondant à la variable  $\Phi$  et par rapport au temps.

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_w \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{R} \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_Z) + \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_R) \right] d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{Z} \cdot d\tau = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_w \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}_\Phi d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{Z} \cdot d\tau \quad (\text{III-2})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[ (\Phi \cdot \Delta V) + (\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{a}_e - \mathbf{J}_w \cdot \mathbf{a}_w) + (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{a}_n - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{a}_s) \right] d\tau = \bar{\mathbf{S}}_\Phi \cdot \Delta V \quad (\text{III-3})$$

Où:

$\Delta V$ : le volume du volume de contrôle

$\bar{\mathbf{S}}_\Phi$  : La source moyenne.

Les  $a_e$ ,  $a_w$ ,  $a_n$  et  $a_s$  sont les aires est, ouest, nord et sud des faces du volume de contrôle.

$$a_e = \int_n^s (R_e dZ), \quad a_w = \int_s^n R_w dZ, \quad a_n = \int_w^e R_n dR, \quad a_s = \int_w^e R_s dR$$

$J_e$ ,  $J_w$ ,  $J_n$  et  $J_s$  sont les flux totaux à travers les faces est, ouest, nord et sud du volume de contrôle .

$$\left. \begin{aligned} J_e &= (V.\Phi)_e - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_e \\ J_w &= (V.\Phi)_w - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_w \\ J_n &= (U.\Phi)_n - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)_n \\ J_s &= (U.\Phi)_s - \left( \Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-4})$$

#### ◆ Linéarisation du terme source :

Le terme source linéarisé est écrit sous la forme linéarisée suivante :

$$\bar{S}_\Phi = S_C + S_P \cdot \Phi_P \quad (\text{III-5})$$

$S_P$  : est le coefficient de  $\Phi_P$

$S_C$  : la partie constante de  $\bar{S}_\Phi$  qui ne dépend pas de  $\Phi_P$ .

Pour que la solution converge,  $S_P$  doit être dans tous les cas inférieur à zéro (condition de Scarborough 1958 [1]).

### III.4.1. Discrétisation temporelle :

L'intégration temporelle de l'équation (III - 3) se fait sur l'échelle de temps  $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ .

Une distribution initiale des valeurs de la variable  $\Phi$  est donnée à l'instant  $\tau$ , et on cherche les valeurs du champs à l'instant  $\tau + \Delta\tau$ .

Les valeurs anciennes de  $\Phi$  seront notées par  $\Phi^0$  et les nouvelles valeurs (inconnues) à l'instant  $\tau + \Delta\tau$  par  $\Phi^1$ .

Pour décrire la variation de  $\Phi$  avec le temps de  $\tau$  à  $\tau + \Delta\tau$ , plusieurs suppositions sont possibles et un grand nombre de celles-ci peut être généralisé par l'expression suivante :

$$\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \Phi \, d\tau = [f\Phi^1 + (1 - f)\Phi^0] \Delta\tau \quad (\text{III-6})$$

Où :  $f$  est un facteur compris entre 0 et 1

Utilisant cette formule pour évaluer les termes :

$$J_i = \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} J_i \cdot a_i \, d\tau \quad (i=e,w,n,s) \text{ on obtient :}$$

$$J_i = [f (J_i \cdot a_i)^1 + (1 - f) (J_i \cdot a_i)^0] \Delta\tau$$

Pour certaines valeurs spécifiques du facteur  $f$ , la discrétisation se réduit à l'emploi d'un schéma précis.

◆ *Schéma de Crank-Nicolson :*

Il correspond à  $f=0.5$ , ce schéma peut être instable lorsque la source est négative, en plus si le pas de temps est grand, on risque d'obtenir des résultats erronés.

◆ *Schéma explicite :*

Si  $f=0$  la valeur de la variable de transport  $\Phi^1$  est exprimée explicitement en fonction de la variable connue au temps précédent  $\Phi^0$ .

Malgré la simplicité de la résolution avec ce schéma, il y a un risque d'instabilité qui va limiter le pas du temps à une faible valeur, et par conséquent l'augmentation du temps de calcul.

◆ *Schéma implicite :*

Ce schéma correspond à  $f=1$ , la variable  $\Phi$  prend la valeur  $\Phi^0$  uniquement au temps  $\tau$  et prend la valeur  $\Phi^1$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta\tau$  et au temps  $\tau+\Delta\tau$ .

Ce schéma est inconditionnellement stable du fait que tous les coefficients ainsi que la source sont toujours positifs. Vu cet avantage, ce schéma sera adopté dans cette présente étude.

Pour alléger l'écriture, on enlève l'exposant 1.  $\Phi$  prend sa valeur à l'instant  $\tau+\Delta\tau$

Avec un tel choix, l'équation (III-3) prendra donc la forme :

$$(\Phi_P - \Phi_P^0) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta \tau} + (J_e \cdot a_e - J_w \cdot a_w) + (J_n \cdot a_n - J_s \cdot a_s) = \bar{S}_\Phi \cdot \Delta V \quad (\text{III-7})$$

### III.4.2. Discrétisation Spatiale :

#### ◆ Discrétisation de l'équation de continuité :

Pour  $\Phi=1$  et  $\overline{S}_\phi=0$  l'équation (III-7) donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III-8})$$

Avec :

$$\begin{aligned} F_w &= (V.a)_w, \quad F_e = (V.a)_e \\ F_n &= (U.a)_n, \quad F_s = (U.a)_s \end{aligned}$$

$F_i$  ( $i= e, w, n, s$ ) est le flux convectif à travers les faces  $e, w, n$  et  $s$  du volume de contrôle .

#### ◆ Discrétisation finale des équations de conservation :

En multipliant l'équation (III-8) par  $\Phi_P$  et en lui soustrayant l'équation (II-7) on obtient :

$$\begin{aligned} &(\Phi_P - \Phi_P^o) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta \tau} + (J_e \cdot a_e - F_e \cdot \Phi_P) - (J_w \cdot a_w - F_w \cdot \Phi_P) \\ &+ (J_n \cdot a_n - F_n \cdot \Phi_P) - (J_s \cdot a_s - F_s \cdot \Phi_P) = \overline{S}_\Phi \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

Les termes entre parenthèses de l'équation (III-9) peuvent être mis sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} J_e \cdot a_e - F_e \cdot \Phi_P &= A_E (\Phi_P - \Phi_E) \\ J_w \cdot a_w - F_w \cdot \Phi_P &= A_W (\Phi_P - \Phi_W) \\ J_n \cdot a_n - F_n \cdot \Phi_P &= A_N (\Phi_P - \Phi_N) \\ J_s \cdot a_s - F_s \cdot \Phi_P &= A_S (\Phi_P - \Phi_S) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-10})$$

En introduisant ces relations dans l'équation (III-9), on obtient pour chaque point P du maillage, une équation discrétisée de la forme :

$$A_P \cdot \Phi_P = A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + b \quad (\text{III-11})$$

Avec :

$$A_E = D_e \cdot A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$A_W = D_w \cdot A(|P_w|) + \|F_w, 0\|$$

$$A_N = D_n \cdot A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|$$

$$A_S = D_s \cdot A(|P_s|) + \|F_s, 0\|$$

$$b = S_C \cdot \Delta V + A_P^0 \cdot \Phi_P^0$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta V}{\Delta \tau}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 - S_P \cdot \Delta V$$

La notation  $\|A, B\|$  désigne la plus grande valeur de A et B c-à-d  $\max(A, B)$

Di (i=e, w, n, s) sont les coefficients de diffusion donnés par les relations :

$$D_e = \Gamma_e \frac{a_e}{(\delta R)_e} \quad , D_w = \Gamma_w \frac{a_w}{(\delta R)_w} \quad , D_n = \Gamma_n \frac{a_n}{(\delta Z)_n} \quad , D_s = \Gamma_s \frac{a_s}{(\delta Z)_s}$$

Pi (i=e, w, n, s) sont les nombres de Peclets définis par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad , \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad , \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad , \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

### III.4.3. Schémas de Discrétisation Spatiale :

Le traitement spatial des différents termes qui composent l'équation (III-9) est de difficulté inégale. En effet, le terme de diffusion et le terme source posent peu de problèmes et ils sont discrétisés en espace à l'aide de schémas centrés du second ordre. En revanche, le terme de convection est beaucoup plus délicat à traiter car son traitement détermine la précision de la solution de l'équation.

C'est pour quoi, un certain nombre de méthodes de discrétisation très différentes les unes des autres, se différenciant par leur précision, sont mises à la disposition de l'utilisateur pour traiter le terme de convection. Toute la difficulté réside dans le choix du schéma puisque les modèles les moins précis sont souvent très robustes et rapides tandis qu'à l'inverse, les modèles les plus précis sont moins robustes et plus lents.

Les différents schémas proposés par Patankar[1] permettent d'exprimer la fonction  $A(|P|)$  sont les suivants :

#### ◆ Schéma des différences centrées :

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = 1 - 0.5 \cdot |P| \quad (\text{III-12})$$

Les coefficients de l'équation générale de transport discrétisée seront :

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e \cdot (1 - 0.5 \cdot |P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w \cdot (1 - 0.5 \cdot |P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n \cdot (1 - 0.5 \cdot |P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s \cdot (1 - 0.5 \cdot |P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-13})$$

Le schéma des différences centrées est basé sur une interpolation linéaire des valeurs de  $\Phi$  sur les interfaces.

Il est stable pour  $|P| \leq 2$  et donne des coefficients de discrétisation ( $A_E$ ,  $A_W$ ,  $A_N$ ,  $A_S$ ) positifs.

Ce schéma est utilisé dans le cas où la convection ne domine pas la diffusion, il permet un compromis satisfaisant entre la précision des résultats et l'économie de temps de calcul, mais une fois la convection est dominante, ce schéma est sujet d'une instabilité numérique.

#### ◆ Schéma Upwind :

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'équation :

$$A(|P|) = 1 \quad (\text{III-14})$$

D'où les expressions suivantes des coefficients :

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-15})$$

Ce Schéma est appliqué pour les écoulements à dominance convective suivant le sens d'écoulement, le schéma Upwind affecte à la variable  $\Phi$  sur la face du volume de contrôle sa valeur sur le nœud en amont. Il est inconditionnellement stable, il perd son exactitude pour des vitesses d'écoulement élevées.

◆ *Schéma Hybride* :

La fonction  $A(|P|)$  est exprimée comme suit :

$$A(|P|) = \max\left(0, 1 - 0.5 \cdot |P|\right) \quad (\text{III-16})$$

D'où les coefficients de l'équation générale de transport discrétisée ;

$$\left. \begin{aligned} A_E &= \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \\ A_W &= \max\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) \\ A_N &= \max\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right) \\ A_S &= \max\left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-17})$$

Ce schéma est la combinaison des deux schémas précédents rassemblant ainsi leurs caractéristiques. Donc dans ce cas si l'écoulement est à dominance convective ( $|P| \geq 2$ ), les termes convectifs sont approximés par le schéma Upwind, autrement ils sont approximés par le schéma des différences centrées.

En appliquant ce schéma on aura un compromis entre stabilité et précision de la méthode numérique.

◆ *Schéma Exponentiel* :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1} \quad (\text{III-18})$$

Les coefficients de l'équation générale de transport discrétisé sont exprimés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} A_E &= \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} & , & & A_w &= \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ A_N &= \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} & , & & A_S &= \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-19})$$

Ce schéma est issu de la résolution analytique (exacte) d'un problème unidimensionnel permanent de convection –diffusion sans source.

Malgré cette caractéristique, l'utilisation de ce schéma est moins répandue dans la pratique, car le calcul des exponentielles est coûteux en temps de machine.

◆ *Schéma de la loi de Puissance : « Power law »*

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = \max[0, (1 - 0.1 \cdot |P|)^5] \quad (\text{III-20})$$

D'où les coefficients de l'équation générale discrétisée :

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e \cdot \max \left[ 0, (1 - 0.1 \cdot |P_e|)^5 \right] + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w \cdot \max \left[ 0, (1 - 0.1 \cdot |P_w|)^5 \right] + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n \cdot \max \left[ 0, (1 - 0.1 \cdot |P_n|)^5 \right] + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s \cdot \max \left[ 0, (1 - 0.1 \cdot |P_s|)^5 \right] + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-21})$$

Il est dérivé du schéma exponentiel par interpolation polynomiale entre deux nœuds adjacents, ce schéma s'approche mieux de la solution exacte avec l'augmentation du nombre d'intervalles d'approximation.

Le schéma de la loi de puissance donne une très bonne approximation de la solution exacte, en plus il est recommandé par Patankar [1] ; c'est pour quoi notre choix s'est posé sur ce schéma.

#### III.4.4. Discrétisation des termes sources :

Les expressions des termes sources pour toute grandeur  $\Phi$  sont données dans le tableau ( II-1 ).

##### ◆ Terme source pour la composante axiale $U$ de la vitesse :

Sur le volume de contrôle de la composante  $U$  (Fig ( III-4)) on discrétise le terme source.

$$S^U = S_C^U + S_P^U \cdot U_P$$

$$S_P^U = 0 \quad (\text{III-22})$$

$$S_C^U = -\frac{\partial P}{\partial Z} + Ra \cdot Pr \cdot \theta$$

L'intégration du terme source sur le volume de contrôle correspond conduit à :

$$\int_s^e \int_w^n \left[ -\frac{\partial P}{\partial Z} + Ra \cdot Pr \cdot \theta \right] \cdot R \cdot dR \cdot dZ = \left[ \frac{P_p - P_s}{\delta Z_s} + Ra \cdot Pr \cdot \theta_p \right] \cdot \Delta V \quad (\text{III-23})$$

◆ *Terme source pour la composante radiale V de la vitesse :*

$$S^V = S_C^V + S_P^V \cdot V_P \quad (\text{III-24})$$

$$S_P^V = -2 \cdot \frac{Pr}{R^2}$$

$$S_C^V = -\frac{\partial P}{\partial R}$$

Similairement au cas précédent, l'intégration du terme source sur le volume de contrôle correspondant conduit :

$$\int_s^e \int_w^n \left[ -\frac{\partial P}{\partial R} - 2 \frac{Pr}{R^2} \cdot V \right] \cdot R \cdot dR \cdot dZ = \left[ \frac{P_p - P_w}{\delta R_w} - 2 \frac{Pr}{R_p^2} \cdot V_p \right] \cdot \Delta V \quad (\text{III-25})$$

### III.5. Discrétisation des conditions aux limites :

#### -La sortie :

- *La vitesse U :*

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

Sa discrétisation est : 
$$U(I, NJ) = \frac{4 \cdot U(I, NJ-1) - U(I, NJ-2)}{3}$$

Pour plus de détails sur le développement de cette formule voir annexe B

- *La température  $\theta$  :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0$$

Sa discrétisation est : 
$$\theta(I, NJ) = \frac{4 \cdot \theta(I, NJ-1) - \theta(I, NJ-2)}{3}$$

**-L'axe :**

▪ *La vitesse U :*

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

Sa discrétisation est :  $U(1, J) = \frac{4 \cdot U(2, J) - U(3, J)}{3}$

▪ *La température  $\theta$  :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0$$

Sa discrétisation est :  $\theta(1, J) = \frac{4 \cdot \theta(2, J) - \theta(3, J)}{3}$

▪ *La pression P :*

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0$$

Sa discrétisation est :  $P(1, J) = \frac{4 \cdot P(2, J) - P(3, J)}{3}$

**La paroi :**

▪ *La pression P :*

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0$$

Sa discrétisation est :  $P(NI, J) = \frac{4 \cdot P(NI - 1, J) - P(NI - 2, J)}{3}$

# CHAPITRE IV

## Résolution des Equations Algébriques

### IV.1. Introduction :

Lors de la discrétisation des équations de quantité de mouvement, deux problèmes sont survenus, à savoir :

- Etant dépendants de la variable recherchée, les coefficients de discrétisation posent le problème de la non-linéarité du système.
- Les termes sources des équations de quantité de mouvement, impliquent des grandeurs de pression or nous ne disposons pas d'équation pour cette variable jusqu'à présent, ce qui rend la résolution directe de ces équations impossible.

La première de ces deux difficultés pourra être levée par un traitement itératif des systèmes d'équations. Quant à la seconde, elle sera surmontée par l'utilisation d'une équation relative à la pression dérivée principalement de l'équation de continuité. Des méthodes indirectes sont alors utilisées pour obtenir le champ de pression. Parmi les algorithmes existants pour le traitement de la relation vitesse – pression, nous pouvons citer : "**SIMPLE**" (*acronyme Semi –Implicite Pressure Linked Equations* ), SIMPLE Révisé « **SIMPLER** » et l'algorithme « **PISO** »

L'algorithme "SIMPLE" adopté dans la présente étude, a été développé par Patankar et Spalding (1972), son idée générale est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables qui vérifient les équations de quantité de mouvement vérifient également l'équation de continuité.

### IV.2. Algorithme SIMPLE :

L'algorithme SIMPLE est une procédure prédiction –correction, avec laquelle il nous sera possible de tirer un champ de pression et de vitesses vérifiant à la fois les équations de quantité de mouvement et celle de continuité.

L'étape de prédiction consiste à donner un champ de pression  $P^*$  dans le domaine d'écoulement, cette distribution de pression générera un champ de vitesses  $(U^*, V^*)$  ne vérifiant pas l'équation de continuité, et de ce fait donnant lieu à un résidu massique  $R_m$  accumulé dans le volume de contrôle dû à la fausse distribution de pression. Ceci peut se traduire mathématiquement par :

$$\left. \begin{aligned} A_n \cdot U_n^* &= \sum A_i \cdot U_i^* + b + a_n \cdot (P_p^* - P_N^*) \Delta R \\ A_s \cdot U_s^* &= \sum A_i \cdot U_i^* + b + a_s \cdot (P_S^* - P_p^*) \Delta R \\ A_e \cdot V_e^* &= \sum A_i \cdot V_i^* + b + a_e \cdot (P_p^* - P_E^*) \Delta Z \\ A_w \cdot V_w^* &= \sum A_i \cdot V_i^* + b + a_w \cdot (P_w^* - P_p^*) \Delta Z \end{aligned} \right\} \quad (IV-1)$$

i: représente l'indice des points autour de w, e, s et n

b: contient tous les termes de sources de l'équation sauf ceux de pression.

l'indice \* sur U et V désigne que ces dernières sont obtenues en utilisant des champs estimés de vitesses et de pression.

Comme les vitesses obtenues des équations (IV-1) ne satisfont pas l'équation de continuité pour chaque volume de contrôle, le résidu massique  $R_m$  est définie par :

$$R_m = U_n^* \cdot a_n - U_s^* \cdot a_s + V_e^* \cdot a_s - V_w^* \cdot a_w \quad (IV-2)$$

Dans le but de réduire le résidu massique à zéro et satisfaire l'équation de continuité, une série de correction de pression est nécessaire. La pression correcte sera comme suit :

$$P = P^* + P'$$

où : P' est la correction de pression.

Cette correction de pression, doit sans doute affecter les champs de vitesses, qui devient :

$$\left. \begin{aligned} U_n &= U_n^* + U_n' \\ U_s &= U_s^* + U_s' \\ V_e &= V_e^* + V_e' \\ V_w &= V_w^* + V_w' \end{aligned} \right\} \quad (IV-3)$$

U' : correction de la composante axiale de la vitesse U

V' : correction de la composante radiale de la vitesse V

Ces valeurs correctes de pression et des composantes de vitesse doivent satisfaire les équations de quantité de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} A_n(U_n^* + U_n') &= \sum A_i \cdot (U_i^* + U_i') + b + a_n \cdot (P_p^* + P_p' - P_N^* - P_N') \Delta R \\ A_s(U_s^* + U_s') &= \sum A_i \cdot (U_i^* + U_i') + b + a_s \cdot (P_S^* + P_S' - P_P^* - P_P') \Delta R \\ A_e(V_e^* + V_e') &= \sum A_i \cdot (V_i^* + V_i') + b + a_e \cdot (P_p^* + P_p' - P_E^* - P_E') \Delta Z \\ A_w(V_w^* + V_w') &= \sum A_i \cdot (V_i^* + V_i') + b + a_w \cdot (P_W^* + P_W' - P_P^* - P_P') \Delta Z \end{aligned} \right\} \quad (IV-4)$$

En soustrayant les équations (IV-1) des équations (IV-4) on trouve :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n \cdot U'_n &= \sum A_i \cdot U'_i + b + a_n \cdot (P'_p - P'_N) \Delta R \\
 A_s \cdot U'_s &= \sum A_i \cdot U'_i + b + a_s \cdot (P'_S - P'_p) \Delta R \\
 A_e \cdot V'_e &= \sum A_i \cdot V'_i + b + a_e \cdot (P'_p - P'_E) \Delta Z \\
 A_w \cdot V'_w &= \sum A_i \cdot V'_i + b + a_w \cdot (P'_w - P'_p) \Delta Z
 \end{aligned} \right\} \quad (IV-5)$$

Pour obtenir ces corrections, on doit résoudre les équations de discrétisation complète de  $U'$  et  $V'$ , mais si on fait l'approximation de ne retenir que les termes de pression, on aboutit aux équations modifiées suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n \cdot U'_n &= a_n \cdot (P'_p - P'_N) \Delta R \\
 A_s \cdot U'_s &= a_s \cdot (P'_S - P'_p) \Delta R \\
 A_e \cdot V'_e &= a_e \cdot (P'_p - P'_E) \Delta Z \\
 A_w \cdot V'_w &= a_w \cdot (P'_w - P'_p) \Delta Z
 \end{aligned} \right\} \quad (IV-6)$$

D'où les expressions suivantes des valeurs correctes de pression et des composantes de vitesse :

$$P=P^* + P' \tag{IV-7}$$

$$\left. \begin{aligned} U_n &= U'_n + d_n \cdot (P'_p - P'_N) \\ U_s &= U'_s + d_s \cdot (P'_S - P'_p) \\ V_e &= V'_e + d_e \cdot (P'_p - P'_E) \\ V_w &= V'_w + d_w \cdot (P'_w - P'_p) \end{aligned} \right\} \tag{IV-8}$$

les coefficients de pression dn, ds, de, dw sont définis comme suit :

$$d_n = \frac{a_n}{A_N}, \quad d_s = \frac{a_s}{A_S}, \quad d_e = \frac{a_e}{A_E}, \quad d_w = \frac{a_w}{A_w}$$

En insérant les expressions (IV-8) dans l'équation de continuité discrétisée, on aboutit à l'équation de correction de pression suivante :

$$A_p \cdot P'_p = A_E \cdot P'_E + A_w \cdot P'_w + A_N \cdot P'_N + A_S \cdot P'_S + b' \tag{IV-9}$$

Les coefficients de cette équation sont donnés par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} A_E &= d_e \cdot \Delta Z \\ A_w &= d_w \cdot \Delta Z \\ A_N &= d_n \cdot \Delta R \\ A_S &= d_s \cdot \Delta R \\ A_p &= A_E + A_w + A_N + A_S \\ b' &= (U'_s - U'_n) \Delta R + (V'_w - V'_e) \Delta Z \end{aligned} \right\} \tag{VI-10}$$

### IV.3. Séquences de l'algorithme SIMPLE :

1. Estimer un champ de pression  $P^*$
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement pour en tirer les champs de vitesses  $U^*$  et  $V^*$  .
3. Résoudre l'équation de correction de pression  $P'$  .
4. Corriger la pression  $P : P=P'+P^*$
5. Corriger les champs de vitesses  $U$  et  $V$  en utilisant les formules de corrections .
6. Prendre le champ  $P$  comme une nouvelle estimation et recommencer la séquence à partir de l'étape 2, jusqu'à la convergence .

### IV.4. La méthode de sous-relaxation :

La sous relaxation est régulièrement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter la divergence du processus itératif . L'expérience numérique montre que, dans les calculs de problèmes complexes, les changements trop rapides des valeurs de  $\Phi$  d'une itération à l'autre risque de provoquer des instabilités numériques. Par conséquent, pour minimiser les risques de divergence, il est toujours souhaitable d'amortir l'amplitude de ces changements en utilisant la technique de sous relaxation .

Comme nous l'avons vu précédemment, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme suivante :

$$A_p \cdot \Phi_p = \sum_i A_i \cdot \Phi_i + S_c \cdot \Delta V \quad (\text{IV- 11})$$

Si nous notons  $\Phi_p^n$  la valeur de  $\Phi_p$  à l'éniesme itération , il est possible d'écrire :

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \left[ \frac{\sum_i A_i \cdot \Phi_i + S_c \cdot \Delta V}{A_p} - \Phi_p^{n-1} \right] \quad (\text{IV-12})$$

Le terme entre parenthèses peut être interprété comme la variation de  $\Phi_p$  de l'iteration (n-1) à l'iteration (n), cette variation peut être amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation  $\alpha_\phi$  de la manière suivante :

$$\phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \alpha_\phi \left[ \frac{\sum_i A_i \cdot \Phi_i + S_c \cdot \Delta V}{A_p} - \Phi_p^{n-1} \right] \quad (\text{IV-13})$$

cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{A_p}{\alpha_\phi} \phi_p^n = \sum_i A_i \cdot \Phi_i^n + S_c \cdot \Delta V + \frac{(1 - \alpha_\phi)}{\alpha_\phi} \cdot A_p \cdot \Phi_p^n \quad (\text{IV-14})$$

Cette sous relaxation est donc appliquée à toutes les variables, hormis la pression, cette dernière demande également à être sous relaxée afin que l'équation de continuité soit résolue sans problème de divergence. La sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse –pression . Elle est simplement introduite dans la correction de pression P' sous la forme suivante :

$$P = P^* + \alpha_p \cdot P' \quad (\text{IV-15})$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre les valeurs 0 et 1 . Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, ils sont forts, plus la sous relaxation est faible et plus il y a de chance de faire intervenir des instabilités dans le processus iteratif. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure iterative.

Pour finir, rappelons que la valeur de ces coefficients peut être imposée différente d'une variable à l'autre .

### IV.5. Critère de convergence :

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle converge lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.

Le critère de convergence utilisé par le code de calcul repose sur le résidu de l'équation de continuité. En toute rigueur, le résidu correspond à la somme, sur toutes les mailles, des erreurs effectués sur l'équation discrétisée lorsque les variables déterminées par le processus sont réintégrées dans l'équation discrétisée. Par définition :

$$\text{RESOR } \Phi = \sum_{i,j} |R_{\Phi}|_{i,j} \quad (\text{IV-16})$$

$$R_{\Phi} = \sum A_i \cdot \Phi_i + b - A_p \cdot \Phi_p$$

RESOR $\Phi$  est la somme des résidus normalisés en valeurs absolue de l'équation pour  $\Phi$  associée à tous les volumes de contrôle du domaine.

En choisissant une valeur de Résidu à ne pas dépasser, à chaque itération, le résidu est calculé sur l'équation discrétisée et dès qu'il passe en delà de la valeur fixée, le processus s'arrête considérant que les calculs ont convergé.

## IV.6. Méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques :

La résolution des systèmes d'équations (IV- 14 ) nécessite un nombre de nœuds importants. Ces systèmes en 2D sont Pentadiagonaux , leur résolution par une méthode directe ne peut être envisagée, en raison de la taille des matrices . D'après la recherche bibliographique que nous avons fait, la plupart des études numériques qui ont été faites, utilisent la méthode de balayage associée à l'algorithme TDMA(*Tri-Diagonal Matrix Algorithm* ) .

Cette méthode consiste à rendre les systèmes d'équations Pendiagonaux en des systèmes tridiagonaux. La résolution de ces derniers s'effectue par l'algorithme de Thomas sur une direction donnée, l'ensemble des nœuds de discretisation étant parcouru par deux balayages successifs suivant OR et OZ .

### IV.6.1. Méthode de balayage (*Line by line*) :

Cette méthode économique, procède par propagation de l'information prise aux limites du domaine de calcul, sur toute l'étendue du champ de calcul.

Considérons le domaine d'évolution du fluide (voir Fig (IV- 1) ) délimité par le contour continu et donnant lieu en général à un système de  $(NI-2 \times NJ-2)$  d'équations.

Où NI et NJ désignent respectivement le nombre de lignes et de colonnes du maillage .

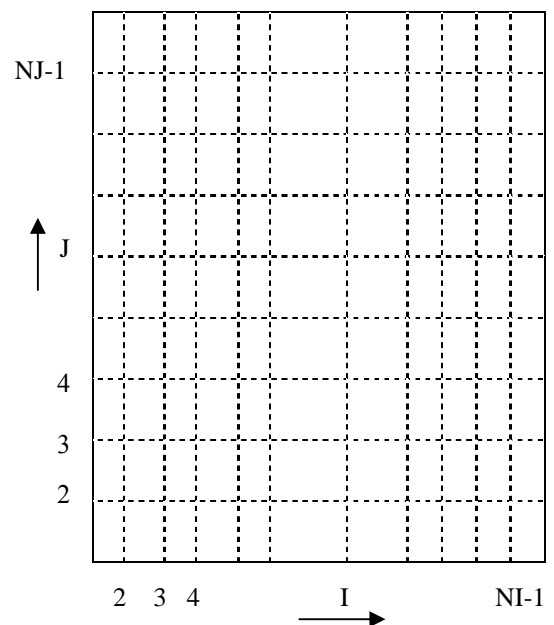
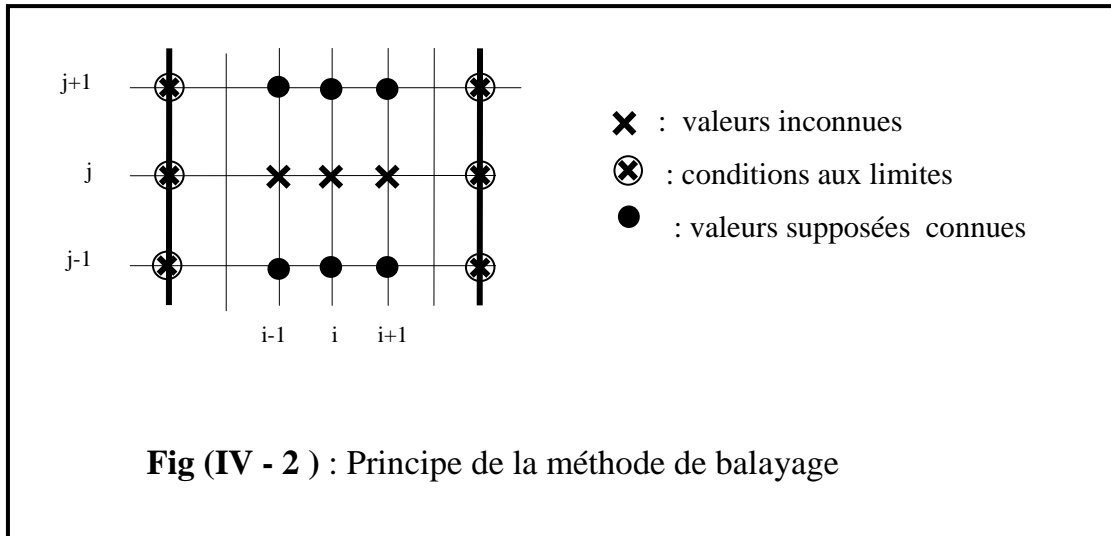


Fig (IV- 1 ) : Domaine de calcul

Si on prend la ligne ( j ) Fig (IV- 2 ), on suppose que  $\Phi$  est connu sur les lignes (j-1) et (j+1) (de l'itération précédente), alors l'équation (IV-14) prendra la forme suivante :



$$a_i \cdot \Phi_i = b_i \cdot \Phi_{i+1} + c_i \cdot \Phi_{i-1} + d_i \tag{IV-17}$$

où :  $i = 2, NI - 1$

$$\text{et } \Phi_i = \Phi_p, \Phi_{i+1} = \Phi_E, \Phi_{i-1} = \Phi_w$$

$$a_i = \frac{A_P}{\alpha_\Phi}, \quad b_i = A_E, \quad c_i = A_W$$

$$d_i = S_C \cdot \Delta V + (1 - \alpha_\Phi) \cdot \frac{A_P}{\alpha_\Phi} \cdot \Phi_P^o + A_S \cdot \Phi_S + A_N \cdot \Phi_N$$

Pour tous les nœuds (I=2, NI-1) de la ligne on a un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} +a_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3 & +a_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_4 & +a_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{NI-1} & a_{NI-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \vdots \\ \Phi_{NI-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2+c_2. \Phi_1 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{NI-1}+b_{NI-1}. \Phi_{NI} \end{pmatrix}$$

Dans la présente étude, nous avons employé plusieurs balayages alternés W-E, N-S au cours d'une itération, ceci permettra une amélioration très avantageuse de la précision du calcul et par suite une diminution du nombre d'itérations.

### IV.6.2. Méthode de résolution TDMA :

La méthode TDMA, est utilisée après chaque balayage pour résoudre les systèmes d'équations, en transformant le système tridiagonal en système bidiagonal unitaire (éléments diagonaux égaux à 1) dont la résolution est immédiate.

L'équation (IV-17) peut s'écrire :

$$\Phi_i = \frac{C_i}{a_i} \cdot \Phi_{i-1} + \frac{b_i}{a_i} \cdot \Phi_{i+1} + \frac{d_i}{a_i}. \quad (\text{IV-18})$$

Donc :

$$\Phi_2 = \frac{C_2}{a_2} \cdot \Phi_1 + \frac{b_2}{a_2} \cdot \Phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\text{IV-19})$$

$$\Phi_3 = \frac{C_3}{a_3} \cdot \Phi_2 + \frac{b_3}{a_3} \cdot \Phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \quad (\text{IN-20})$$

$$\Phi_{NI-1} = \frac{C_{NI-1}}{a_{NI-1}} \cdot \Phi_{NI-2} + \frac{b_{NI-1}}{a_{NI-1}} \cdot \Phi_{NI} + \frac{d_{NI-1}}{a_{NI-1}} \quad (\text{IV-21})$$

La résolution est comme suit :

$\Phi_1$  est donnée aux conditions aux limites

$$\Phi_2 = \frac{b_2}{a_2} \cdot \Phi_3 + \frac{C_2 \cdot \Phi_1 + d_2}{a_2}. \quad (\text{IV-22})$$

$$\Phi_2 = P_2 \cdot \Phi_3 + Q_2 \quad (\text{IV-23})$$

$$\text{avec : } P_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad Q_2 = \frac{C_2 \cdot \Phi_1 + d_2}{a_2}$$

On remplace  $\Phi_2$  par son expression dans la deuxième ligne qui donne la valeur de  $\Phi_3$  en fonction de  $\Phi_4$ :

$$\Phi_3 = \frac{b_3}{a_3 - C_3.P_2} . \Phi_4 + \frac{d_3 + C_3.Q_2}{a_3 - C_3.P_2}. \quad (\text{VI-24})$$

$$\Phi_3 = P_3 . \Phi_4 + Q_3 \quad (\text{IV-25})$$

$$\text{avec : } P_3 = \frac{b_3}{a_3 - C_3.P_2} \quad , \quad Q_3 = \frac{d_3 + C_3.Q_2}{a_3 - C_3.P_2}$$

On continue l'opération pour toutes les autres lignes on aura la forme de récurrence des coefficients :

$$\Phi_i = P_i . \Phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{IV-26})$$

$$\text{avec : } P_i = \frac{b_i}{a_i - C_i.P_{i-1}} \quad , \quad Q_i = \frac{d_i + C_i.Q_{i-1}}{a_i - C_i.P_{i-1}}$$

La valeur de  $\Phi_{NI}$  étant connue d'après les conditions aux limites, une substitution inverse dans l'équation (IV- 26 ) permet de déterminer le champ de  $\Phi$ .

### IV.7. Structure du code de calcul :

Le code de calcul est constitué d'un programme principal faisant appel aux subroutines suivantes :

**INIT:** Initialise les coefficients de l'équation discrétisée de chaque variable, ainsi que les variables de l'écoulement

**INLET :**Détermine les conditions aux limites des vitesses de la température et de la pression

**GRID :** Permet d'établir le maillage

**CALCU :**Calcul des coefficients  $A_i$  et résolution de l'équation de transport de  $U^*$

**CALCV :**Calcul des coefficients  $A_i$  et résolution de l'équation de transport de  $V^*$

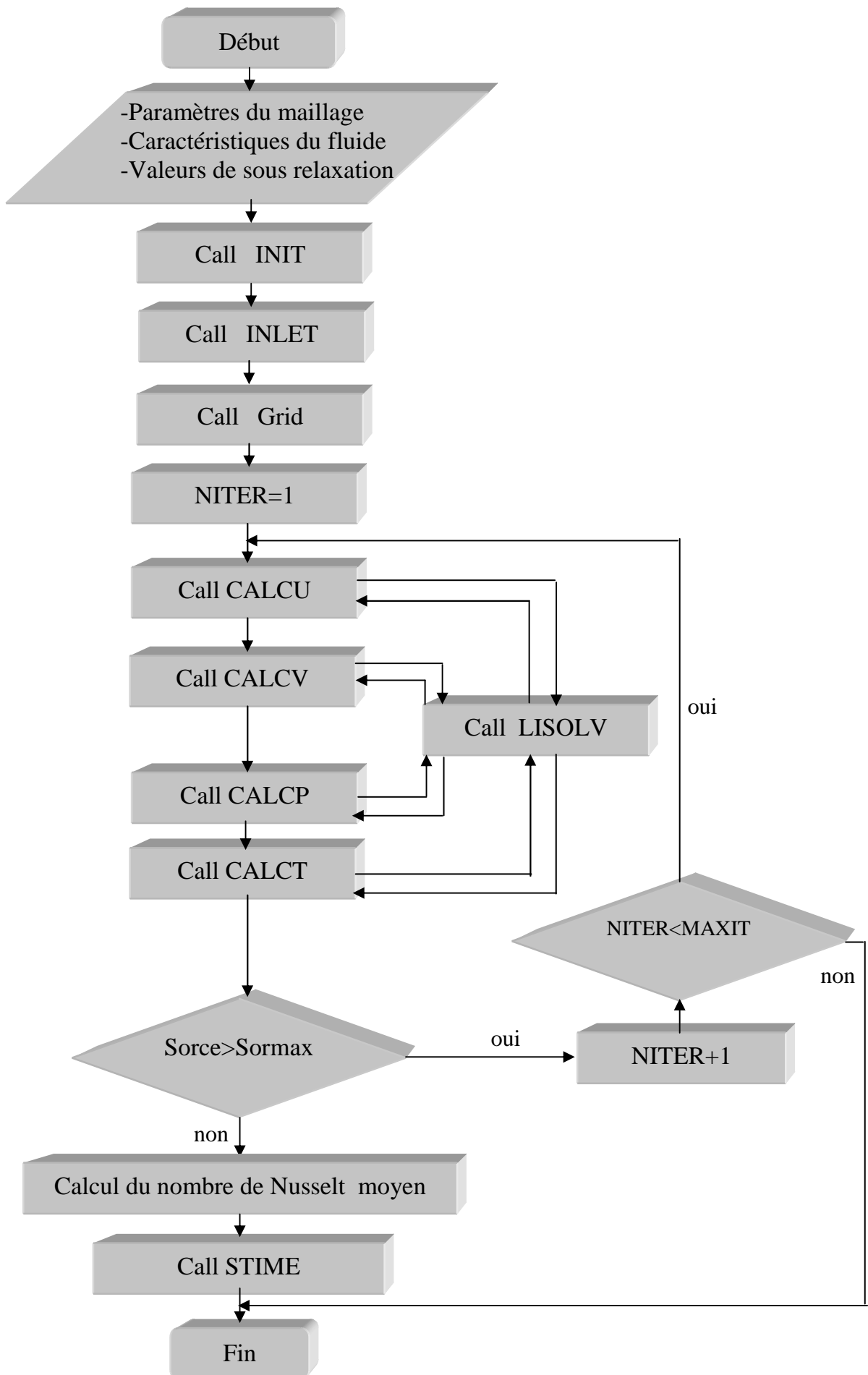
**CALCP :**Calcul des coefficients  $A_i$  et résolution de l'équation de correction de pression  $P'$  et correction des composantes de vitesse  $U$  et  $V$ .

**CALCT :**Calcul des coefficients  $A_i$  et résolution de l'équation de transport de  $T$

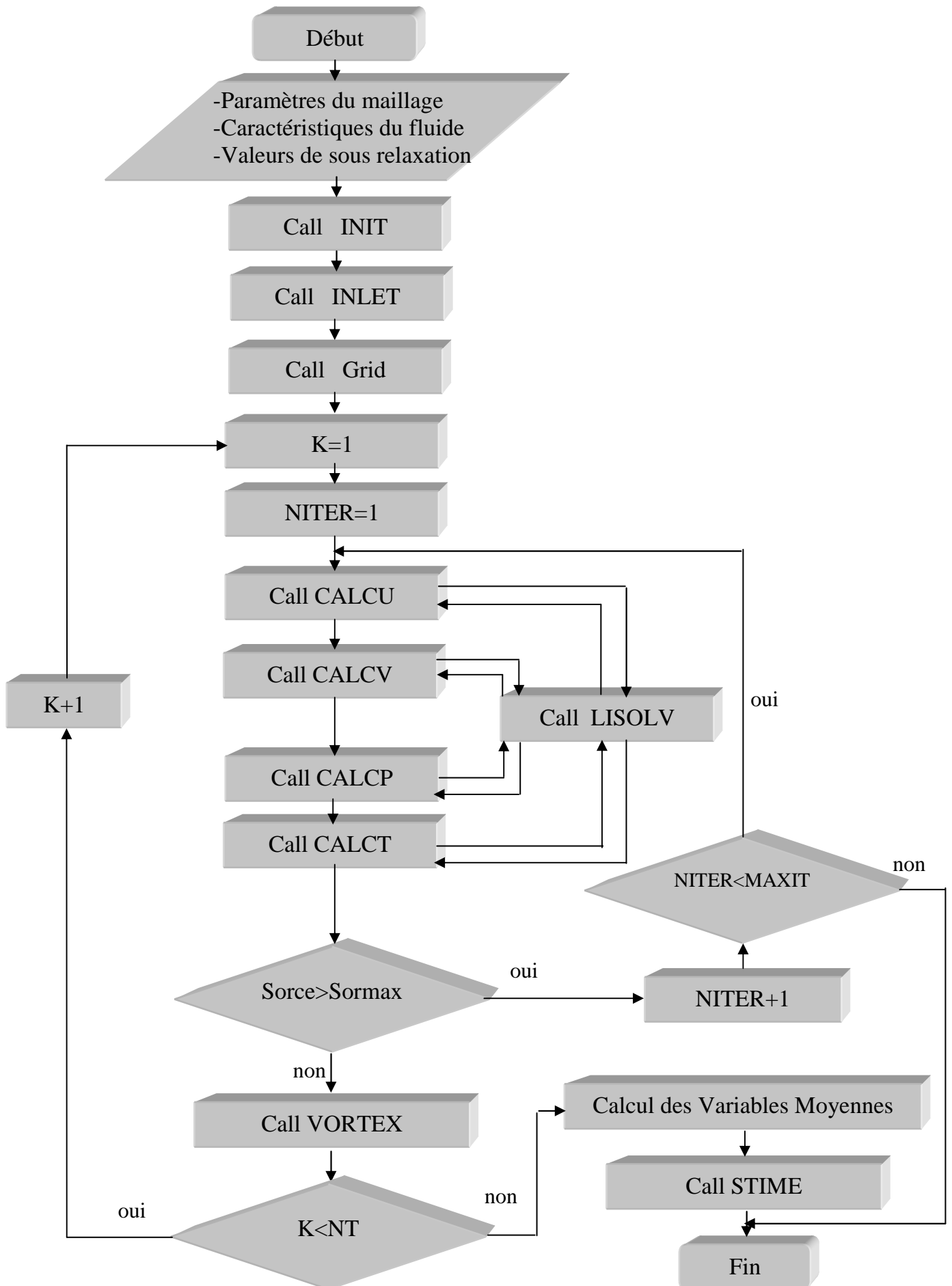
**VORTEX :** Calcul de la Vorticité

**LISOLV :** Résolution du système d'équations algébriques associé à la variable  $\Phi$ .

**STIME:** Impression des résultats



Organigramme du code de calcul dans le cas Laminaire



Organigramme du code de calcul dans le cas Turbulent

# CHAPITRE V

## Résultats et Discussions

### V.A. Résultats dans le Cas Laminaire

#### V.A.1. Introduction :

Nous présentons dans cette section du travail les résultats obtenus, par le code de calcul pour un écoulement laminaire pour différents rapports d'aspect  $A$ .

Nous avons testé plusieurs sortes de maillages afin d'en voir succinctement leurs effets sur les résultats de calcul.

Lors de nos simulations numériques, nous avons constaté que le facteur de sous – relaxation  $\alpha_{\phi}$  a une grande influence sur nos résultats ; c'est pourquoi nous avons décidé d'analyser son effet, et de déterminer le choix adéquat de ce facteur.

Le code de calcul a été validé en utilisant les résultats expérimentaux et numériques disponibles dans la littérature.

#### ◆ *Propriétés physiques du fluide :*

Dans la présente étude, nous avons fixé la température ambiante à 20°C et celle de la paroi à 50°C. Le fluide véhiculé est l'air. Vu le faible gradient de la température, les propriétés physiques de l'air sont évaluées à une température moyenne égale à 35°C. Leurs valeurs sont tirées des tables par interpolation linéaire :

$$\rho = 1.15676 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 1.006228 \text{ J/kg.K}$$

$$\nu = 1.65 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$a = 2.338 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\beta = 3.254 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$$

$$Pr = 0.71$$

Les simulations numériques sont effectuées pour des nombres de Rayleigh allant de 1 jusqu'à  $10^5$  et cela pour des rapports d'aspect  $A$  égale à 3, 5, 8 et 12. La présentation des résultats concernant les champs de vitesses, de température et de pression a été faite seulement pour trois valeurs de  $Ra$  : 10, 100, 1000.

### V.A.2. Effet du maillage sur les résultats de calcul :

Le choix du maillage a une grande influence sur la précision des résultats et le temps de calcul, afin d'optimiser ces paramètres nous avons effectué plusieurs simulations tests pour différents maillages. Le tableau (V-1) donne les valeurs du nombre de Nusselt moyen pour un rapport d'aspect  $A=3$  et des valeurs de Rayleigh égales à 10, 100, 1000.

Maillage NI x NJ	$\overline{Nu}$ Pour Ra=10	Ecart En %	$\overline{Nu}$ Pour Ra=100	Ecart En %	$\overline{Nu}$ Pour Ra=1000	Ecart En %
50x50	0.4254	2.374	1.4209	2.794	3.1182	3.332
100x50	0.4231	1.844	1.4132	2.264	3.1017	2.281
100x100	0.4226	1.727	1.4124	2.209	3.0985	2.271
150x50	0.4182	0.693	1.3942	0.932	3.0732	1.916
200x50	0.4153	-	1.3812	-	3.0143	-

**Tableau (V-1) :** Comparaisons du nombre de Nusselt moyen pour différents maillages et pour un rapport d'aspect  $A=3$

NI : le nombre de nœuds total suivant la direction radiale (OR)

NJ : le nombre de nœuds total suivant la direction axiale (OZ)

L'écart en (%) est donné par la relation suivante :

$$\text{Ecart} = 100 \cdot \left| \frac{\overline{Nu}(200 \times 50) - \overline{Nu}(NI \times NJ)}{\overline{Nu}(NI \times NJ)} \right|$$

$\overline{Nu}(200 \times 50)$  est pris comme une valeur de référence pour calculer l'écart en pourcentage

En examinant les écarts effectués sur les valeurs de Nusselt, notre choix s'est posé sur le maillage 150x50 qui assure un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

### V.A.3. Influence des valeurs de sous-relaxation sur les résultats de calcul :

Lors de nos simulations tests, on a constaté que pour de faibles valeurs de Ra (entre 1 et  $10^3$ ) voir même plus, on peut assurer la convergence des systèmes en adoptant des valeurs de  $\alpha_\Phi$  dans les environs de 0.7.

Pour des valeurs de Ra plus élevées, les systèmes ne convergent pas avec n'importe quelle valeur de  $\alpha_\Phi$ . En effet la plus grande difficulté réside dans le choix adéquat de ce facteur.

Après plusieurs essais numérique, nous avons pu obtenir la convergence pour des Ra de l'ordre de  $10^5$ , grâce à un choix judicieux des valeurs de  $\alpha_\Phi$ .

Des simulations tests ont été faites pour un rapport d'aspect  $A=3$  et un maillage de  $150 \times 50$  montrent une grande influence des valeurs de  $\alpha_\Phi$  sur le nombre de Nusselt moyen, les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

Le nombre de Rayleigh	$\alpha_U$	$\alpha_V$	$\alpha_P$	$\alpha_\theta$	$\overline{Nu}$
<b>Ra=10</b>	0.6	0.7	0.6	0.8	0.4338
	0.6	0.7	0.6	0.7	0.4182*
	0.6	0.6	0.6	0.6	0.3617
	0.5	0.6	0.5	0.6	0.3628
<b>Ra=100</b>	0.7	0.7	0.6	0.8	1.3942
	0.6	0.7	0.6	0.8	1.3941*
	0.6	0.7	0.6	0.7	1.3175
	0.6	0.6	0.6	0.6	1.1497
<b>Ra=1000</b>	0.6	0.7	0.6	0.7	4.1757
	0.6	0.6	0.6	0.6	3.6875
	0.5	0.5	0.5	0.6	3.7005
	0.5	0.5	0.5	0.5	3.0143*
<b>Ra=10<sup>4</sup></b>	0.4	0.4	0.4	0.4	5.3020
	0.3	0.4	0.3	0.4	5.2985*
	0.2	0.3	0.2	0.3	4.8273
	0.2	0.2	0.2	0.2	4.0308

**Tableau (V-2) :** Comparaisons du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de sous- relaxation  $\alpha_\Phi$

\* désigne les valeurs choisies.

Le choix de ces valeurs a été fait, en se basant sur la valeur du résidu.

Après ces simulations tests, on peut conclure qu'il n'existe aucune méthode pour la détermination de  $\alpha_\phi$  optimal; celle qui donne des résultats précis en un temps minimum, cela confirme les remarques de Patankar [1]. En effet il n'existe aucune règle générale pour le choix du facteur  $\alpha_\phi$ , cela dépend de plusieurs paramètres : type de problème, nombre de nœuds, pas de maillage et la méthode itérative utilisée, la valeur de  $\alpha_\phi$  peut être trouvée par expérience et exploitation des simulations tests du problème donné .

#### **V.A.4. Champs des vitesses et des températures :**

Pour visualiser les champs de vitesses et de température nous avons choisi de représenter leurs profils à l'entrée, au milieu et à la sortie de la conduite, et cela pour un rapport d'aspect  $A$  respectivement égale à 3, 5, 8 et 12, et pour un nombre de Rayleigh  $Ra=10, 100, 1000$ .

Les figures (V-1), (V-2), (V-3) représentent ces différents profils, ceux de la température sont à droite et ceux de la vitesse sont à gauche. Nous avons choisi de disposer les uns à coté des autres pour suivre leur évolution d'une manière simultanée.

##### **V.A.4.1. Champs des vitesses :**

Les profils de vitesses représentés dans les figures (V-1), (V-2) pour des valeurs de Rayleigh  $Ra=10$  et  $100$  sont des profils paraboliques classiques de l'écoulement laminaire dans une conduite, en fonction du rapport d'aspect  $A$ .

Nous remarquons que, ni les dimensions de la géométrie ni l'échange de chaleur au sein du fluide n'ont une influence sur la forme du profil de vitesse.

En revanche, nous constatons une accélération du fluide près de la paroi due à la dominance des poussés d'Archimède et un ralentissement de la vitesse de ce fluide près de l'axe de manière à assurer une conservation du débit global, et cela pour des valeurs de  $Ra$  supérieur à  $10^2$  dans la Fig(V-3)  $Ra=10^3$ .

La vitesse à l'entrée de la conduite est uniforme (voir Fig( V- 4 ), Fig(V-5) ). Elle change progressivement au fur à mesure qu'on avance dans la conduite jusqu'à atteindre la forme parabolique. A partir d'une hauteur  $Z_e$  le profil de vitesses n'évolue plus l'écoulement est «établi ». La hauteur d'établissement  $Z_e$  dépend de plusieurs paramètres : nombre de Rayleigh, les dimensions de la géométrie, nature du fluide (masse volumique, viscosité), débit de l'écoulement.

On peut noter aussi que l'effet du rapport d'aspect sur le profil de vitesses est important surtout à l'entrée de la conduite ( voir Fig(V-1 )(a), Fig (V-2)(a), Fig (V-3)(a) ) cet effet s'efface au fur à mesure qu'on avance le long de la conduite à cause de l'établissement de l'écoulement .

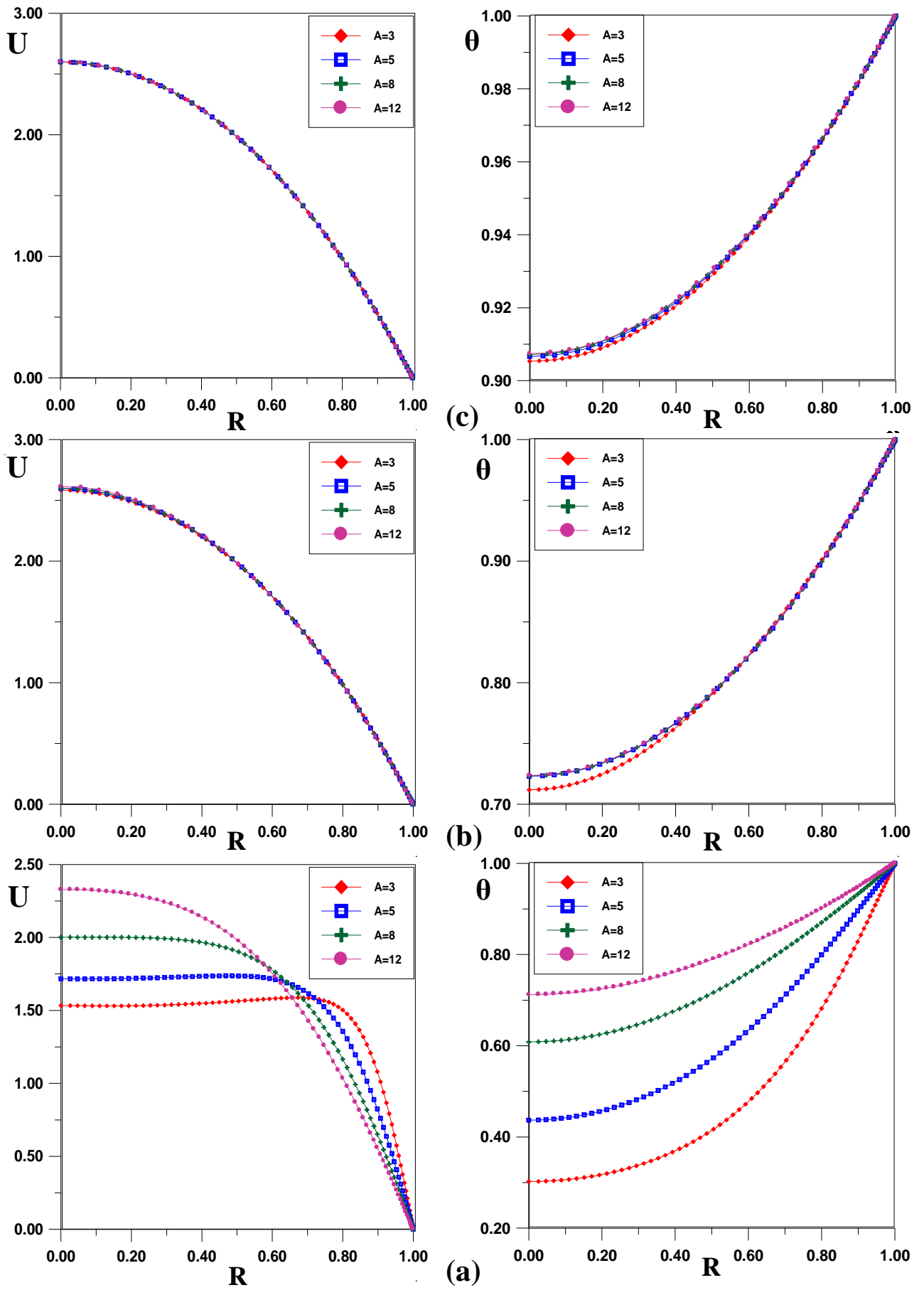
#### **V.A.4.2. Champs des températures :**

Pour de faibles valeurs de  $Ra$  ( $Ra < 100$ ) et pour différents rapports d'aspect  $A$ , la température tend à devenir homogène à la sortie de la conduite (Fig(V-1)(c), Fig(V-6)(a)). La transmission de la chaleur par conduction à partir de la paroi de la conduite domine celle par convection à partir de l'entrée de la conduite.

Par ailleurs, pour des valeurs de  $Ra$  supérieures à 100 (Fig(V-3) (c), Fig(V-6)(c)),  $Ra=1000$  et quelque soit la valeur de  $A$ , on constate un écart notable entre les valeurs de la température près de la paroi et celles près de l'axe, ce qui explique que le transfert de chaleur par convection domine celui par conduction.

Notons aussi qu'au-delà d'une certaine distance comptée de l'entrée de la conduite, le profil de température prend une forme établie.

On voit clairement l'effet du rapport d'aspect  $A$  sur le profil de température surtout à l'entrée de la conduite, cet effet diminue progressivement en avançant dans la conduite à cause de l'établissement thermique de l'écoulement.



**Fig (V-1):** Profils des vitesses et des températures pour  $Ra=10$   
 (a) à l'entrée (b) au milieu (c) à la sortie de la conduite

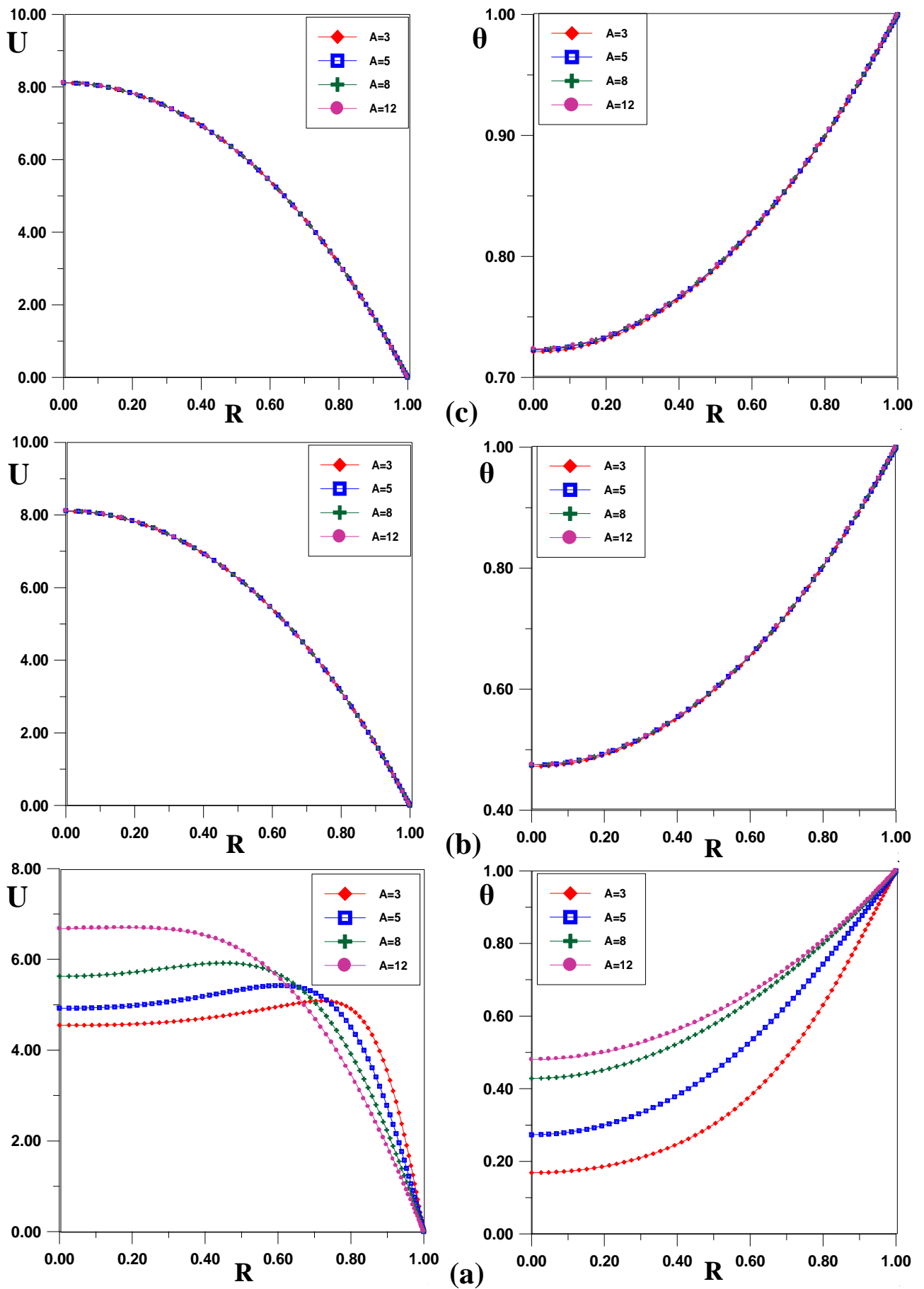


Fig (V-2): Profils des vitesses et des températures pour  $Ra=100$   
 (a) à l'entrée (b) au milieu (c) à la sortie de la conduite

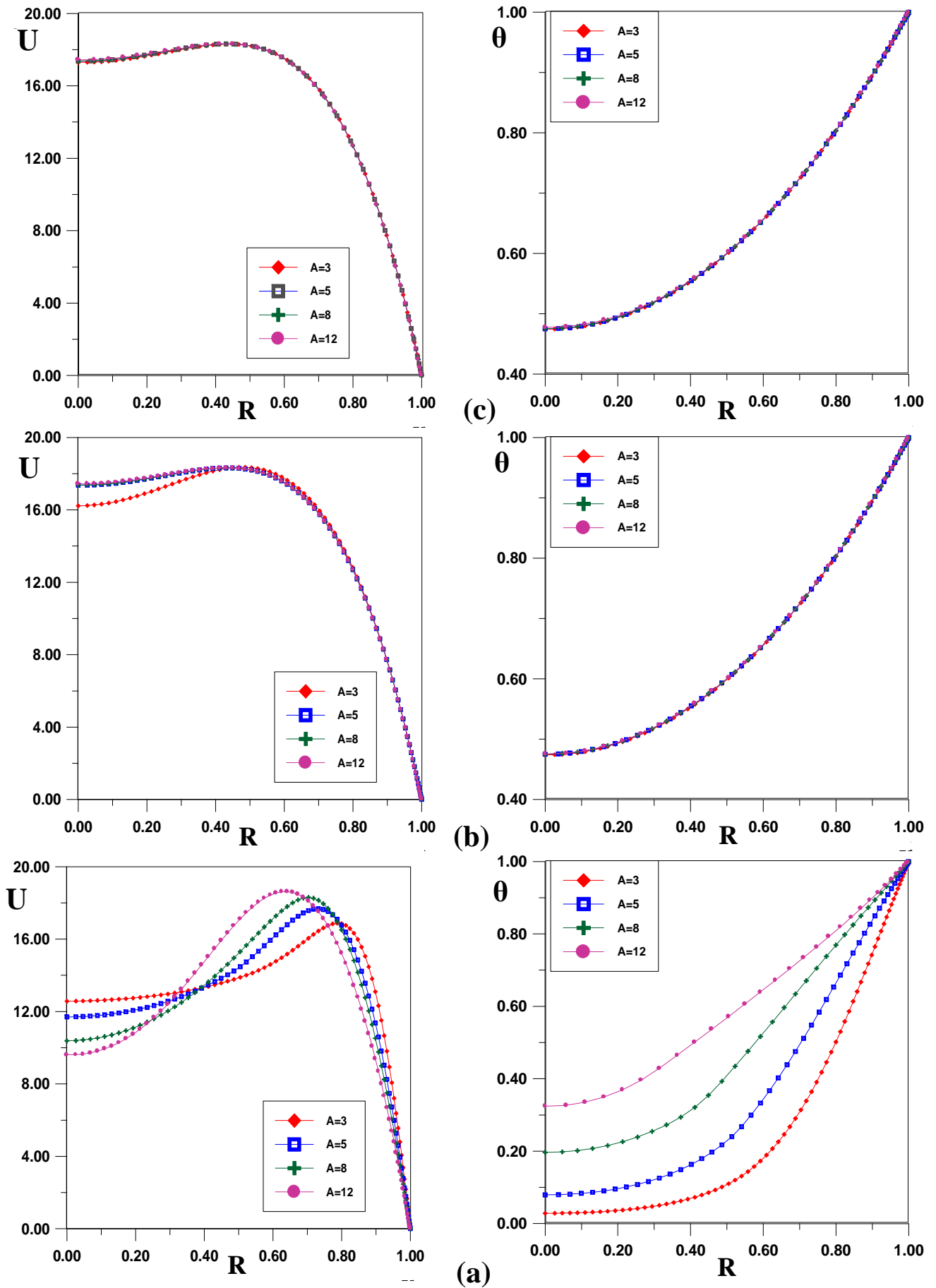
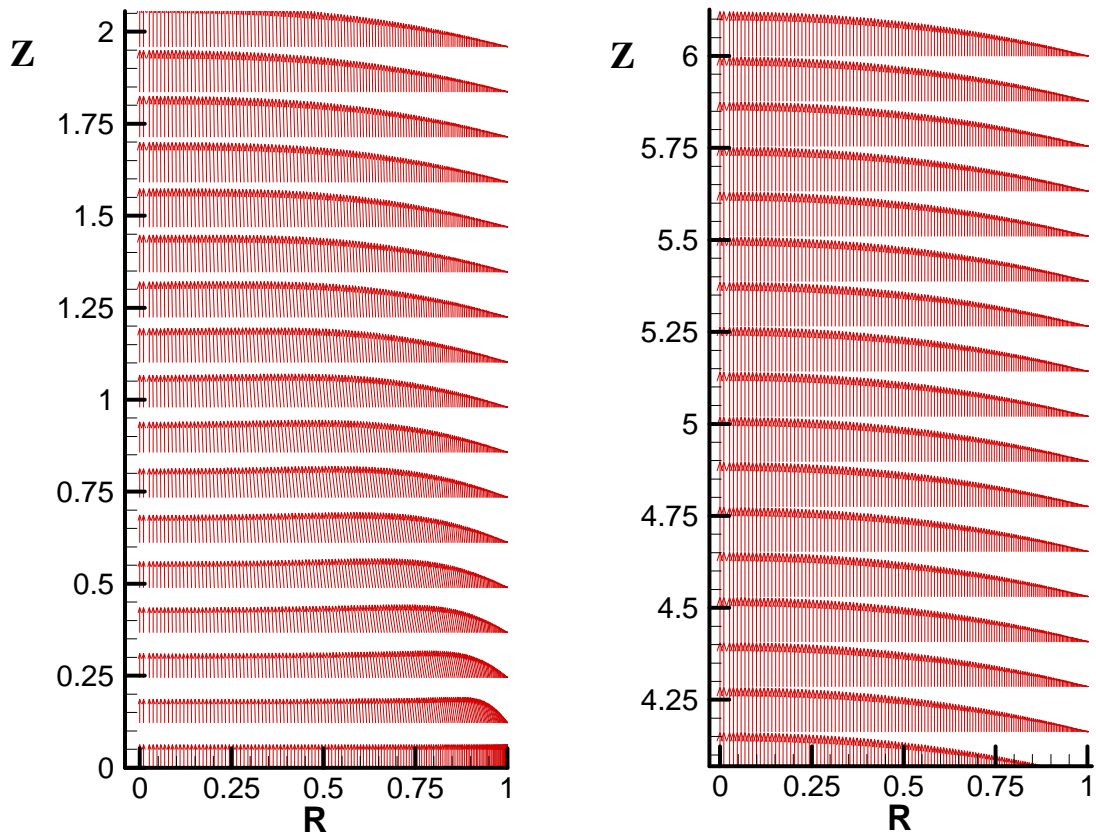
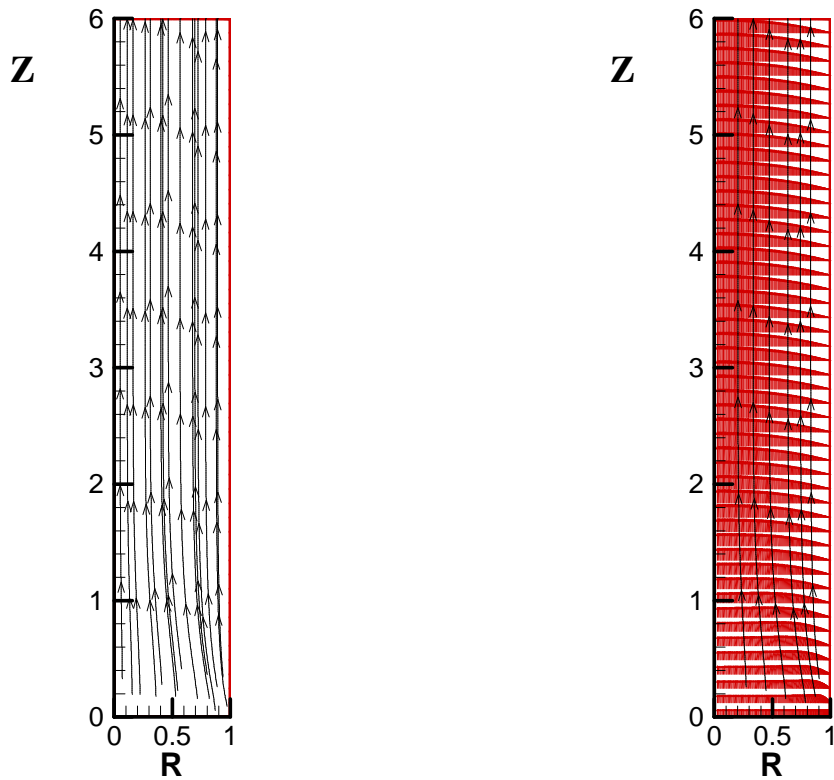


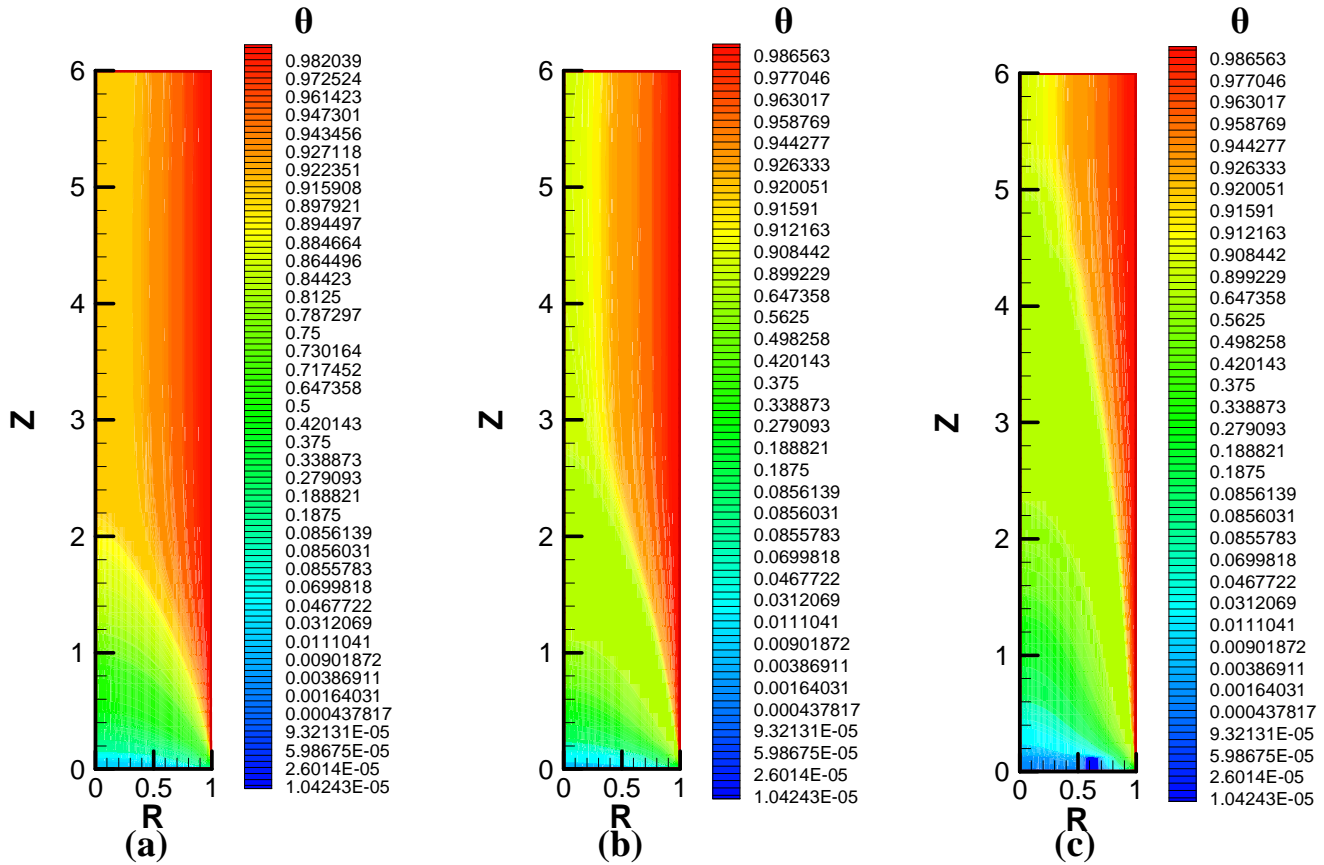
Fig (V-3): Profils des vitesses et des températures pour  $Ra=1000$   
 (a) à l'entrée (b) au milieu (c) à la sortie de la conduite



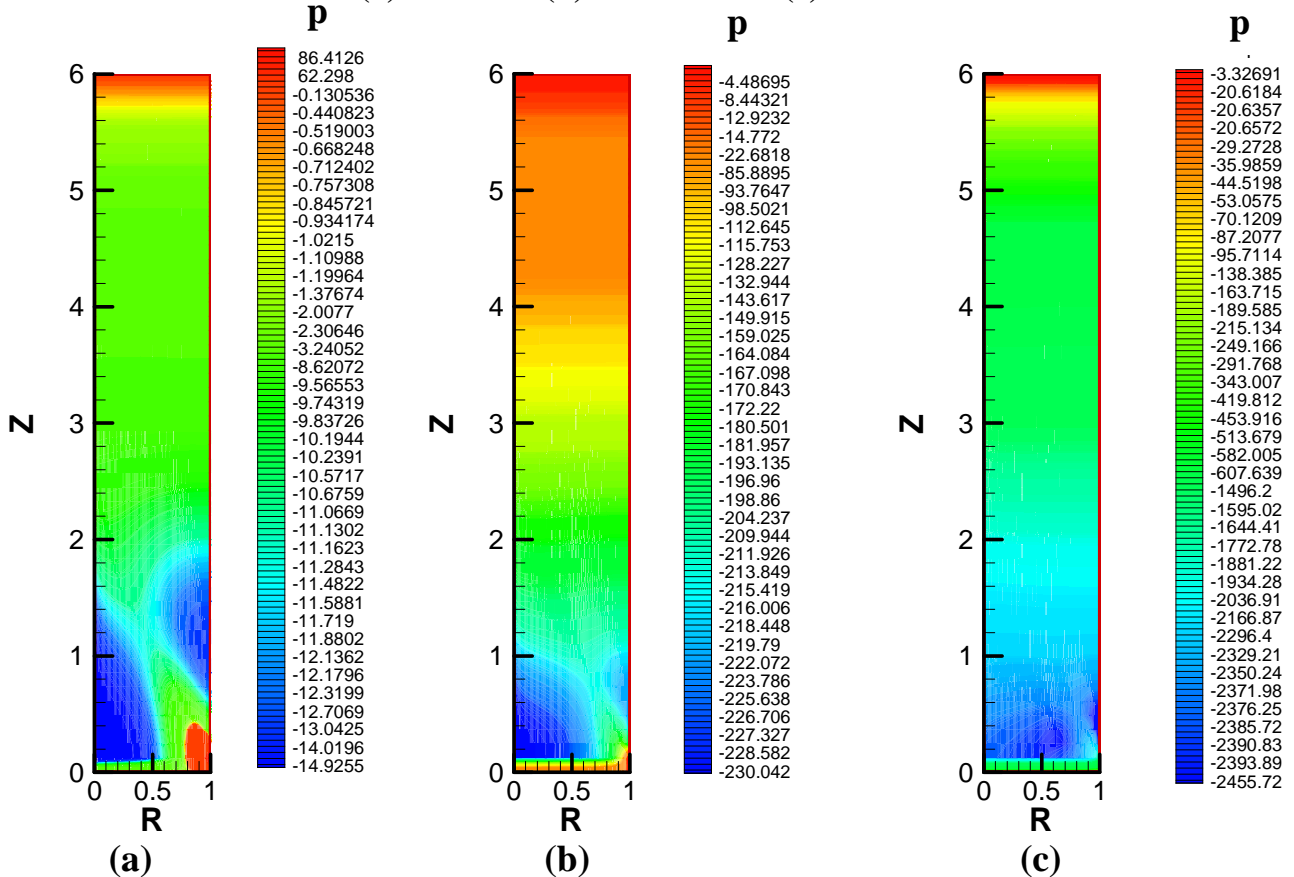
Fig(V-4) : Les champs des vitesses pour  $A=3$  et  $Ra=100$



Fig(V-5) : Les lignes de courant pour  $A=3$  et  $Ra=100$



Fig(V-6) : Les Champs de température pour A=3 et pour des valeurs de Rayleigh  
 (a) Ra=10 (b) Ra=100 (c) Ra=1000

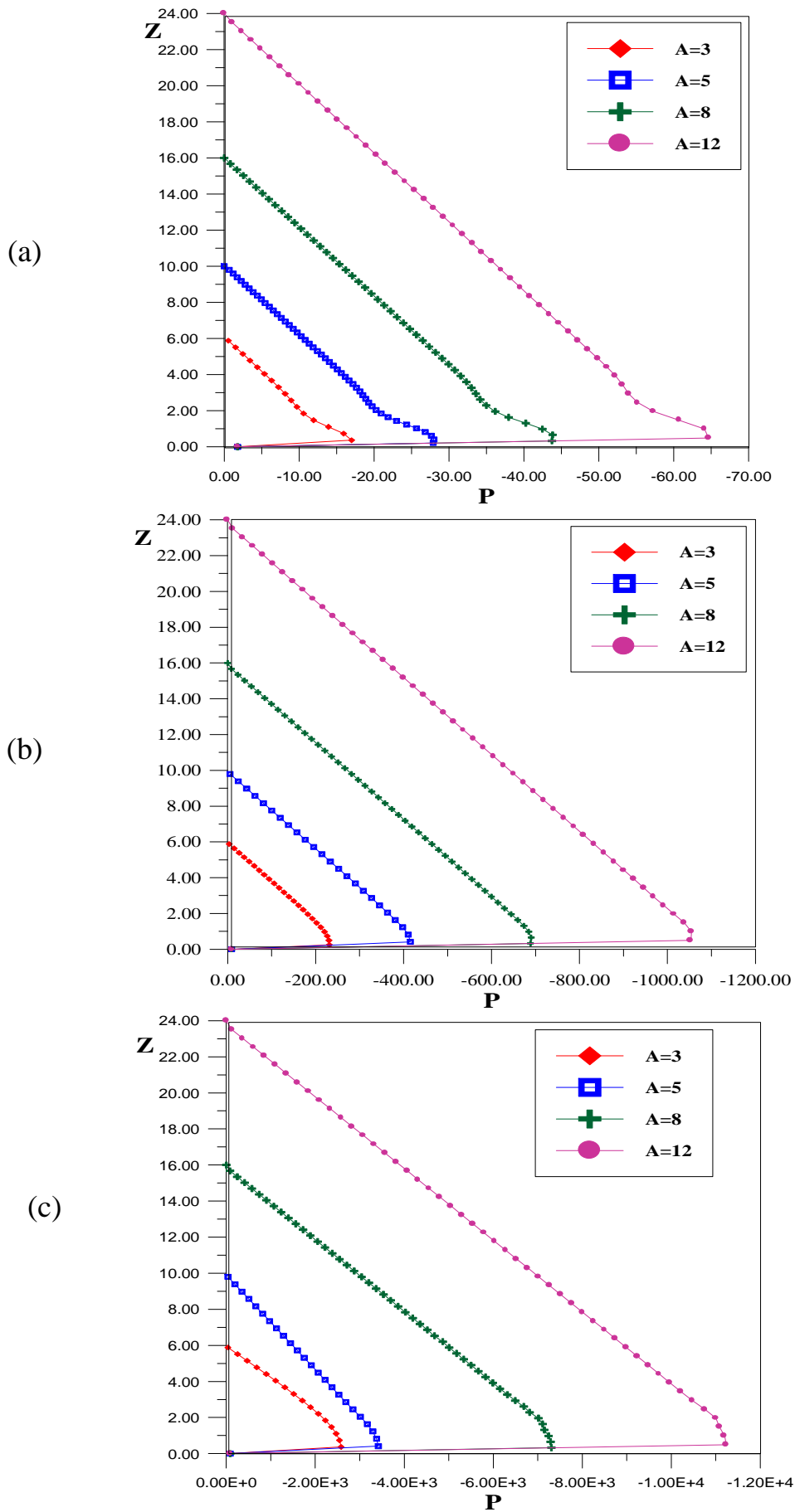


Fig(V-7) : Les Champs de pression pour A=3 et pour des valeurs de Rayleigh  
 (a) Ra=10 (b) Ra=100 (c) Ra=1000

**V.A.5. Champs de pressions :**

La Figure (V-8) représente les profils de pression le long de la conduite pour des valeurs de Rayleigh égales à 10, 100 et 1000 et cela pour des rapports d'aspect  $A$  égales à 3, 5, 8 et 12.

D'après ces profils, on constate que ni le nombre de Rayleigh, ni le rapport de d'aspect  $A$  ont une influence sur la forme du profil de pression. La pression augmente à l'entrée de la conduite passe par un maximum puis diminue progressivement pour satisfaire la condition à la sortie ( $P=0$ ). La valeur de ce maximum augmente au fur et à mesure que  $Ra$  et  $A$  augmentent.



**Fig (V-8):** Evolution de la pression le long de la conduite  
 (a)  $Ra=10$  (b)  $Ra=100$  (c)  $Ra=1000$

### V.A.6. Validation du code de calcul :

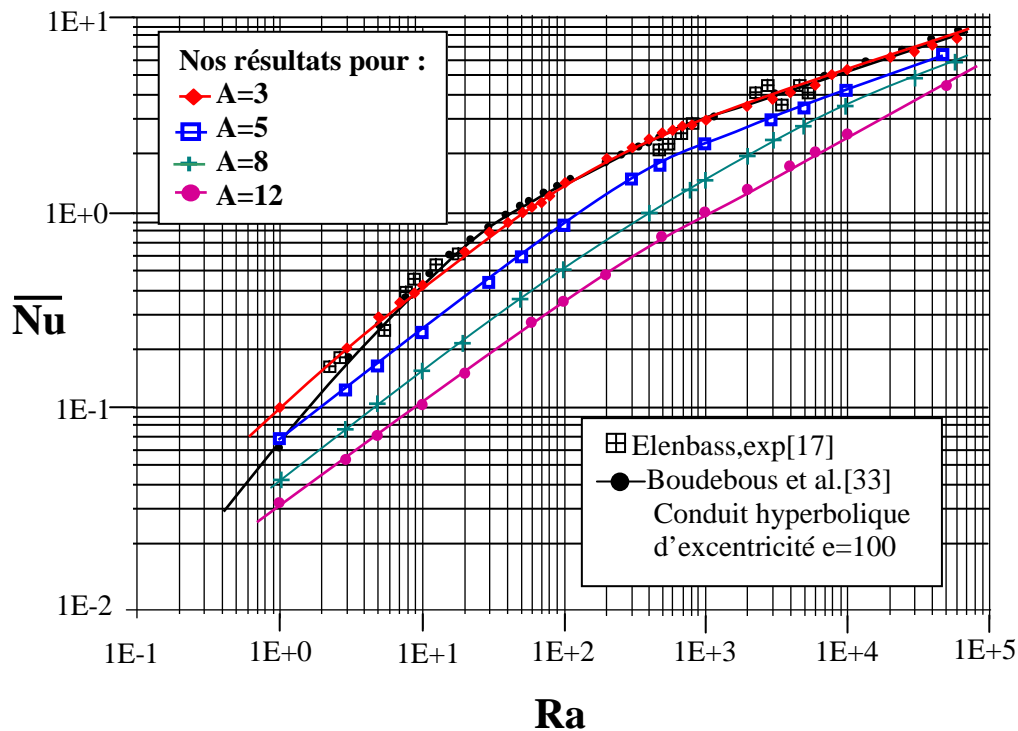
En premier lieu, la comparaison de nos résultats de calcul a été faite avec les résultats expérimentaux d'Elenbaas[17] pour une conduite cylindrique. Bien que ces études sont anciennes, sont jusqu'à présent invoqués par divers auteurs. Nous avons aussi comparé nos résultats numériques à ceux de Boudebous et al.[33] pour un conduit hyperbolique d'excentricité égale à 100 qui peut être assimilé à un cylindre.

La Figure(V-9) illustre la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh, nos résultats sont présentés pour les différents rapports d'aspect  $A=3, 5, 8, 12$ .

En examinant ces courbes, pour un rapport d'aspect  $A=3$ , nous constatons que nos résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Elenbaas et Boudebous. Le faible écart observé entre ces résultats peut être justifié par plusieurs paramètres : les erreurs de mesures expérimentales, les méthodes numériques utilisées.

On peut constater aussi une grande influence du rapport d'aspect  $A$  sur le nombre de Nusselt moyen, plus que  $A$  augmente plus le nombre de Nusselt diminue.

L'écart entre les profils du nombre de Nusselt pour les différents rapports d'aspect diminue au fur et à mesure que  $Ra$  augmente.

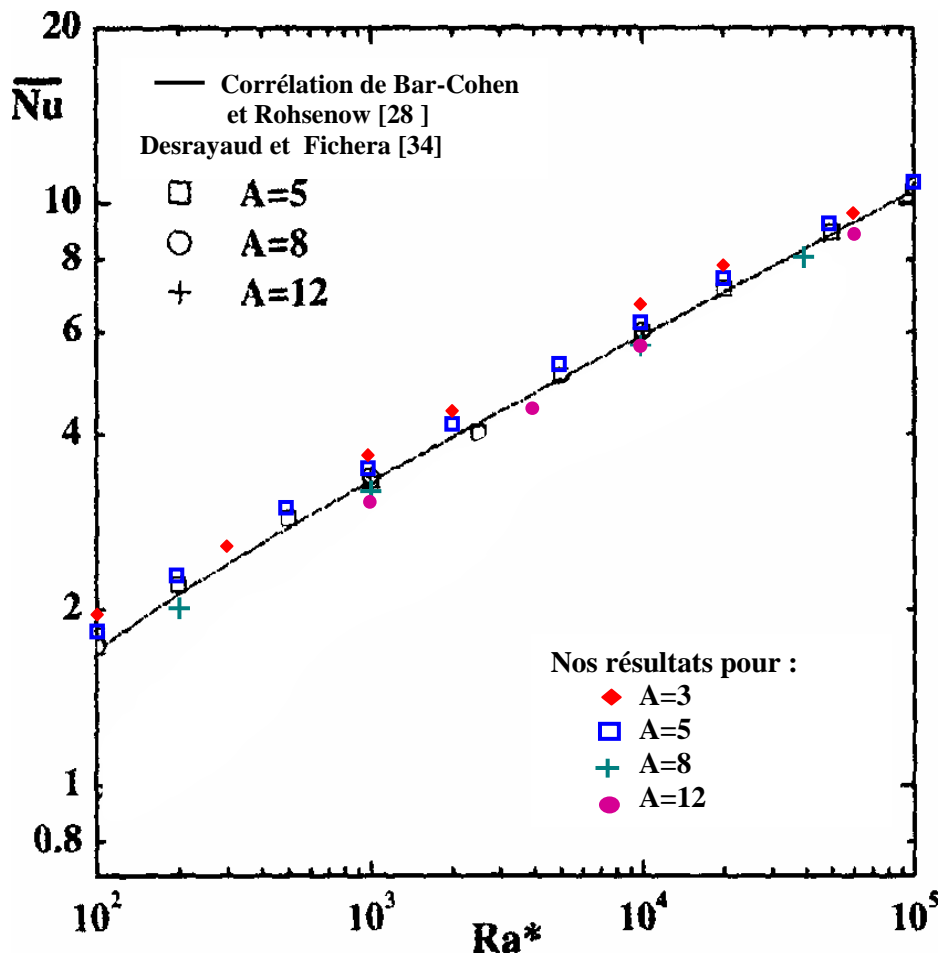


**Fig (V-9) :** Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $Ra$  : comparaison de nos résultats avec ceux d'Elenbaas [17] et de Boudebous et al.[33]

Pour renforcer la validation de nos résultats, nous avons effectué une autre comparaison avec ceux de Desrayaud et Fichera [34] pour une conduite cylindrique et la corrélation de Bar-Cohen et Rohsnow [28] pour deux plaques parallèles. La corrélation de Bar-Cohen est la suivante :

$$\overline{Nu} = \left[ 576/Ra^{*2} + 2.873/Ra^{*0.5} \right]^{0.5}, \quad Ra^*=Ra/A$$

La figure (V-10) montre la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $Ra^*$ , pour différents rapports d'aspect  $A$ , on constate un bon accord de nos résultats avec ceux de Bar-Cohen et Desrayaud.



**Fig (V-10) :** Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $Ra$  :  
 Comparaison de nos résultats avec ceux de Bar-Cohen et Rohsnow [28] et de Desrayaud et Fichera [34]

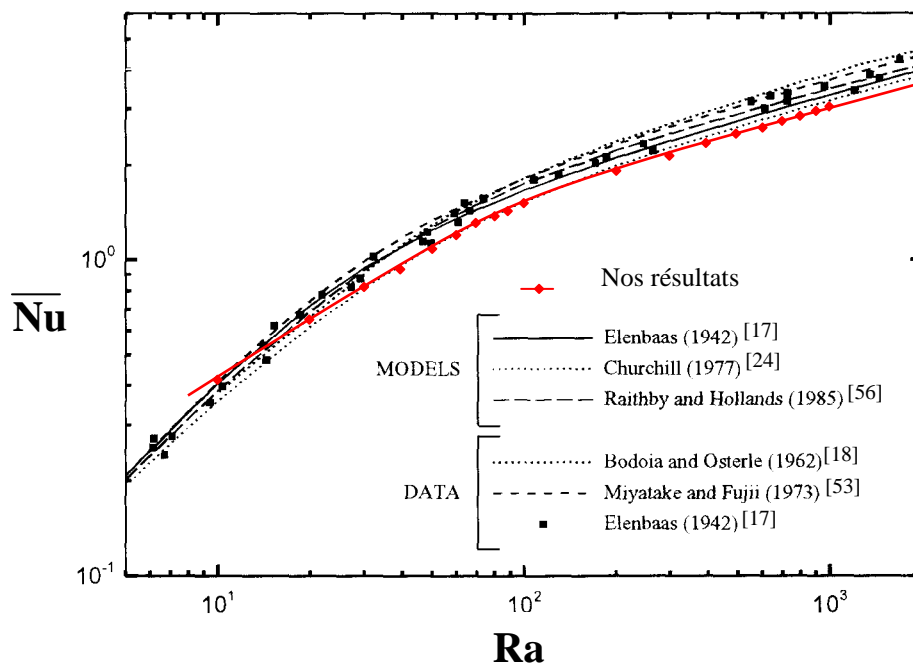
Nous avons regroupé aussi à titre de comparaison les différents modèles ainsi que les résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature, qui représentent la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh ( $1 < Ra < 10^5$ ). Nos résultats pour un rapport d'aspect  $A=3$  sont tracés avec ceux de la littérature pour pouvoir les confronter.

Dans la Figure(V-11) les modèles d'Elenbaas (1942), Churchill(1977) et Raithby et Hollands(1985) sont tracés avec les résultats expérimentaux d'Elenbaas(1942) et ceux issus des simulations numériques de Bodoia et Osterle (1962) et Miyataka et Fujii (1973).

On peut constater que tous ces tracés sont bornés par le modèle de Churchill(1977) qui représente la limite inférieure et par les valeurs expérimentales d'Elenbaas (1942) pour des faibles valeurs de Rayleigh, et le modèle de Raithby et Hollands (1985) pour des valeurs de Ra élevées.

La Figure montre clairement un bon accord entre tous ces résultats, avec un écart maximum de 16% entre les limites inférieures et supérieures.

Nos résultats numériques sont très proches des résultats Churchill(1977), ce qui prouve la fiabilité du code de calcul.



**Fig(V-11)** : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh des différents auteurs.

## V.B. Résultats dans le Cas Turbulent :

### V.B.1. Introduction :

Nous nous intéressons dans cette section du chapitre à la performance de la simulation numérique directe (DNS) pour le calcul des écoulements turbulents de convection naturelle en évolution spatio- temporelle dans une conduite verticale.

Après plusieurs tests numériques, nous avons fixé pour nos simulations numériques le rapport d'aspect  $A=3$ , nombre de Rayleigh  $Ra= 10^4$ , et une résolution spatiale de  $1000 \times 200$  points du maillage et un incrément du temps  $\Delta\tau = \Delta Z / U_e$ .

Après plusieurs expériences numériques, nous avons choisi pour assurer la convergence de nos calculs, des valeurs des facteurs de sous relaxation  $\alpha_\phi$ , pour  $\phi = U, V, P, \theta$  égalent à 0.1.

L'outil informatique utilisé est un Atlon XP2000(équivalant à un Pentium 4 2Go) avec une RAM de 512 DDR et un disque dur de 40Go. Le temps effectué par itération est de 5 secondes(le temps effectué par pas de temps est  $5000s \approx 1h 23'$ ).

Notre objectif est de présenter les champs hydrodynamique et thermique moyen de cet écoulement, ainsi des visualisations des isovaleurs de la vorticité.

Pour toutes nos simulations numériques nous avons fixé la température ambiante à  $20^\circ\text{C}$  et celle de la paroi à  $56^\circ\text{C}$ . Les caractéristiques de l'air sont estimées à une température moyenne égale à  $38^\circ\text{C}$ .

$$\rho = 1.136 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 1.006228 \text{ J/Kg.K}$$

$$\nu = 1.68 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$a = 2.366 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\beta = 3.22 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\text{Pr} = 0.71$$

### **V.B.2. Champs des Vitesses :**

La Figure (V-12) représente, comme pour le régime laminaire les différents profils de vitesse (partie gauche ) et de température(partie droite) à l'entrée, au milieu et à la sortie de la conduite pour un rapport d'aspect et un nombre de Rayleigh déjà cités.

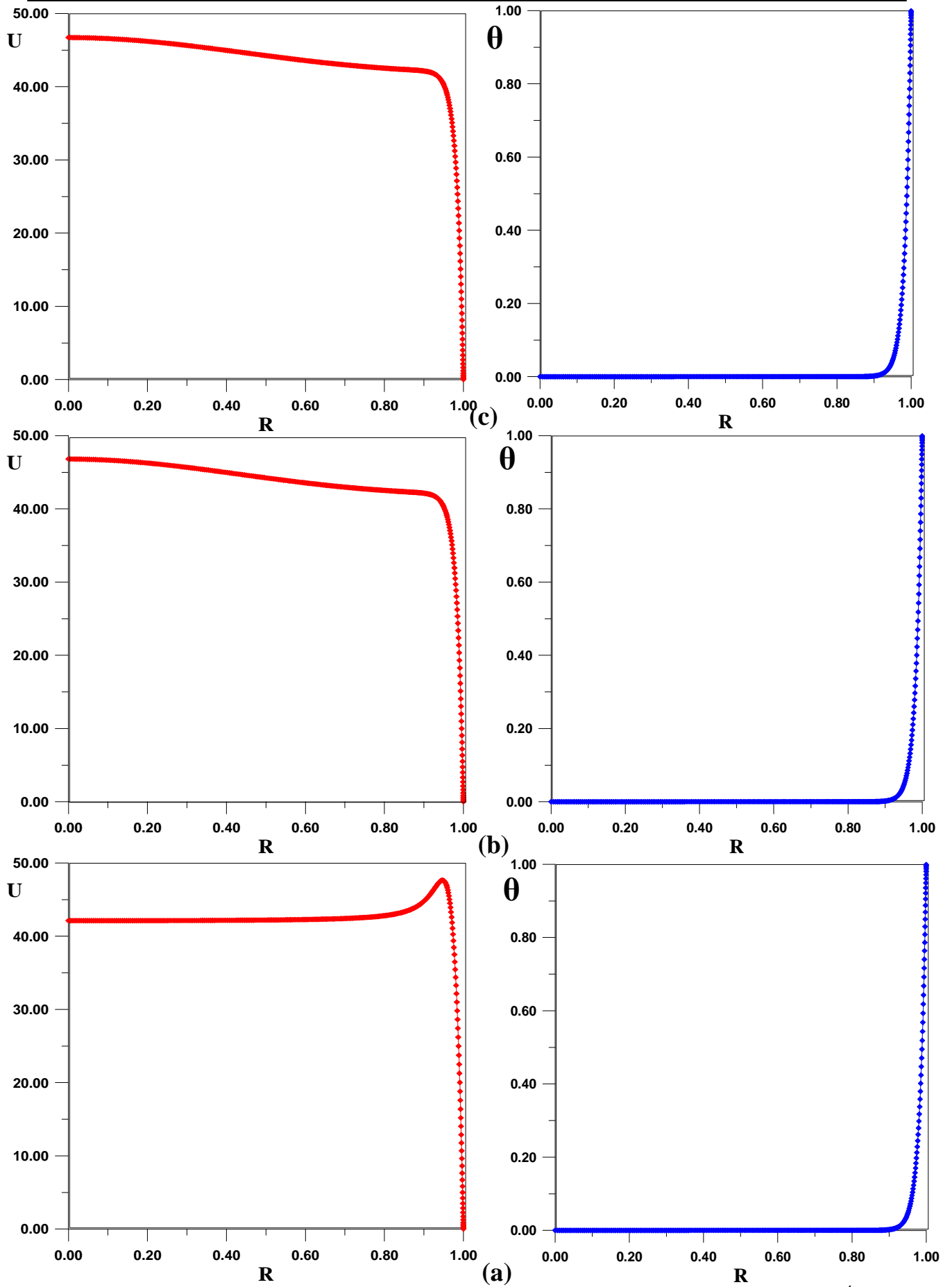
Cette Figure donne une idée sur le profil de vitesse. La vitesse décroît moins vite lorsqu'on s'écarte de l'axe, elle reste assez voisine de sa valeur maximale et sur une partie importante de la section, après quoi elle chute très vite lorsqu'on approche de la paroi. On voit que l'écoulement turbulent se caractérise par une vitesse presque uniforme le long du tube, ceci se comprend car l'échange intense de quantité de mouvement entre particules fluide est dû à la turbulence. On remarque aussi que la paroi tend à laminariser l'écoulement quand celui-ci s'approche de son voisinage.

### **V.B.3. Champs des Températures :**

Comme pour les champs des vitesses, nous avons tracé les profils des températures moyennes à l'entrée, au milieu et à la sortie de la conduite, pour les mêmes valeurs du nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect  $A$ .

En examinant la Fig(V-12), Nous constatons globalement que les profils de température ont la même tendance d'évolution le long de la conduite. Ces Profils donnent une idée de la répartition des températures, on remarque des gradients de température nettement supérieurs à ceux du régime laminaire. Le développement des tourbillons dans un écoulement turbulent facilite la mise en contact des paquets de fluide de températures différentes et donne lieu à des gradients importants.

Malgré la présence des instabilités tourbillonnaires qu'on peut les observer dans la Fig(V-14), on constate que le champ de température est uniquement transporté et diffusé par l'écoulement, cela implique que le champ de température est un scalaire passif vis à vis à ce dernier.



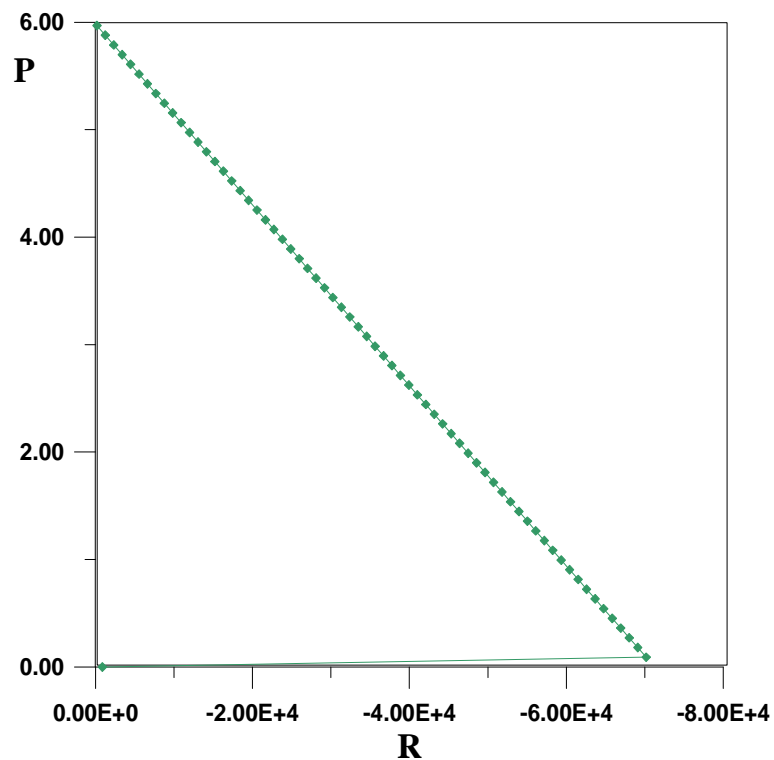
**Fig (V-12):** Profils des vitesses et des températures moyennes pour  $Ra=10^4$   
 (a) à l'entrée (b) au milieu (c) à la sortie de la conduite

#### V.B.4. Champ de Pressions :

La figure (V-13) illustre l'évolution de la pression le long de la conduite pour des valeurs du nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect citées précédemment.

Il intéressant de noter que, les profils de pression présente la même tendance d'évolution du régime laminaire. La pression augmente à l'entrée de la conduite, passe par un maximum puis diminue progressivement pour satisfaire la condition à la sortie du tube ( $P=0$ ).

On peut conclure que le régime d'écoulement n'a pas une grande influence sur le profil de la pression.



**Fig (V-13):** Evolution de la pression moyenne le long de la conduite pour  $Ra=10^4$

**V.B.5. Champs de Vorticité :**

La figure (V-14) représente des séquences temporelles des contours de la vorticité, Nous constatons initialement que le champ d'écoulement est irrotationnel, mais après un certain temps, nous voyons l'apparition des tourbillons de différentes tailles développées le long de la conduite, proviennent des instabilités de l'écoulement notamment les points d'inflexion au niveau du profil de vitesse.

Pendant que l'écoulement se développe, la vorticité se concentre dans la région près de l'axe de symétrie de la conduite. Cela est dû au fait qu'une partie de l'énergie cinétique turbulente produite près de la paroi est très rapidement détruite localement, l'autre partie est transportée vers l'aval et en même temps diffusée vers le centre du tube.

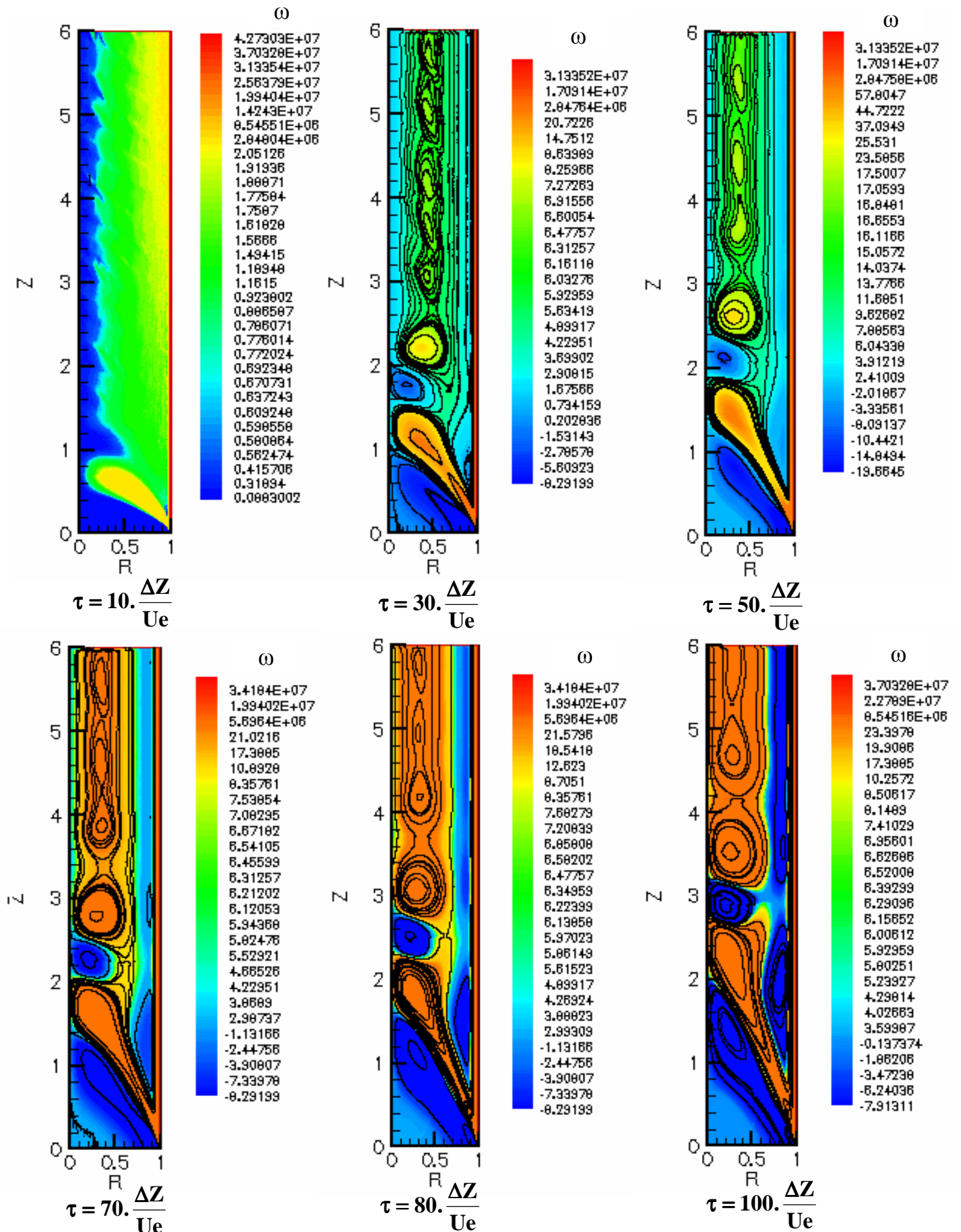


Fig (V-14) : Isovaleurs de la vorticité pour différents temps

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire est destiné à mieux comprendre le processus de la convection naturelle, laminaire et turbulente dans une conduite verticale.

Le sujet que nous avons traité, nous a permis de connaître et de mettre en œuvre la méthode des volumes finis ainsi que d'autres méthodes numériques (SIMPLE, balayage, TDMA).

Dans la première partie de ce travail nous avons représenté les champs hydrodynamique et thermique de la convection laminaire stationnaire y compris la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh et cela pour différents rapports d'aspect.

Les simulations ont été faites pour des nombres de Rayleigh allant de 1 jusqu'à  $10^5$ , et des nombres de rapport d'aspect  $A$  égale à 3, 5, 8, 12. L'effet de ce dernier sur les champs hydrodynamiques et thermique est observé surtout à l'entrée de la conduite, il diminue en avançant le long de la conduite à cause de l'établissement hydrodynamique et thermique de cet écoulement.

Nous avons constaté aussi que le nombre de Nusselt diminue en augmentant le rapport d'aspect de la conduite. L'écart entre les nombres de Nusselt pour les différents rapports d'aspect diminue au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

Nos résultats dans le cas laminaire ont été comparés avec ceux de la littérature, et un bon accord a été trouvé.

Dans la deuxième partie de ce travail nous avons examiné la convection naturelle turbulente instationnaire en utilisant la simulation numérique directe (DNS), nous avons également représenté les champs hydrodynamique et thermique pour une seule valeur du nombre de Rayleigh  $Ra= 10^4$  et cela pour un rapport d'aspect  $A=3$ .

Les instabilités de l'écoulement turbulent se développent aux cours du temps et donnent naissance à des tourbillons. Nous avons étudié la dynamique de cette formation à l'aide des visualisations des isovaleurs de la vorticité.

Lors de nos simulations du cas turbulent nous avons rencontré les difficultés suivantes :

- ◆ Un temps de calcul énorme.
- ◆ Une divergence de calcul pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, et des faibles valeurs du pas de temps.

Malgré ces contraintes, nous avons pu obtenir des résultats, qui nous encouragent à continuer ce travail dans le futur, en essayant de les améliorer, et de représenter d'autres caractéristiques de la turbulence (mélange d'espèces) et même d'appliquer le même calcul sur d'autres géométries de la conduite.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] **S.V. PATANKAR**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Ed. Hemisphere, New York, 1980.
- [2] **J.R. DYER**, *The Development of Laminar Natural convective Flow in a Vertical Uniform Heat Flux Duct*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.18, pp.1455-1465, 1975.
- [3] **I.G. CURRIE and W. A. NEWMAN**, *Natural Convection Between Isothermal Vertical Surfaces*, Heat Mass Transfer ,vol. 4 paper NC 2-7, Elsevier, Amsterdam, 1970.
- [4] **F. MARCONDES and C.R. MALISKA**, *Treatment of the Inlet Boundary Conditions in Natural Convection Flows on open Ended Channels*, Numerical Heat Transfer, Part B, vol.35 , pp.317-345, 1999.
- [5] **F. KREITH**, Traduction de **B. KHODJA**, *Transmission de la Chaleur et Thermodynamique*, Ed. Masson, 1967.
- [6] **C. BODY**, *Les Echanges de Chaleur par Convection* (1<sup>re</sup> Partie), Ed. Bordas/Mouton, Paris, 1968.
- [7] **P.E. ROCHE**, *Convection Thermique Turbulente en Cellule de Rayleigh-Bénard*, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 2001.
- [8] **S. BOUDEBOUS**, *Etude Numérique de la Convection Naturelle Laminaire et Turbulente dans un Conduit Hyperbolique*, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, 2002.
- [9] **J.P. BOIN**, *Turbulence*, Cours, ENSIB, 2001/2002
- [10] **D. JIROVEANU**, *Analyse Théorique et Numérique de Certains Modèles de Viscosité Turbulente*, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 2002.
- [11] **N. BUIL**, *Modélisation Tridimensionnelle du Transport de Polluants dans les Ecoulements à Surface Libre*, Thèse de Doctorat, Université de Claude-Bernard-Lyon1, France, 1999.
- [12] **R. SCHIESTEL**, *Modélisation et Simulation des Ecoulements Turbulents*, Ed. Hermes, Paris, 1993.

- [13] **M. DAMOU**, *Mécanique des Fluides*, Ed. O.P. U Alger, 1994.
- [14] **C. ABDOU**, *Conception d'un Code de Calcul pour la Simulation Numérique d'écoulements Réactifs*, Thèse de Magister, Université de Constantine, 2001.
- [15] **P. Rambaud, A. Tanière, B. Osterlé and M.L. Riethmuller**, *On the behavior of charged particles in the near wall region of a turbulent channel flow*, 4th International Conference on Multiphase Flow, ICMF, New Orleans, 2001.
- [16] **A. DANET**, *Influence des Conditions Amont sur l'Écoulement Derrière une Marche par la Simulation des Grandes Echelles*, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 2001.
- [17] **W. ELENBAAS**, *Heat Dissipation of Parallel Plates by Free convection*, Physica, vol. 9, n° 1, pp.1-28, 1942
- [18] **J.R. BODOIA and J.F. OSTERLE**, *The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates*, J. of Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, vol. 84, n°1, pp.40-44, 1962.
- [19] **R.K. ENGEL and W.K. MUELLER**, *An Analytical Investigation of Natural Convection in Vertical Channels*, ASME paper, n° 67-HT -16, 1967.
- [20] **L.P. DAVIS and J.J. PERONA**, *Development of Free Convection Flow of a Gaz in a Heated Open Tube*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 14, pp.889-903, 1971.
- [21] **M. KAGEYAMA and R. IZUMI**, *Natural Heat Convection in a Vertical Tube*, Bulletin of the JSME, vol. 13, N° 57, pp. 382—394, 1970.
- [22] **W.AUNG, L.S. FLETCHER and V. SERNAS**, *Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15 pp.2293-2308, 1972.
- [23] **J. QUINTIERE and W.K. MUELLER**, *An Analysis of Laminar Free and Forced Convection Between Finite Vertical Parallel Plates*, ASME Journal of Heat Transfer, vol. 95, pp. 53-59, 1973.
- [24] **S.W. CHURCHILL**, *A Comprehensive Correlating Equation for Buoyancy – Induced Flow in Channels*, Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 4, pp. 193-199, 1977.

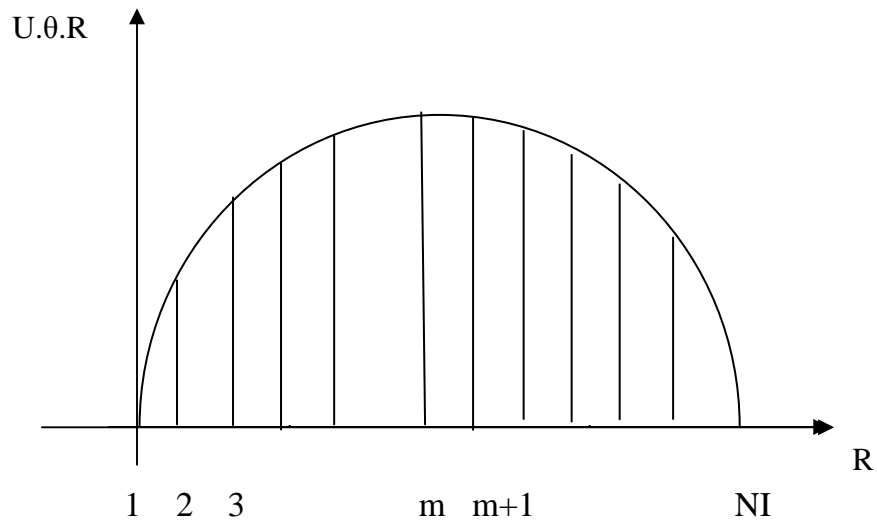
- [25] **S.W. CHURCHILL and R. USAGI**, *A General Expression for the Correlation of Rates of Transfer and Other Phenomenon*, A. I .Ch. E. Journal, vol. 18, N° 6, pp. 1121-1128,1972.
- [26] **C.F. HESS and C.W. MILLER**, *Natural Convection in a Vertical Cylinder subject to Constant Heat Flux*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, pp.421-430, 1979.
- [27] **H. NAKAMURA,Y. ASAKO, and T. NAITOU**, *Heat Transfer by Free Convection between two Parallel Flats Plates*, Numerical Heat Transfer, vol. 5, pp.95-106, 1982
- [28] **A. BAR-COHEN and W.M. ROHSNOW**, *Thermally Optimum Spacing of Vertical Natural Convection Cooled, Parallel Plates*, J. Heat Transfer, vol.116, pp.116-123, 1984.
- [29] **E.M. SAPARROW, G.M. CHRYSTER and L.F. AZEVEDO**, *Observed Natural Convection in One –Sided Heated Vertical Channel*, J. Heat Transfer, vol. 106, pp.325-332, 1984.
- [30] **P. PAYVAR**, *Free Convection in a Vertical Duct of Square Cross Section with Variable Viscosity*, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 23, pp. 247-258, 1993.
- [31] **M.A.I. EL-SHAARAWI and A.A.A. NEGM**, *Conjugate Natural Convection Heat transfer in an Open –Ended Vertical Concentric annulus*, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 36, pp. 639-655, 1999.
- [32] **C.H. CHENG , C.Y. LIN and W. AUNG**, *Developing Flow with Buoyancy Assisted Flow separation*, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 37, pp. 567-586, 2000.
- [33] **S. BOUDEBOUS , A.H. MENIAI and Z. NEMOUCHI** ,*Numerical Study of Developing Natural Laminar Convection in a Vertical Hyperbolic Duct of a Fixed Length and with a Constant Wall Temperature*, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 40 pp.783-800, 2001
- [34] **G. DESRAYAUD and A. FICHERA**, *Laminar Natural Convection in a Vertical Isothermal Channel with Symmetric Surface –Mounted Rectangular Rib*, Int. J. of Heat and Fluid Flow, vol. 23 ,pp. 519-529 , 2002.

- [35] **A.M. ABDELMEGUID and D.B. SPALDING**, *Turbulent Flow and Heat Transfer in Pipes with Buoyancy Effects*, J. Of Fluid Mech., vol.94,Part2 pp. 383-400,1979.
- [36] **B.E. LAUNDER and D.B. SPALDING**, *The Numerical computation of Turbulent Flows*. Comp. Meth. For App. Mech. & Engng. , 3, 1974.
- [37] **H.O. BUHR, E.A. HORSTEN and A. D. CARR**, *The distortion of Velocity and Temperature Profils on Heating for Mercury in Vertical Pipe*, Transactions of A. S. M. E. J. Of Heat Transfer, vol. 96, pp.152,1974.
- [38] **K.S. CHUNG and D.H. THOMPSON**, *Study of Turbulent Circulation Flow with Low Prandlt Number Fluids*, A. I .Ch. E. Symposium Series, vol. 76, N°199,pp.231-237,1980
- [39] **W.P. JONES and B.E. LAUNDER**, *The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- [40] **H. TANAKA , S. MARURAMA and S. HATANO**, *Combined Forced and Natural Convection Heat Transfer for Upward Flow in Uniformly Heated, Vertical Pipe*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, N°1, pp. 165-174, 1987.
- [41] **W.P. JONES and B.E. LAUNDER**, *The Calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a Two -Equation model of turbulence*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 16, pp.1119-1130, 1973.
- [42] **H. KAYAMURA**, *Analysis of Transient Turbulent Flow Using a Phenomenological Model of Turbulence*. Proc. 21<sup>st</sup> National Heat Transfer Symposium, pp. 40-42, Japan, 1984, (in Japanesse).
- [43] **D.Y. SOHN and F.B. CHEUNG**, *Turbulent Heat Transfer in Developing and Fully Developed Regions of a vertical Channel*, A. I .Ch. E. Symposium Series, vol. 87, N° 283, pp. 336-341, 1991.
- [44] **W.M. TO and J.A.C. HUMPHREY**, *Numerical Simulation of Buoyant, Turbulent Flow –I Free Convection along a Heated Vertical Flat Plate*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 39, pp.573-592, 1986.
- [45] **S.L. LYONS, T.J. HANRATTY and J.B. Mc LAUGHLIN**, *Direct Numerical Simulation of Passive Heat Transfer in a Turbulent Channel Flow*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, pp. 1149-1161, 1991.

- [46] **R. BOUDJEMADI, V. MAUPU, D. LAURENCE and P.L. QUERE**, *Budgets of Turbulent of Stresses and Fluxes in Vertical Slot Natural Convection Flow at Rayleigh  $Ra=10^5$  and  $5,4 \cdot 10^5$* , Int. J. Heat and Fluid Flow, vol. 18, pp. 70-79,1997.
- [47] **T. A. M. VERTEEGH and F. T. M. NIEUWSTADT**, *Turbulent Budgets of Natural Convection in Infinite, differentially Heated, Vertical Channel*, Int. J. of Heat and Fluid Flow, vol. 19,pp. 135-149, 1998.
- [48] **B. YU, H. OZOE and S.W. CHURCHILL**, *The Characteristics of Fully Developed Turbulent Convection in a round tube*, Chemical Engineering Science, vol. 56, pp. 1781-1800, 2001.
- [49] **L. HENG, C. CHAN and S.W. CHURCHILL**, *Essentially Exact Characteristics of Turbulent Convection in a Tube*, Chemical Engineering Journal, 71, 161-173, 1998.
- [50] **R. B. BIRD, W. E. STEWART and E. N. L. FOOT**, *Transport phenomena*, New York, USA , 1960.
- [51] **J.D. ANDERSON, G. DEGREGZ, E. DICK and R. GRUNDMANN**, *Computational Fluid Dynamics*, Ed. Springer, Germany, 1996.
- [52] **M. FAVRE- MARINET**, *Convection*, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.
- [53] **O. MIYATAKA and T. FUJII**, *Free Convective Heat Transfer Between Vertical Parallel Plates*, Kagaku, vol. 36, pp.405-412 , 1972 (in Japanese) .
- [54] **C. J. CHANG , T.F. LIN and W.M. YAN**, *Natural Convection Flows in a Vertical, Open Tube Resulting From Combined Buoyancy Effect of Thermal and Mass Diffusion* , Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 29 ,n° 10, pp.1543-1552, 1986.
- [55] **T. AIHARA**, *Effect of Inlet Boundary Conditions on Numerical Solutions of Free Convection Between Vertical Parallel Plates*, Rep. Inst. High Speed Mech. vol. 28, n°258, 1973.
- [56] **G.D. RAITHBY and K.G.T. HALLANDS**, *Natural Convection*, Handbook of Heat Transfer Fundamentals, Eds. W.M. ROHSENOW, J.P. HARTNETT and GRANIC, E.M. McGraw, Chap. 6,pp. 34-36, 1985.

## ANNEXE A :

Calcul de l'intégral :  $I = \int_0^1 U(R) \cdot \theta(R) \cdot R \cdot dR$



**Fig (A-1) :** Principe de la méthode des Trapèzes

En supposant que chaque élément dans la Fig(A-1) est un Trapèze. L'intégral  $I$  est la somme de toutes les surfaces des Trapèzes (méthode des Trapèzes) donc :

$$\begin{aligned}
 I = \int_0^1 U(R) \cdot \theta(R) \cdot R \cdot dR &= \left( \frac{U_1 \cdot \theta_1 \cdot R_1 + U_2 \cdot \theta_2 \cdot R_2}{2} \right) \cdot \Delta R_1 + \\
 &\left( \frac{U_2 \cdot \theta_2 \cdot R_2 + U_3 \cdot \theta_3 \cdot R_3}{2} \right) \cdot \Delta R_2 + \dots + \left( \frac{U_m \cdot \theta_m \cdot R_m + U_{m+1} \cdot \theta_{m+1} \cdot R_{m+1}}{2} \right) \cdot \Delta R_m \\
 &+ \dots + \left( \frac{U_{NI-1} \cdot \theta_{NI-1} \cdot R_{NI-1} + U_{NI} \cdot \theta_{NI} \cdot R_{NI}}{2} \right) \cdot \Delta R_{NI-1} \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

On a :  $R_I = (I-1) \cdot \Delta R$  ,  $\Delta R_I = R_{I+1} - R_I$

$$I = \left( \frac{U_1 \cdot \theta_1 \cdot R_1 \cdot \Delta R_1 + U_{NI} \cdot \theta_{NI} \cdot R_{NI} \cdot \Delta R_{NI}}{2} \right) + \sum_{I=2}^{NI-1} \left( \frac{\Delta R_I + \Delta R_{I-1}}{2} \right) \cdot U_I \cdot \theta_I \cdot R_I \quad (A-2)$$

## ANNEXE B :

### Détermination des dérivées du second ordre :

Ces dérivées sont calculées en utilisant le développement en série de Taylor de la fonction  $\Phi(I,J)$  :

$$\phi(I + 1, J) = \phi(I, J) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{I,J} \cdot \Delta R + \left( \frac{\partial^2 \phi}{(\partial R)^2} \right)_{I,J} \cdot \frac{(\Delta R)^2}{2} + O(R)^2 \quad (B-1)$$

$$\phi(I + 2, J) = \phi(I, J) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{I,J} \cdot (2 \cdot \Delta R) + \left( \frac{\partial^2 \phi}{(\partial R)^2} \right)_{I,J} \cdot \frac{(2 \cdot \Delta R)^2}{2} + O(R)^2 \quad (B-2)$$

#### ◆ Détermination de la Fonction $\Phi(I,J)$ :

Sur l'axe de la conduite nous avons :  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{I,J} = 0$

Nous développons de la même façon la fonction  $\Phi(I,J)$  en série de Taylor :

$$\phi(2, J) = \phi(1, J) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{1,J} \cdot \Delta R + \left( \frac{\partial^2 \phi}{(\partial R)^2} \right)_{1,J} \cdot \frac{(\Delta R)^2}{2} + O(R)^2 \quad (B-3)$$

$$\phi(3, J) = \phi(1, J) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{1,J} \cdot (2 \Delta R) + \left( \frac{\partial^2 \phi}{(\partial R)^2} \right)_{1,J} \cdot \frac{(2 \cdot \Delta R)^2}{2} + O(R)^2 \quad (B-4)$$

En multipliant l'équation (B-3) par (-4) et en additionnant l'équation (B-4), on trouve :

$$\phi(3, J) - 4 \cdot \phi(2, J) = -3 \cdot \phi(1, J) - 2 \cdot \Delta R \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{1,J} \quad (B-5)$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial R}\right)_{1,J} = \frac{4.\phi(2,J) - \phi(3,J) - 3.\phi(1,J)}{2.\Delta R} = 0 \quad (\text{B-6})$$

Ceci implique que :

$$4.\phi(2,J) - \phi(3,J) - \phi(1,J) = 0 \quad (\text{B-7})$$

Alors:

$$\phi(1,J) = \frac{4.\phi(2,J) - \phi(3,J)}{3} \quad (\text{B-8})$$