



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Étude analytique et numérique de quelques problèmes inverses

Présentée par :
Derras Ouradia

Soutenu publiquement le : 00/00/2018.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r Hraiz Rabeh*
Encadreur : *M^r Mihoubi Farid*
Examineur : *M^r Blizak Tahar*

M.C.B, Université de M'sila
M.A.A, Université de M'sila
M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

*Tout d'abord je remercie " ALLAH " , le clément,
le miséricordieux , le plus puissant,d'être avec moi et de m'aider.*

Après j'adresse ma reconnaissance

à mon encadreur le Professeur : Mr :F.MIHOUBI

*Son sérieux et sa compétence qu'ont été très utiles pour mener à bien ce travail. Je
remercie les professeurs*

Mr :Blizak Tahar

Mr :Hraiz Rabeh

qui m'ont faite l'honneur d'être membres du jury.

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département des mathématiques

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

*Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amis, qui ont contribué directement
ou indirectement à la réalisation de ce travail*

Mirce

Dédicaces

Je dédie cet humble travail : À mes parents ma mère et mon père.

*À mes frères ZITOUNI, ABD ALKADER, ABD HAMID ,MOULOUD
MOUSSA et à leur famille, Soeurs de SAMRA, RAWIA, SAMIHA, HAFIDA,
CHAFIA.*

Mon mari YASSIN et sa famille.

À ma proche amie AHLAM et à tous mes camarades de classe.

À la fin, je donne ces mémos à ma famille et à tous ceux que j'aime.

Table des matières

1	Notions fondamentales.	7
1.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	8
1.1.1	Fonction Gamma	8
1.1.2	Fonction de Mittag-Leffler	8
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	9
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	10
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	11
1.5	La dérivée fractionnaire	12
1.6	Espaces fonctionels et théorème de point fixe	13
2	Problème inverse fractionnaire	18
2.1	Problème inverse fractionnaire avec condtion périodique	19
2.1.1	Existence et unicité de la solution	20
2.2	Problème inverse fractionnaire non local	28
2.2.1	Solution analytique	30
2.2.2	Existence de la solution	33
2.2.3	Unicité de la solution	35
3	Étude numérique du problème inverse fractionnaire	37
3.1	La méthode de différence finie	38
3.2	Schéma explicite du problème inverse	39
3.3	Exemples et discussion numériques	40

Table des figures

3.1	représentation graphique de $a(t)$ à $t=0.01$	41
3.2	solution exacte et solution approchée schéma explicite pour $t=0.01$	42

Introduction

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres d'un modèle doivent être identifiées à partir de l'observations du phénomène. En mathématiques, un problème inverse a la forme d'une équation

$$Ax = y \quad (1)$$

Où y représente les mesures effectuées, x représente les valeurs des paramètres du phénomène et A est un opérateur linéaire ou non linéaire. Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation(1); cela nécessite l'inversion de l'opérateur A . Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et d'après Hadamard [2] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- ☞ La solution existe ;
- ☞ Elle est unique ;
- ☞ Elle dépend continument des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé. La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

- ✓ **Dans le premier chapitre**, nous allons commencer par donner un rappel sur fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire , intégrales et dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo ,ainsi que quelques espaces fonctionnelles et théorème du point fixe de Schauder .
- ✓ **Dans le deuxième chapitre** , nous étudions deux problèmes inverses avec dérivée fractionnaire suivant :
 - ☞ **Premierement** , nous avons présenté le problème inverse fractionnaire avec condition périodique.
Le problème donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) & , (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (I)$$

En utilisant la relation entre les dérivées classiques et dérivées fractionnaires, nous obtenons le nouveau problème et examinons l'existence de la solution et son unité.

$$\begin{cases} u_t = b(t)u_{xx} + G(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Sous une hypothèse sur les données , l'existence ,unicité et la dépendance continu sur les données de la solution sont présentées,en utilisant la méthode de *Fourier* généralisée .

☞ **Deuxièmement**, nous présentons quelques concepts de base sur la fractionnaire dont nous avons besoin pour étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha (u(x, t) - u(x, 0)) - \delta u_{xx}(x, t) = f(x), (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \phi(x), u(x, T) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (\text{III})$$

Nous avons présenté une stratégie pour la résolution du problème inverse de la détermination d'un terme source pour une équation de la chaleur linéaire impliquant une dérivée fractionnaire dans le temps. Le problème considéré à des conditions aux limites non locales et à un système biorthogonal est utilisé pour étendre la solution du problème inverse. Le terme source est censé être indépendant de la variable de temps.

✓ **Dans le troisième chapitre** ,étude numérique de problème invers fractionnaire pour la méthode de différence finie , en utilisant le schéma explicite du problème inverse fractionnaire avec condtion périodique et quelques exemples numérique .

NOTIONS FONDAMENTALES.

Dans ce chapitre , nous présentons certaines théories de base qui concernent des fonctions utiles qui sont utilisées dans les autre chapitres .Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et Mittag-Leffler . Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie des problèmes inverses avec dérivée fractionnaire et ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo,ainsi que quelques définitions des espaces fonctionnels et théorème de point fixe

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section ,nous présentons les fonction Gamma , Mittag-Leffler .ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. (voir [17, page 1]). L'une des fonctions de base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = +\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

1.1.2 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z , joue un rôle joue très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier .La généralisation de la de fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par **G.M.Mittag-Leffler** ([6, 5]). Et désignée par la fonction suivante (voir [1, 2]).

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (1.1)$$

La fonction de **Mittag-Leffler** à deux paramètres joue également un rôle joue très important dans la théorie du calcul fractionnaire .Cette dernière a été introduite par **Agarwal** ([20]).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (1.2)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.1) .A partir de relation (1.2) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.3)$$

pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire , la fonction de **Mittag-Leffler** joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^1 f(x) &= \int_a^x f(t) dt. \\ I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) = \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt = \int_a^x \int_a^t f(s) ds dt. \end{aligned}$$

On pose $g(t) = \int_a^t f(s) ds$, d'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(s) ds - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{ime} itération, on obtient :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Définition 1.2. (voir [14, 21]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.4)$$

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.5)$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) respectivement.

Propriétés 1.2. (voir [14, page 71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. $I_{a+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$
2. $I_{b-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$

Remarque 1.1. L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (x-a)^{\alpha} \text{ et } I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (b-x)^{\alpha}, \quad f(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1. Soient $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\alpha > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** (1.4) et (1.5) possède les propriétés suivantes :

1. $I_{a+}^{\alpha} \left[I_{a+}^{\beta} f(x) \right] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).$
2. $I_{b-}^{\alpha} \left[I_{b-}^{\beta} f(x) \right] = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$

le prouve de cette théorème 1.1 (voir [14, page 73]).

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3. (voir [14, page 70]). Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ et $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C} (Re(\alpha) > 0)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &:= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a. \end{aligned} \quad (1.6)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &:= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b. \end{aligned} \quad (1.7)$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 1.2. On remarque que :

1. Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors $n = m + 1$. Donc, en utilisant (1.6) et (1.7), on obtient les propriétés suivantes :
 - (a) $\mathcal{D}_{a+}^0 f(x) = \mathcal{D}_{b-}^0 f(x) = f(x).$
 - (b) $\mathcal{D}_{a+}^m f(x) = f^{(m)}(x).$
 - (c) $\mathcal{D}_{b-}^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x).$

Où $f^{(m)}(x)$ est la dérivée usuelle de f d'ordre m .
2. Si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.6) et (1.7) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad x > a. \\ \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad x < b. \end{aligned}$$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors $n = [\alpha] + 1$. Donc, (1.6) et (1.7) devient :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1; \quad x > a. \quad (1.8)$$

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1; \quad x < b. \quad (1.9)$$

4. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.8) et (1.9) devient :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad x > a.$$

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad x < b.$$

Propriétés 1.3. (voir [14, page 71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$1. \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$2. \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4. (voir [14]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par :

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) := I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (1.10)$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) := (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (1.11)$$

Propriétés 1.4. On a

1. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda ({}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) + \mu ({}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g)(x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda ({}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x) + \mu ({}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g)(x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.10), (1.11) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.6), (1.7) sont données par :

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad (1.12)$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right], \quad (1.13)$$

1.5 La dérivée fractionnaire

Définition 1.5. (voir [19, page 66]). Soit $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ et $t \succ 0$. Alors la définition de la dérivée de f at t est

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon}.$$

à cela , on a $\frac{d}{dt} t^n = nt^{n-1}$. Donc la question est Peut-on mettre une définition similaire pour la dérivée fractionnaire d'ordre α , où $0 < \alpha \leq 1$? Ou en général pour $\alpha \in (n, n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. Notons T_α pour désigner l'opérateur que l'on appelle la dérivée fractionnaire d'ordre α .

Propriétés 1.5. Pour $\alpha = 1$, T_1 satisfait les propriétés suivantes :

1. $T_1(af + bg) = aT_1(f) + bT_1(g)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et f, g dans le domaine de T_1 .
2. $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$.
4. $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_1(g) - gT_1(f)}{g^2}$.
5. $T_1(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.

Maintenant, nous présentons notre nouvelle définition, qui est la définition la plus simple et la plus naturelle et efficace de fractionnaire dérivée de l'ordre $\alpha \in (0, 1]$. Nous devrions remarquer que la définition peut être généralisée pour inclure tout α . Le cas $\alpha \in (0, 1]$ est le plus important, et une fois établi, les autres cas sont simples.

Définition 1.6. Soit fonction $f : [0, +\infty)$. Alors la "dérivée fractionnaire conforme" de f d'ordre α est définie par

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

pour tout $t \succ 0, \alpha \in (0, 1)$ Si f est α -différentiable dans $(0, a), a \succ 0$, et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe, alors définissez

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

Théorème 1.2. Si une fonction $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est α -différentiable à $t_0 \succ 0, \alpha \in (0, 1]$, alors f est continue à t_0 .

Démonstration. Puisque $f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \epsilon$. Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon$$

soit $h = \epsilon t_0^{1-\alpha}$. Alors ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0,$$

ce que implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

Par conséquent , f est continue à t_0 . □

Théorème 1.3. (voir [19, page 67]). Soit $\alpha \in (0, 1]$ et f, g α -différentiable en un point $t \succ 0$. Puis

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(g) + bT_\alpha(f)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_\alpha(g) - gT_\alpha(f)}{g^2}$.
6. Si, en outre, f est différentiable, alors $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$.

Démonstration. Les parties (1) à (3) découlent directement de la définition. Nous choisissons de prouver (4) et (6) seulement parce qu'ils sont cruciaux.

Maintenant, pour fixe $t \succ 0$,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
 &= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha(g)(t)
 \end{aligned}$$

Puisque g est continu à t , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$. Ceci complète la preuve de la partie (4). (5) peut être prouvé dans un semblable façon. Pour prouver (6), soit $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dans la définition (1.6), puis $\varepsilon = t^{1-\alpha}h$. Donc,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\
 &= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\
 &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t).
 \end{aligned}$$

□

1.6 Espaces fonctionnels et théorème de point fixe

Espace normés

Définition 1.7. (voir [12, page 21]). (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une norme sur E , est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

Remarque 1.3. L'espace vectoriel E muni d'un norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \|\cdot\|)$

1. $E = \mathbb{R}^n$, nous avons les normes suivant :

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1 \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)\end{aligned}$$

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

L'application $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$: donnée par :

$$\|g\| = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \max \{ |f(t)| / t \in [a, b] \} . \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt . \\ \|f\|_p &= \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} .\end{aligned}$$

Espace de Banach

Définition 1.8. (Suite de Cauchy) Soit F un espace vectoriel normé . Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m > N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.9. (Espace complet) Soit F un espace vectoriel normé .On dit que F est complet si toute suite de Cauchy dans F est convergente dans F .

Définition 1.10. (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace normé complet .

Proposition 1.1. soit F est espace de Banach , alors toute suite bornée admet une sous suite converge dans F .

Définition 1.11. (voir [4, page 5]). pour $h > 0$ nous définissons l'espace

$$C_r^1([0, h]) := \left\{ v \in C^1([0, h]) : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^r v(t) \text{ existe et est finie} \right\}$$

ici $C^0([0, h])$ est l'espace habituel des fonctions continues sur $[0, h]$. l'espace $C_r^1([0, h])$ doté de la norme

$$\|v\|_r := \max_{0 \leq t \leq h} t^r |v(t)|$$

est un espace Banach

Espace de Hilbert

Définition 1.12. (produit scalaire) Soit F un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Un produit scalaire sur F est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, x_1, x_2 \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Définition 1.13. (voir [17, page 6]). (Espace préhilbertien) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire .

Remarque 1.4. Un produit scalaire sur F définit une norme sur F donnée par :

$$\forall x \in F : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.14. (Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ complet pour la norme induite par le produit scalaire .

Opérateurs sur un espace de Hilbert

Définition 1.15. (Opérateur linéaire continu) Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert réels. On appelle opérateur linéaire continu de H_1 dans H_2 toute application $L : H_1 \longrightarrow H_2$ telle que :

1. **Linéarité** : $\forall x, y \in H_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$
2. **Continuité** : $\exists K > 0, \forall x \in H_1 : \|L(x)\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}$

On définit la norme de l'opérateur L par :

$$\|L\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|L(x)\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$$

Ensemble convexe

Définition 1.16. (Ensemble convexe) Une ensemble S est dit convexe si pour tout points x et y de S , le segment $[x, y]$ est inclus dans S i.e

$$\forall x, y \in S, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in S$$

Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach . Le " Théorème du point fixe de Schauder " est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe , que n'est pas nécessairement unique . Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.4. Soit k un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : k \rightarrow k$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Démonstration. Soit $T : K \rightarrow K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue; donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall x, y \in K$ on a

$$\|x - y\| \leq \delta \implies \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon. \quad (1.14)$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $(x_1, x_2, \dots, x_p) \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e.

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L = \text{Vec}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair ψ_j que est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continues positives ψ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$. Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) T(x_j)$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K (car $g(x)$ est un comment des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g/K^* : K^* \rightarrow K^*$ (d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) [T(y) - T(x_j)]. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| \leq \delta$ et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \delta$. On a pour tout j

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-3}$.
Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite y_{m_k} qui converge vers un point $y^* \in K$: Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, donc y^* est un point fixe de T sur K . $\square$

PROBLÈME INVERSE FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous essayons les résultats discutés dans chapitre (1) précédent afin que nous trouvions une relation entre la dérivée normale et la dérivée fractionnaire, nous l'appliquons à l'équation de la chaleur, nous examinons l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse fractionnaire avec condition périodique et problème inverse fractionnaire non local.

2.1 Problème inverse fractionnaire avec conditon périodique

Conformément à une certaine supposition sur les données ,l'existence ,l'unicité et données de la solution sont montrées en utilisant la méthode généralisée de Fourier . L'exactitude et l'efficacité informatique de la méthode proposée sont vérifiées avec l'aide des exemples numériques (voir [11, page 1]). .

Dénot le domaine D_T par

$$D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) & , (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < 1, \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (I)$$

Le problème pour trouver une paire $\{a(t), u(x, t)\}$ dans (I)s'appelle un problème inverse.

Définition 2.1. (voir [11, page 1]). La couple $\{a(t), u(x, t)\}$ forme de classe $C^1[0, T] \times C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})$ pour quelles condition (I) est satisfait $a(t)$ est décroissant et $a(t) > 0$ sur l'intervalle $[0, T]$, s'appelle une solution classique du problème inverse (I).

Nous avons les supposition suivantes sur les données du problème (I)

$$E(t) \in C^1[0, T], E'(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (A1)$$

$$\varphi \in C^4[0, 1]. \quad (A2)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1), \int_0^1 x\varphi(x)dx = E(0). \quad (1)$$

$$\varphi_n \geq 0, n = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$F(x, t) \in C(\overline{D_T}); F(x, t) \in C^4[0, 1], \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (A3)$$

$$F(0, t) = F(1, t), F_x(0, t) = F_x(1, t), F_{xx}(0, t) = F_{xx}(1, t). \quad (1)$$

$$F_n(t) \in C_{1-\alpha}^0(\overline{D}), F_n(t) \geq 0, n = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

où $\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi nx)dx$, $F_n(t) = \int_0^1 F(x, t) \sin(2\pi nx)dx$, $n = 1, 2, \dots$;

Théorème 2.1. (voir [11, page 3]). Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) sont satisfaites . Alors les propriétés suivantes sont vraies .

1. Le problème inverse(I) ademt un solution dans D_T .
2. La solution du problème inverse (I) est unique dans D_{T_0} , où le numére T_0 ($0 < T_0 < T$) est déterminé par les données du problème.

Considérer Le problème

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1$$

d'après (6) on a

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

donc

$$t^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{\alpha-1} a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^{\alpha-1} F(x, t),$$

on pose que

$$b(t) = t^{\alpha-1} a(t) \text{ et } G(x, t) = t^{\alpha-1} F(x, t). \quad (*)$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t). \quad (2.2)$$

Avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.3)$$

La condition de frontière périodique

$$u(0, t) = u(1, t) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

Et la condition de surdétermination

$$\int_0^1 x u(x, t) dx = E(t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

2.1.1 Existence et unicité de la solution

Nous avons les supposition suivantes sur les données du problème (2.2)-(2.5)

$$E(t) \in C^1[0, T], E'(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (\text{H1})$$

$$\varphi \in C^4[0, 1]. \quad (\text{H2})$$

$$\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1), \int_0^1 x \varphi(x) dx = E(0). \quad (1)$$

$$\varphi_n \succeq 0, n = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$G(x, t) \in C(\overline{D_T}); G(x, t) \in C^4[0, 1], \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (\text{H3})$$

$$G(0, t) = G(1, t), G_x(0, t) = G_x(1, t), G_{xx}(0, t) = G_{xx}(1, t). \quad (1)$$

$$G_n(t) \succeq 0, n = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

où $\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx$, $G_n(t) = \int_0^1 G(x, t) \sin(2\pi n x) dx$, $n = 1, 2, \dots$;

Théorème 2.2. (voir [11, page 3]). Supposons que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites . Alors les propriétés suivantes sont vraies .

1. Le problème inverse(2.2)-(2.5) admet une solution dans D_T .
2. La solution du problème inverse (2.2)-(2.5) est unique dans D_{T_0} , où le nombre T_0 ($0 < T_0 < T$) est déterminé par les données du problème.

Démonstration. (voir [11, page 4]). En appliquant la procédure standard de la méthode de Fourier , nous obtenons la représentation suivante pour la solution de (2.2)-(2.4) pour $b(t) \in [0, T]$.

$$\begin{cases} u_t = b(t)u_{xx} + G(x, t), (x, t) \in D_T, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (\text{II})$$

On recherche de la solution du problème (??) sous forme est :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda x), G(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} G_n(t) \sin(\lambda x). \quad (2.6)$$

La condition de frontière périodique

$$u(0, t) = u(1, t).$$

On remplace $x = 0$ et $x = 1$ de (2.6) alors

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda \cdot 0) \\ u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda \cdot 1) \end{cases} \Rightarrow \sin(\lambda \cdot 1) = 0.$$

Et il

$$\lambda = n\pi.$$

Et

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad \text{et} \quad u_x = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda x)$$

Nous comptons les valeurs $x = 0$ et $x = 1$ alors

$$\begin{cases} u_x(x, 0) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda \cdot 0) \\ u_x(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda \cdot 1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\lambda \cdot 1) = 1.$$

Et il

$$\lambda = 2n\pi.$$

Et il faut

$$\lambda = 2n\pi, n = 1, 2, \dots;$$

Remplacé la formule de λ dans la solution suivante :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x), G(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} G_n(t) \sin(2n\pi x). \quad (2.7)$$

On a

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi nx) dx, G_n(t) = \int_0^1 G(x, t) \sin(2\pi nx) dx, n = 1, 2, \dots;$$

On recherche $u_n(t)$

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x).$$

Et à partir de la solution nous concluons

$$u_t(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2n\pi x), u_{xx}(x, t) = -(2n\pi)^2 \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x).$$

Alors d'après (2.2) :

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2n\pi x) = -(2n\pi)^2 b(t) \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} G_n(x, t) \sin(2n\pi x).$$

$$u'_n(t) = -(2n\pi)^2 b(t) u_n(t) + G_n(t). \quad (\text{III})$$

Alors (III) est équation différentielle premier ordre non homogène.

On pose :

$$u_n(t) = y \Rightarrow y' = -(-2n\pi)^2 b(t) y + G_n(t).$$

Utilise du changement de variable

$$g(t) = e^{\int_0^t (2n\pi)^2 b(s) ds} y.$$

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= (2n\pi)^2 b(t) e^{\int_0^t (2n\pi)^2 b(s) ds} y + y' e^{\int_0^t (2n\pi)^2 b(s) ds} \\ &= ((2n\pi)^2 b(t) y + y') e^{\int_0^t (2n\pi)^2 b(s) ds} \end{aligned}$$

On a

$$G_n(t) = ((2n\pi)^2 b(t) y + y')$$

Remplacé $G_n(t)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= G_n(t) e^{\int_0^t (2n\pi)^2 b(s) ds} \\ g(t) &= \int_0^t G_n(\tau) e^{\int_0^\tau (2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + C. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \int_0^t G_n(\tau) e^{\int_0^\tau (2n\pi)^2 b(s) ds + \int_0^\tau (2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \\ y(t) &= \int_0^t G_n(\tau) e^{\int_t^\tau (2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds}. \end{aligned}$$

Alors

$$u_n(t) = \int_0^t G_n(\tau) e^{\int_\tau^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds}. \quad (2.8)$$

On recherche la constante C :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x).$$

$$u(x, 0) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(0) \sin(2n\pi x), u_n(0) = \int_0^1 u(x, 0) \sin(2n\pi x) dx, u(x, 0) = \varphi(x).$$

On a

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

Alors

$$u_n(0) = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2n\pi x) dx = \varphi_n$$

D'après (2.8)

$$u_n(0) = C = \varphi_n$$

Donc

$$u_n(t) = \int_0^t G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds}. \quad (2.9)$$

Nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x).$$

Après avoir trouvé la valeur de $u_n(t)$, nous trouvons une compensation dans la solution

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left[\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \right] \sin(2n\pi x) \quad (2.10)$$

D'après (*) on a

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left[\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^t -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right] \sin(2n\pi x) \quad (2.11)$$

Les suppositions $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), G(0, t) = G(1, t)$ et $G_x(0, t) = G_x(1, t)$ sont conformes pour la représentation de (2.2) de la solution $u(x, t)$ pour être valide. En outre, sous les hypothèses de régularité $\varphi \in C^4[0, 1]; G(x, t) \in C(\bar{D})$ et $G(x, t) \in C^4[0, 1]$ pour tout $t \in [0, T]$. Série (2.10) et les dérivées partielles de x convergent uniformément de $\bar{D}_T$ puisque de majorant la sommes sont absolument convergentes. $u(x, t), u_x(x, t)$ convergent de façon uniforme dans $\bar{D}_T$ puisque de majorant la sommes sont absolument convergente. Donc, les sommes $u(x, t)$ et $u_x(x, t)$ sont continues dans $\bar{D}_T$.

En outre, la dérivée partielle de t et la série de dérivée partielle de xx le deuxième ordre de la série dérivée partielle est convergent uniformément pour $0 < \epsilon \leq t$. Et ainsi de suite $u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\bar{D}_T)$ et satisfait les conditions (2.2)-(2.4).

En outre, $u_t(x, t)$ est continue dans $\bar{D}_T$, parce que de majorant la somme de la séries de dérivé partielle t est absolument convergent dans la condition $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, et $G_{xx}(0, t) = G_{xx}(1, t)$

dans $\bar{D}_T$, l'équation (2.10) peut être différencié dans la condition (H1) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 xu(x, t) &= \sum_{n \geq 1} \int_0^1 x \sin(2n\pi x) dx, \text{ on a } \int_0^1 x \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{2n\pi} \\ \Rightarrow \int_0^1 xu(x, t) &= -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} u_n(t) = E(t). \end{aligned}$$

Et il

$$\int_0^1 xu_t(x, t) = E'(t). \quad (2.12)$$

On recherche $a(t)$

$$u_t(x, t) = b(t)u_{xx}(x, t) + G(x, t).$$

On multiplie l'équation (2.2) par x

$$xu_t(x, t) = b(t)xu_{xx}(x, t) + xG(x, t).$$

Alors

$$\int_0^1 xu_t(x, t) = b(t) \int_0^1 xu_{xx}(x, t) + \int_0^1 xG(x, t).$$

On a

$$\int_0^1 xu_{xx}(x, t) = \sum_{n \geq 1} (2n\pi)u_n(t), \quad \int_0^1 xG(x, t) = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} G_n(t)$$

Donc

$$E'(t) = b(t) \sum_{n \geq 1} (2n\pi)u_n(t) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} G_n(t).$$

On conclut

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{t^{1-\alpha} E'(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi)u_n(t)} \\ a(t) &= \frac{t^{1-\alpha} E'(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \left(\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_\tau^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

On a $a(t)$ est décroissant, alors

$$\begin{aligned} a(T) &\leq a(t) \leq a(0) \\ a(T) &= \frac{T^{1-\alpha} E'(T) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(T)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \left(\int_0^T G_n(\tau) e^{\int_\tau^T - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^T - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right)} \\ &\geq \frac{T^{1-\alpha} E'(T) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(T)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \left(\int_0^T G_n(\tau) d\tau + \varphi_n \right)} \\ a(0) &= \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(0)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \varphi_n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{T^{1-\alpha} E'(T) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(T)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \left(\int_0^T G_n(\tau) d\tau + \varphi_n \right)} \leq a(t) \leq \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(0)}{\sum_{n \geq 1} (2n\pi) \varphi_n}.$$

Notation 2.1. Dénot :

$$\Rightarrow C_0 = T^{1-\alpha} E'(T) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(T).$$

$$\Rightarrow C_1 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(0).$$

$$\Rightarrow C_2 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \varphi_n.$$

$$\Rightarrow C_3 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^T G_n(\tau) + \varphi_n \right).$$

Il facile de vérifier que

$$0 < \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.14)$$

Présenter l'ensemble de M comme

$$M = \left\{ a(t) \in C_{1-\alpha}^1([0, T]) : \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} \right\}. \quad (2.15)$$

Il est facile de voir que :

$$P : M \longrightarrow M$$

Montrer que l'opérateur P est compact .

Soit $M_1 \in M$ un ensemble borné arbitraire puisque $P(M_1) \subset M$, alors $P(M_1)$ est borné uniformément . En suit , nous avons pour $a(t) \in M_1$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Et cela donne

$$a(t) = p[a(t)]. \quad (2.16)$$

Alors

$$p[a(t)] = \frac{t^{1-\alpha} E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right)}. \quad (2.17)$$

On pose

$$\begin{aligned} K(t) &= t^{1-\alpha} E'(t) + \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t) \right). \\ N(t) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |P(a(t_1)) - P(a(t_2))| &= \left| \frac{K(t_1)}{N(t_1)} - \frac{K(t_2)}{N(t_2)} \right| \\ &= \left| \frac{K(t_1)N(t_2) - K(t_2)N(t_1)}{N(t_1)N(t_2)} \right|, \\ &= \left| \frac{K(t_1)N(t_2) - K(t_2)N(t_1) + K(t_1)N(t_1) - K(t_1)N(t_1)}{N(t_1)N(t_2)} \right|, \\ &\leq \left| \frac{K(t_1) - K(t_2)}{N(t_2)} \right| + \left| \frac{K(t_1)(N(t_2) - N(t_1))}{N(t_1)N(t_2)} \right|. \end{aligned}$$

Théorème 2.3. (*D'accroissent fini*)

Soit f une fonction continue sur intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe une constante $c \in]a, b[$ telle que :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Alors on applique le théorème 2.3

$\exists t \in]t_1, t_2[$ telle que $f = e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t s^{\alpha-1} a(s) ds}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} s^{\alpha-1} a(s) ds}}{t_1 - t_2} \right| &= (2n\pi)^2 t^{\alpha-1} a(t) e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t s^{\alpha-1} a(s) ds}, \\ \left| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} s^{\alpha-1} a(s) ds} \right| &= (2n\pi)^2 t^{\alpha-1} |t_1 - t_2| a(t) e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t s^{\alpha-1} a(s) ds}, \\ \left| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} s^{\alpha-1} a(s) ds} \right| &\leq (2n\pi)^2 |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} t^{\alpha-1} a(t). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} |N(t_1) - N(t_2)| &\leq \left| \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \varphi_n \left(e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} s^{\alpha-1} a(s) ds} \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^{t_1} G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_1} -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_2} G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_2} -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau \right) \right|. \end{aligned}$$

On pose

$$A = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \varphi_n \left(e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} s^{\alpha-1} a(s) ds} \right).$$

Donc

$$A \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 \varphi_n |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} t^{\alpha-1} a(t).$$

et

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^{t_1} G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_1} -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_2} G_n(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_2} -(2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau \right) \\ B &\leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} t^{\alpha-1} a(t) \int_0^T G_n(\tau) d\tau + \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} G_n(t), \end{aligned}$$

alors

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq ((C_4 + C_5)L + C_6) |t_1 - t_2| \quad (2.18)$$

tels que :

$$\begin{aligned} C_4 &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 \varphi_n; \\ C_5 &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 \int_0^T G_n(\tau) d\tau; \\ C_6 &= \max_{t \in [0, T]} \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) G_n(t). \end{aligned}$$

À cette fin , prendre un arbitraire $\eta \succ 0$. Comme $K(t)$ est continue dans $[0, T]$ puis $\exists \delta_1 = \delta_\eta, \forall t_1, t_2 \in [0, T]$

$$|t_1 - t_2| \leq \eta \implies |K(t_1) - K(t_2)| \prec \frac{C_2 \eta}{2}.$$

Laisser

$$\delta = \min \left\{ \delta_1(\xi), \frac{\xi C_2^2}{2((C_4 + C_5)L + C_6)C_1} \right\}$$

La form (2.18) pour $|t_1 - t_2| \leq \eta$, nous obtenons

$$|P(a(t_1)) - P(a(t_2))| \prec \xi$$

Ainsi ,l'ensemble $P(M_1)$ équicontinue .Alors $P(M_1)$ est un ensemble compact et la opérateur P est compact et cartes de l'ensemble M sur lui-même .En utilisant théorème point de fixe le Schauder , nous avons une solution $a(t) \in [0, T]$ de l'équation (2.16) .

Maintenant , laissez nous montrons qu'il existe $D_{T_0}(0 \prec T_0 \prec T)$ et la soltion (a, u) du problème (I) est unique dans D_{T_0} .

On suppose que (d, v) est également la couple de solution au problème de (I) .Alors form de la représentation (2.11) et(I) de la solution nous avons :

$$\begin{aligned} u(x, t) - v(x, t) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} \varphi_n \left(e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} d(s) ds} \right) \sin(2n\pi x) \\ &+ \sum_{n \geq 1}^{\infty} \int_0^t G_n(\tau) \left(e^{\int_\tau^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{\int_\tau^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} d(s) ds} \right) \sin(2n\pi x) d\tau. \\ a(t) - d(t) &= P[a(t)] - P[d(t)]. \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} P[a(t)] - P[d(t)] &= \frac{t^{1-\alpha} E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_\tau^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} a(s) ds} \right)} \\ &- \frac{t^{1-\alpha} E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t G_n(\tau) e^{\int_\tau^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} d(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t - (2n\pi)^2 s^{\alpha-1} d(s) ds} \right)}. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations

$$\begin{aligned} \left| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t s^{\alpha-1} d(s) ds} \right| &\leq (2n\pi)^2 T \max_{t \in [0, T]} t^{\alpha-1} |a(t) - d(t)|. \\ \left| e^{-(2n\pi)^2 \int_t^t s^{\alpha-1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_t^t s^{\alpha-1} d(s) ds} \right| &\leq (2n\pi)^2 T \max_{t \in [0, T]} t^{\alpha-1} |a(t) - d(t)|. \end{aligned}$$

Donc

$$P[a(t)] - P[d(t)] \leq (2n\pi)^2 T^\alpha \max_{t \in [0, T]} |a(t) - d(t)|. \quad (2.19)$$

On obtient

$$\max_{t \in [0, T]} P[a(t)] - P[d(t)] \leq K \max_{t \in [0, T]} |a(t) - d(t)|. \quad (2.20)$$

On a

$$\max_{t \in [0, T]} P[a(t)] - P[d(t)] \leq \frac{(C_4 + C_5)}{C_2} L T_0 \max_{t \in [0, T]} |a(t) - d(t)| \quad (2.21)$$

Soit $K \in (0, T)$ soit numéro fixe arbitraire .Fixe un nombre $T_0, 0 < T_0 < T$, tel que

$$\frac{(C_4 + C_5)}{C_2} L T_0 < K.$$

En suit , de l'égalité (2.16)-(2.21) nous obtenons

$$\|a - d\|_{C[0,T]} \leq K \|a - d\|_{C[0,T]} \quad (2.22)$$

Ceci implique

$$a = d \implies u = v$$

□

2.2 Problème inverse fractionnaire non local

Dans cet section , nous intéressons au problème de trouver $u(x, t)$ (la distribution de température) et $f(x)$ (le terme source) dans le domaine $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ pour le système suivant

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha (u(x, t) - u(x, 0)) - \delta u_{xx}(x, t) = f(x), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \phi(x), u(x, T) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.23)$$

où $\delta > 0$, D_{0+}^α représente la dérivée fractionnaire d'ordre $0 < \alpha < 1$, définie au sens de **Riemann-Liouville**, $\phi(x)$ et $\varphi(x)$ sont les températures initiale et finale, respectivement. Le choix du terme $D_{0+}^\alpha (u - u_0)(t)$ dans l'équation (III) au lieu du terme usuel $D_{0+}^\alpha u(t)$ a été fait pour éviter la singularité en zéro ainsi que pour imposer une condition initiale significative au problème.

Il y a très peu de section qui examinent le problème inverse des équations différentielles avec une dérivée fractionnaire en temps. Dans [17], les auteurs ont étudié le problème inverse de détermination de l'ordre de dérivée fractionnaire et le coefficient de diffusion pour une équation de diffusion .

Ils ont montré la détermination unique de l'ordre de la dérivée fractionnaire et le coefficient de diffusion ; leur preuve est basé sur le développement en fonctions propres de la solution faible au problème et la **théorie de Gelfand-Levitan**.

Pour la résolution des problèmes inverses, l'unicité de la solution est le point le plus important. Une fois que nous avons l'unicité du problème inverse, alors nous pouvons utilisé les schémas numériques qui sont stables et convergents pour obtenir une approximation de la solution.

Récemment, quelques articles traitent le problème inverse pour l'équation de diffusion fractionnaire par différents algorithmes numériques (voir [17], [9]).

Pour une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le Riemann-Liouville fractionné côté gauche intégrale d'ordre $0 < \alpha < 1$ est définie par (voir [15, page 64]).

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Euler Gamma. Peut être écrit en tant que convolution

$$I_{0+}^\alpha f(t) = (\phi_\alpha * f)(t), \quad (2.24)$$

où

$$\phi_\alpha := \begin{cases} t^{1-\alpha}/\Gamma(\alpha) & t < 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ (2.25) est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^\alpha f(t) &:= \frac{d}{dt} (I_{0+}^{1-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^t \frac{f(\iota) d\iota}{(t-\iota)^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En particulier, lorsque $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ alors $\mathcal{D}_{0+}^0 f(t) = f(t)$ et $\mathcal{D}_{0+}^1 f(t) = f'(t)$ respectivement; remarquer que le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est pas égal à zéro.

La transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ de une fonction avec au plus exponentiellement la croissance est

$$\mathcal{L} \{ I_{0+}^\alpha f(t) : s \} = \mathcal{L} \{ f(t) : s \} / s^\alpha. \quad (2.26)$$

En outre, pour $0 < \alpha < 1$, nous avons

$$I_{0+}^\alpha \mathcal{D}_{0+}^\alpha (f(t) - f(0)) = f(t) - f(0). \quad (2.27)$$

Donc, avec la définition de la fonction **Mittag-Leffler**, on obtient :

Soit $e_\alpha(T, \mu) := E_\alpha(-\mu t^\alpha)$ où $E_\alpha(T)$ est la fonction **Mittag-Leffler** avec un paramètre α comme défini dans (1.1) et μ est un nombre réel positif.

Laissons-nous énoncer et prouver la

Lemme 2.1. (voir [4, page 1]). Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $g \in L^1(\mathbb{R})$. La solution de l'équation

$$v(t) + \mu I_{0+}^\alpha v(t) = g(t), \quad (2.28)$$

pour $\mu \in \mathbb{R}^+$ satisfait l'équation intégrale

$$v(t) = \int_0^t g'(t-\iota) e_\alpha(\iota; u) d\iota + g(0) e_\alpha(t; u). \quad (2.29)$$

Démonstration. (voir [15, page 65]). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation (2.28), il s'en suit En utilisant (2.26)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ v(t) : s \} + \mu \mathcal{L} \{ I_{0+}^\alpha v(t) : s \} &= \mathcal{L} \{ g(t) : s \}, \\ \mathcal{L} \{ v(t) : s \} + \frac{\mu}{s^\alpha} \mathcal{L} \{ v(t) : s \} &= \mathcal{L} \{ g(t) : s \}, \\ \mathcal{L} \{ v(t) : s \} (1 + \frac{\mu}{s^\alpha}) &= \mathcal{L} \{ g(t) : s \}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L} \{ v(t) : s \} = \frac{\mathcal{L} \{ g(t) : s \} s^\alpha}{s^\alpha + \mu}. \quad (2.30)$$

Il existe des différents moyens pour obtenir la solution de l'équation (2.30) transformation inverse de Laplace.

Ecrire l'équation (2.30) comme

$$\mathcal{L}\{v(t) : s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \mu}(s\mathcal{L}\{g(t) : s\} - g(0)) + \frac{s^{\alpha-1}}{g}(0),$$

et en utilisant la transformée inverse de Laplace, nous obtenons

$$v(t) = \int_0^t g'(t - \iota) e_\alpha(\iota; u) d\iota + g(0) e_\alpha(t; u),$$

qui est (2.29). □

2.2.1 Solution analytique

Pour le problème (III) les conditions au bord sont non locales

$$u(1, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), t \in [0, T].$$

Le problème spectrale associé au problème

$$-X'' = \lambda X, X(1) = 0, X'(1) = X'(0), \quad (2.31)$$

n'est pas auto-adjoint. Alors les fonctions propres ne forment pas une base orthonormée de $L^2(0, 1)$.

Comment obtenir une base orthonormée de fonctions propres ?

Par l'obtention d'un système biorthogonal de fonctions pour l'espace $L^2(0, 1)$. Rappelons-nous que deux ensembles de fonctions S_1 et S_2 de $L^2(0, 1)$ forment un système biorthogonal s'il existe une application bijective entre eux telle que

$$\int_0^1 f_i g_j = \delta_{ij}, \quad (2.32)$$

où $f_i \in S_1, g_i \in S_2$ et δ_{ij} , est le fonction delta de Kronecker.

Le système biorthogonal nous permet d'écrire la solution du problème inverse en fonction des fonctions propres et fonction propres associées du problème adjoint de (2.31).

Une suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dans un espace de Hilbert H est dite une suite de **Riesz** s'il existe des constantes $0 < c \leq C < \infty$ telles que

$$c \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\|^2 \leq C \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2,$$

pour toute suite de scalaires $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dans l'espace

$$l^2 := \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_n \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Une base de **Riesz** pour un espace de Hilbert H est une suite de Riesz, qui est libre dans H et qui est génératrice de l'espace H .

La clé dans la détermination de la distribution de température et la source inconnue pour le système (III) est de le choix d'une base spéciale pour l'espace $L^2(0, 1)$ comme suit

$$\{2(1-x), \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}\}. \quad (2.33)$$

Dans ([8]), il est démontré que l'ensemble des fonctions (2.33) forment une base de Riesz pour l'espace $L^2(0, 1)$. Comme d'habitude, l'idée est de décomposer les fonctions inconnues $u(x, t), f(x)$ en termes de la base comme suit

$$u(x, t) = 2u_0(t)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(t)4(1-x)\cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t)4\sin(2\pi nx), \quad (2.34)$$

$$f(x) = 2f_0(t)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(t)4(1-x)\cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(t)4\sin(2\pi nx), \quad (2.35)$$

où $u_0(t), u_{1n}(t), u_{2n}(t), f_0, f_{1n}$ et f_{2n} sont à déterminer.

L'ensemble de fonctions (2.33) n'est pas orthogonale et dans [86] un ensemble de fonctions donnée par

$$\{1, \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}\}, \quad (2.36)$$

est obtenu qui avec (2.33) forment un système bi-orthogonal de fonctions.

$$D_{0+}^{\alpha}(u_{2n}(t) - u_{2n}(0)) - 4\pi n\delta u_{1n}(t) + 4\pi^2 n^2 \delta u_{2n}(t) = f_{2n}, \quad (2.37)$$

$$D_{0+}^{\alpha}(u_{1n}(t) - u_{1n}(0)) + 4\pi^2 n^2 \delta u_{1n}(t) = f_{1n}, \quad (2.38)$$

$$D_{0+}^{\alpha}(u_0(t) - u_0(0)) = f_0. \quad (2.39)$$

Depuis $I_{0+}^{\alpha} 1 = t^{\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$ et pour $0 < \alpha < 1$, $I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha}(u_0(t) - u_0(0)) = u_0(t) - u_0(0)$ alors la solution de l'équation (2.39) est

$$u_0(t) = \frac{f_0 t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + u_0(0). \quad (2.40)$$

On pose que $\lambda := 4\pi^2 n^2 \delta, F(t) = \frac{f_{1n} t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + u_{1n}(0)$ alors l'équation (2.38) peut être écrit comme

$$u_{1n}(t) + \lambda I_{0+}^{\alpha} u_{1n}(t) = F(t),$$

et en utilisant le lemme 2.1, la solution de l'équation (2.38) est donnée par

$$u_{1n}(t) = \frac{f_{1n} \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-\iota)^{\alpha-1} e_{\alpha}(\iota; \lambda) d\iota + u_{1n}(0) e_{\alpha}(t; \lambda) \quad (2.41)$$

Remarquant que l'équation (2.37) peut s'écrire

$$u_{2n}(t) + \lambda I_{0+}^{\alpha} u_{2n}(t) = h(t),$$

où $h(t) := I_{0+}^{\alpha}(f_{2n} + 4\pi n\delta u_{1n}(t)) + u_{2n}(0)$, donc sa solution en vertu du lemme 2.1 est

$$u_{2n}(t) = \int_0^t h'(t-\iota) e_{\alpha}(\iota; \lambda) d\iota + h(0) e_{\alpha}(t; \lambda), \quad (2.42)$$

Comme $h(0) = u_{2n}(0)$ et

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt} [I_{0+}^{\alpha} (f_{2n} + 4\pi n \delta u_{1n}(t)) + u_{2n}(0)] \\ &= D_{0+}^{1-\alpha} (f_{2n} + 4\pi n \delta u_{1n}(t)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

De l'équation (2.41), nous avons

$$D_{0+}^{1-\alpha} u_{1n}(t) = \frac{f_{1n}\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} D_{0+}^{1-\alpha} [t^{\alpha-1} * e_{\alpha}(\iota; \lambda)] + u_{1n}(0) D_{0+}^{1-\alpha} e_{\alpha}(t; \lambda) \quad (2.44)$$

depuis $D_{0+}^{1-\alpha} e_{\alpha}(t; \lambda) = e_{\alpha,\alpha}(t; \lambda)$, où $e_{\alpha,\beta}(t; \lambda) := t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})$, par conséquent l'équation (2.42) devient

$$u_{2n}(t) = \int_0^t s(t-\iota) e_{\alpha}(\iota; \lambda) d\iota + u_{2n}(0) e_{\alpha}(t; \lambda), \quad (2.45)$$

où nous avons

$$s(t) = 4\pi n \delta \left(\frac{\alpha f_{1n}}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha+1} * e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) + u_{1n}(0) e_{\alpha,\alpha}(1, \lambda) \right) + f_{2n} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Les constantes inconnues sont $u_{2n}(0), u_{1n}(0), u_0(0), f_{2n}, f_{1n}$ et f_0 . Afin d'obtenir ces inconnues, nous utilisons les températures initiales et finales comme indiqué en (2.38)

$$\begin{aligned} 2u_0(0)(1-x) &+ \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(0) 4(1-x) \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(0) 4 \sin(2\pi n x) = 2\phi_0(1-x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{1n} 4(1-x) \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{2n} 4 \sin(2\pi n x), \\ 2u_0(T)(1-x) &+ \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(T) 4(1-x) \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(T) 4 \sin(2\pi n x) = 2\varphi_0(1-x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} 4(1-x) \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n} 4 \sin(2\pi n x). \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons

$$u_{2n}(0) = \phi_{2n}, u_{1n}(0) = \phi_{1n}, u_0(0) = \phi_0, \quad (2.46)$$

$$u_{2n}(T) = \varphi_{2n}, u_{1n}(T) = \varphi_{1n}, u_0(T) = \varphi_0, \quad (2.47)$$

où $\phi_0, \phi_{1n}, \phi_{2n}$ et $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}$ sont les coefficients de l'expansion en série dans la base (2.33) des fonctions $\phi(x)$ et $\varphi(x)$, respectivement. En termes de base biorthogonale (2.36) ce sont

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_0^1 \varphi(x) dx, \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) \cos(2\pi n x) dx, \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) x \sin(2\pi n x) dx, \\ \phi_0 &= \int_0^1 \phi(x) dx, \phi_{1n} = \int_0^1 \phi(x) \cos(2\pi n x) dx, \phi_{2n} = \int_0^1 \phi(x) x \sin(2\pi n x) dx, \end{aligned}$$

En vertu de (2.40),(2.41), (2.42), et les conditions (2.47) nous avons les expressions des inconnues f_0, f_{1n} et f_{2n} .

D'après (2.40) et (2.46) , (2.47) nous avons :

$$u_0(T) = \frac{f_0 T^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + u_0(0).$$

Alors

$$f_0 = \Gamma(1 + \alpha) \left[\frac{\varphi_0 - \phi_0}{T^\alpha} \right]. \quad (2.48)$$

D'après (2.41) et (2.46) , (2.47) nous avons :

$$u_{1n}(T) = \frac{f_{1n} \alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^T (T - \iota)^{\alpha-1} e_\alpha(\iota; \lambda) d\iota + u_{1n}(0) e_\alpha(T; \lambda).$$

Alors

$$f_{1n} = \Gamma(\alpha + 1) \left[\frac{\varphi_{1n} - \phi_{1n} e_\alpha(\iota, \lambda)}{\alpha \int_0^T (T - \iota)^{\alpha-1} e_\alpha d\iota} \right], \quad (2.49)$$

D'après (2.45) et (2.46) , (2.47) nous avons :

$$u_{2n}(T) = \int_0^T s(T - \iota) e_\alpha(\iota; \lambda) d\iota + u_{2n}(0) e_\alpha(T; \lambda),$$

où nous avons mis

$$s(T) = 4n\pi\delta \left(\frac{\alpha f_{1n}}{\Gamma(1 + \alpha)} T^{\alpha+1} * e_{\alpha,\alpha}(T, \lambda) + u_{1n}(0) e_{\alpha,\alpha}(1, \lambda) \right) + f_{2n} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Alors

$$\frac{f_{2n}}{\Gamma(\alpha)} = \left[\frac{\varphi_{2n} - \phi_{2n} e_\alpha(T, \lambda) - \int_0^T s(T - \iota) e_\alpha(\iota, \lambda) d\iota}{\int_0^T (T - \iota)^{\alpha-1} e_\alpha(\iota, \lambda) d\iota} \right], \quad (2.50)$$

où

$$s(t) = 4n\pi\delta \left(\frac{\alpha f_{1n}}{\Gamma(1 + \alpha)} t^{\alpha+1} * e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) + u_{1n}(0) e_{\alpha,\alpha}(1, \lambda) \right).$$

Le terme source inconnu et la distribution de la température pour le problème (III) sont donnés par la série (2.34) et (2.35), où les inconnues $u_0(0), u_{1n}(0), u_{2n}(0)$ sont calculés à partir de (2.46), alors que f_0, f_{1n}, f_{2n} sont donnés par (2.48)-(2.50).

2.2.2 Existence de la solution

Supposons que $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$ soit tel que $\varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1)$. Comme φ_{1n} est le coefficient du cosinus de Fourier expansion de la fonction $\varphi(x)$ par rapport à la base (2.36), à partir de (2.46) l'expression de $u_{1n}(0)$ peut s'écrire

$$u_{1n}(0) = \int_0^1 \varphi(x) \cos(2\pi n x) dx,$$

qui a intégré par parties quatre fois donne

$$\begin{aligned} u_{1n}(0) &= \frac{1}{16\pi^4 n^4} \int_0^1 \varphi^4(x) \cos(2\pi nx) dx, \\ &= \frac{1}{16\pi^4 n^4} \varphi_{1n}^4. \end{aligned}$$

où φ_{1n}^4 est le coefficient de l'expansion de Fourier cosinus de la fonction $\varphi^4(x)$ par rapport à la base (2.36). De même, nous obtenons

$$u_{2n}(0) = \frac{1}{16\pi^4 n^4} \varphi_{2n}^4.$$

Où φ_{2n}^4 est le coefficient de la transformée de Fourier sinus de la fonction φ^4 par rapport à la base (2.36).

L'ensemble des fonctions $\{\varphi_{1n}^4, \varphi_{2n}^4, n = 1, 2, \dots\}$ est borné par la supposition que nous avons $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$, et en raison de l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{in}^4)^2 \leq \|\varphi^4(x)\|_{L^2(1,1)}^2 \quad i = 1, 2.$$

ce qui est vrai par l'inégalité de Bessel de la série trigonométrique. De même, nous avons pour $\phi(x) \in C^4[0, 1]$ l'ensemble des fonctions $\phi_{1n}^4, \phi_{2n}^4, n = 1, 2, \dots$ est bornée et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{in}^4)^2 \leq \|\phi^4(x)\|_{L^2(1,1)}^2 \quad i = 1, 2.$$

Les fonctions Mittag-Leffler $e_{\alpha}(t; ?)$ et $e_{\alpha, \beta}(t; ?)$ pour $\mu > 0$ et $0 < \alpha \leq 1, 0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ sont respectivement fonctions complètement monotones (voir [23] page 268). De plus, nous avons

$$E_{\alpha, \beta}(\mu t^{\alpha}) \leq M, t \in [a, b];$$

où $[a, b]$ est un intervalle fini avec $a > 0$, et

$$\int_0^t (t - \iota)^{\alpha-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda \iota^{\alpha}) d\iota < \infty$$

La solution $u(x, t)$ devient

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2(1-x) \left(\frac{f_0 t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \varphi_0 \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_{1n} \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha-1} * e_{\alpha}(t; \lambda) + \frac{\varphi_{1n}^4}{16\pi^4 n^4} e_{\alpha}(t; \lambda) \right) 4(1-x) \cos(2\pi nx) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_{1n}^4}{16\pi^3 n^3} e_{\alpha, 1-\alpha}(t; \lambda) + f_{2n} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * e_{\alpha}(t; \lambda) + \frac{\varphi_{2n}^4}{16\pi^4 n^4} e_{\alpha}(t; \lambda) \right) 4 \sin(2\pi nx), \end{aligned}$$

2.2.3 Unicité de la solution

Dans la section suivante, nous montrerons l'unicité de la solution.

Supposons que $\{u_1(x, t), f_1(x)\}, \{u_2(x, t), f_2(x)\}$ sont deux ensembles de solutions du problème inverse pour le système (III).

Définissez $\bar{u}(x, t) = u_1 - u_2$ et $\bar{f}(x) = f_1 - f_2$ alors la fonction $u(x, t)$ satisfait l'équation et les conditions aux limites suivantes (voir [15, page 68]).

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}(\bar{u}(x, t)) - \delta \bar{u}_{xx}(x, t) = \bar{f}(x), & (x, t) \in Q_T, \\ \bar{u}(x, 0) = \phi(x), \quad \bar{u}(x, T) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ \bar{u}(1, t) = 0, \quad \bar{u}_x(0, t) = \bar{u}_x(1, t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.51)$$

En utilisant les propriétés du système biorthogonal (2.33) -(2.36), nous avons

$$\bar{u}_0 = \int_0^1 \bar{u}(x, t) dx, \quad (2.52)$$

$$\bar{u}_{1n} = \int_0^1 \bar{u}(x, t) \cos(2\pi nx) dx, \quad (2.53)$$

et

$$\bar{u}_{2n} = \int_0^1 \bar{u}(x, t) x \sin(2\pi nx) dx. \quad (2.54)$$

Ressemblent,

$$\bar{f}_0 = \int_0^1 \bar{f}(x) dx, \quad (2.55)$$

$$\bar{f}_{1n} = \int_0^1 \bar{f}(x) \cos(2\pi nx) dx, \quad (2.56)$$

et

$$\bar{f}_{2n} = \int_0^1 \bar{f}(x) x \sin(2\pi nx) dx. \quad (2.57)$$

Prenant le dérivé fractionnaire D_{0+}^{α} sous le signe intégral de l'équation (2.52), en utilisant (2.51), (2.55) et l'intégration par parties, nous obtenons

$$D_{0+}^{\alpha} \bar{u}_0(t) = \bar{f}_0 \quad (2.58)$$

avec les conditions aux limites

$$\bar{u}_0(0) = 0, \bar{u}_0(T) = 0. \quad (2.59)$$

La solution du problème (2.58) est

$$\bar{u}_0(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)} \bar{f}_0; \quad (2.60)$$

en tenant compte des conditions aux limites(2.59) , on obtient

$$\bar{f}_0 = 0 \Rightarrow \bar{u}_0(t) = 0. \quad (2.61)$$

Prenant le dérivé fractionnaire D_{0+}^α sous le signe intégral de l'équation (2.53) puis en utilisant (2.51), (2.56) et l'intégration par parties, on obtient

$$D_{0+}^\alpha \bar{u}_{1n} + \lambda \bar{u}_{1n} = \bar{f}_{1n}; \quad (2.62)$$

les conditions aux limites associées sont

$$\bar{u}_{1n}(0) = 0, \bar{u}_{1n}(T) = 0. \quad (2.63)$$

La solution du problème (2.62) est

$$\bar{u}_{1n}(t) = e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) * \bar{f}_{1n}.$$

En utilisant (2.63) nous avons

$$\bar{f}_{1n} = 0 \Rightarrow \bar{u}_{1n}(t) = 0, (n = 1, 2 \dots). \quad (2.64)$$

De la même manière à partir de (2.54), on obtient l'équation

$${}^C D_{0+}^\alpha \bar{u}_{2n}(t) + 4n^2 \pi^2 \bar{u}_{2n}(t) = \bar{f}_{2n} \quad (2.65)$$

les conditions aux limites associées sont

$$\bar{u}_{2n}(0) = 0, \bar{u}_{2n}(T) = 0. \quad (2.66)$$

En tenant compte de $u_{1n}(t) = 0$ alors la solution de l'équation est (2.65) satisfaisante

$$\bar{u}_{2n}(t) = e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) * \bar{f}_{2n}.$$

en utilisant (2.66) nous avons

$$\bar{f}_{2n} = 0 \Rightarrow \bar{u}_{2n}(t) = 0, (n = 1, 2 \dots). \quad (2.67)$$

Pour tout $t \in [0, T]$, les fonctions $u(x, t)$ et $f(x)$ sont orthogonales au système des fonctions données en (2.36), qui forment la base de l'espace $L^{2\rho}(0, 1)$, par conséquent,

$$\bar{u}(x, t) = 0, \quad \bar{f}(x) = 0.$$

Alors la solution du problème (III) est unique .

ÉTUDE NUMÉRIQUE DU PROBLÈME INVERSE FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des différences finies et définons le schéma numérique (schéma explicite et schéma implicite, schéma Crank-Nicolson), ainsi nous cherchons la solution approchée de problème inverse fractionnaire avec condition périodique et quelques exemples numériques .

3.1 La méthode de différence finie

Parmi les méthodes de résolution, la méthode des différences finies, qui repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation différentiation par différences finies d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part. En effet Un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée de :

- ❖ D'un domaine
- ❖ D'une équation aux dérivées partielles
- ❖ De conditions aux limites
- ❖ De conditions initiales

Nous utilisons la méthode de différence finie avec un prophète correcteur approche de tayp c'est suggère dans (voir [23]). Appliquez cette méthode au problème (I).

Le schéma donne

1. $u(x + h, t) = u(x, t) + hu_x(x, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x, t).$
2. $u(x - h, t) = u(x, t) - hu_x(x, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x, t).$

$$(1) + (2) \Rightarrow u_{xx} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

3. $u(x, t + \iota) = u(x, t) + \iota u_t(x, t).$
4. $u(x, t - \iota) = u(x, t) - \iota u_t(x, t).$

(a) Schéma centere

$$(3) - (4) \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t + \iota) - u(x, t - \iota)}{2\iota}$$

(b) Schéma à droit

$$(3) \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t + \iota) - u(x, t)}{\iota}$$

(c) Schéma à gouche

$$(4) \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t) - u(x, t - \iota)}{\iota}.$$

On note

$$u(x_i, t_j) = u_i^j, G(x_i, t_j) = G_i^j, \varphi(x_i) = \varphi_i, b(t_j) = b^j.$$

Il'existe trois schéma

1. Schéma explicite

Appliquer ce problème (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\iota} &= b^j \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + G_i^j \\ \frac{1}{\iota}(u_i^{j+1} - u_i^j) &= \frac{b^j}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + G_i^j \end{aligned}$$

2. Schéma implicite

$$\frac{1}{\iota}(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{b^{j+1}}{h^2}(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + G_i^{j+1}$$

3. Schéma Crank-Nicolson

donne par : (explicite+implicite)/2 alors

$$\frac{1}{\iota}(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{1}{2h^2}(b^j + b^{j+1}) \times [(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1})] + \frac{1}{2}(G_i^j + G_i^{j+1})$$

3.2 Schéma explicite du problème inverse

Nous subdivisons les intervalles $[0, 1]$ et $[0, T]$ en M_x et M_t sous intervalles des longueur égales $h = \frac{1}{M_x}$ et $\iota = \frac{1}{M_t}$. Alors nous ajoutons deux lignes $x = 0$ et $x = (M_x + 1)h$. Nous choisissons l'arrangement d'original de schéma explicite, que est absolument stable et a un deuxième ordre exactitu dans tout les deux h et ι . Le schéma explicite pour (2.2)-(2.5)

$$\begin{cases} u_t = b(t)u_{xx} + G(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

est comme suit

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = \frac{b^j \iota}{h^2} u_{i+1}^j + (1 - \frac{2b^j \iota}{h^2}) u_i^j + \frac{b^j \iota}{h^2} u_{i-1}^j \\ u_0^j = u_0 \\ u_1^j = u_{M_x+1} \\ u_1^j - u_0^j = u_{M_x+1}^j - u_{M_x}^j \\ u_i^0 = \varphi_i. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $1 \leq i \leq M_x$ et $0 \leq j \leq M_t$, sont les indices pour des étapes spatiales et des pas étapes temps, respectivement $u(x_i, t_j) = u_i^j$, $F(x_i, t_j) = F_i^j$, $\varphi(x_i) = \varphi_i$, $b(t^j) = b^j$ et $x_i = ih$, $t_j = j\iota$. Équation linéaire de système du forma $M_x \times M_t$ de l'équation (2.2)

$$W^{j+1} = AW^j + \iota G_i^j. \quad (3.2)$$

On a

$$W^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \\ \vdots \\ u_{M_x}^j \end{pmatrix}, j = 0, 1, \dots, M_t.$$

Alors

$$W^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \vdots \\ u_{M_x}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{M_x} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Tels que $\lambda = \frac{b^j \iota}{h^2}$, $j = 0, 1, \dots, M_t$.

Maintenant, construisons le mécanisme corrigeant la prévision. D'abord, multiplication (2.2) par x de 0 à 1 et en utilisant (2.4) et (2.5), nous obtenons

$$b(t) = \frac{E'(t) - \int_0^1 xG(x, t)}{u_x(1, t)}. \quad (3.3)$$

L'approximation de différence finie de (3.3) est :

$$b^j = \frac{\left[\frac{E^{j+1} - E^j}{\iota} - (Gin)^j \right] h}{u_{M_x+1}^j - u_{M_x}^j}. \quad (3.4)$$

Où $E^j = E(t_j)$, $(Gin)^j = \int_0^1 xG(x, t)dx$, $j = 0, 1, \dots, M_t$ pour $j = 0$,

$$b^0 = \frac{\left[\frac{E^1 - E^0}{\iota} - (Gin)^0 \right] h}{\varphi_{M_x+1} - \varphi_{M_x}}. \quad (3.5)$$

Et les valeurs de φ_i , nous aident à commencer notre calcul. Dénotez les valeurs de b^j, u_i^j , à l'étape d'itération de $b^{j(s)}, u^{j(s)}$ respectivement. Dans le calcul numérique, puisque le pas de l'étape de temps est très petit, nous pouvons prendre $b^{j+1(0)} = b^j, u^{j+1(0)i} = u_i^j; j = 0, 1, \dots, M_t; i = 0, 1, \dots, M_x$. D'abord $a^{j+1(s+1)}$ de la formule

$$b^{j+1(s+1)} = \frac{\left[\frac{E^{j+2} - E^{j+1}}{\iota} - (Gin)^{j+1} \right] h}{u_{M_x+1}^{j+1(s)} - u_{M_x}^{j+1(s)}}. \quad (3.6)$$

Alors à partir (3.1) de nous obtenons

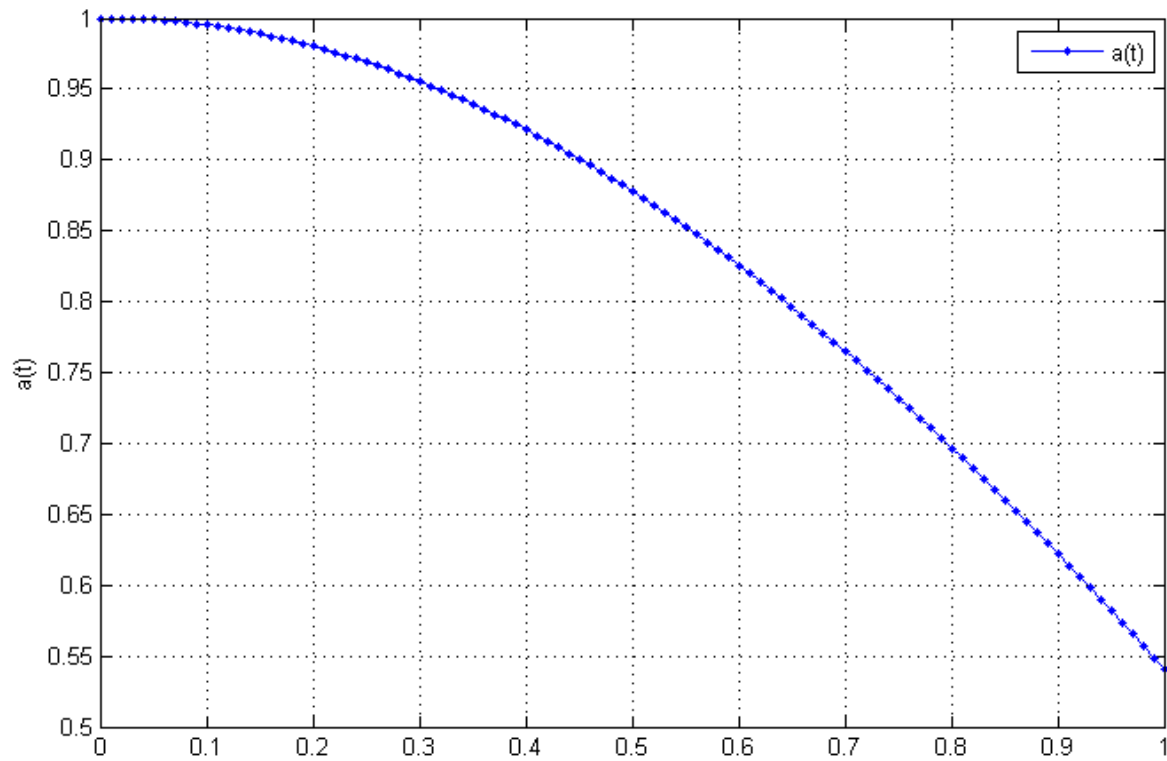
$$\frac{1}{\iota}(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{b^j}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + G_i^j$$

$$u_0^{j+1(s)} = u_{M_x}^{j+1(s)}, u_1^{j+1(s)} = u_{M_x+1}^{j+1(s)}, s = 0, 1, 2, \dots$$

3.3 Exemples et discussion numériques

Exemple 3.1. considérer le problème inverse (I), avec

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) & , (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < 1, \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (I)$$

FIGURE 3.1 – représentation graphique de $a(t)$ à $t=0.01$

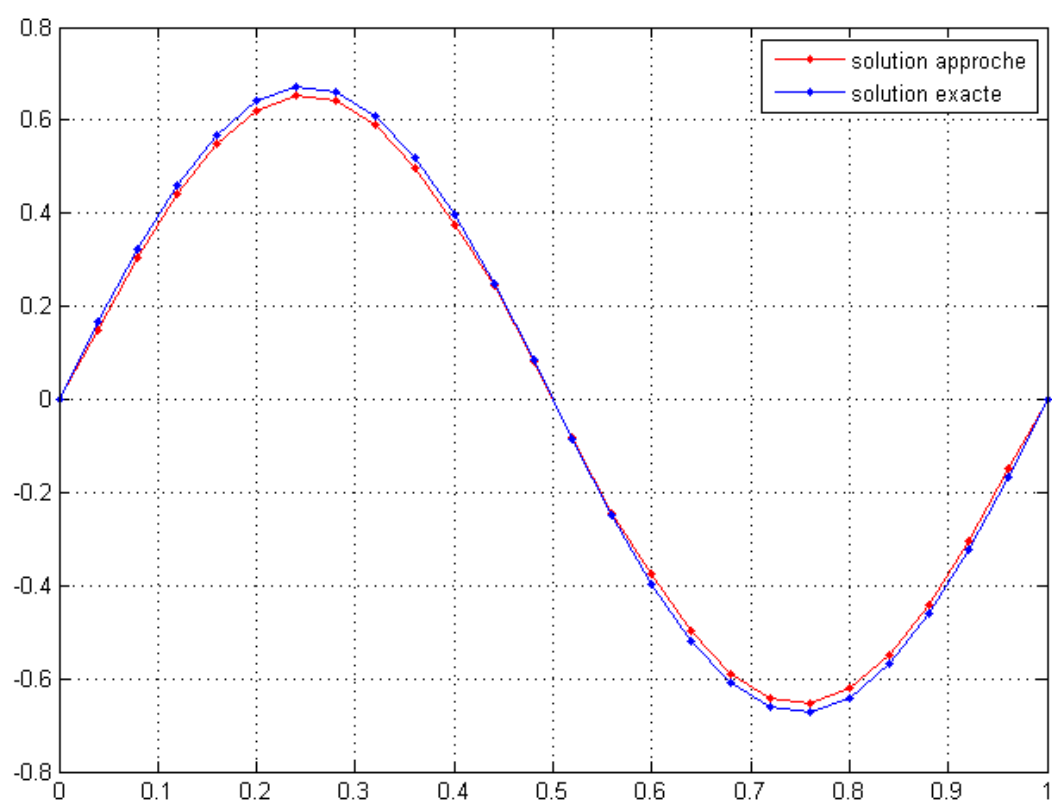
Tels que

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \cos(t) \\
 b(t) &= t^{\alpha-1}a(t) \\
 F(x, t) &= -(2\pi)^2(t^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\cos(t))e^{-(2\pi)^2t} \\
 G(x, t) &= -(2\pi)^2(1 - t^{\alpha-1}\cos t)e^{-(2\pi)^2t}\sin(2\pi x) \\
 \varphi(x) &= \sin(2\pi x) \\
 x &\in [0, 1], t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{10}$ et $t = 0.01$, alors la solution exacte est

$$u(x, t) = e^{-(2\pi)^2t}\sin(2\pi x).$$

On pose $h = \frac{1}{20}$ et $\iota = \frac{1}{100}$

FIGURE 3.2 – solution exacte et solution approchée schéma explicite pour $t=0.01$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a établi des résultats de l'existence et l'unicité associés à étude analytique et numérique de deux problèmes inverses avec dérivée fractionnaire.

- ✓ **Dans la première partie du mémoire**, étude analytique et numérique de problèmes inverses fractionnaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) & , (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1, \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (I)$$

Ce problème inverse a été étudié des points de vue tant théorique et numérique. Dans la partie théorique du papier, les conditions pour l'existence, unicité, pour les problèmes inverses avec dérivée fractionnaire. Dans la partie numérique, la sensibilité de l'explicit arrangement de différence finie combiné avec une méthode itération avec les exemples a été illustrés.

- ✓ **Dans la deuxième partie du mémoire**, nous avons établi un résultat l'existence, l'unicité de un problème et détermination d'un terme source inconnu et distribution de la température pour l'équation de la chaleur linéaire impliquant une dérivée fractionnaire dans le temps.

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha (u(x, t) - u(x, 0)) - \delta u_{xx}(x, t) = f(x), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \phi(x), u(x, T) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (III)$$

Bibliographie

- [1] A.Erdelyi. Higher transcendental functions. *McGraw-Hill, New York*, 2, 1955.
- [2] A.Erdelyi. Higher transcendental functions. *McGraw-Hill, New York*, 3, 1955.
- [3] Wang.S Cannon.J, Lin.Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *The Journal of the Austratan Mathematical society*, 33(2) :149–163, 1991.
- [4] Khaled M. Furati and Nasser eddine Tatar. *BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR A WEIGHTED CAUCHY-TYPE FRACTIONAL DIFFERENTIAL PROBLEM*. PhD thesis, King Fahd University of Petroleum and Minerals Department of Mathematical Sciences, Dhahran, 31261, Saudi Arabia, 2012.
- [5] G.M.Mittag-leffer. Sur la representation analytique d'un branch uniforme d'une fonction homogene. *Acta Mathematica*, (29) :101–182, 1905.
- [6] G.M.Mittag-leffer. Higher transcendental functions. *C.R.Academie des Sciences*, (137) :554–558, 1955.
- [7] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle theorie application*. Dunod-paris, 1999.
- [8] N. I. Ionkin and E. I. Moiseev. A two-point boundary value problem for a heat conduction equation. *Differentsialnye Uravneniya*, 15(1284-1295) :26–69, 1979.
- [9] J.B.Cannon. The soltion of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21 :155–160, 1963.
- [10] J.B.Keller. Inverse problems. *Math Monthly*, 83 :107–118, 1976.
- [11] Fatma Kanca. The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions. *Journal of Inequalities and Applications*, 108 :1–9, 2013.
- [12] H.Weimin k.Atkinson. *Theoretical numerical analysis a fonctionnal analysis framework*. Bysshaya Shkola, Moscow, 1993.
- [13] khaled M.Furati and Nasser eddine Tatar. A new definition of fractional derivative. *saudi Arabia*, (31261) :65–70.
- [14] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *Elements of Function Theory and Functional Analysis*. Bysshaya Shkola, Moscow, 1970.
- [15] Salman A. Malik. *Contribution to feactional differential equation and tretment of images*. PhD thesis, Laboratoire de Mathematiques, Image et Applications, Universite de La Rochelle, Avenue M. Crepeau, 17042 La Rochelle Cedex, France., 2012.
- [16] A.N. K o l m o g o r o v and S.V. F o m i n. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
- [17] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

- [18] R.Khalil, M.AL Horani, A.Yousef, and M. Sababheh. An abstract framework for elliptic inverse problems. part 1 : an output least squares approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 12 :259–276, 2007.
- [19] R.Khalil, M.AL Horani, A.Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *journal of computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014.
- [20] R.P.Agarwal. A propos d’une note de m.pierre humbert. *C.R.Academie des Sciences*, (236) :2031–2032, 1953.
- [21] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [22] S.Guechi. *Methode combinee des perturbation HPM et VIM pour la resolution des equations differentielles ordinaires et EDP d’ordre fractionnaire*. PhD thesis, Universite Mohamed Boudaif M’sila, M’sila, 2017.
- [23] J.W. Thomas. *Numerical partial differential equations*. Springer-Verlag, 2010.

Résumé

ملخص :

في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة وجود و تفرد حل مسألة عكسية لمعادلة القطع المكافئ ذات مشتقة كسرية مع الحدود الدوري و الشروط الكاملة بحيث نقوم بإثبات وجود الحل و تفرده باستخدام طريقة فوري العامة و النقطة الثابتة لشودر و كذلك ندرس مشكلة مختلطة بحيث نحدد المعامل غير معروف لمعادلة الحرارة ذات المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل، أما بالنسبة للجانب العددي استعملنا طريقة الفرق الانتهاء .

كلمات مفتاحية :

المشتقة الكسرية ،مسألة عكسية ،وجود و تفرد الحل،طريقة الفرق الانتهاء ،النقطة الثابتة لشودر

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème inverse de l'équation de la chaleur avec limite périodique et intégrale de conditions de surdétermination linéaire avec dérivée fractionnaire , nous avons démontré une relation entre la dérivée normale et la dérivée fractionnaire, nous l'appliquons à l'équation de la chaleur puis nous examinons l'existence et l'unité de la solution du problème inverse et démontré l'existence d'un point fixe de schauder pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach . Ensuite ,on détermination d'un terme source inconnu pour l'équation de la chaleur un dérivé fractionné dans le temps . Pour l'aspect numérique, nous avons utilisé la méthode de différence finie de schéma explicite .

Mots-Clés : Dérivée fractionnaire, Problème inverse, l'existence , l'unicite, méthode de différence finie, Théorème du point fixe de schauder.

In this thesis, we studied the inverse problem of the equation of heat with periodic limit and integral conditions of linear overdetermination with fractional derivative, we have demonstrated a relation between the normal derivative and the fractional derivative we apply it to the equation of heat and we examine the existence and the unity of the solution of the inverse problem and demonstrated the existence of a fixed point to schauder for a continuous function on a compact convex in a Banach space, determination of an unknown source term for the equation of heat a derivative fractioned in time. For the numerical aspect, we used the finite difference method of explicit schema.

Keywords : Fractional derivative, inverse problem, the existence,the unicity, finite difference method, fixed-point theorem of Schauder.