

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatiques

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Algèbre et mathématiques discrètes

**Par**

Nadjat Moussai

**Sujet**

**Etude sur les ensembles ordonnés flous**

Date de soutenance : 20/06/2018.

**Devant le jury :**

<b>Mr. Lemnaouar ZEDAM</b>	Prof. Univ de M'sila	Président
<b>Mr. Soheyb MILLES</b>	MCB. Univ de M'sila	Rapporteur
<b>Mr. Abdelaziz AMROUNE</b>	Prof. Univ de M'sila	Examineur
<b>Mr. Abderachid SAADI</b>	MCB. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2017 / 2018**

UNIVERSITÉ DE M'SILA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUES

ÉTUDE SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS  
FLOUS  
" ON THE FUZZY ORDERED SETS "

NADJAT MOUSSAI

MÉMOIRE PRÉSENTÉ CONFORMÉMENT AUX  
EXIGENCE DE DEGRÉ DE  
MASTER DE MATHÉMATIQUES  
ANNÉE ACADÉMIQUE 2017-2018

---

## REMERCIEMENTS

- Avant tout, nous remercions ALLAH le tout Puissant de nous avoir accordé la force et les moyens afin de pouvoir accomplir ce mémoire.
- Nous exprimons nos vifs remerciements, nos profondes gratitudee et nos reconnaissances pour notre encadreur le Docteur Soheyb MILLES, qui a dirigé ce mémoire. Sa bonté et sa confiance nous ont permis de progresser régulièrement. Nous tenons à le remercier pour ses conseils avisés ses valeurs uniques ainsi que sa patience avec laquelle il a accompagné notre travail.
- Le grand humanisme, la simplicité et la sagesse de notre enseignant Mourad YETTOU demeureront pour nous un modèle. Nous tenons à le remercier pour son aide et ses encouragements qui nous ont été utiles.
- Nous tenon à remercier le professeur Lemnaouar ZEDAM qui est aidé à réaliser ce travail et pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.
- Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur monsieur professeur Abdelaziz AMROUNE et monsieur professeur Abderachid SAADI. Nous espérons surtout qu'ils ont éprouvé du plaisir à lire ce travail.
- Nos remerciements vont également à tous les enseignants de Département mathématiques et informatiques.
- Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mon chers parents à qui depuis de si longues années, m'ont encouragé et soutenu dans la poursuite de mes études.
- Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues.
- Et enfin nous voulons remercier tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin dans l'élaboration et la finalisation de ce travail.

M'sila, Juin 2018  
Nadjat Moussai

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>ix</b>
<b>1 Généralités sur les sous-ensembles flous</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions de base . . . . .	1
1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques . . . . .	1
1.1.2 Sous-ensemble flou . . . . .	2
1.2 Les concepts fondamentaux des ensembles flous . . . . .	4
1.2.1 Opérations sur les sous-ensembles flous . . . . .	4
1.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou . . . . .	6
1.2.3 Représentation d'un sous-ensemble flou a partir des sous-ensembles classiques . . . . .	7
1.2.4 Produit cartésien et projection des sous-ensembles flous . . . . .	10
1.2.5 Normes et conormes triangulaires . . . . .	11
<b>2 Généralités sur les relations floues</b>	<b>15</b>
2.1 Rappels sur les relations classiques . . . . .	15
2.2 Les relations floues . . . . .	16
2.2.1 Définitions de base des relations floues . . . . .	16
2.2.2 Opérations sur les relations floues . . . . .	18
2.2.3 Composition des relations floues . . . . .	20
2.2.4 Propriétés particulières des relations floues . . . . .	21
2.3 Classes particulières des relations flous . . . . .	23
2.3.1 Relation d'équivalence floue . . . . .	23
2.3.2 Relation d'ordre floue . . . . .	24
2.4 Propriétés et caractérisations des ordres flous . . . . .	26
2.4.1 Propriétés fondamentales . . . . .	26
2.4.2 Caractérisations des ordres flous . . . . .	28
<b>3 Treillis flou</b>	<b>35</b>
3.1 Généralités sur les treillis classiques . . . . .	35
3.1.1 Définitions et caractérisation d'un treillis classique . . . . .	35
3.1.2 Types de treillis classique . . . . .	37
3.2 Treillis flou et quelques caractérisations . . . . .	40
3.2.1 Définitions de base . . . . .	40
3.2.2 Propriétés algébriques . . . . .	42
3.2.3 Caractérisations des treillis flous . . . . .	43
3.2.4 Différentes classes de treillis flous . . . . .	47

<b>Conclusion général et perspectives</b>	<b>51</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Aujourd'hui, la théorie des ensembles flous (en anglais Fuzzy sets) est de grande actualité, qui sert à représenter mathématiquement le manque de la précision relative à certaines classes d'objets et aussi cette théorie est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En effet, le terme d'ensemble flou représente la base théorique de la logique floue qui a été établie en 1965 par le professeur L. Zadeh [20] de l'université de Californie de Berkeley. A cette époque la théorie de la logique floue n'a pas été prise au sérieux, cette dernière permet de traiter des variables non exactes dont la valeur peut varier entre 0 et 1. Au début, cette théorie a été appliquée dans des domaines non techniques, comme le commerce et la médecine dont le but est de compléter les systèmes experts et afin de leur donner l'aptitude de prise de décision. En 1971 L. Zadeh [19] a défini les relations floues notamment l'ordre flou partiel. Dès 1975, on trouve les premières applications au niveau des systèmes de réglage. A partir de 1985 ce sont les Japonais qui commencent à utiliser la logique floue dans des produits industriels pour résoudre des problèmes de réglage et de commande. Récemment, une intense activité de recherche a débuté afin d'introduire le principe du réglage par la logique floue en Europe.

La notion de treillis a été introduite à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle par G. Boole, Ch. S. Peirce et E. Schröder [16] et aussi a été développée par G. Birkhoff [2], B. A. Davey et H. A. Priestley [5]. Cette notion qui est définie comme une structure algébrique munie de deux opérations appelées borne inférieure et borne supérieure. En 1990 Yuan et Wu [18] ont présentés les concepts des sous-treillis flous puis en 1994 Ajmal et Thomas [1] ont définis le concept des treillis flous. Plus récemment, Chon [4] compte tenu de l'ordre flou de L. Zadeh et il a proposé une nouvelle notion des treillis flous, également il a fourni quelques résultats des treillis flous distributifs et modulaires.

Les domaines d'applications de la théorie des ensembles flous sont très nombreux, on la retrouve en automatique, pour faire de la commande et de la régulation floue, en robotique, pour faire la planification de trajectoire, en traitement d'image, pour atténuer le bruit d'une image, pour faire de l'interpolation...etc, et aussi on utilise les treillis flous dans le domaine d'électronique en particulier les circuits électroniques intégrés.

L'objectif de ce travail est l'étude de quelques propriétés et caractéristiques des relations d'ordres flous et précisément les treillis flous. Ce travail contient les notions de base d'un sous-ensemble flou, un aperçu sur les ordres flous et aussi le développement de ces notions qui sont devenus comme des classes particulières des ensembles ordonnés flous (treillis flous). Nous avons pensé à ce travail parce que les décisions concernant l'information subjective comme les connaissances

approximatives ou incertaines sont très difficile à juger, l'apparence du notion "logique flou" sert à traiter cet difficulté puisque dans ce dernier une décision peut être à la fois vraie et fausse en même temps avec un certain degré.

Ce mémoire s'organise en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous allons étudier les notions de base d'un sous-ensemble flou et ses propriétés principales. Dans le deuxième chapitre, on donne des généralités sur les relations floues et on va insister beaucoup sur les classes particuliers des relations floues notamment les propriétés et les caractéristiques des ordres flous. Dans le troisième chapitre, on vu les concepts de base des classes particulières des ensembles ordonnés flous et ses différents caractérisations.

---

# 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SOUS-ENSEMBLES

## FLOUS

Comparativement à la logique classique, les bases théoriques de la logique floue sont établies de manière à pouvoir traiter des variables inexactes de valeurs comprises entre 0 et 1 et elle repose aussi sur la théorie des ensembles flous, par contre la logique classique dont les variables ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, la notion d'appartenance à un ensemble flou est graduelle, c'est à dire q'un élément peut appartenir, plus au moins fortement à cet ensemble.

Dans ce chapitre nous donnons des notions de base d'un sous-ensemble flou, et on donne aussi quelques propriétés fondamentales de cet ensemble telle que les caractéristiques, les opérations et les  $\alpha$ -coupes du sous-ensemble flou.

Pour plus de détail voir [8], [7], [20].

### 1.1. DÉFINITIONS DE BASE

---

Dans cette section, on donne un rappelle sur l'ensemble classique, l'ensemble flou et quelques exemples d'illustrations. Pour un langage mathématique acceptable, nous utilisons indifféremment le terme sous-ensemble flou et ensemble flou.

#### 1.1.1. RAPPELS SUR LES ENSEMBLES CLASSIQUES

Dans ce qui suit on va définir l'ensemble classique qui est défini intuitivement par plusieurs manières et ses opérations.

Un ensemble  $A$  de référence  $X$  est une collection d'objets, cet ensemble peut être défini par :

- (i) L'écriture de tous ses éléments, dont les éléments sont  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , et on écrit,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ;
- (ii) Une propriété ou des propriétés sont satisfaits par ses éléments, et on écrit,  $A = \{x \mid P(x)\}$ . où le symbole " $\mid$ " désigne la phrase " telle que " et  $P(x)$  une proposition de la forme "  $x$  a une propriété  $P$  ";
- (iii) Une fonction dite fonction caractéristique  $\chi_A$  qui prend la valeur 0 pour les

éléments n'appartient pas à  $A$  et la valeur 1 pour ceux qui appartient à  $A$  :

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A; \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 1.1.** Soit  $X$  un ensemble des maladies chroniques, on peut définir les sous ensembles classiques  $A, B$  par,  $A$  : les maladies héréditaires et  $B = \{\text{diabète, les hépatites virales, cancer, ...}\}$ .

**Définition 1.1. (Opérations sur les ensembles classiques)** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de référence  $X$ .

- **L'inclusion** :  $A \subset B$  si et seulement si  $\forall x \in X, (x \in A) \implies (x \in B)$  (c-à-d,  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ ).
- **L'égalité** :  $A = B$  si et seulement si  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$  (c-à-d,  $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ ).
- **Le complément** :  $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$  c-à-d,  $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$ .
- **L'intersection** :  $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$  c-à-d,  $\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$ .  
On a  $A \cap A^c = \emptyset$  est appelé lois de non contradiction.
- **L'union** :  $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  c-à-d,  $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$ .  
On a  $A \cup A^c = X$  est appelé lois de tiers exclu.

### 1.1.2. SOUS-ENSEMBLE FLOU

On va aborder la définition de sous- ensemble flou et quelques exemples qui le exprimer.

**Définition 1.2. (Sous-ensemble flou)[20]** Soit  $X$  un ensemble de référence, un sous-ensemble flou  $A$  (EF) de  $X$  est l'ensemble des couples

$$\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}.$$

Avec  $\mu_A$  est une fonction d'appartenance de  $X$  dans  $[0, 1]$  et  $\mu_A(x)$  qui représente le degré d'appartenance de  $x$  dans  $A$ .

On note  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles flous de  $X$ .

**Exemple 1.2.** Soient  $X = [6, 8]$  et  $A$  désigne l'ensemble des nombres réels proche à 7 sa fonction d'appartenance  $\mu_A(x) = A(x) = \frac{1}{1-(x-7)^2}$ , donc  $A$  est un sous-ensemble flou de  $X$  (voir la **Figure 1.1**).

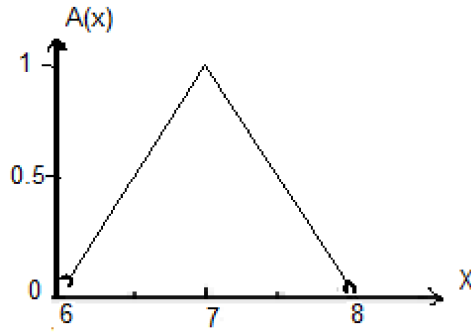


FIGURE 1.1 – Diagramme triangulaire

**Exemple 1.3.** Soit  $X = [36, 42]$  l'univers de discours qui exprime le degré de température d'un corps humain, une personne atteinte d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :

- (i) la personne a une forte fièvre ;
- (ii) sa peau présente une coloration jaune ;
- (iii) il a des nausées.

On va étudier maintenant le premier symptôme ou bien la propriété « Avoir une forte fièvre » qui est indiqué par le degré de température.

Dans le cas classique (voir **Figure 1.2**) on définit l'ensemble classique  $A$  de  $X$  associé à la propriété « Avoir une forte fièvre » par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 39, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

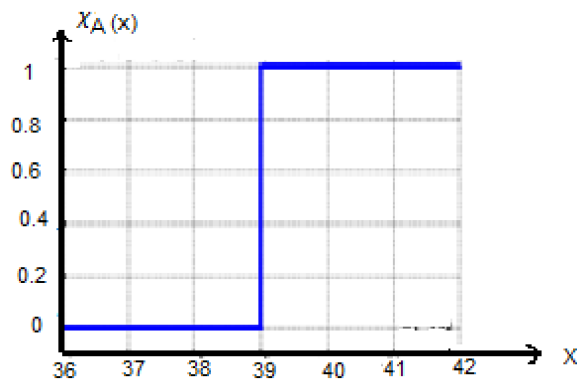


FIGURE 1.2

*i.e.*, les personnes ont une température au plus de 39 sont systématiquement avoir une forte fièvre par conséquent atteignent d'hépatite, sans pour autant que ce diagnostic soit logique.

Dans le cas flou la **Figure 1.3** montre un diagnostic possible, on définit aussi le sous-ensemble flou  $B$  de  $X$  qui associé à la même propriété de  $A$  « Avoir une forte

fièvre » comme

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 36 \leq x \leq 37, \\ \frac{29}{110}x - \frac{1037}{110} & \text{si } 37 < x < 41, \\ 1 & \text{si } 41 < x < 42. \end{cases}$$

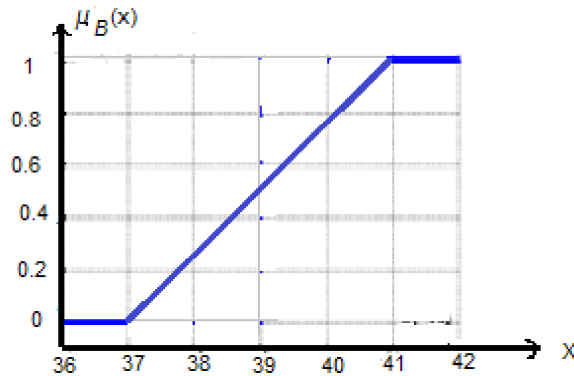


FIGURE 1.3 – Diagramme trapézoïde

*i.e.*, une personne a une température  $x$  de  $[36, 42]$

si  $\mu_B(x) = 1$ , donc la personne atteint d'hépatite .

si  $\mu_B(x) = \frac{29}{110}x - \frac{1037}{110}$ , donc la personne patiente avec un degré d'hépatite .

si  $\mu_B(x) = 0$ , donc la personne n'a pas d'hépatite.

## 1.2. LES CONCEPTS FONDAMENTAUX DES ENSEMBLES FLOUS

---

Dans cette section, nous donnons les notions de base d'un sous-ensemble flou comme les opérations, les caractéristiques d'un sous-ensemble flou, les  $\alpha$ -coupes, produit cartésien et projection des sous-ensembles flous. Finalement, on va abordé la notion du norme et conorme triangulaire.

### 1.2.1. OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ENSEMBLES FLOUS

Comme dans la théorie des ensembles classique, en théorie des ensembles flous, il existe un certain nombre d'opérations, on étend ces opérations aux fonctions d'appartenance des ensembles flous par quelque opérateur comme, min, max, ... pour plus de détail voir [8], [21].

Pour deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{F}(X)$  on a

- **Inclusion** on dit que  $A$  est inclus dans  $B$ , qu'on note alors  $A \subset B$ , si tout élément  $x$  de  $X$  qui appartient à  $A$  appartient aussi à  $B$  avec un degré au moins aussi grand (*i.e.*,  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ).

- **Égalité** on dit que deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément  $x$  de  $X$  (i.e,  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ).
- **Intersection** de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ , pour tout élément  $x$  de  $X$  on a  $A \cap B$  est donné par  $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ .
- **Union** de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ , pour tout élément  $x$  de  $X$  on a  $A \cup B$  est donné par  $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ .
- **Complément** d'un ensemble flou  $A$  noté  $A^c$  est le sous-ensemble flou constitué des éléments  $x$  lui appartenant d'autant plus à  $A^c$  qu'ils appartiennent peu à  $A$ , pour tout élément  $x$  de  $X$  on a  $A^c$  est donné par  $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ .

**Exemple 1.4. (Cas fini)** *Un agent immobilier veut classer les maisons qu'ils offrent à ses clients, un seul indicateur de confort de ces maisons est le nombre de chambres à coucher en dedans.*

*Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ , est l'ensemble des types disponibles de maisons décrites par  $x$  ce dernier signifier le nombre des chambres dans une maison, et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensemble flous de  $X$  tel que le sous-ensemble  $A$  est « type confortable d'une maison pour une famille a quatre personnes » et le sous-ensemble  $B$  est « type grand d'une maison » on obtient*

$$A = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 0.7 \rangle, \langle 6, 0.3 \rangle\};$$

$$B = \{\langle 3, 0.2 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.8 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle\}.$$

*Ce qui donne*

$A \cap B = \{\langle 3, 0.2 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.3 \rangle\}$ , représente la propriété « type confortable et grand d'une maison ».

$A \cup B = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 0.7 \rangle, \langle 6, 0.8 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle\}$ , représente la propriété « type confortable ou grand d'une maison ».

$A^c = \{\langle 1, 0.8 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.2 \rangle, \langle 5, 0.3 \rangle, \langle 6, 0.7 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \langle 10, 1 \rangle\}$ , représente la propriété « type n'est pas confortable d'une maison ».

$B^c = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 0.6 \rangle, \langle 5, 0.4 \rangle, \langle 6, 0.2 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \langle 10, 1 \rangle\}$ , représente la propriété « type n'est pas grand d'une maison ».

**Exemple 1.5. (Cas infini)** *Soit  $X = \mathbb{R}$  et soient  $A$  l'ensemble des réels plus grand que 10 et  $B$  l'ensemble des réels proche à 11 sont caractérisés respectivement par ses fonctions d'appartenances*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10, \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

et

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10, \\ (1 + (x - 11)^4)^{-1} & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

Donc, on obtient  $A \cap B$  l'ensemble des réels plus grand que 10 et proche de 11 donné par sa fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10, \\ \min[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

Et  $A \cup B$  l'ensemble des réels plus grand que 10 ou proche de 11 donné par sa fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}], \quad x \in X.$$

**Proposition 1.1. (Propriétés fondamentales des opérations)[8]** Soit  $A, B, C \in F(X)$ , on a les propriétés suivantes

Commutativité	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativité	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Lois de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Loi de non contradiction (non valide)	$A \cap A^c \neq \emptyset$
Loi de tiers exclu (non valide)	$A \cup A^c \neq X$

### 1.2.2. CARACTÉRISTIQUES D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU

Les caractéristiques d'un sous-ensemble flou  $A$  de référence  $X$  les plus utiles pour les décrire sont celles qui montrent à quel point il diffère d'un sous-ensemble classique de  $X$ .

**Définition 1.3. (Support d'un sous-ensemble flou)[14]** Le support de  $A$ , noté

$Supp(A)$ , est la partie de  $X$  sur laquelle la fonction de  $A$  n'est pas nulle

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

**Définition 1.4.** (*Noyau d'un sous-ensemble flou*)[14] Le noyau de  $A$ , noté  $Noy(A)$ , est l'ensemble des éléments de  $X$  pour lesquels la fonction d'appartenance de  $A$  vaut 1

$$Noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

**Définition 1.5.** (*Hauteur d'un sous-ensemble flou*)[7] La hauteur de  $A$  notée  $H(A)$ , est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance

$$H(A) = \sup_{x \in X} (\mu_A(x)).$$

**Définition 1.6.** Le sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est normalisé si sa hauteur  $H(A)$  est égale à 1.

**Définition 1.7.** (*Cardinalité d'un sous-ensemble flou*)[7] La cardinalité du sous ensemble flou  $A$  de  $X$ , notée  $|A|$ , lorsque  $X$  est fini, est définie par

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

**Exemple 1.6.** (*Cas fini*) Soit  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ , et soit le sous ensemble flou  $A$  est donnée par  $A = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.4 \rangle, \langle d, 0.3 \rangle, \langle e, 0.8 \rangle, \langle f, 0.5 \rangle\}$ . Alors  $Supp(A) = X$ ,  $H(A) = 0.8$ ,  $Noy(A) = \emptyset$ ,  $|A| = 3.3$ .

**Exemple 1.7.** (*Cas infini*) Soit  $B$  le sous-ensemble flou donné par la **Figure 1.3** sur l'ensemble  $X = [36, 42]$ . Alors  $Supp(A) = ]37, 42]$ ,  $H(A) = 1$ ,  $Noy(A) = [41, 42]$ ,  $|A|$  est infini.

### 1.2.3. REPRÉSENTATION D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU A PARTIR DES SOUS-ENSEMBLES CLASSIQUES

En présence de connaissances imprécises représentées par les sous-ensembles , plusieurs raisons conduisent à rechercher les sous-ensembles ordinaires qui leur sont associés.

#### LES $\alpha$ -COUPES ASSOCIÉES À UN ENSEMBLE FLOU

Le  $\alpha$ -coupe d'un ensemble flou  $A$  est un ensemble classique telle que ses éléments appartient à l'ensemble flou  $A$  avec un degré au moins égal à  $\alpha$ , c'est le passage le très important entre le cas classique et le cas flou car, elle est assurée la validité des notions classiques en termes flous.

**Définition 1.8.** (*Le niveau de flou*)[8] Pour un seuil  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ , on définit le  $\alpha$ -coupe du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  (ou sous-ensemble de niveau  $\alpha$  associé à  $A$ ) comme le sous-ensemble

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Dont la fonction caractéristique  $\chi_{A_\alpha}$  est telle que :  $\chi_{A_\alpha}(x) = 1$  si et seulement si  $\mu_A(x) \geq \alpha$ .

**Proposition 1.2.** [8] Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous. Alors

- (i)  $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ ;
- (ii)  $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ ;
- (iii)  $A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha$ ;
- (iv)  $A_1 = \text{Noy}(A)$ ;
- (v)  $A_0 = X$ .

**Exemple 1.8.** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$  telle que

$$\begin{aligned} A &= \{\langle 1, 0.7 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.4 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}; \\ B &= \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\langle 1, 0.7 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}; \\ A \cap B &= \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.4 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} A_{0.4} &= \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.4\} = \{1, 2, 3, 5\}; \\ B_{0.4} &= \{x \in X / \mu_B(x) \geq 0.4\} = \{2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned} (A \cup B)_{0.4} &= \{x \in X / \mu_{A \cup B}(x) \geq 0.4\} \\ &= A_{0.4} \cup B_{0.4} \\ &= \{1, 2, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \\ (A \cap B)_{0.4} &= \{x \in X / \mu_{A \cap B}(x) \geq 0.4\} \\ &= A_{0.4} \cap B_{0.4} \\ &= \{1, 2, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 5\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.9.** (*Le niveau strict de flou*)[8] Pour tout niveau  $\alpha$  de  $[0, 1]$ , on définit la  $\alpha$ -coupe strict du sous-ensemble flou  $A$  comme le sous-ensemble

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}.$$

**Remarque 1.1.**

- (i) Les niveaux stricts de flous ont les mêmes propriétés que les niveaux de flous ;
- (ii) Si  $\alpha = 0$ , le 0-coupe strict d'un sous-ensemble flou  $A$  coïncide à la définition d'un support c-à-d

$$A^0 = \text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\},$$

- (iii)  $\text{Supp}(A) = A^0 \subseteq A_0$ .

**REPRÉSENTATION D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU A PARTIR DE SES  $\alpha$ -COUPES**

La suite de toutes les  $\alpha$ -coupes d'un sous-ensemble flou  $A$  le représente complètement. de façon imagée, on peut dire qu'il est "coupé en tranches" et qu'en possédant toutes les tranches, on en possède toute la substance. Plus généralement, il est équivalent de connaître la famille de toutes les  $\alpha$ -coupes d'un sous-ensemble flou ou de connaître le sous-ensemble flou lui-même.

**Théorème 1.1. (Théorème de décomposition)**[8] *Tout sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble de référence  $X$  est défini à partir de ses  $\alpha$ -coupes pour tout élément  $x$  de  $X$  :*

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)).$$

**Démonstration** Soit  $x \in X$ , on suppose que  $\mu_A(x) = \beta$  ( $\beta \in [0, 1]$ ) et  $x \in A$ . Donc  $\mu_A(x) = \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x)$ . Alors on obtient  $\mu_A(x) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$ . Réciproquement, soit  $x \in X$  pour tout niveau  $\beta$  on a

$$\begin{cases} \chi_{A_\beta}(x) = 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \beta, \\ \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_A(x) < \beta. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = \beta & \text{si } \mu_A(x) \geq \beta, \\ \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_A(x) < \beta. \end{cases}$$

Dans les deux cas on obtient,  $\beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) \leq \mu_A(x)$ . Ce qui implique que  $\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)) \leq \mu_A(x)$ .

Par conséquent, pour tout  $x \in X$  :  $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$ .

**Exemple 1.9.** Soit  $X$  l'ensemble de référence qui est défini dans l'**Exemple 1.4** et soit  $A$  le sous-ensemble flou « type grand d'une maison », donné par  $A =$

$\{\langle 3, 0.2 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.8 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle\}$ .

On a pour tout niveau  $\alpha$  dans  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in X / \mu_A(x) \geq 1\} = \{7, 8\}; \\ A_{0.8} &= \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.8\} = \{6, 7, 8\}; \\ A_{0.2} &= \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mu_A(3) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.2 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.2; \\ \mu_A(4) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.4 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.4; \\ \mu_A(5) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.6 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.6; \\ \mu_A(6) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.8 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.8; \\ \mu_A(7) &= \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1; \\ \mu_A(8) &= \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1. \end{aligned}$$

Ce qui fournit bien l'ensemble  $A$ .

#### 1.2.4. PRODUIT CARTÉSIEN ET PROJECTION DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS

La description de tout système, fait généralement intervenir plusieurs univers de référence. Lorsqu'on considère plusieurs ensembles de référence simultanément, on construit un univers globale dont les diverses composantes sont les ensembles de référence initiaux. Les caractérisations représentées par des sous-ensembles flous que l'on définit sur cet univers global sont construites à partir des classes floues des ensembles de référence initiaux.

**Définition 1.10.** (*Produit cartésien des sous-ensembles flous*)[8] Soient des sous-ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_n$  respectivement définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on définit leur produit cartésien  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , comme un sous-ensemble flou de  $X$  de fonction d'appartenance définit pour toute  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  par

$$\mu_A(x) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)).$$

**Exemple 1.10.** Soit  $X_1$  un ensemble d'animaux  $X_1 = \{\text{chat, guépard, tigre}\}$  et  $X_2$  un ensemble de choix de pays par température  $X_2 = \{\text{chaud, froid}\}$ .

Le sous-ensemble flou  $A_1$  représente les choix d'un individu que l'animal souhaiterait a posséder et le sous-ensemble flou  $A_2$  représente ses choix au type de pays dans lequel l'animal souhaiterait vivre telle que

$$A_1 = \{\langle \text{chat}, 0.5 \rangle, \langle \text{guépard}, 0.8 \rangle, \langle \text{tigre}, 0.3 \rangle\}, A_2 = \{\langle \text{chaud}, 0.9 \rangle, \langle \text{froid}, 0.1 \rangle\}.$$

On obtient

$$A_1 \times A_2 = \{\langle (chat, chaud), 0.5 \rangle, \langle (chat, froid), 0.1 \rangle, \langle (guépard, chaud), 0.8 \rangle, \langle (guépard, froid), 0.1 \rangle, \langle (tigre, chaud), 0.3 \rangle, \langle (tigre, froid), 0.1 \rangle\}.$$

Soit un sous-ensemble flou  $A$  définie sur un univers  $X_1 \times X_2$  produit cartésien de deux ensembles de référence  $X_1$  et  $X_2$

**Définition 1.11. (*Projection d'un sous-ensemble flou*)**[8] *La projection sur  $X_1$  de l'ensemble flou  $A$  de  $X_1 \times X_2$  est l'ensemble flou  $Proj_{X_1}(A)$  de  $X_1$ , dont la fonction d'appartenance est défini par*

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{proj_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} (\mu_A(x_1, x_2)).$$

*On définit de façon analogue la projection de  $A$  sur  $X_2$ .*

**Exemple 1.11.** *Soit  $X = X_1 \times X_2$  l'ensemble de référence telle que  $X_1$  et  $X_2$  deux ensembles qui sont définis dans l'**Exemple 1.10**, on considère  $A_1 \times A_2 = A$  donné par  $A = \{\langle (chat, chaud), 0.5 \rangle, \langle (chat, froid), 0.1 \rangle, \langle (guépard, chaud), 0.8 \rangle, \langle (guépard, froid), 0.1 \rangle, \langle (tigre, chaud), 0.3 \rangle, \langle (tigre, froid), 0.1 \rangle\}$ . Alors, on obtient*

$$\begin{aligned} Proj_{X_1}(A) &= \{\langle chat, \max(0.5, 0.1) \rangle, \langle guépard, \max(0.8, 0.1) \rangle, \langle tigre, \max(0.3, 0.1) \rangle\} \\ &= \{\langle chat, 0.5 \rangle, \langle guépard, 0.8 \rangle, \langle tigre, 0.3 \rangle\}, \\ Proj_{X_2}(A) &= \{\langle chaud, \max(0.5, 0.8, 0.3) \rangle, \langle froid, \max(0.1, 0.1, 0.1) \rangle\} \\ &= \{\langle chaud, 0.8 \rangle, \langle froid, 0.1 \rangle\}. \end{aligned}$$

### 1.2.5. NORMES ET CONORMES TRIANGULAIRES

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs normes et conormes triangulaires qu'ont été introduits par "Menger" [6] dans le domaine des espaces métrique où la distribution de probabilité qui sont utilisés pour décrire la distance entre deux éléments.

Schweizer et Sklar [17] ont fourni les axiomes des normes triangulaires comme ils sont utilisés aujourd'hui.

**Définition 1.12. (*Norme triangulaire*)**[13] *Une norme triangulaire ( $t$ -norme) est une fonction  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :*

- (i) *Commutativité* :  $\forall x, y \in [0, 1], T(x, y) = T(y, x)$  ;
- (ii) *Associativité* :  $\forall x, y, z \in [0, 1], T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$  ;
- (iii) *Monotonie* :  $\forall x, y, z \in [0, 1], (x \leq y \Rightarrow T(x, z) \leq T(y, z))$  ;
- (iv) *Élément neutre 1* :  $\forall x \in [0, 1], T(x, 1) = x$ .

**Définition 1.13. (*Conorme triangulaire*)**[8] *Une conorme triangulaire ( $t$ -conorme) est une fonction  $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :*

- (i) *Commutativité* :  $\forall x, y \in [0, 1], S(x, y) = S(y, x)$  ;
- (ii) *Associativité* :  $\forall x, y, z \in [0, 1], S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$  ;
- (iii) *Monotonie* :  $\forall x, y, z \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow S(x, z) \leq S(y, z)$  ;
- (iv) *Élément neutre 0* :  $\forall x \in [0, 1], S(x, 0) = x$ .

**Remarque 1.2.**

- (i) *L'opérateur min satisfait ces propriétés donc on peut définir l'intersection de deux sous-ensembles flous par l'opérateur t-norme  $A \cap_T B$  telle que  $\mu_{A \cap_T B} = T(\mu_A, \mu_B)$  ;*
- (ii) *L'opérateur max satisfait ces propriétés donc on peut définir l'union de deux sous-ensembles flous par l'opérateur t-conorme  $A \cup_S B$  telle que  $\mu_{A \cup_S B} = S(\mu_A, \mu_B)$  ;*
- (iii) *Soit  $T$  Une norme triangulaire, l'application  $S$  définit comme*

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

*Est le dual t-conorme de  $T$ .*

**Définition 1.14. (L'opérateur négation)[8]** *Une négation est une fonction  $N : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  vérifiant :*

- (i)  $N(0) = 1$  et  $N(1) = 0$  ;
- (ii) *Monotonie*  $\forall x, y \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow N(y) \leq N(x)$ .

**Remarque 1.3.**

- (i) *Une négation  $N$  est dite négation strict si elle est strictement décroissante c-à-d,  $x < y \Rightarrow N(y) < N(x)$  ;*
- (ii) *Une négation strict est dit négation fort si elle est involutive c-à-d,  $N(N(x)) = x$ .*

**Définition 1.15. (Dualité entre opérateurs)[8]** *Une t-norme  $T$  et une t-conorme  $S$  sont dites duales pour la négation strict  $n$  si elles satisfaisant les formules suivantes pour tous  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  :*

$$\begin{aligned} S(x, y) &= N(T(N(x), N(y))); \\ T(x, y) &= N(S(N(x), N(y))). \end{aligned}$$

**Exemple 1.12. Différentes normes et conormes triangulaires :**

$t$ -norme	$t$ -conorme	nom
$\min(x, y)$	$\max(x, y)$	Zadeh
$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	Hamacher ( $\gamma > 0$ )
$xy$	$x + y - xy$	Probabiliste
$\max\left(1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, 0\right)$	$\min\left((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}, 1\right)$	Yager ( $p > 0$ )
$\max((x + y - 1 + \lambda xy) / (1 + \lambda), 0)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$	Weber ( $\lambda > -1$ )
$\begin{cases} x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	Drastique

**Exemple 1.13.** Soit  $X = \{a, b, c\}$ , soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$  telle que  $A = \{\langle a, 0.2 \rangle, \langle b, 0.4 \rangle, \langle c, 0.8 \rangle\}$ ,  $B = \{\langle a, 0.9 \rangle, \langle b, 0.1 \rangle, \langle c, 0.5 \rangle\}$ . On peut utiliser les opérateurs de Lukasiewicz pour définir l'union et l'intersection par

$$(i) \mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0), \forall x \in X;$$

$$(ii) \mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1), \forall x \in X.$$

Alors on obtient

$$(i) A \cap_T B = \{\langle a, 0.1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0.3 \rangle\};$$

$$(ii) A \cup_S B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 0.5 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}.$$

**Remarque 1.4.**

(i) L'opérateur  $\min$  est la plus grande des  $t$ -normes telle que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient

$$T(x, y) \leq \min(x, y).$$

Si l'opérateur  $t$ -norme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide l'opérateur  $\min$  c.à.d pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient

$$T(x, y) = \min(x, y);$$

(ii) L'opérateur  $\max$  est la plus petite des  $t$ -conormes telle que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient

$$\max(x, y) \leq S(x, y).$$

Si l'opérateur  $t$ -conorme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide l'opérateur

*max* c.à.d pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient

$$S(x, y) = \max(x, y);$$

(iii) Toute  $t$ -norme  $T$  et toute  $t$ -conorme  $S$  vérifient pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  les inégalités suivantes

$$T_{\text{drastique}} \leq T(x, y) \leq \min(x, y);$$

$$\max(x, y) \leq S(x, y) \leq S_{\text{drastique}}.$$

(iv) Tous les  $t$ -norme coïncident dans les valeurs de bords de l'intervalle  $[0, 1]$  c-à-d, (0 et 1)

$$T(0, 0) = T(1, 0) = T(0, 1) = 0, \quad T(1, 1) = 1;$$

(v) Tous les  $t$ -conorme coïncident dans les valeurs de bords de l'intervalle  $[0, 1]$  c-à-d, (0 et 1)

$$S(1, 1) = S(1, 0) = S(0, 1) = 1, \quad S(0, 0) = 0.$$

---

## 2 GÉNÉRALITÉS SUR LES RELATIONS FLOUES

Les relations floues sont d'une importance fondamentale dans presque tous les sous-domaines de la logique floue et de la théorie des ensembles flous, ils sont compris une modélisation préférentielle floue, mathématiques flou, inférence floue, et plus encore. Dans le cadre générale, les relations floues sont des applications du produit cartésien de domaines non vides vers l'intervalle d'unité ou un réseau plus général de valeurs de vérité. Les relations floues doivent permettre plus de flexibilité en acceptant de degrés de parenté intermédiaires.

---

### 2.1. RAPPELS SUR LES RELATIONS CLASSIQUES

---

Tout d'abord on va parler sur les notions de base d'une relation classique avec quelques exemples.

**Définition 2.1. (Relation classique)** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides, une relation binaire  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles  $X$  et  $Y$  est une partie de  $X \times Y$ . Pour  $(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq X \times Y$ , on note  $x\mathcal{R}y$ .

**Définition 2.2. ( Propriétés d'une relation classique)[3]** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble non vide  $X$  ( $\mathcal{R}$  une partie de  $X \times X$  )

- (i)  $\mathcal{R}$  est réflexive  $\Leftrightarrow \forall x \in X, x\mathcal{R}x$  ;
- (ii)  $\mathcal{R}$  est symétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$  ;
- (iii)  $\mathcal{R}$  est antisymétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$  ;
- (iv)  $\mathcal{R}$  est transitive  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ .

Si  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $X$ . On dit que cette relation d'ordre est partielle et on la note  $\preceq$ , s'il existe au moins deux éléments  $x, y \in X$  tel que  $x \not\preceq y$  et  $y \not\preceq x$ , et on appelle le couple  $(X, \preceq)$  ensemble partiellement ordonné. Si pour tout  $x, y \in X$ ,  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$  la relation d'ordre est dite totale ou linéaire, et le couple  $(X, \preceq)$  est dit ensemble totalement ordonné.

Si  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive,  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

#### Exemple 2.1.

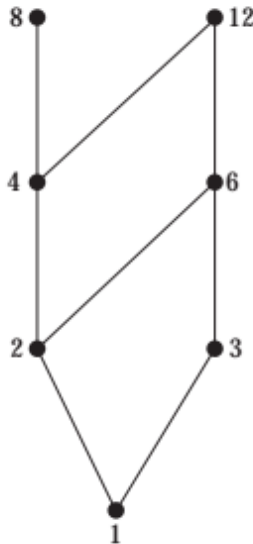
- (1) La relation de divisibilité ( $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$ ) est un ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$  ;
- (2) L'ordre usuelle  $\leq$  est un ordre total dans les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ;
- (3) Pour n'importe quel ensemble la relation d'égalité ( $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$ ) est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

**Remarque 2.1.** Usuellement la relation d'ordre  $\mathcal{R}$  est remplacée par le symbole " $\leq$ ".

**Définition 2.3. (Diagramme de Hasse)[3]** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné fini, on peut le représenter graphiquement par un diagramme de Hasse, qui est un graphe non orienté (la réflexivité et la transitivité sont implicites) avec les contraintes suivantes

- (1) Les sommets sont les éléments de  $X$  ;
- (2) Si  $x \leq y$  on place  $x$  plus bas que  $y$  sur le diagramme ;
- (3) Si  $x \leq y$  et qu'il n'a pas de  $z \in X$  tel que  $x \leq z \leq y$ , on met une arête entre  $x$  et  $y$ .

**Exemple 2.2.** Le schéma suivante dans la **Figure 2.1** désigne le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné  $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$ .



**FIGURE 2.1** – Diagramme de Hasse de  $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$ .

## 2.2. LES RELATIONS FLOUES

---

Dans cette section, nous rappelons les définitions de base et quelques propriétés des relations flous qui seront nécessaires tout au long de cette travail.

### 2.2.1. DÉFINITIONS DE BASE DES RELATIONS FLOUES

Dans ce que suite on va abordé la définition d'une relation floue et son inverse avec quelques exemples.

**Définition 2.4. (Relation floue)**[19] Une relation floue  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles de références  $X$  et  $Y$  est un sous-ensemble flou de produit cartésien  $X \times Y$ , de fonction d'appartenance  $\mu_{\mathcal{R}} : X \times Y \longrightarrow [0, 1]$ , ou simplement  $\mathcal{R}(x, y)$  qui est appelé le degré de relation entre  $x$  et  $y$ .

$$\mathcal{R} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \rangle \mid (x, y) \in X \times Y \}.$$

**Cas particulier :**

- (i) Si  $X = Y$ , une relation floue  $\mathcal{R}$  définit sur les deux univers  $X$  et  $Y$  est une relation binaire floue définit sur  $X$  ;
- (ii) Si  $X$  et  $Y$  sont finis, une relation floue  $\mathcal{R}$  définit sur les deux univers  $X$  et  $Y$  peut être décrite par la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  indiqué sur la ligne  $x$  et la colonne  $y$  ayant pour valeur  $\mathcal{R}(x, y)$ , pour tous  $x$  de  $X$  et  $y$  de  $Y$ .

**Exemple 2.3. (Cas fini)** Soit  $X = \{1, 2, 3\}$ , la relation  $\mathcal{R}$  " Approximativement égale à " peut être définie par :

$$\mathcal{R} : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \longmapsto \mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ 0.8 & \text{si } |x - y| = 1; \\ 0.3 & \text{si } |x - y| = 2. \end{cases}$$

On peut la représenté par le tableau suivant

$\mathcal{R}(x, y)$	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

**Exemple 2.4. (Cas infini)** La relation floue  $\mathcal{R}$  "  $x$  approximativement égale à 3 " peut être définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par la fonction d'appartenance :

$$\mathcal{R}(x, 3) = \frac{1}{1 + (x - 3)^2}$$

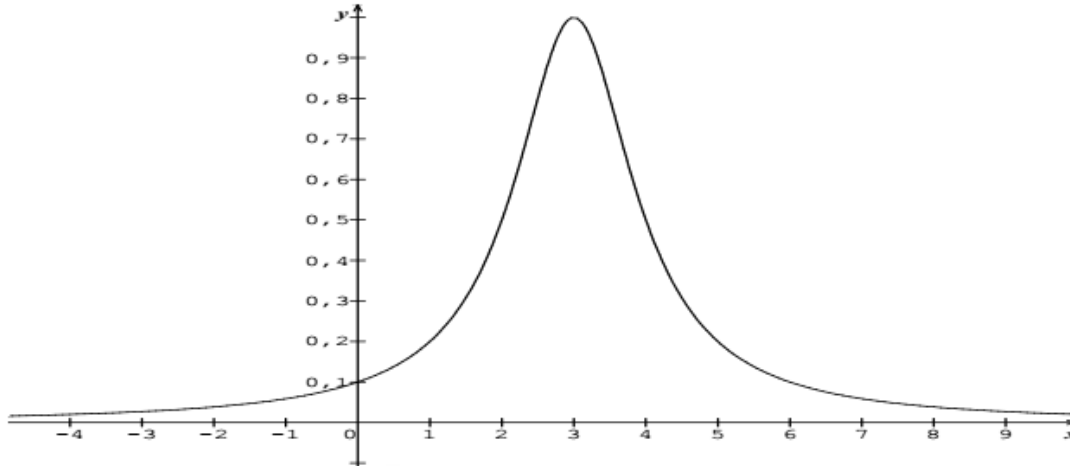


FIGURE 2.2 – "  $x$  approximativement égale à 3 "

**Définition 2.5.** (*L'inverse d'une Relation floue*)[8] Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue entre  $X$  et  $Y$ , on définit  $\mathcal{R}^t$  entre  $Y$  et  $X$  par

$$\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y).$$

$\mathcal{R}^t$  est la relation inverse de  $\mathcal{R}$ .

**Cas particulier :**

Si  $X$  et  $Y$  sont finis, la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^t}$  associée à l'inverse de la relation floue  $\mathcal{R}$  est la transposée de la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ .

**Exemple 2.5.** La relation inverse  $\mathcal{R}^t$  de la relation binaire floue  $\mathcal{R}$  qui est définie dans l'Exemple 2.3 sur  $X = \{1, 2, 3\}$  on va le définir ce forme matricielle comme ci-dessous

$\mathcal{R}^t(y, x)$	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

**Remarque 2.2.**

Les relations floues étant des cas particuliers des ensembles flous, toutes les propriétés et les définitions qui concernent les ensembles flous sont applicables.

## 2.2.2. OPÉRATIONS SUR LES RELATIONS FLOUES

Étant donné deux relations floues  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  de  $X \times Y$ .

**Définition 2.6.** [12] Soit  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations floues, pour tous  $x, y$  dans  $X \times Y$  on peut définir

1.  $\mathcal{R} = \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) = \mathcal{S}(x, y)$ .

2.  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y)$ .
3.  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{ \langle (x, y), \max(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{S}(x, y)) \rangle \} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{S}(x, y) \rangle \}$ .
4.  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{ \langle (x, y), \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{S}(x, y)) \rangle \} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \rangle \}$ .
5.  $\mathcal{R}^c = \{ \langle (x, y), 1 - \mathcal{R}(x, y) \rangle \}$ .

**Exemple 2.6.** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations floues sur  $X \times X$  telle que  $X = \{x, y, z\}$ , représentées par ses matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$  qui sont définis par les tableaux suivants

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.6	0.3
$y$	0.4	1	0.2
$z$	0	0.5	1

$\mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	0.2	0.4	0
$y$	0.8	0.1	1
$z$	0.4	0	1

Les matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$  correspondants aux relations floues  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$  sont

$\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.6	0.3
$y$	0.8	1	1
$z$	0.4	0.5	1

$\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	0.2	0.4	0
$y$	0.4	0.1	0.2
$z$	0	0	1

La relation complémentaire est donnée par le tableau suivant

$\mathcal{R}^c$	$x$	$y$	$z$
$x$	0	0.4	0.7
$y$	0.6	0	0.8
$z$	1	0.5	0

**Proposition 2.1.** [12] Soient  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{Q}$  trois relations floues de  $X \times Y$  alors

1.  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}^t$ ;
2.  $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cup \mathcal{S}^t$ ;
3.  $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{S}^t$ ;
4.  $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$ ;
5.  $\mathcal{R} \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})$  et  $\mathcal{R} \cup (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \cap (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})$ ;
6.  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ ;
7. Si  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{Q}$  alors  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$ ,  
Si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$  alors  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ .

### Démonstration

1. Si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y)$ , et on a  $\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y) = \mathcal{S}^t(y, x)$  pour tous  $x, y$  de  $X \times Y$ . Donc,  $\mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}^t$ .

2. On a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^t(y, x) &= (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(x, y) \\
 &= \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{S}(x, y) \\
 &= \mathcal{R}^t(y, x) \vee \mathcal{S}^t(y, x) \\
 &= (\mathcal{R}^t \cup \mathcal{S}^t)(y, x).
 \end{aligned}$$

De la même manière on démontre  $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{S}^t$  et  $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$ .

5. Nous utilisons que les opérations  $\vee$ ,  $\wedge$  satisfaisaient les propriétés de distribution, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q})(x, y) &= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q})(x, y) \\
 &= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{S}(x, y) \vee \mathcal{Q}(x, y)) \\
 &= (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y)) \vee (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{Q}(x, y)) \\
 &= (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})(x, y) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y) \\
 &= ((\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q}))(x, y).
 \end{aligned}$$

De la même manière on démontre  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  et aussi

Si  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{Q}$  alors  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$ ,  
 Si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$  alors  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ .

### 2.2.3. COMPOSITION DES RELATIONS FLOUES

La connaissance de deux relations floues, l'une entre  $X$  et  $Y$  et l'autre entre  $Y$  et  $Z$  permet d'établir une relation entre  $X$  et  $Z$ , comme dans le cas de relations classiques.

**Définition 2.7.** [8] *La composition de deux relations floues  $\mathcal{R}$  sur  $X \times Y$  et  $\mathcal{Q}$  sur  $Y \times Z$  définit une relation floue  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{Q}$  sur  $X \times Z$  de fonction d'appartenance définie par :*

$$\forall (x, z) \in X \times Z, \mathcal{S}(x, z) = \sup_{y \in Y} (\min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(y, z))).$$

**Remarque 2.3.**

*Cette définition correspond à celle classiquement utilisée, mais on peut remplacer le minimum par une  $t$ -norme quelconque.*

**Exemple 2.7.** *Considérons les relations floues  $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$  et  $\mathcal{Q} \subseteq Y \times Z$  définies par ses tableaux suivants*

$\mathcal{R}(x, y)$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.1	0.3	0
$x_2$	0.8	1	0.3

$\mathcal{Q}(y, z)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$y_1$	0.8	0.2	0
$y_2$	0.2	1	0.6
$y_3$	0.5	0	0.4

Le composé des relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q}$  est le suivant

$\mathcal{R} \circ \mathcal{Q}(x, z)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$x_1$	0.2	0.3	0.3
$x_2$	0.8	1	0.6

#### 2.2.4. PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DES RELATIONS FLOUES

Comme pour les relations classiques, on s'intéresse à certaines propriétés des relations floues  $\mathcal{R}$  définies sur  $X \times X$ .

**Définition 2.8.** [8] Une relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X \times X$  est dite :

- (i) Réflexive  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{R}(x, x) = 1$ ;
- (ii) Irréflexive  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{R}(x, x) = 0$ ;
- (iii) Non-réflexive  $\Leftrightarrow \exists x \in X, \mathcal{R}(x, x) = 0$ ;
- (iv) Symétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ ;
- (v) Asymétrique  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X^2, \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ , avec  $x \neq y$ ;
- (vi) Antisymétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (\mathcal{R}(x, y) > 0) \wedge (\mathcal{R}(y, x) > 0)$  alors,  $x = y$ ;
- (vii) Transitive  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X, \mathcal{R} \supseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$  c-à-d,  $\mathcal{R}(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ ;
- (viii) Séparable  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \mathcal{R}(x, y) = 1$  alors,  $x = y$ .

**Remarque 2.4.** [10] Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire floue réflexive. Alors la transitivité peut être reformulé par :

$\mathcal{R}$  est transitive  $\Leftrightarrow \mathcal{R}(x, z) = \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ , pour tout  $x, y, z \in X$ . En effet, d'une part nous savons que  $\mathcal{R}(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ , pour tout  $x, y, z \in X$ . D'autre part,  $\sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \geq \min\{\mathcal{R}(x, x), \mathcal{R}(x, z)\} = \min\{1, \mathcal{R}(x, z)\} = \mathcal{R}(x, z)$ , pour tout  $x, y, z \in X$ .

**Définition 2.9.** (Support d'une relation floue)[14] Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ , le support de  $\mathcal{R}$  est l'ensemble classique  $\text{Supp}(\mathcal{R})$  de  $X^2$  telle que

$$\text{Supp}(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in X \times X \mid \mathcal{R}(x, y) > 0\}.$$

**Exemple 2.8.** Considérons la relation floue  $\mathcal{R}$  de  $X^2$  définie par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0
$y$	0.5	1	0.8
$z$	0	0.9	1

On définit  $\text{Supp}(\mathcal{R})$  par le tableau suivant

$\text{Supp}(\mathcal{R})$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	1	0
$y$	1	1	1
$z$	0	1	1

**Définition 2.10.** (*Les  $\alpha$ -coupes d'une relation floue*) Soit  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  une relation floue, un  $\alpha$ -coupe de  $\mathcal{R}$  est un sous ensemble classique (relation ordinaire)  $\mathcal{R}_\alpha$  de  $X^2$ , telle que

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha; \\ 0 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) < \alpha. \end{cases}$$

**Lemme 2.1.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Alors pour tout  $x, y$  dans  $X$

$$\mathcal{R}(x, y) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} (\alpha \cdot \mathcal{R}_\alpha(x, y)).$$

### Démonstration

Évident d'après **Théorème 1.1**

**Exemple 2.9.** Considérons la relation floue  $\mathcal{R}$  de  $X^2$  définie par sa tableau

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.2	0.3
$y$	0	1	0.4
$z$	0	0	1

On définit  $\mathcal{R}_{0.4}$  par le tableau suivant

$\mathcal{R}_{0.4}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0	0
$y$	0	1	1
$z$	0	0	1

Donc,  $\mathcal{R}_{0.4}$  est un ensemble classique (relation ordinaire) associé à la relation flou  $\mathcal{R}$ .

## 2.3. CLASSES PARTICULIÈRES DES RELATIONS FLOUES

On s'intéresse dans cette section deux plus grands classes des relations floues l'une ordonne les éléments d'un ensemble et l'autre faire une partition sont respectivement la relation d'ordre flou et la relation d'équivalence floue, la différence principale entre les deux classes c'est la symétrie et l'antisymétrie, pour plus de détails voir [19] [21].

### 2.3.1. RELATION D'ÉQUIVALENCE FLOUE

Dans cette section, nous rappelons les définitions de base et propriétés des relation d'équivalence floue et que cette dernière faire une partition sur un ensemble quelconque.

**Définition 2.11.** *Une relation d'équivalence floue  $E$  sur  $X$  est une relation floue qui est :*

- (a) *Réflexive, pour tout  $x \in X, E(x, x) = 1$  ;*
- (b) *Symétrique, pour tous  $x, y \in X, E(x, y) = E(y, x)$  ;*
- (c) *Transitive, pour tous  $x, y, z \in X, E(x, z) \geq \sup_{y \in X} (\min(E(x, y), E(y, z)))$ .*

**Exemple 2.10.** *Soit  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , et soit  $E$  le sous ensemble flou définit par le tableau suivant*

$E$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
$x_2$	0.2	1	0.2	0.2	0.8	0.2
$x_3$	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
$x_4$	0.6	0.2	0.6	1	0.2	0.8
$x_5$	0.2	0.8	0.2	0.2	1	0.2
$x_6$	0.6	0.2	0.6	0.8	0.2	1

Alors,  $E$  est une relation d'équivalence floue.

**Définition 2.12. (L'arbre de partition)** *Soit  $P_\alpha$  la partition induite sur  $X$  par la relation d'équivalence floue  $E$ , pour tout  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ , on dit que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  sont dans la même bloc de  $P_\alpha$  si  $E(x, y) \geq \alpha$ .*

**Exemple 2.11.** *Soit  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  et soit  $E$  la relation d'équivalence floue qui est définit dans l'**Exemple 2.10**, on a l'arbre de partition de  $X$  par  $E$  :*

**Définition 2.13. (Classes d'équivalences)** *soit  $E$  une relation d'équivalence floue dans  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  caractérisé par une fonction d'appartenance  $E(x_i, x_j)$  telle que  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pour chaque  $x_i$  on associée une classe d'équivalence*

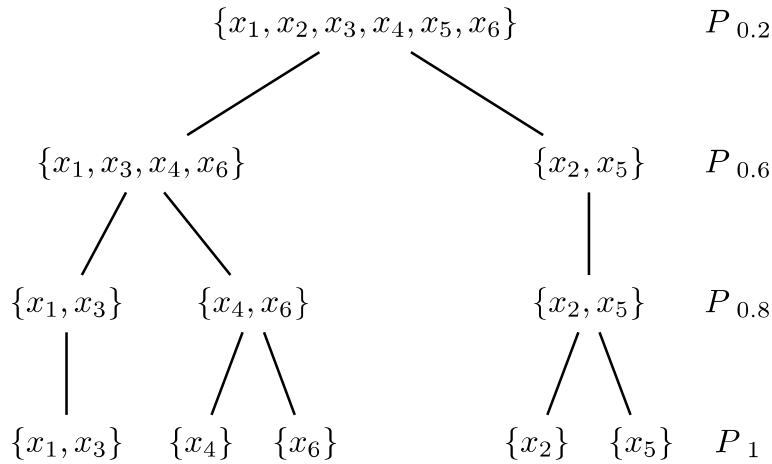


FIGURE 2.3 – "L'arbre de partition de  $X$  par  $E$  "

$E[x_i]$  ou simplement  $[x_i]$ , cette classe est un sous-ensemble flou de  $X$  qui est caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_{E[x_i]}(x_j) = E(x_i, x_j)$ .

**Exemple 2.12.** Soit  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  et soit  $E$  la relation d'équivalence floue qui est défini dans l'**Exemple 2.10** on a

$$E[x_1] = \{(x_1, 1), (x_2, 0.2), (x_3, 1), (x_4, 0.6), (x_5, 0.2), (x_6, 0.6)\};$$

$$E[x_2] = \{(x_1, 0.2), (x_2, 1), (x_3, 0.2), (x_4, 0.2), (x_5, 0.8), (x_6, 0.2)\}.$$

### 2.3.2. RELATION D'ORDRE FLOUE

Le concept de l'ordre flou était introduit par la généralisation de la notion de réflexivité, d'antisymétrique et de transitivité, en facilitant la dérivation de résultats connus dans divers domaines et en stimulant la découverte de nouveaux.

Dans ce que suit nous devons définir plusieurs types fondamentaux de l'ordre flou qui seront nécessaires tout au long de cette travail.

**Définition 2.14.** (**L'ordre flou partiel**)[4] Une relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est un ordre flou partiel si les conditions suivantes sont vérifiées

- (a) La réflexivité, pour tout  $x \in X, \mathcal{R}(x, x) = 1$ ;
- (b) L'antisymétrie, pour tous  $x, y \in X, (\mathcal{R}(x, y) > 0) \wedge (\mathcal{R}(y, x) > 0)$  alors,  $x = y$ ;
- (c) La transitivité, pour tous  $x, y, z \in X, \mathcal{R}(x, z) \geq \sup_{y \in X} (\min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)))$ .

Dans ce cas le couple  $(X, \mathcal{R})$  est dit ensemble ordonné flou ou bien ensemble partiellement ordonné flou (poset flou).

**Exemple 2.13.** (**Cas fini**) Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , le sous ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	1	0	0	0.6	0.4
$b$	0	1	0	0.6	0.6
$c$	0	0	1	0	0.6
$d$	0	0	0	1	0
$e$	0	0	0	0	1

Est un ordre flou partiel sur  $X$ .

**Exemple 2.14. (Cas infini)** Soit  $X = [0, 1]$  et  $\mathcal{R}$  est une relation floue sur  $X$  définie par

$$\mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ \lambda & \text{si } x < y \quad (\lambda \in [0, 1]), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $\mathcal{R}$  est un ordre flou partiel sur  $X$ .

**Définition 2.15. (Pré-ordre flou)**[19] Un pré-ordre flou  $\mathcal{R}$  est une relation floue dans  $X$  qui est réflexive et transitive.

**Exemple 2.15.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , le sous ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.8	1	0.8
$b$	0.2	1	0.2	0.2
$c$	1	0.8	1	0.8
$d$	0.6	0.9	0.6	1

Est un pré-ordre flou sur  $X$ .

**Définition 2.16. (Ordre flou strict)** Un ordre flou strict  $\mathcal{R}$  est une relation floue dans  $X$  qui est irréflexive et transitive.

**Exemple 2.16.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , le sous ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	0	0.8	1	0.8
$b$	0.1	0	0.1	0.1
$c$	1	0.8	0	0.8
$d$	0.5	0.9	0.6	0

Est un ordre flou strict sur  $X$ .

**Définition 2.17. (L'ordre flou total)**[19] Une relation d'ordre flou total  $\mathcal{R}$  ou ordre linéaire flou est un ordre flou partielle sur  $X$  telle que pour tout  $x, y \in X$ ,  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  ou  $\mathcal{R}(y, x) > 0$ . Dans ce cas le couple  $(X, \mathcal{R})$  est dit ensemble

*totalelement ordonné flou ou bien une chaine floue.*

**Exemple 2.17.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation flou sur  $X = \{x, y, z\}$  donné par

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.6	0.6
$y$	0	1	0.4
$z$	0	0	1

$\mathcal{R}$  est un ordre flou total.

## 2.4. PROPRIÉTÉS ET CARACTÉRISATIONS DES ORDRES FLOUS

---

Dans cette section, nous avons donner quelques propriétés de l'ordre flou partiel ensuite on va caractériser une relation d'ordre flou en utilisant son niveau de flou, notamment la caractérisation de cette relation à travers de son image et l'image réciproque qui est resté un ordre flou partiel.

### 2.4.1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Dans sous section, nous avons étudié quelques propositions qui montrent les différents propriétés d'une relation floue partielle.

**Proposition 2.2.** [10] Soient  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou et  $x, y, z \in X$ . Si  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, z) > 0$ , alors  $\mathcal{R}(x, z) > 0$ .

**Proposition 2.3.** [10] Soient  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou,  $x, y, z \in X$  et  $\alpha \in ]0, 1]$ . Si  $\mathcal{R}(x, y) \geq \alpha$  et  $\mathcal{R}(y, z) \geq \alpha$ , alors  $\mathcal{R}(x, z) \geq \alpha$ .

#### Démonstration

Supposons  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que  $\mathcal{R}(x, y) \geq \alpha$  et  $\mathcal{R}(y, z) \geq \alpha$ . Donc  $\min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \geq \alpha$ , alors  $\sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \geq \min\{\mathcal{R}(x, t), \mathcal{R}(t, z)\} \geq \alpha$ , finalement par la définition du transitivité floue on obtient  $\mathcal{R}(x, z) \geq \alpha$ .

**Proposition 2.4.** [4] Soit  $\{r_i : i \in I\}$  une famille des ordres flous partiels sur  $X$ . Alors  $(X, \bigcap_{i \in I} r_i)$  est un ensemble partiellement ordonné flou (poset flou).

#### Démonstration

On pose  $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} r_i$  c-à-d,  $\mathcal{R}(x, y) = \{\langle (x, y), \min_{i \in I} r_i(x, y) \rangle \mid x, y \in X\}$ .

(1)  $\mathcal{R}$  est réflexive

Comme  $(r_i)_{i \in I}$  est réflexive, alors pour tous  $i \in I$  et  $x \in X$   $r_i(x, x) = 1$ . Donc,  $\min_{i \in I} r_i(x, x) = 1$  par conséquent,  $\mathcal{R}(x, x) = 1$ . D'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

(2)  $\mathcal{R}$  est antisymétrique

Soit  $x, y \in X$ , on suppose que  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) > 0$ , donc  $\min_{i \in I} r_i(x, y) > 0$  et  $\min_{i \in I} r_i(y, x) > 0$ , c-à-d, pour tout  $i \in I$ ,  $r_i(x, y) > 0$  et  $r_i(y, x) > 0$  d'après l'antisymétrie de  $(r_i)_{i \in I}$ , on obtient  $x = y$ . D'où  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

(3)  $\mathcal{R}$  est transitive

Soit  $x, y, z \in X$ ,  $i \in I$  on démontre que :

$$\mathcal{R}(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\};$$

On a

$$\mathcal{R}(x, y) \leq r_i(x, y) \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \leq r_i(y, z);$$

Alors

$$\min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \leq \min\{r_i(x, y), r_i(y, z)\};$$

On a aussi

$$\min\{r_i(x, y), r_i(y, z)\} \leq r_i(x, z);$$

donc

$$\min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \leq \min_{i \in I} r_i(x, z);$$

Par conséquent

$$\mathcal{R}(x, z) \geq \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\};$$

D'où

$$\mathcal{R}(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}.$$

Alors,  $\mathcal{R}$  est transitive.

Donc,  $(X, \bigcap_{i \in I} r_i)$  est un ensemble partiellement ordonné flou.

**Remarque 2.5.** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations d'ordres flous partiels sur  $X$ ,  $(X, \mathcal{R} \cup \mathcal{S})$  n'est pas nécessairement un ensemble partiellement ordonné flou.

**Exemple 2.18.** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations d'ordres flous sur  $X = \{x, y, z\}$  données par

$\mathcal{R}(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.6	0.6
$y$	0	1	0.4
$z$	0	0	1

$\mathcal{S}(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0	0.6
$y$	0	1	0
$z$	0	0.3	1

Alors,  $\mathcal{Q} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$  défini par

$\mathcal{Q}(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0	0.6
$y$	0	1	0
$z$	0	0	1

Est une relation d'ordre flou partiel, et  $(X, \mathcal{Q})$  est un ensemble partiellement ordonné flou. Mais  $\mathcal{T} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  définie par

$\mathcal{T}(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.6	0.6
$y$	0	1	0.4
$z$	0	0.3	1

N'est pas un ordre flou. Car,  $\mathcal{T}(z, y) > 0$  et  $\mathcal{T}(y, z) > 0$  mais  $z \neq y$ .

### 2.4.2. CARACTÉRISATIONS DES ORDRES FLOUS

Dans cette sous section, nous avons donné quelques caractérisation des ordres fous avec la notion du support et la notion des  $\alpha$ -coupes ensuite, nous avons traité les conditions suffisantes pour qu'une image d'un ordre flou dans un ensemble quelconque d'être un ordre flou et aussi pour l'image réciproque.

**Théorème 2.1.** (*Caractérisation des ordres fous par ses  $\alpha$ -coupes*)<sup>[4]</sup>  
Soient  $\mathcal{R} : X \times X \mapsto [0, 1]$  une relation flou et  $\mathcal{R}_\alpha = \{x, y \in X \mid \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha\}$ ,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre flou si et seulement si  $\mathcal{R}_\alpha$  est une relation d'ordre classique sur  $X$ , pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ .

#### Démonstration

Soit  $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow [0, 1]$  une relation d'ordre flou.

(1) Montrons que  $\mathcal{R}_\alpha$  est réflexive.

Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x \in X$ . On a :  $\mathcal{R}(x, x) = 1 \geq \alpha$ ,  $\forall x \in X$ , donc  $(x, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ , alors  $\mathcal{R}_\alpha$  est réflexive.

(2) Montrons également que  $\mathcal{R}_\alpha$  est antisymétrique.

Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x, y \in X$ . On suppose que  $(x, y) \in \mathcal{R}_\alpha$  et  $(y, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ , donc  $\mathcal{R}(x, y) \geq \alpha > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) \geq \alpha > 0$  d'après l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$  on obtient  $x = y$ . Alors  $\mathcal{R}_\alpha$  est antisymétrique.

(3) On va montrer la transitivité de  $\mathcal{R}_\alpha$ . Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x, y, z \in X$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}_\alpha &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \alpha \text{ (car } \mathcal{R} \text{ est transitive)} \\ &\Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}_\alpha. \end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{R}_\alpha$  est transitive. Alors,  $\mathcal{R}_\alpha$  est une relation d'ordre classique.

Inversement on suppose que pour tout  $\alpha$  dans  $]0, 1]$ , les  $\alpha$ -coupes de  $\mathcal{R}$  sont des relations d'ordres classiques et montrons que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre flou.

- (1) La réflexivité; Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x \in X$ ,  
 $(x, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ . Alors,  $\mathcal{R}(x, x) \geq \alpha$ , pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ , donc  $\mathcal{R}(x, x) = 1$ . D'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.
- (2) L'antisymétrie; Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x, y \in X$ , supposons que  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) > 0$ . Alors, pour tout  $\beta, \gamma, \delta \in ]0, 1]$ ,  $\mathcal{R}(x, y) > \beta > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) > \gamma > 0$ , soit  $\delta = \min\{\beta, \gamma\}$ . Donc,  $\mathcal{R}(x, y) > \delta > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) > \delta > 0$ . Alors,  $(x, y) \in \mathcal{R}_\delta$  et  $(y, x) \in \mathcal{R}_\delta$  et comme  $\mathcal{R}_\delta$  est antisymétrique pour tout  $\delta \in ]0, 1]$  on trouve  $x = y$ . D'où  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.
- (3) La transitivité; Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $x, y, z \in X$ , on pose  $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) = \alpha$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) = \alpha &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}_\alpha \\ &\Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ (car } \mathcal{R} \text{ est transitive)} \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{R}$  est transitive. D'où,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre floue.

**Exemple 2.19.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$  et soit  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre floue défini par sa tableau

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.8	0.2	0.6
$b$	0	1	0	0
$c$	0	0	1	0
$d$	0	0	0	1

On définit  $\mathcal{R}_{0.2}$ ,  $\mathcal{R}_{0.6}$  et  $\mathcal{R}_{0.8}$

$\mathcal{R}_{0.2}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	1	1	1
$b$	0	1	0	0
$c$	0	0	1	0
$d$	0	0	0	1

$$\text{Avec } \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{0.2}, \forall \alpha \leq 0.2,$$

$\mathcal{R}_{0.6}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	1	0	1
$b$	0	1	0	0
$c$	0	0	1	0
$d$	0	0	0	1

$$\text{Avec } \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{0.6}, \forall 0.2 < \alpha \leq 0.6,$$

$\mathcal{R}_{0.8}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	1	0	0
$b$	0	1	0	0
$c$	0	0	1	0
$d$	0	0	0	1

Avec  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{0.8}$ ,  $\forall 0.6 < \alpha \leq 0.8$ .

Donc,  $\mathcal{R}_{0.2}$ ,  $\mathcal{R}_{0.6}$  et  $\mathcal{R}_{0.8}$  sont des ordres classiques sur  $X$ .

D'après la **Remarque 1.1** on a la proposition suivante qui explique le cas d'exception  $\alpha = 0$ .

**Proposition 2.5.** [10] Soit  $\mathcal{R} : X \times X \mapsto [0, 1]$  est une relation flou, si  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre flou partiel alors,  $Supp(\mathcal{R})$  est un ordre partiel classique sur  $X$ .

### Démonstration

Soit  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  une relation d'ordre floue, on sait que  $Supp(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in X \times X, \mathcal{R}(x, y) > 0\}$ .

(1) Montrons que  $Supp(\mathcal{R})$  est réflexive.

Soit  $x \in X$ . On a :  $\mathcal{R}(x, x) = 1 \geq 0$ ,  $\forall x \in X$ , donc  $(x, x) \in Supp(\mathcal{R})$ , alors  $Supp(\mathcal{R})$  est réflexive.

(2) Montrons également que  $Supp(\mathcal{R})$  est antisymétrique.

Soit  $x, y \in X$ . On suppose que  $(x, y) \in Supp(\mathcal{R})$  et  $(y, x) \in Supp(\mathcal{R})$ , donc  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) > 0$  d'après l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$  on obtient  $x = y$ . Alors  $Supp(\mathcal{R})$  est antisymétrique.

(3) On va montrer la transitivité de  $Supp(\mathcal{R})$ . Soit  $x, y, z \in X$ .

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in Supp(\mathcal{R}) \text{ et } (y, z) \in Supp(\mathcal{R}) &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) > 0 \text{ et } \mathcal{R}(y, z) > 0 \\
 &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) > 0 \\
 &\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) > 0 \text{ (car } \mathcal{R} \text{ est transitive)} \\
 &\Rightarrow (x, z) \in Supp(\mathcal{R}).
 \end{aligned}$$

Donc,  $Supp(\mathcal{R})$  est transitive. D'où,  $Supp(\mathcal{R})$  est une relation d'ordre classique.

**Remarque 2.6.** L'inverse de la proposition n'est pas vrai en générale l'exemple suivant qui le montre.

**Exemple 2.20.** Soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{R}$  une relation flou définit par sa tableau et aussi avec son support

$\mathcal{R}(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0.1
$y$	0	1	0.8
$z$	0	0	1

$Supp(\mathcal{R})(x, y)$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	1	1
$y$	0	1	1
$z$	0	0	1

C'est claire que  $\text{Supp}(\mathcal{R})$  est un ordre classique partiel sur  $X$  mais,  $\mathcal{R}$  n'est pas un ordre flou partiel car la transitivité est invalide c-à-d,

$$\mathcal{R}(x, z) = 0.1 \not\geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} = 0.3.$$

**Définition 2.18.** [4] Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles,  $f : X^2 \rightarrow Y^2$  est une fonction et  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  deux relations floues telle que

(1)  $\mathcal{R}$  une relation flou sur  $Y$  alors,  $f^{-1}(\mathcal{R})$  est une relation flou sur  $X$  définie par

$$f^{-1}(\mathcal{R})(x, y) = \mathcal{R}(f(x, y)).$$

(2)  $\mathcal{S}$  une relation flou sur  $X$  alors,  $f(\mathcal{S})$  est une relation flou sur  $Y$  définie par

$$f(\mathcal{S})(p, q) = \begin{cases} \sup_{(a,b) \in f^{-1}(p,q)} \mathcal{S}(a, b) & \text{si } f^{-1}(p, q) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } f^{-1}(p, q) = \emptyset. \end{cases}$$

**Théorème 2.2.** [4] Soit  $X, Y$  deux ensembles et soient  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre flou partiel sur  $X$  et  $\phi : X^2 \rightarrow Y^2$  est une application telle que

- (1)  $\phi_1(x, x) = \phi_2(x, x)$ , pour tout  $x \in X$  ;
- (2)  $\phi_1(x, y) = \phi_1(x, z)$ , pour tous  $x, y, z \in X$  ;
- (3)  $\phi_2(x, y) = \phi_2(z, y)$ , pour tous  $x, y, z \in X$  ;
- (4)  $x \neq y$  alors  $\phi_1(x, y) \neq \phi_1(y, x)$  ( ou  $x \neq y$  alors  $\phi_2(x, y) \neq \phi_2(y, x)$ ).

où  $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$ . Alors  $(X, \phi^{-1}(\mathcal{R}))$  est un ensemble partiellement ordonné flou.

### Démonstration

On va montrer que  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$  est une relation d'ordre flou.

(1) La réflexivité de  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$ .

Soit  $x \in X$ , on a  $\phi_1(x, x) = \phi_2(x, x)$  et d'après la **Définition 2.18**  $\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, x) = \mathcal{R}(\phi(x, x))$  et on a  $\mathcal{R}(\phi(x, x)) = \mathcal{R}(\phi_1(x, x), \phi_2(x, x)) = 1$  ( car  $\mathcal{R}$  est réflexive). D'où,  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$  est réflexive.

(2) L'antisymétrie de  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$ .

Soit  $x, y \in X$ , d'après les hypothèses (1), (2), (3) on a

$$\phi_1(x, y) = \phi_1(x, x) = \phi_2(x, x) = \phi_2(y, x), \text{ pour tous } x, y \in X.$$

Supposons que  $\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, y) > 0$  et  $\phi^{-1}(\mathcal{R})(y, x) > 0$  alors  $\mathcal{R}(\phi(x, y)) = \mathcal{R}(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) > 0$  et  $\mathcal{R}(\phi(y, x)) = \mathcal{R}(\phi_1(y, x), \phi_2(y, x)) > 0$  et comme  $\phi_1(x, y) = \phi_2(y, x)$ , pour tous  $x, y \in X$ , alors

$$\mathcal{R}(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) > 0 \text{ et } \mathcal{R}(\phi_2(x, y), \phi_1(x, y)) > 0.$$

Donc, d'après l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$  on a  $\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y) = \phi_1(y, x) = \phi_2(y, x)$ , et par l'hypothèse (4) on trouve  $x = y$ .

Alors,  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$  est antisymétrique.

(3) La transitivité de  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$ .

On va montrer que  $\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, y), \phi^{-1}(\mathcal{R})(y, z)\}$ .

On a  $\mathcal{R}(\phi_1(x, z), \phi_2(x, z)) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(\phi_1(x, z), y), \mathcal{R}(y, \phi_2(x, z))\}$ , et  $\phi_1(x, z) = \phi_1(x, t)$  et  $\phi_2(x, z) = \phi_2(t, z)$ , donc d'après les hypothèses (3), (4) on trouve

$$\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{y \in X} \min\{\mathcal{R}(\phi_1(x, t), y), \mathcal{R}(y, \phi_2(t, z))\}, \text{ alors}$$

$$\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(\phi_1(x, t), \phi_2(x, t)), \mathcal{R}(\phi_2(x, t), \phi_2(t, z))\}.$$

Comme  $\phi_2(x, t) = \phi_1(t, x)$ , pour tous  $x, t \in X$ , on obtient

$$\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(\phi_1(x, t), \phi_2(x, t)), \mathcal{R}(\phi_1(t, x), \phi_2(t, z))\},$$

et on a  $\phi_1(t, x) = \phi_1(t, z)$ , donc

$$\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(\phi(x, t)), \mathcal{R}(\phi(t, z))\},$$

$$\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\phi^{-1}(\mathcal{R})(x, t), \phi^{-1}(\mathcal{R})(t, z)\}.$$

D'où,  $\phi^{-1}(\mathcal{R})$  est transitive. Finalement,  $(X, \phi^{-1}(\mathcal{R}))$  est un ensemble partiellement ordonné flou.

**Théorème 2.3.** [4] *Soit  $X, Y$  deux ensembles, soient  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre flou partial sur  $X$  et  $\phi : X^2 \rightarrow Y^2$  est une application tel que*

(1) *pour tout  $y \in Y$ , il existe  $x \in X$  tel que  $\phi(x, x) = (y, y)$ ;*

(2) *pour tous  $x, z \in X$ , il existe  $y \in Y$  tel que  $\phi(x, z) = (y, y)$ .*

*Alors  $(Y, \phi(\mathcal{R}))$  est un ensemble partiellement ordonné flou.*

### Démonstration

On va montrer que  $\phi(\mathcal{R})$  est une relation d'ordre flou.

(1) La réflexivité de  $\phi(\mathcal{R})$ .

D'après la conditions (1) de l'hypothèse on a, pour tout  $y \in Y$ ,  $\exists x \in X$  telle que

$$\begin{aligned} \phi(x, x) = (y, y) &\Leftrightarrow (x, x) \in \phi^{-1}(y, y) \\ &\Leftrightarrow \phi^{-1}(y, y) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Et d'après la **Définition 2.18**  $\phi(\mathcal{R})(y, y) = \sup_{(a,b) \in \phi^{-1}(y,y)} \mathcal{R}(a, b) \neq 0$  et aussi comme  $\mathcal{R}$  est réflexive on a  $\phi(\mathcal{R})(y, y) = \sup_{(a,b) \in \phi^{-1}(y,y)} \mathcal{R}(a, b) = \mathcal{R}(x, x) = 1$ .

D'où,  $\phi(\mathcal{R})$  est réflexive.

(2) L'antisymétrie de  $\phi(\mathcal{R})$ .

Soit  $(p, q) \in Y^2$  avec  $\phi(\mathcal{R})(p, q) > 0$  et  $\phi(\mathcal{R})(q, p) > 0$  donc  $\phi(\mathcal{R})(p, q) \neq 0$

et d'après la **Définition 2.18**  $\phi^{-1}(p, q) \neq \emptyset$  alors,  $\exists (x, z) \in \phi^{-1}(p, q)$  donc  $\phi(x, z) = (p, q)$  .....(\*) et d'après la conditions (2) du l'hypothèse  $(x, z) \in X^2$ ,  $\exists y \in Y$  telle que  $\phi(x, z) = (y, y)$  .....(\*\*).

Alors de (\*) et (\*\*) on a  $\begin{cases} \phi(x, z) = (p, q); \\ \phi(x, z) = (y, y). \end{cases} \Rightarrow (p, q) = (y, y) \Rightarrow p = q.$

C'est le même pour  $\phi(\mathcal{R})(q, p) > 0$ .

Alors,  $\phi(\mathcal{R})$  est antisymétrique.

(3) la transitivité de  $\phi(\mathcal{R})$ .

On va montrer pour tous  $x, y, z \in X$  que

$$\phi(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{y \in Y} \min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\}.$$

Comme  $\phi^{-1}(p, q) \neq \emptyset$  implique que  $p = q$  donc, si  $p \neq q$  implique que  $\phi^{-1}(p, q) = \emptyset$  et par conséquent, si  $p \neq q$  implique que  $\phi(\mathcal{R})(p, q) = 0$ .

On considère deux cas possibles

- 1<sup>ère</sup> cas : Si  $x = z$ . Alors  $\phi(\mathcal{R})(x, x) = 1$  ( $\phi(\mathcal{R})$  est réflexive), donc  $\phi(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{y \in Y} \min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\}$ .

- 2<sup>ème</sup> cas : Si  $x \neq z$ , alors  $\phi(\mathcal{R})(x, z) = 0$  c-à-d on va montrer que

$$\sup_{y \in Y} \min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0$$

$\Downarrow$

$$\min_{y \in Y} \{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0.$$

Soit  $y \in Y$  on considère trois cas possibles :

- 1<sup>ère</sup> cas :

$y = x$  avec  $x \neq z$  donc  $y \neq z$ , dans ce cas  $\phi(\mathcal{R})(y, z) = 0$  et par conséquent,

$$\min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0.$$

- 2<sup>ème</sup> cas :

$y = z$  avec  $x \neq z$  donc  $x \neq y$ , dans ce cas  $\phi(\mathcal{R})(x, y) = 0$  et par conséquent,

$$\min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0.$$

- 3<sup>ème</sup> cas :

$y \neq x$  et  $y \neq z$  donc,  $\phi(\mathcal{R})(x, y) = 0$  et  $\phi(\mathcal{R})(y, z) = 0$  par conséquent,

$$\min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0.$$

En conclus que,  $\min_{y \in Y} \{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0$   
 $\Rightarrow \sup_{y \in Y} \min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\} = 0$  et donc

$$\phi(\mathcal{R})(x, z) \geq \sup_{y \in Y} \min\{\phi(\mathcal{R})(x, y), \phi(\mathcal{R})(y, z)\}.$$

D'où,  $\phi(\mathcal{R})$  est transitive.

Finalement,  $(Y, \phi(\mathcal{R}))$  est un ensemble partiellement ordonné flou.

---

## 3 TREILLIS FLOU

Parmi les concepts flous les plus importants dans les ensembles ordonnés flous du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir sont les treillis flous. Dans ce chapitre, nous avons mettre au début quelques généralités sur les treillis classiques puis on va abordé la notion des treillis flou avec quelques propriétés fondamentales.

### 3.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES TREILLIS CLASSIQUES

---

De nombreuses propriétés importantes d'un ensemble ordonné  $X$  sont exprimées en termes d'existence de certaines limites supérieures ou inférieures de ses sous-ensembles, parmi de ces propriétés on trouve le terme de treillis qui est un structure fait une liaison rigide entre l'étude des relations d'ordres et l'étude de certain structure algébrique.

#### 3.1.1. DÉFINITIONS ET CARACTÉRISATION D'UN TREILLIS CLASSIQUE

On s'intéresse dans cette section les définitions de treillis soit ensembliste ou algébrique qui sont très important.

**Définition 3.1.** [5] Soient  $(X, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné et  $A \subseteq X$ , un élément  $m \in X$  est appelé majorant de  $A$  si et seulement si  $a \leq m$  pour tout  $a \in A$ . Un majorant  $m_0$  de  $A$  est dit plus petit des majorants (borne supérieur) de  $A$  si et seulement si  $m_0 \leq m$  pour tout  $m \in A$ .

Un élément  $n \in X$  est appelé minorant de  $A$  si et seulement si  $n \leq a$  pour tout  $a \in A$ . Un minorant  $n_0$  de  $A$  est dit plus grand des minorants (borne inférieur) de  $A$  si et seulement si  $n \leq n_0$  pour tout  $n \in A$ .

On note le plus petit des majorants de l'ensemble  $\{x, y\}$  par  $\sup\{x, y\}$  ou  $x \vee y$ , et le plus grand des minorant de l'ensemble  $\{x, y\}$  par  $\inf\{x, y\}$  ou  $x \wedge y$ .

**Définition 3.2. (Treillis d'ordre)** Un treillis  $(X, \leq)$  est un ensemble ordonné dans lequel chaque partie  $\{x, y\}$  dans  $X$  admet une borne supérieure et une borne inférieure.

**Définition 3.3. (Treillis algébrique)** Un treillis est un ensemble  $X$  muni de deux lois internes  $\vee$  et  $\wedge$  telles que pour tous  $x, y, z$  dans  $X$

$$(1) \begin{cases} x \vee x = x; \\ x \wedge x = x. \end{cases} \quad (L'ïdempotente).$$

$$(2) \begin{cases} x \vee y = y \vee x; \\ x \wedge y = y \wedge x. \end{cases} \quad (\text{La commutativité}).$$

$$(3) \begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z). \end{cases} \quad (\text{l'associativité}).$$

$$(4) \begin{cases} (x \vee y) \wedge x = x; \\ (x \wedge y) \vee x = x. \end{cases} \quad (\text{L'absorption}).$$

**Exemple 3.1.**

(1) Pour tout ensemble  $X$ ,  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  est un treillis, avec  $\mathcal{P}(X)$  est l'ensemble des parties de  $X$  et pour tout  $A, B$  dans  $\mathcal{P}(X)$

$$A \vee B = A \cup B \quad \text{et} \quad A \wedge B = A \cap B;$$

(2)  $(\mathbb{N}^*, |)$  est un treillis avec pour tous  $x, y$  dans  $\mathbb{N}^*$

$$x \vee y = \text{ppcm}(x, y) \quad \text{et} \quad x \wedge y = \text{pgcd}(x, y);$$

(3) Toute chaîne est un treillis avec

$$x \vee y = \max\{x, y\} \quad \text{et} \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

**Définition 3.4. (Sous-treillis)**[5] Soient  $(X, \leq)$  un treillis et  $A$  une partie non vide de  $(X, \leq)$ .  $A$  est dite un sous-treillis si pour tous  $x, y$  dans  $A$ ,  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  dans  $A$ .

**Proposition 3.1.** [15] Soit un ensemble  $X$  muni de deux lois internes  $\wedge$  et  $\vee$  qui sont idempotentes, commutatives, associatives et vérifient les lois d'absorptions, alors il existe une unique relation d'ordre  $\leq$  sur  $X$  telle que  $(X, \leq)$  soit un treillis avec  $\sup_X\{x, y\} = x \vee y$  et  $\inf_X\{x, y\} = x \wedge y$ , pour tous  $x, y$  dans  $X$ .

**Démonstration**

Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement définie par :  $x \leq y$  si et seulement si  $x \vee y = y$  (elle sera donc unique).  $\mathcal{R}$  une relation définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

(1)  $\mathcal{R}$  est réflexive.

$x\mathcal{R}x$  car  $x \vee x = x$  (l'idempotente). Donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.

(2)  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

Supposons  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , donc  $x \vee y = y$  et  $y \vee x = x$ , d'après la commutativité on trouve  $x = y$ . D'où  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

(3)  $\mathcal{R}$  est transitive.

Supposons  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , donc  $x \vee y = y$  et  $y \vee z = z$ , alors  $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$  donc  $x\mathcal{R}z$ . D'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

Donc  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre, on va le noter par  $x \leq y$ .  $(X, \leq)$  est alors un ensemble partiellement ordonné.

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$  alors,  $x \leq x \vee y$  car  $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ , de même  $y \leq x \vee y$ , donc  $x \vee y$  est un majorant de  $\{x, y\}$ .

Soit  $M$  un autre majorant de  $\{x, y\}$  donc  $(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$ .

Donc  $x \vee y \leq M$ , ce qui nous donne  $x \vee y = \sup_X \{x, y\}$ .

D'autre part,  $x \wedge y \leq x$  puisque  $x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ , de même chose pour  $x \wedge y \leq y$  alors  $x \wedge y$  est un minorant de  $\{x, y\}$ .

Supposons que  $N$  un autre minorant de  $\{x, y\}$  donc  $(x \wedge x) \wedge N = x \wedge (x \wedge N) = x \wedge N = N$  alors,  $N \leq x \wedge y$  par conséquent  $x \wedge y = \inf_X \{x, y\}$ . Finalement,  $(X, \leq)$  est un treillis.

### 3.1.2. TYPES DE TREILLIS CLASSIQUE

Parmi les grandes classes des treillis on trouve les treillis distributifs, modulaires et les treillis complémentés on va étudier quelques propriétés algébriques de ces classes.

**Définition 3.5. (Treillis fermé)** Un treillis est fermé s'il possède un plus petit élément noté "0" et plus grand élément noté "1".

**Définition 3.6. (Treillis complet)** Un treillis est dit complet lorsque toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.

**Exemple 3.2.**

- (1) La chaîne  $([0, 1], \leq)$  est un treillis fermé et complet;
- (2) Tout treillis fini est fermé;
- (3) Le treillis  $(N^*, |)$  n'est pas fermé.

**Définition 3.7. (Treillis distributif)** Un treillis  $(X, \leq)$  est distributif si pour tous  $x, y, z$  dans  $X$  on a une des deux conditions

$$(D_1) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$(D_2) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

c'est à dire, qu'un treillis est distributif si, et seulement si, on a la distributivité de l'opération  $\wedge$  par rapport à l'opération  $\vee$  ou la distributivité de l'opération  $\vee$  par rapport à l'opération  $\wedge$ .

**Remarque 3.1.**

- (1) Un treillis  $(X, \leq)$  est non distributif si, et seulement si, il contient un sous-treillis de la forme de  $M_3$  ou  $N_5$ ;
- (2) Toute chaîne est un treillis distributif, avec  $x \wedge y = \min\{x, y\}$  et  $x \vee y = \max\{x, y\}$ .

**Exemple 3.3.**

- (1) Pour tout ensemble  $X$ , le treillis  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  est distributif car chaque des lois  $\cap$  et  $\cup$  est distributive par rapport à l'autre ;
- (2)  $M_3$  et  $N_5$  des treillis non distributifs (voir la **Figure 3.1**)

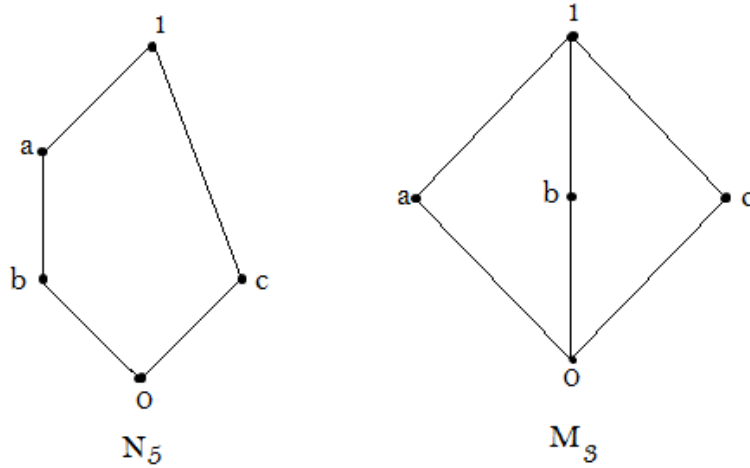


FIGURE 3.1

- $N_5$  (un pentagone) n'est pas distributif car  $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ , mais  $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$ .
- $M_3$  (un diamant) n'est pas distributif car  $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ , mais  $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$ .

**Théorème 3.1. (Caractérisation des treillis distributifs)** Pour qu'un treillis  $(X, \leq)$  soit distributif il faut et il suffit qu'il vérifie, pour tous  $x, y$  dans  $X$  la condition suivante

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z; \\ x \vee z = y \vee z. \end{cases} \quad \text{impliquent} \quad x = y.$$

**Définition 3.8. (Treillis modulaire)** Un treillis  $(X, \leq)$  est dit un treillis modulaire s'il vérifie la condition suivante pour tous  $x, y, z$  dans  $X$

$$x \leq z \quad \text{implique} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

**Remarque 3.2.**

- (1) Tout treillis distributif est modulaire ;
- (2) Un treillis  $(X, \leq)$  est modulaire s'il ne contient pas un sous treillis de la forme de  $N_5$ .

**Exemple 3.4.**

- (1)  $M_3$  est un treillis n'est pas distributif mais modulaire ;  
 (2)  $(X, |)$  est un treillis non modulaires, avec  $X = \{1, 2, 4, 5, 20\}$  ordonné par la divisibilité.  $2 \leq 4$ , mais  $2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2$  et  $(2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4$  (voir la **Figure 3.2**).

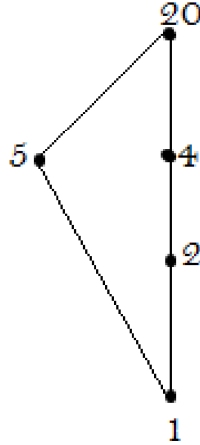


FIGURE 3.2

**Théorème 3.2. (Caractérisation des treillis modulaires)** Pour qu'un treillis  $(X, \leq)$  soit modulaire il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante pour tous  $x, y, z$  dans  $X$

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z; \\ x \vee z = y \vee z. \end{cases} \quad \text{impliquent } x \text{ et } y \text{ sont égaux ou incomparables.}$$

**Définition 3.9. (Treillis complétement)** Dans un treillis  $(X, \leq)$  fermé tout élément possède un complément, dans ce cas  $(X, \leq)$  est dit un treillis complétement, où le complément d'un élément  $x$  dans  $X$  est un élément  $x'$  dans  $X$  telle que

$$\begin{cases} x \wedge x' = 0; \\ x \vee x' = 1. \end{cases}$$

**Exemple 3.5.**

- (1)  $(X, |)$  est un treillis complétement avec  $X = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  ordonné par divisibilité telle que pour tous  $x, y$  dans  $X$ ,  $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$  et  $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$  (voir la **Figure 3.3**);

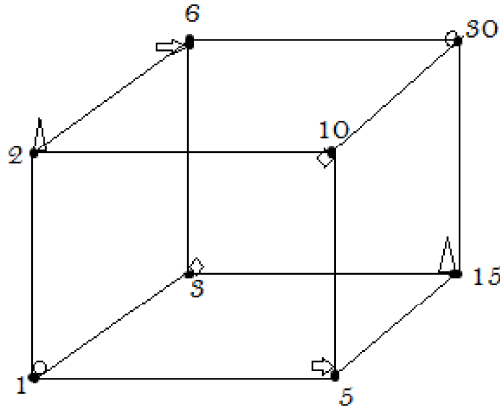


FIGURE 3.3 – "Diagramme de Hasse d'un treillis de diviseurs de 30"

(2)  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  est un treillis complété, si  $A \subseteq X$  son complément n'est autre que le complément de  $A$  c-à-d,  $C(A)$ .

## 3.2. TREILLIS FLOU ET QUELQUES CARACTÉRISATIONS

Dans cette section on va définir le treillis flou par l'ordre flou partiel et on va développer quelque propriétés fondamentales, pour plus de détail voir [4], [9], [10].

### 3.2.1. DÉFINITIONS DE BASE

On va insisté dans ce que suit à définir quelques éléments particulières d'un ensemble ordonné flou.

**Définition 3.10.** [4] Soient  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou et  $A \subseteq X$ , un élément  $m \in X$  est appelé majorant de  $A$  si et seulement si  $\mathcal{R}(a, m) > 0$  pour tout  $a \in A$ . Un majorant  $m_0$  de  $A$  est dit plus petit des majorants (borne supérieur) de  $A$  si et seulement si  $\mathcal{R}(m_0, m) > 0$  pour tout  $m \in A$ .

Un élément  $n \in X$  est appelé minorant de  $A$  si et seulement si  $\mathcal{R}(n, a) > 0$  pour tout  $a \in A$ . Un minorant  $n_0$  de  $A$  est dit plus grand des minorants (borne inférieur) de  $A$  si et seulement si  $\mathcal{R}(n, n_0) > 0$  pour tout  $n \in A$ .

On note le plus petit des majorants de l'ensemble  $\{x, y\}$  par  $\sup\{x, y\}$  ou  $x \vee y$ , et le plus grand des minorant de l'ensemble  $\{x, y\}$  par  $\inf\{x, y\}$  ou  $x \wedge y$ .

**Remarque 3.3.** D'après l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$ , la borne supérieur (respectivement borne inférieur) s'il est existe, il est unique.

**Définition 3.11.** [4] Soit  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou, on appelle  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou si et seulement si  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  existent pour tout  $x, y$  dans  $X$ .

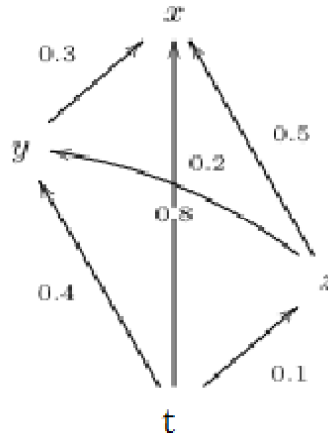
**Exemple 3.6.** [10] Soient  $X = \{x, y, z, t\}$  et  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  définie par sa matrice et on définit aussi  $\wedge$  et  $\vee$  de  $(X, \mathcal{R})$  par ses tableaux

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$	$t$
$x$	1	0	0	0
$y$	0.3	1	0	0
$z$	0.5	0.2	1	0
$t$	0.8	0.4	0.1	1

$\vee$	$x$	$y$	$z$	$t$
$x$	$x$	$x$	$x$	$x$
$y$	$x$	$y$	$y$	$y$
$z$	$x$	$y$	$z$	$z$
$t$	$x$	$y$	$z$	$t$

$\wedge$	$x$	$y$	$z$	$t$
$x$	$x$	$y$	$z$	$t$
$y$	$y$	$y$	$z$	$t$
$z$	$z$	$z$	$z$	$t$
$t$	$t$	$t$	$t$	$t$

On remarque que  $(X, \mathcal{R})$  est un ensemble totalement ordonné flou, et plus de ça est un treillis flou la **Figure 3.4** qui le montre.



**FIGURE 3.4** – "Représentation d'un treillis flou"

**Exemple 3.7.** [9] Soient  $X = \{a, b, c, d\}$  et  $\mathcal{S} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  définie par sa tableau suivant

$\mathcal{S}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.1	0.8	0.7
$b$	0	1	0.4	0.3
$c$	0	0	1	0
$d$	0	0	0	1

Alors  $(X, \mathcal{S})$  est un ensemble partiellement ordonné flou. Mais n'est pas un treillis flou car  $c \vee d$  n'existe pas la **Figure 3.5** qui le montre.

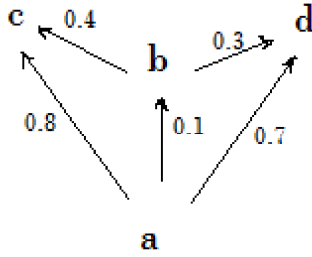


FIGURE 3.5

### 3.2.2. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Dans sous section, nous donnons quelques proposition qui montrent les différents propriétés des bornes supérieurs et inférieurs pour les treillis flous.

**Proposition 3.2.** [4] Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou, pour tout  $x, y, z \in X$  on a :

- (1)  $\mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$ ,  $\mathcal{R}(y, x \vee y) > 0$ ,  $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$ ,  $\mathcal{R}(x \wedge y, y) > 0$ ;
- (2)  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, z) > 0 \Rightarrow \mathcal{R}(x \vee y, z) > 0$ ;
- (3)  $\mathcal{R}(z, x) > 0$  et  $\mathcal{R}(z, y) > 0 \Rightarrow \mathcal{R}(z, x \wedge y) > 0$ ;
- (4)  $\mathcal{R}(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \vee y = y$ ;
- (5)  $\mathcal{R}(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ;
- (6) Si  $\mathcal{R}(y, z) > 0 \Rightarrow \mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge z) > 0$  et  $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee z) > 0$ .

#### Démonstration

Il est facile de vérifier (1), (2) et (3)

(4) Supposons  $\mathcal{R}(x, y) > 0$ , et comme  $\mathcal{R}(y, y) > 0$ , donc d'après (2)  $\mathcal{R}(x \vee y, y) > 0$ . D'autre part d'après (1) on trouve  $\mathcal{R}(y, x \vee y) > 0$ , et comme  $\mathcal{R}$  est antisymétrique alors  $x \vee y = y$ . Inversement, supposons  $x \vee y = y$ , d'après (1) on trouve  $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$  de (1) (même chose pour (5) ) ;

(6) Supposons  $\mathcal{R}(y, z) > 0$ . Alors

$$\mathcal{R}(x \wedge y, z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(x \wedge y, t), \mathcal{R}(t, z)\} \geq \min\{\mathcal{R}(x \wedge y, y), \mathcal{R}(y, z)\} > 0.$$

Comme  $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$  donc d'après (3) on obtient  $\mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge z) > 0$ .

$$\text{Aussi } \mathcal{R}(y, x \vee z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(y, t), \mathcal{R}(t, x \vee z)\} \geq \min\{\mathcal{R}(y, z), \mathcal{R}(z, x \vee z)\} > 0.$$

Comme de (1)  $\mathcal{R}(x, x \vee z) > 0$  donc d'après (2) on obtient  $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee z) > 0$ .

**Proposition 3.3.** [4] Soient  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou et  $x, y \in X$ , on a :

- (1)  $x \vee x = x$ ,  $x \wedge x = x$  ( L'idempotente ) ;

- (2)  $x \vee y = y \vee x$ ,  $x \wedge y = y \wedge x$  ( *La commutativité* ) ;  
 (3)  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ ,  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  ( *l'associativité* ) ;  
 (4)  $(x \vee y) \wedge x = x$ ,  $(x \wedge y) \vee x = x$  ( *L'absorption* ).

**Démonstration**

Supposons que  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou et  $x, y \in X$ . Il est facile de vérifier (1) et (2) ;  
 (3) On va montrer la propriété (3). On sait que  $\mathcal{R}(x, x \vee (y \vee z)) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x \vee (y \vee z)) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(y, t), \mathcal{R}(t, x \vee (y \vee z))\} \geq \min\{\mathcal{R}(y, y \vee z), \mathcal{R}(y \vee z, x \vee (y \vee z))\} > 0$ . Donc, on a  $\mathcal{R}(x, x \vee (y \vee z)) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x \vee (y \vee z)) > 0$ , alors d'après ce qui précède  $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee (y \vee z)) > 0$ .

On sait que  $\mathcal{R}(z, x \vee (y \vee z)) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(z, t), \mathcal{R}(t, x \vee (y \vee z))\} \geq \min\{\mathcal{R}(z, y \vee z), \mathcal{R}(y \vee z, x \vee (y \vee z))\} > 0$ . Donc, on a  $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee (y \vee z)) > 0$  et  $\mathcal{R}(z, x \vee (y \vee z)) > 0$ , alors d'après ce qui précède

$$\mathcal{R}((x \vee y) \vee z, x \vee (y \vee z)) > 0 \dots\dots(*)$$

Similairement on obtient

$$\mathcal{R}(x \vee (y \vee z), (x \vee y) \vee z) > 0 \dots\dots(**)$$

D'après (\*) et (\*\*) on obtient  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ . Même méthode pour démontrer que  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ .

(4) Il est clair que  $\mathcal{R}(x, (x \wedge y) \vee x) > 0$ . D'autre part  $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$  et  $\mathcal{R}(x, x) > 0$ , donc  $\mathcal{R}((x \wedge y) \vee x, x) > 0$ . Finalement, comme  $\mathcal{R}$  est antisymétrique, on obtient  $(x \wedge y) \vee x = x$  (même chose pour  $(x \vee y) \wedge x = x$ ).

**3.2.3. CARACTÉRISATIONS DES TREILLIS FLOUS**

Dans cette sous section, on va donné quelques propositions qui reliés le support et le  $\alpha$ -coupe avec la notion d'un treillis flou ensuite, on va étudié les treillis flou complet.

**Proposition 3.4.** [4] *Soit  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  une relation d'ordre flou et soit  $\mathcal{R}_\alpha = \{(x, y) \in X^2 \mid \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha\}$ . Si  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  est un treillis pour tout  $\alpha$  dans  $]0, 1]$  alors  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou.*

**Démonstration**

Soit  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  un treillis pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$  alors  $(X, \mathcal{R})$  est un ensemble partiellement ordonné flou d'après le **Théorème 2.1** pour tous  $x, y \in X$ , il existe  $r \in X$  telle que  $(x, r) \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $(y, r) \in \mathcal{R}_\alpha$  et  $(r, u) \in \mathcal{R}_\alpha$  pour tout majorant  $u$  de l'ensemble  $\{x, y\}$ .

Alors, il existe  $r \in X$  telle que  $\mathcal{R}(x, r) \geq \alpha > 0$ ,  $\mathcal{R}(y, r) \geq \alpha > 0$  et  $\mathcal{R}(r, u) \geq \alpha > 0$  pour tout majorant  $u$  de l'ensemble  $\{x, y\}$  par conséquent, il existe un plus petit des majorants  $r$  dans  $\{x, y\}$  c-à-d,  $x \vee y = r$ .

De façon analogue il existe un plus grand des minorants  $c$  telle que  $\mathcal{R}(v, c) \geq \alpha > 0$  pour tout minorant  $v$  de l'ensemble  $\{x, y\}$  c-à-d,  $x \wedge y = c$ .

Donc,  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou.

**Remarque 3.4.** [10]

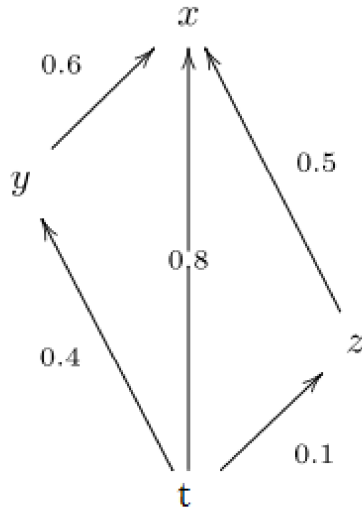
L'inverse du proposition  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou alors  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  est un treillis pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$  n'est pas toujours vraie elle dépend du niveau  $\alpha$  et c'est possible que  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  peut ne pas être un treillis et voici un exemple qui le montre.

**Exemple 3.8.** [10] Soient  $X = \{x, y, z, t\}$  et  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  définie par sa tableau et aussi on définit  $\mathcal{R}_{0.5}$ .

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$	$t$
$x$	1	0	0	0
$y$	0.6	1	0	0
$z$	0.5	0	1	0
$t$	0.8	0.4	0.1	1

$\mathcal{R}_{0.5}$	$x$	$y$	$z$	$t$
$x$	1	0	0	0
$y$	1	1	0	0
$z$	1	0	1	0
$t$	1	0	0	1

Alors  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou, et aussi est un treillis flou voir la **Figure 3.6**. Mais, si on prend  $\alpha = 0.5$  le couple  $(X, \mathcal{R}_{0.5})$  n'est pas un treillis car  $y \wedge z, y \wedge t, z \wedge t$  n'existent pas voir la **Figure 3.7**.



**FIGURE 3.6** – Représentation de treillis flou

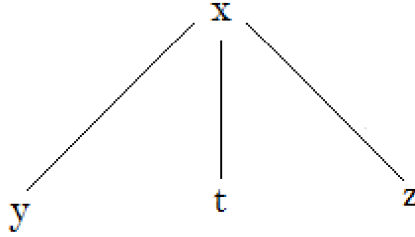


FIGURE 3.7 –  $(X, \mathcal{R}_{0.5})$  n'est pas un treillis

**Proposition 3.5.** [4] Soit  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  une relation d'ordre flou et soit  $\mathcal{R}_\alpha = \{(x, y) \in X^2 \mid \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha\}$ . Si  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou alors  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  est un treillis pour quelques  $\alpha$  dans  $]0, 1]$ .

**Démonstration**

Soit  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou, alors  $\mathcal{R}_\alpha$  est une relation d'ordre classique pour tout  $\alpha$  dans  $]0, 1]$  d'après le **Théorème 2.1**.

Soient  $x, y \in X$  et  $U$  l'ensemble de tout les majorants de  $\{x, y\}$  et  $L$  l'ensemble de tout les minorants de  $\{x, y\}$ . Alors, il existe  $r \in X$  telle que  $\mathcal{R}(x, r) > 0$ ,  $\mathcal{R}(y, r) > 0$  et  $\mathcal{R}(r, u) > 0$  pour tout  $u \in U$  et il existe  $c \in X$  telle que  $\mathcal{R}(c, x) > 0$ ,  $\mathcal{R}(c, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(l, c) > 0$  pour tout  $l \in L$ . Soit  $\alpha = \min\{\mathcal{R}(x, r) > 0, \mathcal{R}(y, r) > 0, \mathcal{R}(r, u) > 0, \mathcal{R}(c, x) > 0, \mathcal{R}(c, y) > 0, \mathcal{R}(l, c) > 0\}$  alors, il existe  $r \in X$  telle que  $\mathcal{R}(x, r) \geq \alpha > 0$ ,  $\mathcal{R}(y, r) \geq \alpha > 0$  et  $\mathcal{R}(r, u) \geq \alpha > 0$  pour tout  $u \in U$  et il existe  $c \in X$  telle que  $\mathcal{R}(c, x) \geq \alpha > 0$ ,  $\mathcal{R}(c, y) \geq \alpha > 0$  et  $\mathcal{R}(l, c) \geq \alpha > 0$  pour tout  $l \in L$ .

Alors, il existe  $r \in X$  telle que  $(x, r) \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $(y, r) \in \mathcal{R}_\alpha$  et  $(r, u) \in \mathcal{R}_\alpha$  pour tout  $u \in U$  et il existe  $c \in X$  telle que  $(c, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $(c, y) \in \mathcal{R}_\alpha$  et  $(l, c) \in \mathcal{R}_\alpha$  pour tout  $l \in L$ . Donc, il existe un plus petit des majorants  $r \in X$  de  $\{x, y\}$  et il existe un plus grand des minorants  $r \in X$  de  $\{x, y\}$  pour quelques  $\alpha > 0$ . D'où  $(X, \mathcal{R}_\alpha)$  est un treillis pour quelques  $\alpha > 0$ .

**Proposition 3.6.** [10] Soit  $\mathcal{R}$  un ordre partiel flou sur  $X$ . Si  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou, alors  $(X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$  est un treillis classique.

**Remarque 3.5.** la réciproque n'est pas forcément vraie l'exemple suivant qui le montre.

**Exemple 3.9.** Soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{R}$  une relation flou définit dans l'**Exemple 2.20**. On a  $(X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$  est un ensemble partiellement ordonné au plus de ça est une chaîne c-à-d, un treillis classique, mais  $(X, \mathcal{R})$  n'est pas un ensemble partiellement ordonné flou donc qui n'est pas un treillis flou.

**Proposition 3.7.** [4] *Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou alors,  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  dans  $(X, \mathcal{R})$  coïncide à  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  dans  $(X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$ .*

**Démonstration**

Soit  $x, y \in X$ , Supposons que  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  alors  $x \vee y = y \in (X, \mathcal{R})$  et aussi si on a  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  alors  $(x, y) \in \text{Supp}(\mathcal{R})$  et  $x \vee y = y \in (X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$ .

- Supposons que  $(x, y) \in \text{Supp}(\mathcal{R})$  alors  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  et  $x \vee y = y$ , par conséquent  $x \vee y = y$  en terme de  $(X, \mathcal{R})$ .

- Si  $\mathcal{R}(y, x) > 0$  on obtient la même résultat.

D'autre part, si les conditions  $\mathcal{R}(x, y) = 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) = 0$  se produisent en même temps alors, on suppose que, pour tout  $z \in X$  on a  $x \vee y = z$  en terme de  $(X, \mathcal{R})$ , et comme  $\mathcal{R}(y, x) = 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) = 0$ . Alors,  $(x, y) \notin \text{Supp}(\mathcal{R})$  et  $(y, x) \notin \text{Supp}(\mathcal{R})$ , par hypothèse  $x \vee y = z$  en terme de  $(X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$ .

- Si  $(x, y) \notin \text{Supp}(\mathcal{R})$  et  $(y, x) \notin \text{Supp}(\mathcal{R})$  alors,  $\mathcal{R}(x, y) = 0$  et  $\mathcal{R}(y, x) = 0$  et aussi par hypothèse  $x \vee y = z$  en terme de  $(X, \mathcal{R})$ .

La preuve de  $x \wedge y$  est de façon analogue.

**Définition 3.12.** [11] *Soit  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou. On appelle  $(X, \mathcal{R})$  sup-demi-treillis flou (respectivement inf-demi-treillis flou), si chaque paire d'élément possède une borne supérieur (respectivement une borne inférieur).*

**Remarque 3.6.**

*Un ensemble partiellement ordonné flou est un treillis flou si et seulement si à la fois sup-demi-treillis flou et inf-demi-treillis flou.*

**Définition 3.13.** [11] *Soient  $(X, \mathcal{R})$  un ensemble partiellement ordonné flou et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ ,  $\text{sup}A$  est un élément de  $X$  telle que si  $x \in X$  et  $\mu_A(x) > 0$ , alors  $\mathcal{R}(x, \text{sup}A) > 0$  et si  $u \in X$  telle que  $\mathcal{R}(x, u) > 0$  avec  $\mu_A(x) > 0$ , alors  $\mathcal{R}(\text{sup}A, u) > 0$ . Dualement pour  $\text{inf}A$ .*

**Définition 3.14.** [11] *Soit  $(X, \mathcal{R})$  un inf-demi-treillis flou. On appelle  $(X, \mathcal{R})$  un inf-demi-treillis flou complet lorsque tout partie flou non vide admet une borne inférieur. Dualement pour sup-demi-treillis flou complet.*

*Un treillis flou est dit treillis flou complet si à la fois inf-demi-treillis flou complet et sup-demi-treillis flou complet.*

**Proposition 3.8.** [11] *Soient  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou complet et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ , alors  $\text{sup}A$  ( $\text{inf}A$ ) existe et unique.*

**Démonstration**

L'existence du  $\text{sup}A$  est garanti d'après la **Définition 3.14**, on va maintenant démontrer l'unicité de  $\text{sup}A$ . Supposons que  $u$  et  $v$  représente les deux  $\text{sup}A$ , alors d'après la **Définition 3.13**  $\mathcal{R}(v, u) > 0$  et  $\mathcal{R}(u, v) > 0$ , par l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$  on obtient  $u = v$ . De cas analogue on peut démontrer l'unicité de  $\text{inf}A$ .

**Proposition 3.9.** [11] *Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou.*

*Si  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou complet, alors  $(X, \text{Supp}(\mathcal{R}))$  est un treillis complet classique.*

**Démonstration**

Soient  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou complet et  $Y$  une partie de  $X$  donc, pour tout  $x, y \in X$ ,  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  va donné  $(x, y) \in Supp(\mathcal{R})$  et comme  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  équivaut à dire que  $x \vee y = y$  et  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  équivaut à dire que  $x \wedge y = x$ , on conclut que toute la partie  $Y$  admet une borne supérieur et une borne inférieur. D'où  $(X, Supp(\mathcal{R}))$  est un treillis complet classique.

**3.2.4. DIFFÉRENTES CLASSES DE TREILLIS FLOUS**

Dans ce qui suite on va définir deux catégories des treillis flous qui sont les treillis flou distributifs et les treillis flou modulaires, aussi on va faire une aperçu de leur propriétés.

**Proposition 3.10. (Inégalités de distributivité)[4]** Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou alors  $\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0$  et  $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) > 0$  pour tous  $x, y, z$  dans  $X$ .

**Démonstration**

Comme  $\mathcal{R}(x \wedge y, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, y \vee z) > 0$  donc d'après la transitivité de  $\mathcal{R}$  on déduire que

$$\mathcal{R}(x \wedge y, y \vee z) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(x \wedge y, t), \mathcal{R}(t, y \vee z)\} \geq \min\{\mathcal{R}(x \wedge y, y), \mathcal{R}(y, y \vee z)\} > 0$$

et aussi d'après la propriétés (3) de la **Proposition 3.2** on a  $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$  et  $\mathcal{R}(x \wedge y, y \vee z) > 0$  alors

$$\mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge (y \vee z)) > 0 \dots\dots(*)$$

Même principe pour  $\mathcal{R}(x \wedge z, z) > 0$  et  $\mathcal{R}(z, y \vee z) > 0$ . Donc, on obtient finalement

$$\mathcal{R}(x \wedge z, x \wedge (y \vee z)) > 0 \dots\dots(**)$$

On remarque d'après (\*) et (\*\*) que  $x \wedge (y \vee z)$  est un majorant de  $\{x \wedge y, x \wedge z\}$  et comme  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  qui désigne le plus petit des majorants de  $\{x \wedge y, x \wedge z\}$ , donc

$$\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0.$$

De façon analogue on peut montrer  $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) > 0$ .

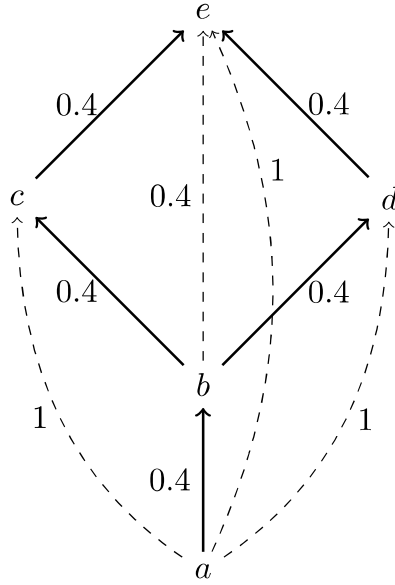
**Définition 3.15. (Treillis flou distributif)[4]** Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou, on dit que  $(X, \mathcal{R})$  est distributif si et seulement si,  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  et  $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ .

On appelle  $(X, \mathcal{R})$  treillis flou distributif d'après les inégalités de distributivité si et seulement si,  $\mathcal{R}(x \wedge (y \vee z), (x \wedge y) \vee (x \wedge z)) > 0$  et  $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge (x \vee z), x \vee (y \wedge z)) > 0$ .

**Exemple 3.10.** Soient l'ensemble  $X = \{a, b, c, d, e\}$  et  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou tel que  $\mathcal{R}$  définie par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	1	1	1	1	1
$b$	0	1	0.4	0.4	0.4
$c$	0	0	1	0	0.4
$d$	0	0	0	1	0.4
$e$	0	0	0	0	1

$(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou distributif (voir la **Figure 3.8**).



**FIGURE 3.8** – "Treillis flou distributif"

**Proposition 3.11.** [4] Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou et pour tous  $x, y, z$  dans  $X$ . Alors  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ .

**Démonstration** Soit  $x, y, z \in X$ .

D'après la propriété (4) du **Proposition 3.3** on a  $(x \vee y) \wedge x = x$  alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}((x \vee y) \wedge (x \vee z), x \vee (y \wedge z)) &= \mathcal{R}([(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z], x \vee (y \wedge z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \vee [(x \vee y) \wedge z], x \vee (y \wedge z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)], x \vee (y \wedge z)) \\
 &= \mathcal{R}([x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z), x \vee (y \wedge z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), x \vee (y \wedge z)) \\
 &= 1 > 0
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge (x \vee z), x \vee (y \wedge z)) > 0$  et d'après la **Proposition 3.10** on a  $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) > 0$ . Comme  $\mathcal{R}$  est antisymétrique on trouve  $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ .

Inversement, supposons que  $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ . alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) &= \mathcal{R}([(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z], x \wedge (y \vee z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \wedge [(x \wedge y) \vee z], x \wedge (y \vee z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)], x \wedge (y \vee z)) \\
 &= \mathcal{R}([x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z), x \wedge (y \vee z)) \\
 &= \mathcal{R}(x \wedge (y \vee z), x \wedge (y \vee z)) \\
 &= 1 > 0
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0$  et d'après la **Proposition 3.10** on a  $\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0$ . Comme  $\mathcal{R}$  est antisymétrique on obtient  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$ .

**Proposition 3.12. (Inégalité de modularité)**[4] Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou et pour tous  $x, y, z$  dans  $X$ . Si  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  alors  $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge z) > 0$ .

**Démonstration** Comme  $\mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$  et  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  donc d'après la propriété (3) de la **Proposition 3.2** on a

$$\mathcal{R}(x, (x \vee y) \wedge z) > 0 \dots\dots(*)$$

Et on a aussi  $\mathcal{R}(y \wedge z, y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y, x \vee y) > 0$  par la transitivité de  $\mathcal{R}$  on trouve  $\mathcal{R}(y \wedge z, x \vee y) \geq \sup_{t \in X} \min\{\mathcal{R}(y \wedge z, t), \mathcal{R}(t, x \vee y)\} \geq \min\{\mathcal{R}(y \wedge z, y), \mathcal{R}(y, x \vee y)\} > 0$ .  
Même principe pour  $\mathcal{R}(y \wedge z, x \vee y) > 0$  et  $\mathcal{R}(y \wedge z, z) > 0$  on obtient finalement

$$\mathcal{R}(y \wedge z, (x \vee y) \wedge z) > 0 \dots\dots(**)$$

On remarque d'après (\*) et (\*\*) que  $(x \vee y) \wedge z$  est un majorant de  $\{x, y \wedge z\}$  et comme  $x \vee (y \wedge z)$  est le plus petit des majorants de  $\{x, y \wedge z\}$ . Donc,  $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge z) > 0$ .

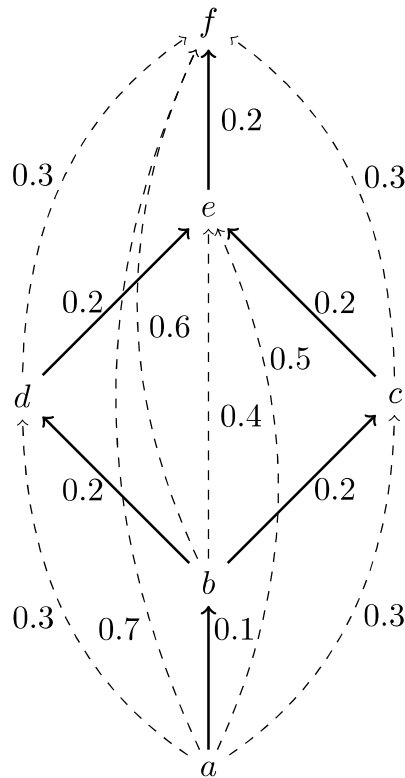
**Définition 3.16. (Treillis flou modulaire)**[4] Un treillis flou  $(X, \mathcal{R})$  est modulaire si et seulement si,  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  implique  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ .

On appelle  $(X, \mathcal{R})$  treillis flou modulaire d'après l'inégalité précédente si et seulement si,  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  implique  $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge z, x \vee (y \wedge z)) > 0$ .

**Exemple 3.11.** Soient l'ensemble  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$  et  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou tel que  $\mathcal{R}$  définie par sa tableau

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	1	0.1	0.3	0.3	0.5	0.7
$b$	0	1	0.2	0.2	0.4	0.6
$c$	0	0	1	0	0.2	0.3
$d$	0	0	0	1	0.2	0.3
$e$	0	0	0	0	1	0.2
$f$	0	0	0	0	0	1

$(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou modulaire (voir la **Figure 3.9**).



**FIGURE 3.9** – "Treillis flou modulaire"

**Proposition 3.13.** [4] Soit  $(X, \mathcal{R})$  un treillis flou distributif alors  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou modulaire.

**Démonstration**

Supposons que  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou distributif donc  $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ . On a  $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge z, x \vee (y \wedge z)) = \mathcal{R}((x \wedge z) \vee (y \wedge z), x \vee (y \wedge z))$  et comme  $\mathcal{R}(x, z) > 0$  donc  $x \wedge z = x$  d'après la propriété (5) de la **Proposition 3.2** on trouve  $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge z, x \vee (y \wedge z)) = \mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), x \vee (y \wedge z)) = 1 > 0$ . Alors  $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ . D'où  $(X, \mathcal{R})$  est un treillis flou modulaire.

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous avons étudié les notions de base d'un sous-ensemble flou et ses propriétés fondamentales, et on a vu particulièrement la classe des relations d'ordres flous notamment leurs propriétés fondamentales et aussi ses caractérisations en termes des  $\alpha$ -coupes. Le but le plus important de ce travail est l'étude d'une classe particulières des ordres flous qui sont les treillis flous, nous avons abordé les différents propriétés de cette classe dans une cadre algébrique et leurs caractérisations en termes aussi des  $\alpha$ -coupes ensuite, nous avons étudié les treillis flous complet. Finalement, nous avons donné quelques classes particulières des treillis flous tels que les treillis flous distributifs et modulaires.

Ce travail donne une grande possibilité de généraliser quelques résultats classiques notamment les différents classes des treillis flous.

Comme perspectives, on a laissé la voie ouverte pour envisager d'autres propriétés et caractéristiques des classes particulières d'un ensemble ordonné flou par exemple : les treillis résiduelles flous.



---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Ajmal et K.V. Thomas, *Fuzzy lattices*, Information Sciences, Vol 79, (1994) pp. 271-291.
- [2] G. Birkhoff, Lattice theory, *American Mathematical Society*, 1973.
- [3] N. Caspard, B. Leclerc et B. Monjardet, Ensembles Ordonnés finis : concepts, résultats et usage, *Springer Berlin Heidelberg*, 2000.
- [4] I. Chon, *Fuzzy Partial Order Relations and Fuzzy Lattices*, Korean Journal of Mathematics, Vol 17, (2009) pp. 361-374.
- [5] B. A. Davey et H. A. Priestley, Introduction to lattices and order, *Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] K. Manger, *Statistical Matrices*, Proc. Nat. Acad. Sci, Vol 28,(1942) pp. 553-537.
- [7] B. B. Meunier, La logique floue, *PUF collection «Que sais-je ? »*, 1993.
- [8] B. B. Meunier, La logique floue et ses application, *Addison Wesley, France*, 1995.
- [9] I. Mezzomo, On Fuzzy Ideals and Fuzzy Filters of Fuzzy Lattices, Phd thesis, *Natal/RN*, 2013.
- [10] I. Mezzomo, B. Bedregal et R. Santiago, *Types of fuzzy Ideals in Fuzzy Lattices*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Vol 28, (2015) pp. 929-945.
- [11] I. Mezzomo, B. Bedregal, R. Santiago et R. Reiser *On some operations on Bounded Fuzzy Lattices*, The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol 22, (2014) pp. 853-878.
- [12] S. Milles, Étude de quelques propriétés d'ordres flous intuitionistes, Mémoire de Magistère, *Université Mohamed Boudiaf, M'sila*, 2010.
- [13] W. Näther, *Copulas and t-norms, Mathematical tools for combinig probabilistic and fuzzy information, with application to error propagation and interaction*, Structural Safety, Vol 32, (2010) pp. 366-371.
- [14] W. Pedrycz et F. Gomide, An introduction to fuzzy sets, *Analysis and Deesign, A Bradford Book, Cambbridge, London, England*, 1998.
- [15] D. Ponasse et J. C. Carrega, Algèbre et Topologie booléenne, *Masson, Paris*, 1979.
- [16] B. Schröder, Ordered sets, An introduction, *Springer Science, Business Media, LLC*, 1966.
- [17] A. Sklar et B. Schweizer, *Statistical metric spaces*, Pacific Journal of Mathematics, Vol 10, (1960) pp. 313-334.
- [18] B. Yuan, W. Wu, *Fuzzy ideals on a distributive lattice*, Fuzzy Sets and Systems, Vol 35, (1990) pp. 231-240.

- [19] L. A. Zadeh, *Similarity Relation and Fuzzy Orderings*, Information Sciences, Vol 3, (1971) pp. 177-200.
- [20] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, Vol 8, (1965) pp. 338-353.
- [21] H. J. Zimmermaan, *Fuzzy sets theory and its application*, 4<sup>th</sup> Rev. Ed. Bostan : *Kluwer Academic Publishers*, 2001.

## ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة خواص علاقات الترتيب الضبابية وتطرقنا في هذا الصدد إلى فئة معينة من هذه المجموعات المرتبة الضبابية ألا وهي الشبكات الضبابية، قدمنا بعض الخصائص الأساسية والمميزات التي تحظى بها هذه الفئة.

من بين أهم النتائج التي تطرقنا إليها هي دراسة خواص الشبكات الضبابية وكذا دراسة مميزات من حيث المستويات الضبابية كما درسنا الشبكات الضبابية التامة ومميزات، أخيرا قمنا بدراسة خصائص الشبكات الضبابية التوزيعية والشبكات الضبابية المعيارية.

### الكلمات المفتاحية:

المجموعات الضبابية، المجموعات المرتبة الضبابية، الشبكات الضبابية.

## Abstract

In this memory, we have studied the properties of fuzzy ordered sets and discussed in this regard a particular class of fuzzy ordered sets which are the fuzzy lattices, we have also provided some basic properties and characterizations of this class.

Among the most important results which we discussed the study of the properties of fuzzy lattices and its characterizations in terms of the fuzzy level and the support, we have also examined the complete fuzzy lattices with their characterizations in term of the support, finally we have studied the properties of distributive and modular fuzzy lattices.

### Key words:

Fuzzy sets, fuzzy orderd sets, fuzzy lattices.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés des ordres flous et discuté à cet égard une classe particulières des ensembles ordonnés flous qui sont les treillis flous, nous avons aussi fourni quelques propriétés et caractéristiques fondamentales de cette classe.

Parmi les résultats les plus importants qui nous avons discuté l'étude des propriétés des treillis flous et ses caractérisations en termes de niveau de flou et du support, nous avons examiné aussi les treillis flous complets avec leurs caractérisations en terme du support, enfin nous avons abordé les propriétés des treillis flous distributifs et modulaires.

### Mots clés :

Ensembles flous, ensembles ordonnés flous, treillis flous.