

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de
Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Numerical algorithm for solving linear Fredholm integro-differential equations using fourth kind of Chebychev polynomials

Présenté par:

Mokrane Samiha

Soutenu publiquement le : 06/6/2024

Devant le jury composé de :

Bachir GAGUI	M.C.A,	Université de M'sila	Président
Noui DJAIDJA	M.C.B,	Université de M'sila	Encadreur
Amina Khirani	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2023/2024

الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو ايجاد الحل العددي التقريبي للمعادلة التكاملية-التفاضلية لفريدهولم وذلك باستعمال كثير الحدود لتشبيشاف النوع الرابع. بالإضافة الى ذلك، قدمنا بعض الأمثلة للتحقق من فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية-التفاضلية لفريدهولم من النوع الثاني, كثير الحدود الرابع لتشبيشاف

Résumé :

Le but de ce mémoire est de trouver la solution approchée de l'équation intégral-différentielle de Fredholm en utilisant la méthode de collocation basée sur les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce. De plus, quelques exemples sont donnés pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée.

Mots clé :

Equation intégral-différentielle de Fredholm, polynôme de Tchebychev, méthode de collocation

Abstract:

The aim of this memory is to find the approximate numerical solution of second-kind Fredholm integral-differential equation using the collocation method with the fourth-kind Chebychev polynomials. Additionally, Presenting some examples to verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords: second-kind Fredholm integral-differential equation, Fourth-kind Chebychev polynomials.

Remerciements

La réalisation et la conclusion de ce mémoire a été rendue possible grâce aux efforts de plusieurs personnes, que je tiens à remercier du fond du cœur.

Au début, Je remercie Allah de m'avoir donné la volonté, la santé et le courage nécessaires pour mener à bien ce mémoire.

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance envers **Dr Noui DJAIDJA**, mon superviseur de ce mémoire, pour sa contribution en partageant ses connaissances et surtout ses précieux conseils, qui ont enrichi ma réflexion et mes connaissances.

Je souhaite également exprimer ma gratitude et mes remerciements aux membres du jury : **Dr.Amina KHIRANI**.et **Dr.Bachir GAGUI** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de présider et d'évaluer ce travail.

Enfin, Je souhaite remercier mes parents, Mon mari pour son soutien et mon cher fils.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents, je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour moi. que dieu préserve
une longue vie heureuse avec toute ma tendresse.

A mon mari Ibrahim.

A tous mes frères et mes soeurs

A mon cher fils Ayane.

A toute la famille (Mokrane).

A tous mes enseignants

A tout les amies.

Table des matières

Introduction	iii
1 Rappels et notions fondamentales	1
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles:	1
1.1.1 Espaces vectoriels normés:	1
1.1.2 Espaces de Banach:	2
1.1.3 Espaces de Hilbert:	2
1.2 Notions sur les opérateurs:	3
1.2.1 Opérateurs linéaires :	3
1.2.2 Opérateurs bornés :	3
1.2.3 Opérateurs compacts :	3
1.2.4 Opérateurs intégraux :	3
2 Généralités sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles	4
2.1 Equations intégrales	4
2.1.1 Equations intégrales de Fredholm :	4
2.1.2 Equations intégrales de Volterra :	5
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm :	5
2.2 Equations intégro-différentielles	5
2.2.1 Equations intégro-différentielles de Fredholm :	6
2.2.2 Equations intégro-différentielles de Volterra :	6
2.2.3 Equations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm :	7
2.3 Résolution analytique des équations intégro-différentielles de Fredholm : . . .	8

2.3.1	La méthode de décomposition d'Adomian :	8
2.3.2	La méthode des solutions sous forme de série :	10
2.4	Polynômes orthogonaux	12
2.4.1	Polynômes de Tchebychev :	13
3	Résolution numérique des équations intégral-différentielles de Fredholm:	16
3.1	La méthode de collocation de Tchebychev du quatrième espèce	16
3.2	Exemples Numériques	18
	Conclusion	25
	Bibliographie	25

Introduction

Les équations de Fredholm sont un type d'équations intégrales-différentielles nommées d'après le mathématicien suédois Erik Fredholm qui a vécu au XIX^e siècle. Fredholm a introduit de nombreuses idées fondamentales dans la théorie des équations intégrales-différentielles, représentant un développement important en mathématiques appliquées. Ces équations sont utilisées dans de nombreux domaines tels que la physique mathématique, l'ingénierie et les sciences naturelles en général, et comprennent de nombreuses applications dans des domaines tels que thermodynamique, la théorie des vibrations.

L'équations intégrales-différentielles de Fredholm sont d'une grande importance en mathématiques appliquées en raison de leur capacité à représenter des phénomènes qui dépendent de l'histoire, de la mémoire et de l'interaction entre les variables.

Dans ce travail, Nous concentrerons sur la résolution numérique d'équation intégral-différentielle de Fredholm du second espèce de la forme suivante :

$$\varphi^{(m)}(x) - \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad m \geq 1$$

Avec les conditions initiales :

$$\varphi^{(r)}(a) = \alpha_r, \quad r = 0, \dots, m-1$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m de la fonction inconnue $\varphi(x)$, $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues, En utilisant la méthode collocation avec le quatrième polynôme de Tchebychev.

Ce mémoire contient quatre chapitres :

Le premier chapitre: contient des définitions de base et des outils mathématiques nécessaires pour une bonne compréhension du problème traité, tels que les espaces fonctionnels (espaces vectoriels normés, espaces de Banach et espaces de Hilbert) et les opérateurs tels que (opérateurs linéaires, opérateurs bornés, opérateurs compacts et opérateurs intégraux).

Le deuxième chapitre: contient des généralités sur les équations intégrales et intégral-différentielles, En abordant également certaines solutions analytiques des équations intégral-différentielles de Fredholm : La méthode de décomposition d'Adomian et la méthode des solutions sous la forme de série.

Le troisième chapitre: présente une étude sur la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm, En utilisant la méthode de collocation basée sur les polynômes de tchebychev du quatrième espèce, Divers exemples sont également présentés pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, il est très utile d'aborder la définition de quelques espaces fonctionnelles tels que (espaces vectoriels normés, espaces de Banach et espaces de Hilbert) et la définition de quelques opérateurs tels que (opérateur linéaire, opérateur borné, opérateur compact, opérateur intègres)

1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles:

1.1.1 Espaces vectoriels normés:

Dans la suite $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes:

Pour tous $x, y \in E$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$,

1- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (la norme est dite positivement homogène).

2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

3- $x \in E, \|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

1.1.2 Espaces de Banach:

Définition 1.1.2 (Suite de Cauchy). Soit E un espace vectoriel normé. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N \text{ on a } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy dans E converge.

Définition 1.1.4 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

1.1.3 Espaces de Hilbert:

Définition 1.1.5 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ qui satisfait les propriétés suivantes:

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v, w \in E$.

1- $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$,

2- $\langle u, u \rangle \geq 0$, et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$,

3- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

4-Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Définition 1.1.6 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien.

Remarque 1.1.1 On peut définir une norme induite par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

qui est appelée norme euclidienne ou norme de Hilbert.

Exemple 1.1.1 $L^2([a, b])$ l'espace des fonctions de carrés intégrables est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire défini par:

$$\text{Pour tout } f, g \in L^2([a, b]) : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

1.2 Notions sur les opérateurs:

1.2.1 Opérateurs linéaires :

Définition 1.2.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur $A : E \rightarrow F$ est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

- Condition additive: $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$, on a $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$
- Condition homogène: $\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, on a $A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$.

1.2.2 Opérateurs bornés :

Définition 1.2.2 Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante $C > 0$, telle que:

$$\text{Pour tout } x \in E, \quad \|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \quad .$$

1.2.3 Opérateurs compacts :

Définition 1.2.3 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné $G \subset E$ à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F .

Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Définition 1.2.4 (Ensembles relativement compacts). Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite (x_n) de G , il existe une sous suite $(x_{n(k)})$ qui converge dans F .

1.2.4 Opérateurs intégraux :

Définition 1.2.5 On appelle opérateur intégral linéaire tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y) \varphi(y) dy, \quad x \in G_1$$

où $k(x,y)$ est une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable défini sur G_1 .

$k(x,y)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A .

Chapitre 2

Généralités sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles

2.1 Equations intégrales

2.1.1 Equations intégrales de Fredholm :

Définition 2.1.1 *la forme générale de l'équation intégrale linéaire de Fredholm du premier espèce est :*

$$\int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) , a \leq x, t \leq b$$

Définition 2.1.2 *la forme générale de l'équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce est :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) , \quad a \leq x, t \leq b$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, Le noyau $k(x,t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions donnés, les bornes d'intégration sont constantes, λ est un facteur connue.

2.1.2 Equations intégrales de Volterra :

Les équations de Volterra sont un cas particulier d'équations intégrales de Fredholm il suffit de le noyau $k(x,t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.3 la forme générale d'équation intégrale linéaire de Volterra du premier espèce est :

$$\int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Définition 2.1.4 la forme générale d'équation intégrale linéaire de Volterra du second espèce est :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm :

L'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm est une forme spécifique d'équation intégrale qui combine à la fois les opérateurs de Volterra et de Fredholm.

Définition 2.1.5 la forme générale d'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a,b]$$

où $k_1(x,t)$ et $k_2(x,t)$ sont les noyaux de l'équation.

2.2 Equations intégral-différentielles

Une équation intégral-différentielle est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est φ .

2.2.1 Equations intégro-différentielles de Fredholm :

Définition 2.2.1 *La forme générale de l'équation intégro-différentielle de Fredholm est :*

$$\sum_{i=0}^m P_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.2.1)$$

avec les conditions initiales

$$\varphi^{(i)}(a) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

o   $\varphi^{(i)}(x)$ indique la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $P_i(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.2.1 *L'équation*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 12x + \int_0^1 \varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du premier ordre.

et l'équation

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt \varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du second ordre

2.2.2 Equations intégro-différentielles de Volterra :

Définition 2.2.2 *L'équation intégro-différentielle de Volterra est donnée par la forme suivante :*

$$\sum_{i=0}^m P_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.2.2)$$

avec les conditions initiales

$$\varphi^{(i)}(a) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

o   $\varphi^{(i)}(x)$ indique la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $P_i(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.2.2 *L'équation*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

est une équation intégral-différentielle de Volterra du premier ordre, et l'équation

$$\begin{cases} \varphi''(x) = -x + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = -1. \end{cases}$$

est une équation intégral-différentielle de Volterra du second ordre.

2.2.3 Equations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm :

Définition 2.2.3 *L'équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm est donnée par la forme suivante :*

$$\sum_{i=0}^m P_i(x)\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t) dt + \lambda \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t) dt \quad (2.2.3)$$

avec les conditions initiales

$$\varphi^{(i)}(a) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

où $\varphi^{(i)}(x)$ indique la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $P_i(x), k_1(x,t), k_2(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.2.3 *L'équation intégral-différentielle :*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + \int_0^1 xt\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

est une équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm du premier ordre.

2.3 Résolution analytique des équations intégral-différentielles de Fredholm :

Il existe plusieurs méthodes analytiques pour résoudre les équations intégral-différentielles de Fredholm du second espèce . Nous nous concentrerons sur les méthodes suivantes :

La méthode de décomposition d'Adomian et la méthode des solutions sous forme de série.

2.3.1 La méthode de décomposition d'Adomian :

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) a été introduite et développée par George Adomian, L'ADM fournit la solution sous forme d'une série infinie de composantes. L'idée de la méthode de décomposition d'Adomian consiste à transformer l'équation intégral-différentielle de Fredholm en une équation intégrale.

Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm du second ordre :

$$\varphi''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \quad (2.3.1)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(0) = a_0, \varphi'(0) = a_1 \quad (2.3.2)$$

En intégrant les deux cotés de (2.3.1) de 0 à x deux fois, nous obtenons :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}[f(x)] + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt\right) \quad (2.3.3)$$

où les conditions initiales sont utilisées, et L^{-1} est un opérateur intégral double, $\varphi(x)$ est exprimée comme :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.4)$$

En substituant (2.3.4) dans (2.3.3) on trouve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}[f(x)] + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt\right) \quad (2.3.5)$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots &= a_0 + a_1(x) + L^{-1}[f(x)] + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t) \varphi_0(t) dt\right) + \\ &L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t) \varphi_1(t) dt\right) + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t) \varphi_2(t) dt\right) + \dots \end{aligned}$$

notez que, $\varphi_0(x)$ est défini par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral, c'est-à-dire :

$$\varphi_0(x) = a_0 + a_1(x) + L^{-1}[f(x)]$$

$$\varphi_{j+1}(x) = L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t) \varphi_j(t) dt\right), \quad j = 0, 1, \dots$$

En utilisant (2.3.4), la série obtenue converge vers la solution exacte.

Exemple 2.3.1 Considérons l'équation intégrale-différentielle de Fredholm

$$\varphi'(x) = -1 + 24x + \int_0^1 \varphi(t) dt, \text{ avec } \varphi(0) = 0 \quad (2.3.6)$$

Notez que l'intégrale du côté droit est équivalente à une constante .

En intégrant les deux cotés de l'équation (2.3.6) de 0 à x , nous obtenons

$$\varphi(x) - \varphi(0) = -x + 12x^2 + x\left(\int_0^1 \varphi(t) dt\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(x) = -x + 12x^2 + x\left(\int_0^1 \varphi(t) dt\right) \quad (2.3.7)$$

Que ce soit:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.8)$$

Mettre (2.3.8) dans (2.3.7) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = -x + 12x^2 + x\left(\int_0^1 \varphi(t) dt\right)$$

Les composantes $\varphi_j, j \geq 0$ de la fonction $\varphi(x)$ peuvent être déterminées en utilisant la relation de récurrence

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= -x + 12x^2, \\ \varphi_{j+1}(x) &= x \left(\int_0^1 \varphi(t) dt \right), \quad j = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= -x + 12x^2 \\ \varphi_1(x) &= x \left[\int_0^1 \varphi_0(t) dt \right] = \frac{7}{2}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= x \left[\int_0^1 \varphi_1(t) dt \right] = \frac{7}{4}x \\ \varphi_3(x) &= x \left[\int_0^1 \varphi_2(t) dt \right] = \frac{7}{8}x\end{aligned}$$

Par conséquent, La solution sous forme de série est donnée par

$$\varphi(x) = -x + 12x^2 + \frac{7}{2}x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

on a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

ce qui donne la solution exacte :

$$\varphi(x) = 12x^2 + 6x$$

2.3.2 La méthode des solutions sous forme de série :

La méthode des séries est une méthode utile qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques pour l'équation intégrale de Fredholm.

Définition 2.3.1 Une fonction réelle $\varphi(x)$ a une représentation en série de Taylor:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k \quad (2.3.9)$$

On appelle une fonction analytique si elle a dérivées de tous les ordres de telle sorte que la série de Taylor en tout point (b) dans son domaine converge vers $\varphi(x)$ dans un voisinage de (b) .

Pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor à $(b = 0)$ est donnée comme suit :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.10)$$

Nous supposons que l'équation intégral-différentielle de Fredholm :

$$\varphi^{(m)}(x) = F(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt, \quad \varphi^{(j)}(0) = a_j, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (2.3.11)$$

Est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.3.10), où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente.

En utilisant l'équation (2.3.10) dans l'équation (2.3.11), on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(m)} = T[f(x)] + \lambda \int_a^b k(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.3.12)$$

Cela équivaut à

$$(a_0 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{(k)} = T[f(x)] + \lambda \int_a^b k(x,t) (a_0 + a_2 t + a_3 t^2 + \dots) dt \quad (2.3.13)$$

où $T[f(x)]$ est la série de Taylor pour $f(x)$

Après avoir effectué l'intégration dans le membre de droite de l'équation (2.3.13), Nous comparons les coefficients des puissances de (x) des deux côtés.

Exemple 2.3.2 Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm :

$$\varphi'(x) = 4x + \int_{-1}^1 (x-t) \varphi(t) dt, \quad \text{avec } \varphi(0) = 2 \quad (2.3.14)$$

En utilisant la méthode des séries.

Soit

$$\varphi'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \quad (2.3.15)$$

Insérer (2.3.15) dans (2.3.14) donne.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4x + \int_{-1}^1 ((x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \quad (2.3.16)$$

$a_0 = 2$ à partir des conditions initiales données. L'évaluation de l'intégrale du côté droit donne :

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = -\frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7 \dots + (4 + 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \dots)x \quad (2.3.17)$$

En comparant les coefficients des puissances semblables de x dans les deux côtés de l'équation (2.3.17), on obtient:

$$a_1 = 0, a_2 = 6, a_n = 0, n \geq 2$$

La solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = 2 + 6x^2$$

où nous avons utilisé $a_0 = 2$ à partir de la condition initiale

2.4 Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux sont un ensemble de fonctions orthogonales par rapport à une certaine fonction de poids sur un domaine spécifique, ils sont largement utilisés pour résoudre les équations différentielles et intégrales, ainsi que pour paratitionner les fonctions en un ensemble de fonctions facilement solubles, Des exemples de polynômes orthogonaux incluent les polynômes de Legendre, les polynômes de Tchebychev les polynômes d'Hermite les polynômes de Laguerre et autres.

orthogonalité :

Le produit scalaire entre deux fonction $f(x)$ et $g(x)$ défini par l'intégrale :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

où $w(x) > 0$, et pour $a \leq x \leq b$.

C'est la généralisation de l'idée d'un produit scalaire de deux vecteurs de dimension finie à un dimension infinie.

Si le produit scalaire égale à 0, nous disons que les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonales.

2.4.1 Polynômes de Tchebychev :

Les polynômes de Tchebychev sont largement utilisés dans le domaine de l'analyse numérique, notamment pour l'interpolation, l'approximation de fonctions et les méthodes numériques basées sur les quadratures.

Polynômes de Tchebychev de première espèce T_n :

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ sont définis sur l'intervalle $[-1,1]$ récursivement comme suit

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, T_1(x) = x, \\ T_n &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Le terme générale est:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce :

Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce sont également définis sur l'intervalle $[-1,1]$ et notés $U_n(x)$, Ils sont définis récursivement comme suit :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!n(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1, U_1(x) = 2x, \\U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Les première polynômes sont :

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1 \\U_1(x) &= 2x \\U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\U_3(x) &= 8x^3 - 4x\end{aligned}$$

Polynômes de Tchebychev de troisième espèce :

Les polynômes de Tchebychev de troisième espèce sont définis par la relation :

$$\begin{aligned}V_n(x) &= \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, x = \cos(x) \\V_n(x) &= 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Les première polynômes sont :

$$\begin{aligned}V_0(x) &= 1, \\V_1(x) &= 2x - 1, \\V_2(x) &= 4x^2 - 2x - 1, \\V_3(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \\V_4(x) &= 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1 \\V_5(x) &= 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x - 1,\end{aligned}$$

Polynômes de Tchebychev du quatrième espèce

les polynômes de Chebyshev de quatrième espèce sont des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de poids $w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, défini par :

$$\forall x \in [-1, 1], W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}, x = \cos(\theta)$$

et la relation de récurrence

$$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1$$

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Ainsi, les premiers polynômes de Chebyshev du quatrième espèce sont donnés ci-dessous

:

$$W_0(x) = 1$$

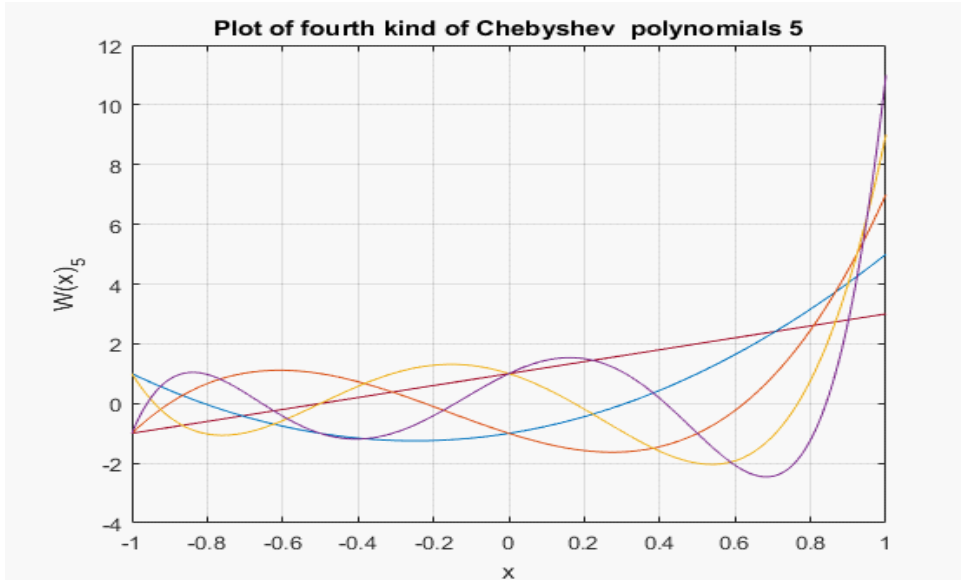
$$W_1(x) = 2x + 1$$

$$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

$$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$$

$$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$$



Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrro-différentielles de Fredholm:

3.1 La méthode de collocation de Tchebychev du quatrième espèce

On considère l'équation integro-différenielle de Fredholm de la forme:

$$\varphi^{(m)}(x) - \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad m \geq 1 \quad (3.1.1)$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi^{(r)}(a) = \alpha_r, \quad r = 0, \dots, m-1 \quad (3.1.2)$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m de la fonction inconnue $\varphi(x)$, $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

En intégrant m fois les deux côtés de l'équation (3.1.1) de a à x , Nous obtenons :

$$\underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x}_{m \text{ fois}} \varphi^{(m)}(x) dx \dots dx - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \right) dx \dots dx = \underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x f(x) dx \dots dx}_{m \text{ fois}} \quad (3.1.3)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \right) dx \dots dx &= \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a) dx + \dots + \underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x}_{m-1} \varphi^{(m-1)}(a) dx \dots dx \\ &\quad + \underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x f(x) dx \dots dx}_{m \text{ fois}} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\varphi(x) - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \right) dx \dots dx = G(x) + F(x) \quad (3.1.5)$$

où :

$$\begin{aligned} F(x) &= \underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x f(x) dx \dots dx}_{m \text{ fois}}, \text{ et} \\ G(x) &= \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}. \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(a) (x-a)^r \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\alpha_r}{r!} (x-a)^r \end{aligned}$$

Donc, la fonction approchée $\varphi(x)$ de l'équation (3.1.1) exprimée sous la forme:

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i W_i(x) \quad (3.1.6)$$

où $W_i(x)$ sont les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce de degré i défini sur $[a,b]$ et C_i coefficients à déterminer.

Substituant l'équation (3.1.6) dans l'équation (3.1.5) il vient:

$$\sum_{i=0}^n C_i W_i(x) - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^n C_i W_i(t) dt \right) dx \dots dx = F(x) + G(x)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n C_i \left(W_i(x) - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) W_i(t) dt \right) dx \dots dx \right) = F(x) + G(x) \quad (3.1.7)$$

L'équation (3.1.7) peut s'écrire :

$$\Psi_i(x) C = H(x) \quad (3.1.8)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= W_i(x) - \int_a^x \dots \int_a^x \left(\int_a^b k(x,t) W_i(t) dt \right) dx \dots dx \\ C &= (C_0, C_1, \dots, C_n)^t, \quad H(x) = F(x) + G(x) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $C_i, i = 0, 1, \dots, n$, nous choisissons des points de collocation

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ x_0 = a \end{cases}$$

Alors on obtient à un système linéaire de $(n+1)$ inconnue qui s'écrit sous la forme :

$$\Psi_i(x_j) C = H(x_j)$$

où

$$\Psi = (\psi_{ji}) = \begin{pmatrix} \psi_{00} & \psi_{01} & \dots & \psi_{0n} \\ \psi_{10} & \psi_{11} & & \psi_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \psi_{n0} & \psi_{n1} & . & \psi_{nn} \end{pmatrix}, H(x) = \begin{pmatrix} H(x_0) \\ H(x_1) \\ . \\ H(x_n) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\psi_{ji} = \Psi_i(x_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section nous allons traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaires de fredholm par la méthode de collocation basée sur les polynômes de Chebychev du quatrième espèce.

Exemple 01. Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm:

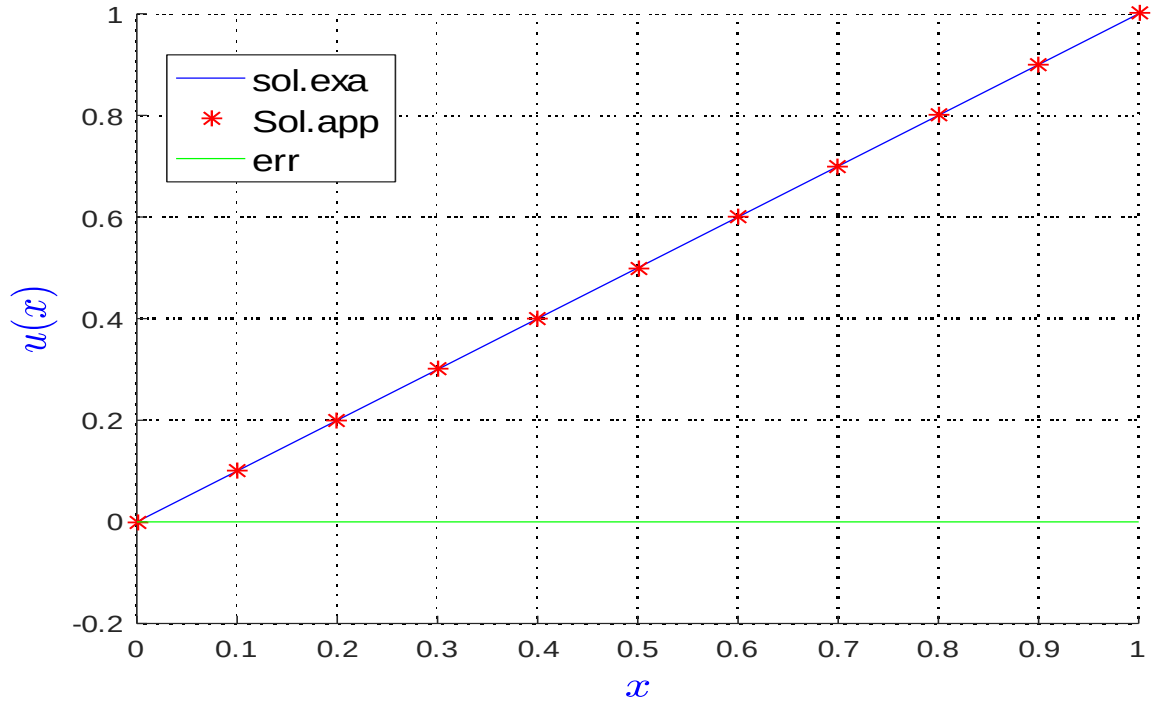
$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xt\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = x$$

Table 01. *Présente la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basé sur les polynomes de Chebychev du quatrième espece, et l'erreur est calculée pour $N = 10$*

Val dex	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	Err.
0	0	-1.2049e-10	1.2049e-10
1.0000e-01	1.0000e-01	1.0000e-01	4.5593e-11
2.0000e-01	2.0000e-01	2.0000e-01	2.3646e-12
3.0000e-01	3.0000e-01	3.0000e-01	2.3857e-11
4.0000e-01	4.0000e-01	4.0000e-01	1.3541e-11
5.0000e-01	5.0000e-01	5.0000e-01	4.8850e-11
6.0000e-01	6.0000e-01	6.0000e-01	2.0922e-10
7.0000e-01	7.0000e-01	7.0000e-01	5.5070e-10
8.0000e-01	8.0000e-01	8.0000e-01	1.2050e-09
9.0000e-01	9.0000e-01	9.0000e-01	2.3617e-09
1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	4.2745e-09



Exemple 02. Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm:

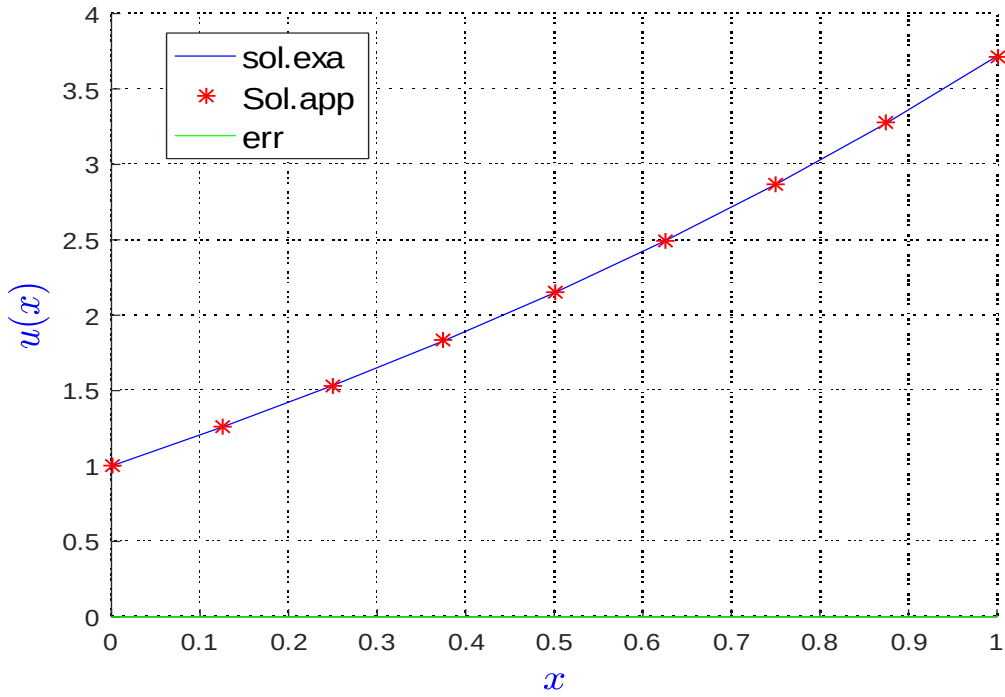
$$\begin{cases} \varphi''(x) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xt\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 2, \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = x + e^x$$

Table 02. Présente la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basé sur les polynômes de Chebychev du quatrième espèce, et l'erreur est calculée pour $N = 8$

Val der	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	Err.
0	1.0000e+00	1.0000e+00	4.0340e-11
1.2500e-01	1.2581e+00	1.2581e+00	1.4618e-11
2.5000e-01	1.5340e+00	1.5340e+00	5.7085e-12
3.7500e-01	1.8300e+00	1.8300e+00	1.6569e-11
5.0000e-01	2.1487e+00	2.1487e+00	1.5712e-11
6.2500e-01	2.4932e+00	2.4932e+00	4.1100e-12
7.5000e-01	2.8670e+00	2.8670e+00	1.2230e-11
8.7500e-01	3.2739e+00	3.2739e+00	1.9984e-11
1.0000e+00	3.7183e+00	3.7183e+00	4.2877e-12



Exemple 03. Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm:

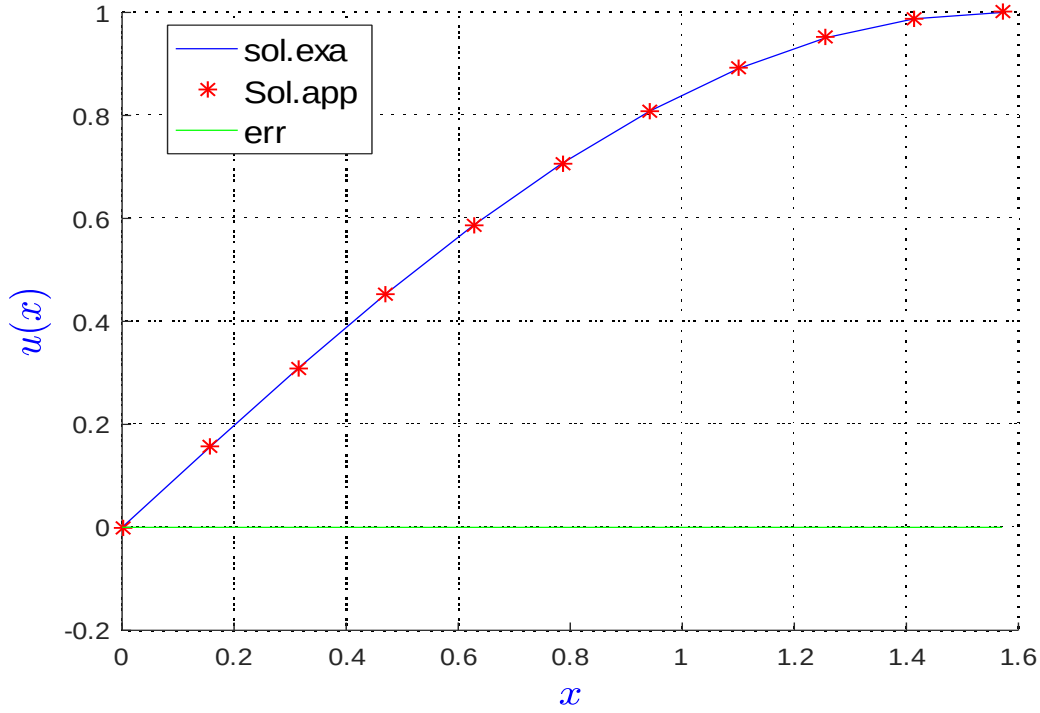
$$\begin{cases} \varphi''(x) = x - \sin(x) - \int_0^{\pi/2} xt\varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1, \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = \sin(x)$$

Table 03. *Présente la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basé sur les polynomes de Chebychev du quatrième espece, et l'erreur est calculée pour $N = 10$*

Val dex	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	Err.
0	0	-3.1019e-11	3.1019e-11
1.5708e-01	1.5643e-01	1.5643e-01	1.3601e-11
3.1416e-01	3.0902e-01	3.0902e-01	8.8316e-12
4.7124e-01	4.5399e-01	4.5399e-01	4.1558e-11
6.2832e-01	5.8779e-01	5.8779e-01	9.0774e-11
7.8540e-01	7.0711e-01	7.0711e-01	1.6019e-10
9.4248e-01	8.0902e-01	8.0902e-01	2.4473e-10
1.0996e+00	8.9101e-01	8.9101e-01	3.1939e-10
1.2566e+00	9.5106e-01	9.5106e-01	3.2048e-10
1.4137e+00	9.8769e-01	9.8769e-01	1.1650e-10
1.5708e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	5.3516e-10



Exemple 04. Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm:

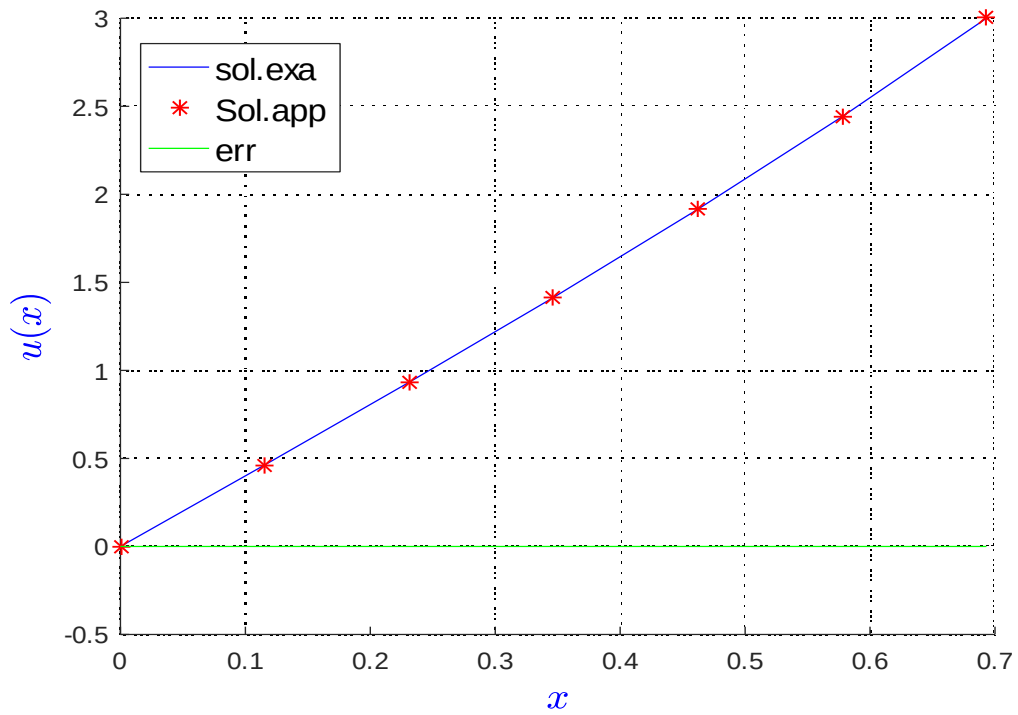
$$\begin{cases} \varphi'''(x) = 5 \ln 2 - 3 - x + 4 \cosh(x) - \int_0^{\ln 2} (x-t) \varphi(t) dt \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 4, \varphi''(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = 4 \sinh(x)$$

Table 04. Présente la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basé sur les polynômes de Chebychev du quatrième espee, et l'erreur est calculée pour $N = 6$

Val dex	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	Err.
0	0	-4.9951e-12	4.9951e-12
1.1552e-01	4.6313e-01	4.6313e-01	5.8522e-12
2.3105e-01	9.3244e-01	9.3244e-01	7.8544e-12
3.4657e-01	1.4142e+00	1.4142e+00	1.1978e-11
4.6210e-01	1.9149e+00	1.9149e+00	1.9106e-11
5.7762e-01	2.4411e+00	2.4411e+00	3.0026e-11
6.9315e-01	3.0000e+00	3.0000e+00	4.5423e-11



Conclusion

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de collocation basée sur les polynômes orthogonaux de Chebychev du quatrième espèce pour résoudre les équations linéaires. integro-différentielles de Fredholm. Les résultats numériques obtenus montrent un excellent taux de convergence même lorsque n augmente. Ainsi, la méthode est précise, efficace et performante pour la résolution des équations integro-différentielles de type Fredholm.

Bibliographie

- [1] A.M.WAZWAZ.Linear and nonlinear integral equation methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655 USA,2001.
- [2] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [3] Ndidiamaka Edith, D., Oyedepo, T., & Emmanuel Adenipekun, A. (2024). Fourth-kind Chebyshev Computational Approach for Integro-Differential Equations. Mathematics and Computational Sciences, 5(1), 55-64
- [4] ABDULLAHI, A. M., JAMES, A., ISHAQ, A. A., & OYEDEPO, T. (2022). A New Numerical Approach Using Chebyshev Third Kind Polynomial for Solving Integrodifferential Equations of Higher Order. Gazi University Journal of Science Part A : Engineering and Innovation, 9(3), 259-266
- [5] Zada, L., Al-Hamami, M., Nawaz, R., Jehanzeb, S., Morsy, A., Abdel-Aty, A., & Nisar, K. S. (2021). A new approach for solving Fredholm integro-differential equations. Inf. Sci. Lett, 10, 407-415.
- [6] OYEDEPO, T., AYOADE, A., AJ'ILEYE, G., & IKECHUKWU, N. J. (2023). Legendre Computational Algorithm for Linear Integro-Differential Equations. Cumhuriyet Science Journal, 44(3), 561-566.
- [7] Thaher, K. N. I. (2016). Linear Fredholm Integro-Differential Equation of the Second Kind (Doctoral dissertation).

-
- [8] Tair, B., Guebbai, H., Segni, S., & Ghiat, M. (2021). Solving linear Fredholm integro-differential equation by Nyström method. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 20(3), 53-64.
- [9] Matos, J. (2014). *Analyse Fonctionnelle*. Université d'évry, Année, 2015.
- [10] Sahu, P. K., & Ray, S. S. (2015). Legendre spectral collocation method for Fredholm integro-differential-difference equation with variable coefficients and mixed conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 268, 575-580.
- [11] Biçer, G. G., Öztürk, Y., & Gülsu, M. (2018). Numerical approach for solving linear Fredholm integro-differential equation with piecewise intervals by Bernoulli polynomials. *International Journal of Computer Mathematics*, 95(10), 2100-2111.