Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de M'sila Mohamed Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Mémoire présenté en mathématiques

Troisième année

Par

ETUDIANT

THÈME

Théorie spectrale des opérateurs différentiels

Notations générales

$C([a,b])$	Espace des fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
A^{-1}	L'opérateur inverse de l'opérateur A
I	Opérateur d'identité
A^*	Adjoint de l'opérateur A.
$D(A)$	Le domaine de l'opérateur non-borné A
$Gr(A)$	Le graphe de l'opérateur A
$\mathcal{L}(E,F)$	Espace des opérateur linéaires continus de E dans F.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de A.
$R_\lambda(A)$	La résolvante de A.
$\sigma(A)$	spectre de A.
$\sigma_p(A)$	spectre Ponctuel de A.
$\sigma_c(A)$	spectre continu de A.
$\sigma_r(A)$	spectre Résiduel de A.
$M^\perp$	Orthogonal de M.
$\overline{M}$	L'adhérence de l'ensemble M.

Table des matières

Introduction

La théorie spectrale, branche essentielle de l'analyse fonctionnelle, s'applique tant en mathématiques pures et appliquées (équations différentielles ou aux dérivées partielles, théorie des algèbres de Von Neumann...) qu'en physique et en chimie (mécanique quantique, mécanique statistique, spectroscopie...).

Ce mémoire ne décompose en trois chapitre.

Le premier chapitre est une préliminaires contient quelques notions de bases concernant à l'opérateur non borné sur un espace de Hilbert.

Dans le deuxième chapitre, on va s'intéresser aux opérateur différentiels comme à opérateur non bornée dans un cadre fonctionnel hilbertien (espace de sobolev).

Dans la troisième on va présenter étude spectral d'un opérateur différentiel autoadjoint, en choisissant l'opérateur différentiel ordinaire du second ordre c'est l'opérateur de Sturm-Liouville.

Chapitre 1

Généralités sur les opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert

1.1 Opérateurs non-bornés(Extension).

1.1.1 Définition

Un opérateur **non-borné** sur un espace de Hilbert H est la donnée du couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous- espace vectoriel de H, et T est un opérateur linéaire définie de $D(T)$ dans H, alors on dite que T est non-borné de domaine $D(T)$.

Si $D(A)$ est dense dans H on dit que A est densément défini.

$X = Y = \mathcal{C}^0([0,1])$.

1.1.1 Exemple

En prenant pour domaine

$$D(T) = \mathcal{C}^1([0,1]),$$

on définit un opérateur de dérivation $A_M = d/dx$ «au sens classique» dans l'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$,par:

$$A_M u = \frac{du}{dx}, \qquad \forall u \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

1.1.2 Exemple

Soit T un opérateur et H un espace tel que:

$H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\; f \text{ mesurable tq} : \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \langle \infty \right\}$.

Le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est $\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$

$$\begin{aligned} T &: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\to Tf \ \text{ tq } \ Tf = xf. \end{aligned}$$

Le domaine $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \diagup xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Alors $f(x) = 1\diagup\sqrt{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R})$ mais $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ car:

$\int xf(x)dx$ est divergente, alors T est un opérateur non-borné.

1.1.1 Noyau. Image. Graphe d'un opérateur non borné

1.1.1.1 Définition

Soit $(T, D(T))$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H

1. On appelle **noyau** de T est le sous-espace $\ker(T)$tel que:

$$\ker(T) = N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0_H\}$$

2. **Image** de T est le sous-espace $\mathrm{Im}(T)$ de Y tel que:

$$\mathrm{Im}(T) = R(T) = T(D(T)) = \{Tx : x \in D(T)\}.$$

3. Le **graphe** de T est le sous-espace vectoriel noté par $Gr(T)$ tel que:

$$Gr(T) = \{(x, y), x \in D(T), y = T(x)\}$$

et si $T = S \Longrightarrow Gr(T) = Gr(S)$.

1.1.1.2 Définition(extension)

Si T_1, T_2 deux opérateurs non-bornés et si $D(T_1) \subset D(T_2)$ et pour $x \in D(T_1) : T_1(x) = T_2\,(x)$.Donc on dite que T_2 est une **extension** de T_1, on écrit $Gr(T_1) \in Gr(T_2\,)$, on écrit alors $T_1 \subset T_2$.

1.1.1.1 Remarque

On dit qu'un opérateur $(T; D(T))$ dans H est borné si $D(T) = H$ et $T : H \longrightarrow H$ est continue.

et $T \subset S \Longrightarrow Gr(T) \subset Gr(S)$

1.2 Les opérateurs non-bornés fermés.

1.2.1 Proposition

$(T; D(T))$ est un opérateur non borné de X dans Y.

On dite que T est **fermé** si pour toutes les suite (x_n) de $D(T)$ convergente vers x dans X et la suite des images $(Tx_n)_n$ convergente vers y dans Y, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x_n &\to x \text{ dans } X \text{ (fort)} \\ Tx_n &\to y \text{ dans } Y \text{ (fort)} \qquad \text{lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$

1.2.1 Exemple

Sur $X = \mathcal{C}^0([0,1])$ l'opérateur A_M défini sur $D(A_M) = \mathcal{C}^1([0,1])$ par $x \to dx/dt$ est fermé.

En effet: soit $\{x_n\}$ une suite A_M convergente i.e.$\{x_n\} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$, telle que

$$\begin{aligned} x_n &\to x \ \text{ dans } \ \mathcal{C}^0([0,1]) \\ \frac{dx}{dt} &\to y \ \text{ dans } \mathcal{C}^0([0,1]) \end{aligned}$$

De théorèmes classiques sur la convergence uniforme il résulte que x est dérivable sur$[0,1]$ et que $dx/dt = y$ sur $[0,1]$.

De plus la norme de graphe est équivalent à la norme sur $\mathcal{C}^1([0,1])$ définie par:

$$\|x\|_1 = \|x\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} + \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{\mathcal{C}^0([0,1])}.$$

1.2.1 Remarque

- Un opérateur T est dit **fermé** si son graphe est un sous-espace **fermé** de $H \oplus H$.
- Un opérateur T est dit **fermable** s'il admet une **extension fermée.**

1.2.1 Théorème(du graphe fermé)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire, alors:

$$T \text{ borné} \Longleftrightarrow T \text{ fermé}$$

1.2.2 Remarque

1. On dite que T est fermable si $\overline{Gr(T)}$ est un graphe d'un opérateur non- borné ferme, c'est-à-dire $\overline{Gr(T)} = Gr(\overline{T})$.

2. Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux.

1.2.2 Exemple(cas d'un opérateur non borne fermable)

l'opérateur T_m de domaine $D(T) = \mathcal{D}(\,]0,1[\,)$ est fermable, mais il n'est pas fermé.

La fermeture du graphe

$$\overline{G(T_m)} \subset \mathcal{C}^1_{00}([0,1]) \times \mathcal{C}^1_0([0,1])$$

(où l'on désigne par $\mathcal{C}^0_0([0,1]) \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{C}^0([0,1]), x(0) = x(1) = 0\}$

$$\mathcal{C}^1_{00}([0,1]) \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{C}^1([0,1]), x(0) = x(1) = x'(0) = x'(1) = 0\}.)$$

définit un opérateur A^0_{00}, restriction de A_{00} au domaine $D(A^0_{00}) = \mathcal{C}^1_{00}([0,1])$.

1.2.2 Proposition

Soit T un opérateur fermé de X dans Y de domaine $D(T)$. Alors, son noyau $N(T)$ est fermé

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H alors, T est fermé si et seulement si $D(T)$ muni de ce produit scalaire du graphe $\langle , \rangle_T$ est un espace de Hilbert. est

$$\forall x, y \in D(T), \langle x, y\rangle_T = \langle x, y\rangle_H + \langle Tx, Ty\rangle_H$$

et

$$\|x\|_T = \sqrt{\|x\|^2_H + \|Tx\|^2_H}$$

Preuve

1. On a $\langle x, y\rangle_T$ est bien un produit scalaire sur $D(T)$, il reste à vérifier que $D(T)$ est complet pour la norme $\| \|_T$. Soit $(x_n)_n \in D(T)$ de Cauchy, alors

$$\|x_n - x_m\|^2_T = \|x_n - x_m\|^2_H + \|Tx_n - Tx_m\|^2_H \longrightarrow 0$$

Par conséquent $(x_n)_n$ et $T(x_n)_n$ sont de Cauchy dans H elles sont convergentes respectivement vers x et y, puisque T et fermé on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$,d'autre part

$$\|x_n - x\|_T^2 = \|x_n - w\|_H^2 + \|Tx_n - Tw\|_H^2 \longrightarrow 0$$

2. $(D(T), \langle , \rangle_T)$ est espace de Hilbert vérifions que T est un opérateur fermé sur H, et soit $(x_n)_n \in D(T)$ tel que

$$x_n \longrightarrow x \text{ et } Tx_n \longrightarrow y$$

alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(D(T), \|\|_T)$ elle doit donc converger vers $w \in D(T)$:

$$\|x_n - w\|_T^2 = \|x_n - w\|_H^2 + \|Tx_n - Tw\|_H^2 \longrightarrow 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

D'où $x_n \to w$ et $Tx_n \to Tw$, et par unicité de la limite on trouve $x = w$ et $y = Tx = Tw$.D'où T est fermé.

1.2.3 Exemple

Soit D sous espace vectoriel non fermé dans un espace de Hilbert et I l'opérateur identité de D dans H: I est borné de D dans H lorsqu'on le muni D de la topologie induite par celle de H, I n'est pas fermé de D dans D car:

$\|x\|_I^2 = \|x\|_H^2 + \|Ix\|_H^2 = 2\|x\|_H^2 \Longrightarrow \|x\|_H^2 = \sqrt{2}\,\|x\|_H$

d'où:$\|x\|_I$ est équivalente a $\|x\|_H$ et I_D ne peut être complet pour $\|\|_I$.

1.2.3 Proposition

Si T est fermable, $\overline{T}$ est le plus petite extension fermée.

Preuve

Puisque $\overline{T}$ est une extension fermée de T, soit S extension fermée de T alors:

$T \subset S \Longrightarrow Gr(T) \subset Gr(S) \Longrightarrow \overline{Gr(T)} \subset \overline{Gr(S)} = Gr(\overline{S}) = Gr(S)$ d'où $\overline{T} \subset S$.

1.2.3 Remarques

1. Si $D(T)$ est fermé et T est continue, alors T est fermé.

2. La continuité de T ne implique pas nécessairement que T est fermé. Inversement, T fermé ne implique pas nécessairement que T est continue.

1.2.4 Proposition

Soient X et Y deux espaces de *Banach* et T un opérateur de X dans Y ; pour que l'opérateur T soit $fermable$ il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) de $D(T)$ qui converge vers 0 dans X et telle que $T(x_n)$ converge dans Y vers un vecteur y, on ait $y = 0$.

1.3 Opérateur adjoint et auto adjoint

1.3.1 Définition

Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné T^* comme suit .On pose

$$D(T^*) = \{x \in H : y \in D(T) : y \longrightarrow \langle x; Ty\rangle \text{ est continue}\}$$

il est claire que est un sous-espace vectoriel de H et vérifiant:

$$< Tx, y >=< x, T^*y > \forall x, \in D(T), \forall y \in D(T^*)$$

Grâce à la densité de $D(T)$ dans H, pour chaque $x \in D(T^*)$ la forme linéaire $y \mapsto \langle x, Ty\rangle$ s'étend a un unique élément de H qu'on écrit par le Théorème de Riesz comme$\langle T^*x, .\rangle_H$.

1.3.1 Remarque

Si $(D(T), T)$ est un opérateur non-borné dans un espace de Hilbert H , alors $D(T)$ n'est pas en générale fermé dans H, par contre il sera supposé dense dans H pour qu'on puisse définir l'**adjoint** de T.

1.3.1 Théorème

Soit $(D(T), T)$ est un opérateur non-borné dans un espace de Hilbert H de domaine $D(T)$

dense dans H alors :

- Alors T^* est fermé.
- T est fermable si et seulement si $D(T)$ est dense.
- Si T est fermable alors $\overline{T} = T^{**}$ et $\overline{(T)}^* = T^*$.
- $\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{\frac{1}{2}}$.

1.3.1 Propriété de l'adjoint

Soient T_1, T_2 des opérateurs sur H dont les domaines sont denses et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk$ on a $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$;

2. Si le domaine de $T_1 + T_2$ est dense, alors $T_1^* + T_2^* \subseteq (T_1 + T_2)^*$;

3. Si le domaine de $T_2 T_1$ est dense, alors $T_1^* T_2^* \subseteq (T_2 T_1)^*$;

4. Si $T_1 \subseteq T_2$, alors $T_1^* \supseteq T_2^*$;

5. Si T_1^{-1} existe, alors $(T_1^*)^{-1}$ existe et de plus on a $(T_1^*)^{-1} = (T_1^{-1})^*$;

6. $I^* = I$;

1.3.2 Proposition

Si A est un opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Hilbert, alors on a les relations suivantes entre son noyau

$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^{\perp}, \ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}, (\ker A^*)^{\perp} = \overline{(\operatorname{Im} A)}, (\ker A)^{\perp} = \overline{(\operatorname{Im} A^*)}$.

(Les trois premières égalités sont en fait vraies pour tout opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Banach).

1.3.2 Définition

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H de domaine dense dans H

1. T est dit **hermitien** ou bien **symétrique** si :

$$\forall x, y \in D(T), \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

   .Cela signifie que T^* est une extension de T.

2. T est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$, c'est-à-dire :$D(T) = D(T^*)$ et $Tx = T^*x$ pour tout $x \in D(T)$. Ou bien T est auto-adjoint si et seulement si T est symétrique et $D(T^*) \subset D(T)$.

1.3.2 Remarque

1. Dans le cas des opérateurs linéaires bornés ces deux notions sont identiques.

2. Dans le cas des opérateurs non-bornés tout opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.

3. Si T est un opérateur symétrique alors $T\ ^*$et T^{**} sont deux extensions fermées de T avec:
$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

4. Si T est un opérateur symétrique fermé alors:
$$T = T^{**} \subset T^*.$$

5. Si T est un opérateur auto-adjoint alors:
$$T = T^{**} = T^*.$$

6. Si T est auto-adjoint alors T est fermé, en réduit alors qu'un opérateur non-borné symétrique fermé est auto-adjoint si seulement si son adjoint est symétrique.

1.3.3 Proposition

Si T est symétrique et fermé, alors T auto-adjoint.

Si T^* est symétrique fermé alors $\overline{T} = T^{**}$ est une extension de T^*.

1.3.3 Définition

Soit $(D(T); T)$ un opérateur non-borné sur H, symétrique de domaine $D(T)$ dense dans H. T est dit **essentiellement auto-adjoint** si $\overline{T}$ est auto-adjoint ou bien:
$$(\overline{T}^*) = \overline{T}$$

1.3.3 Remarque

1. Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.

2. Si T est essentiellement auto-adjoint alors : T^* est la petite extension fermée de T.

3. Si T est essentiellement auto-adjoint alors : T^* est auto-adjoint.

1.3.1 Lemme

Si T est essentiellement auto-adjoint, T a une unique extension auto-adjoint $\overline{T}$

1.3.4 Proposition

Soit T et S deux opérateurs non-bornés auto-adjoints Si $T \subset S$ alors : $T = S$.

Preuve

On a :

$T \subset S \Longrightarrow S^* \subset T^* \Longrightarrow S \subset T$, d'ou $S = T$.

1.3.2 Théorème

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné symétrique de domaine $D(T)$ dense dans H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est auto-adjoint.

2. T est fermé et $\ker(T^* + i) = \ker(T^* - i) = \{0\}$.

3. $\operatorname{Im}(T + i) = \operatorname{Im}(T - i) = H$.

1.3.3 Théorème

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné symétrique sur un espace de Hilbert H et de domaine $D(T)$ dense dans H, alors on a l'équivalence de trois propriétés suivantes :

1. T est essentiellement autoadjoint.

2. $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

3. $\operatorname{Im}(T \pm i)$ est dense dans H.

Preuve

On applique le théorème précédent a $\overline{T}$, pour cela on obtient les équivalences suivantes: Sachant que $\overline{T}$ est aussi symétrique

1. $\overline{T}$ est auto-adjoint.

2. $\overline{T}$ est essentiellement auto-adjoint.

3. $\ker(\overline{T}^* \pm i) = \ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

4. $\mathrm{Im}(\overline{T} \pm i) = H$.

ainsi pour montrer ce résultat il suffit d'établir que :

$$\mathrm{Im}(\overline{T} \pm i) = \overline{\mathrm{Im}(T \pm i)}$$

En effet, pour tout opérateur fermable S, on a

$$\mathrm{Im}(\overline{S}) = \overline{\mathrm{Im}(S)}$$

C'est-à-dire on a d'abord

$$\mathrm{Im}(\overline{T} \pm i) \subset \overline{\mathrm{Im}(T \pm i)}$$

Réciproquement, comme T est symétrique $\overline{T}$ est aussi symétrique.

Et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}$ l'image de $(\overline{T} - \lambda I)$ est fermé dans H.

Car en notant que $\lambda = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$ et on a:

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \|(T - \alpha I)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2$$

finalement on a

$$\mathrm{Im}(\overline{T} - \lambda I) = \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)}$$

1.4 Spectre des opérateurs non-bornés.

1.4.1 Définition

Soit T un opérateur non-borné fermé. On dite que λ est une **valeur régulière** de T si: $T - \lambda I : D(T) \longrightarrow H$ est une application linéaire **bijective** de $D(T)$ sur H, avec un inverse **continue**; Autrement dit

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} \text{ existe et continue}\}$$

On note $\rho(T)$ l'ensemble résolvant de T. Pour : $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ est appelé l'**opérateur résolvant** ou résolvante de T en λ.

Le spectre de T est l'ensemble $\sigma(T)$ tel que:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \diagup \rho(T).$$

1.4.1 Proposition

1. Si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur réguliers, donc on a toujours $\sigma(T) = \mathbb{C}$

$R_\lambda(T)$ est borné de $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ dans $D(T)$ c'est- à-dire

$$\forall C \geq 0 \text{ tq: } \|R_\lambda(T)u\| \leq C \|u\|, \ \forall u \in \mathrm{Im}(T - \lambda I)$$

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur H (lequel est un $\mathbb{C}$-Hilbert).

On désigne par $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant $\rho(T)$ et $\sigma(T)$ est appelé le **spectre** de l'opérateur T on a :

- $\sigma(T) = \mathbb{C} \diagup \rho(T)$
- $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$
- $\sigma(T) \cap \rho(T) = \varnothing$

$\sigma(T)$ peut être décomposé en trois ensembles deux à deux disjoints notés :
$\sigma_p(T)$,$\sigma_c(T)$,$\sigma_r(T)$. Ils sont définis comme suivants:

- $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I)$ n'est pas inverse(n'est pas injective) de $D(T)$ dans $\mathrm{Im}(T - \lambda I)\}$.

C'est-à-dire il existe $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda X$, alors on dite que λ est un valeur propre de T et x est un vecteur propre associé à λ.

L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur T est appelé le spectre ponctuel de T.

Notation: σ_p est appelé **spectre ponctuel** de T.

- $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I)$ inversible de $D(T)$ dans $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ et $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ est dense dans $H; R_\lambda(T)$ n'est pas borné $\}$.

Notation: σ_c est appelé le **spectre continu** de T.

- $\sigma_r = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I)$ inversible de $D(T)$ dans $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ et $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans $H\}$.

C'est-à-dire tout $\lambda \in \sigma(T)$ tel que λ n'est pas un valeur propre et $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ n'est pas dense dans H.

Notation: σ_r est appelé le **spectre résiduel** de T.

1.4.1 Exemple

$H = L^2(\mathbb{R})$ et A l'opérateur de multiplication par la fonction $\varphi(x) = x$ tel que:

$$A\varphi(x) = x\varphi(x)$$

de domaine

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}), x\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Alors $D(A)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et A est autoadjoint. Donc:

- $\sigma_p(A) = \varnothing$
- $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$
- $\sigma_r(A) = \varnothing$
- $\rho(A) = \mathbb{C} \diagup \mathbb{R}$

1.4.1 Théorème

soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert séparable H. Alors le spectre de A est réel et le spectre résiduel du A est vide.

1.4.1 Corollaire

Si A est un opérateur fermé symétrique et $\sigma(A)$ ne contient pas $\mathbb{R}$, alors A est auto-adjoint.

1.4.2 Définition(Rayon spectral)

On appelle rayon spectral de A le nombre

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

C'est-à-dire le rayon de la plus petite boule fermée de centre 0 contenant toutes les valeurs spectrales de A

1.4.1 opérateurs compacts

Soient E et F deus espaces normés, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.on dit que T est **compact** si et seulement si l'image de toute suite bornée par T possède une sous suite convergent.

On note par $K(H)$ l'espace des opérateurs compact sur H tout opérateur de rang fini est compact, c'est-à-dire l'espace $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie.

1.4.1.1 Proposition

la somme des opérateurs compacts est compact.

Soit H un espace de Hilbert. Si un opérateur T de $\mathcal{L}(H)$ est compact, il existe une suite d'opérateurs bornés de rang fini, de limite T dans $\mathcal{L}(H)$.

1.4.2 Spectre d'un opérateur compact

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact.

1. Toute valeur spectrale non nulle de T est valeur propre de T et son sous-espace propre associé est de dimension finie.

2. Le spectre de T est dénombrable. S'il est infini, on peut ordonner ses éléments non

nuls en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N},\ |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n &= 0. \end{aligned}$$

1.4.2.1 Proposition

Le spectre de l'adjoint d'un opérateur T est donné par :

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

1.4.2.1 Remarque

On remarque que pour un opérateur auto-adjoint, les valeurs propres sont réelles.

1.4.3 Spectre d'un opérateur auto-adjoint compact

1. Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de T. Alors :

2. Λ est une partie infinie, dénombrable et bornée de $\mathbb{R}$ dont le seul point d'accumulation est 0,

3. les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie,

4. les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

1.4.3.1 Théorème

Si H est un espace de Hilbert séparable et T un opérateur auto-adjoint compact sur H, alors H admet une base hilbértienne formée de vecteurs propres de T.

1.4.3.2 Théorème

Soit A un opérateur hermitien compact sur un espace de Hilbert H de dimension infinie.

1. Le spectre de A est réel. Il est de la forme $\sigma(A) = (\mu_n) \cup \{0\}$ ou (μ_n) est ou bien une suite finie de valeurs propres réelles, ou bien une suite dénombrable de valeurs propres réelles convergeant vers 0.

2. Pour chaque valeur propre λ non nulle, l'espace propre E_λ est de dimension finie.

3. Le réel 0 est éventuellement valeur propre (selon que A est injectif ou non) et l'espace propre associé(le noyau de A) peut alors être de dimension finie ou infinie. Si le réel 0 n'est pas valeur propre (i.e n'est pas dans le spectre discret), il est dans la spectre continu.

4. Les espaces propres E_λ sont orthogonaux deux à deux et H est la somme direct hilbértienne des E_λ
$$H = \oplus_{\lambda \in \sigma(H)} E_\lambda.$$
Autrement dit, les espaces propres E_λ engendrent un sous-espace vectoriel dont l'adhérence est H.

1.4.4 Spectre essentiel

1.4.4.1 Définition(Fredholm)

Un opérateur linéaire L est dit de **Fredholm** si

1. son noyau est de dimension finie,

2. son image est fermée et de codimension finie.

Son indice est alors défini par

$$indL = \dim\ker L - co\dim\operatorname{Im} L.$$

Rappelons au passage que si L est fermé à domaine dense, $\overline{\operatorname{Im} L} = \ker L^*$. Donc pour un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense,$co\dim\operatorname{Im} L = \dim\ker L^*$.

1.4.4.1 Proposition

Soit L un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense dans un espace de Hilbert H. Alors son adjoint L^* est aussi un opérateur de Fredholm, on a

$$H = \ker L \oplus \operatorname{Im} L^* = \ker L^* \oplus \operatorname{Im} L,$$

et $indL = -indL^*$. De plus, L est bijectif si et seulement si L^* est bijectif.

1.4.4.2 Définition(spectre essentiel)

Le **spectre essentiel** d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda - A)\ n'est\ pas\ un\ opérateur\ de\ Fredholm\ d'indice\ 0\}.$$

On voit immédiatement avec cette définition que la réunion du spectre ponctuel et du spectre essentiel couvre tout le spectre. En effet, l'ensemble des valeurs propres et le spectre essentiel sont évidemment inclus dans le spectre. Inversement, si n'appartient ni à l'un ni à l'autre,

$$0 = \dim\ker(\lambda - A) = co\dim\operatorname{Im}(\lambda - A),$$

et donc $(\lambda - A)$ est une bijection de $D(A)$ sur X, ce qui signifie que appartient à l'ensemble résolvant de A. Donc

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_{ess}(A).$$

Cependant il ne s'agit pas a priori d'une réunion disjointe. En effet, l'intersection $\sigma_{ess}(A) \cap \sigma_p(A)$ est composée des valeurs propres λ pour lesquelles

1. Soit $\ker(\lambda - A)$ n'est pas de dimension finie,

2. Soit $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ n'est pas fermé,

3. Soit $\dim\ker L \neq co \dim \mathrm{Im}\, L$.

On peut de plus décomposer

$$\sigma_{ess}(A) \backslash \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; Ker(\lambda - A) = \{0\}\ et\ \mathrm{Im}(\lambda - A) \subsetneq X\}.$$

1.4.4.2 Proposition

Soit A auto-adjoint, et $\lambda \in \sigma \setminus \sigma_{ess}$. λ est alors isolé dans le spectre, et c'est une valeur propre de multiplicité finie.

1.4.4.1 Remarque

1. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma_{ess}(A) \backslash \sigma_p(A); \overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} = X\}$,

2. $\sigma_r(A) = (\sigma_{ess}(A) \backslash \sigma_p(A))$

1.4.4.3 Définition

Un opérateur linéaire K sur un espace de Banach X est dit compact si l'image par K de tout ensemble borné X est relativement compact. Dans ce cas, on note $K \in \mathcal{K}(X)$.

1.4.4.1 Lemme 3

Si A est un opérateur de Fredholm, si K est un opérateur compact, alors $A + K$ est un opérateur de Fredholm de même indice.

1.4.4.2 Théorème

Si A est un opérateur linéaire fermé et à domaine dense dans X, alors pour tout $K \in \mathcal{K}(X)$, $\sigma_{ess}(A + K) = \sigma_{ess}(A)$. De plus, on a

$$\sigma_{ess}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A+K).$$

1.5 Les opérateurs différentiels comme opérateurs non-bornés sur $L^2(\mathbb{R})$

On va s'intéresser aux **opérateurs différentiels** comme à des opérateurs non bornés dans un cadre fonctionnel essentiellement hilbertien (espaces de Sobolev).. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_p \in C_p^\infty(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_p(x) \in GL_n(\mathbb{C})$,l'opérateur différentiel

$$A = A(\partial_x) = \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\partial_x^j,$$

$$\|Au\|_{L^2} \leq \sqrt{P+1} \max \|a_j\|_{L^2} \|u\|_{H^p}$$

où

$$\|u\|_{H^p}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{p} \left\|\partial_x^j u\right\|_{L^2}^2 .$$

1.5.1 Lemme

Si une suite $(u_m)_m \in \mathbb{N}$ d'éléments de $H^p(\mathbb{R})^n$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R})^n$ et si Au_m converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})^n$, alors $u \in H^p(\mathbb{R})^n$ et $Au = f$ (presque partout).

Le précédent lemme prouver que l'opérateur différentiel A est fermé sur $L^2(\mathbb{R})^n$, donc son graphe $Gr(A)$ est fermée dans $L^2(\mathbb{R})^n \times L^2(\mathbb{R})^n$.

En l'opérateur différentiel $A = \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\partial_x^j$ l'utilisation de l'intégration par parties sur $\langle Au, v\rangle$pour $u, v \in H^p(\mathbb{R})^n$ rendements $A^*v = \sum\limits_{j=0}^{p}(-1)^j \partial_x^j(\overline{a_j(x)}v(x))$, pour $v \in D(A^*) = H^p(\mathbb{R})^n$.

Cette expression est appelé formel de l'adjoint de A ("formel" parce que nous ne avons pas de spécifier son domaine).

1.5.1 Transformation de Fourier

L'analyse de **Fourier** fait l'objet de nombreux ouvrages. En voici quelques éléments utiles pour la suite.

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est par définition un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (simplement noté $L^2(\mathbb{R})$ dans la suite) tel que, pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u(\xi) &= \int u(x)e^{-ix\xi}dx,\ \xi \in \mathbb{R},\\ \mathcal{F}^{-1}u(x) &= \int u(\xi)e^{ix\xi}dx,\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

À un facteur près c'est une isométrie, car en vertu du théorème de Plancherel on a pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{L^2}.$$

1. La transformation de Fourier laisse invariante la classe de Schwartz

$S(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}); quels\ que\ soient\ j, p \in \mathbb{C}; sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^p\,|\partial^j u(x)| < +\infty\}$
ensemble contenant notamment les gaussiennes

$$u : x \mapsto e^{-a(x-m)^2}$$

pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $m \in \mathbb{R}$, de transformées de Fourier

$$\hat{u} : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{im\xi}e^{-\xi^2/(4a)}.$$

En outre, pour tout $u \in S(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(\partial_x^j u)(\xi) = (i\xi)^j\mathcal{F}u(\xi), \xi \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Si u est de classe C^∞ à support compact, sa transformée de Fourier $\widehat{u}$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. En effet, si $K = supp(u)$,

$$\hat{u}(\xi) = \int_K u(x)e^{-i\xi x}dx$$

1.5.1.1 Théorème (Paley-wiener)

Si U est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe un compact $R > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $C_j > 0$ avec

$$|u(\xi)| \leq \frac{C_j}{(1+|\xi|)^j} e^{R\,\mathrm{Im}\,\xi}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, alors $U \mid_{\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction u de C^∞ à support compact inclus dans le segment $[-R, R]$.

Chapitre 2

Spectre essentiel des opérateurs différentiels

Revenons maintenant à notre opérateur différentiel A. On suppose désormais que les coefficients a_j admettent des limites à l'infini. Il va s'avérer que le spectre essentiel de A est «essentiellement» déterminé par le spectre des opérateurs à coefficients constants $a_j^{\pm}$ obtenus en passant à la limite dans $a_j(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Avant de préciser ce résultat, voyons

justement le cas des opérateurs à coefficients constants.

2.1 Spectre des opérateurs différentiels à coefficients constants

2.1.1 Théorème

Soit $A = A(\partial_x) = \sum_{j=0}^{p} a_j \partial_x^j$ un **opérateur différentiel à coefficients** constants matriciels $a_j \in M_n(\mathbb{C})$. Alors le spectre de A sur $L^2(\mathbb{R})$ est constitué exclusivement de spectre essentiel, et plus précisément,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists \xi \in \mathbb{R}, \det(\lambda - A(i\xi)) = 0\}, où A(\mu) = \sum_{j=0}^{p} \mu^j a_j$$

est le symbole de A (pour tout $\mu \in \mathbb{C}, A(\mu) \in M_n(\mathbb{C})$).

Démonstration

La recherche du spectre de A revient à l'étude de l'équation

$$(\lambda - A)u = f$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})^n$ donné. L'outil principal pour cela est la transformation de Fourier. En effet, pour f et u dans $S(\mathbb{R})^n$, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$(\lambda - A(i\xi))\hat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R}.$$

Supposons que la matrice $(\lambda - A(i\xi))$ soit inversible quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$. On en déduit

$$\hat{u}(\xi) = (\lambda - A(i\xi))^{-1}\widehat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R}.$$

Or si l'on note $g(\xi) = (\lambda - A(i\xi))$, la fonction $\xi \mapsto |\xi|^p \; g(\xi)$ est bornée : en effet, g est continue comme composée de $\xi \mapsto \lambda - A(i\xi)$ et de $M \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto M^{-1}$, donc bornée sur tout intervalle fermé $[-R, R]$, et $lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^p \, g(\xi) = -(i\xi/\,|\xi|)^{-p}a_p^{-1}$. Donc g est de carré intégrable, et par transformation de Fourier inverse on obtient

$$u = \mathcal{F}^{-1}(g) * f.$$

Ce calcul s'étend à toutes les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})^n$, et la formule $\widehat{u} = g\widehat{f}$ montre de plus que $u \in H^p\,(\mathbb{R})^n$puisque $\xi \mapsto |\xi|^p \, g(\xi)$ est bornée.

Autrement dit, si $(\lambda - A(i\xi))$ est inversible quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, l'équation $(\lambda - A)u = f$ pour $f \in L(\mathbb{R})^n$ admet une solution unique $u \in H^p(\mathbb{R})^n$. Ceci montre que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists \xi \in \mathbb{R}, \det(\lambda - A(i\xi)) = 0\}$$

Inversement, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ sont tels que $\det(\lambda - A(i\xi)) = 0$ alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Ceci n'est pas tout à fait immédiat. Supposons en effet $r \in \ker(\lambda - A(i\xi)) \setminus \{0\}$. La fonction $U_r : x \mapsto e^{i\xi x} r$ annule clairement $(\lambda - A)$, mais elle n'est pas dans le domaine de A (elle est de classe C^∞, mais même pas de carré intégrable !). C'est pourquoi on ne peut pas dire que λ est une valeur propre de A. Pour montrer qu'elle appartient à $\sigma_{ess}(A)$ on va faire appel au résultat général suivant :

2.1.1 Lemme

Si A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Hilbert H s'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ orthonormée d'éléments de $D(A)$ telle que $(\lambda - A)u_k$ tende vers 0, alors $\lambda \in \sigma_{ess(A)}$.

Démonstration du lemme 2.1.1

D'Après le **théorème 1.4.4.2**, il suffit de montrer que $\lambda \in \sigma\ (A + K)$ quel que soit l'opérateur compact K. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un opérateur compact K tel que $\lambda \in \rho(A + K)$. Cela signifie que $(A + K - \lambda)^{-1}$ est un opérateur borné, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\| \leq \|(A + K - \lambda)u\|$$

pour tout $u \in D(A)$. Puisque (u_k) est bornée par hypothèse, la suite (Ku_k) admet une sous suite convergente $(Ku_{h'})$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|u_{k'} - u_{m'}\| &\leq C\,\|(A + K - \lambda)(u_{k'} - u_{m'})\| \\ &\leq C\,\|K(u_{k'} - u_{m'})\| + C\,\|(\lambda - A)u_{k'}\| + C\,\|(\lambda - A)u_{m'}\|\,, \end{aligned}$$

où les 3 termes tendent vers 0 lorsque $k^{'}, m^{'} \to +\infty$. Ainsi la suite $(u_{k'})$ est de Cauchy et donc converge. Or puisque (u_k) est orthonormée, $\|u_{k'} - u_{m'}\|^2 = \|u_{k'}\|^2 + \|u_{m'}\|^2 = 2$, d'où la contradiction.

2.2 Fonction de Green des opérateurs différentiels à coefficients constants

Notons δ la masse de Dirac en 0, c'est-à-dire la mesure de Radon définie par

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx &= 1,\ \delta(x) = 0 \text{ pour } x \neq 0, \end{aligned}$$

pour toute fonction continue φ. Attention, dans ce paragraphe, la notation $\langle ., . \rangle$ désigne un crochet de dualité et non un produit scalaire. La transformée de Fourier de δ au sens des distributions est définie par

$$\left\langle \widehat{\delta}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \int \varphi(x) dx, \varphi(x) \in \pounds(\mathbb{R}),$$

et s'identifie donc à la fonction constante égale à 1. L'opérateur A étant à coefficients constants, le théorème de Malgrange–Ehrenpreiss, affirme que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ il existe au moins une distribution G_λ solution de $(\lambda - A)G_\lambda = \delta$. Mais si de plus n'est pas dans le spectre de A, alors G_λ s'identifie avec la fonction de carré intégrable obtenue par transformation de Fourier inverse de la fonction $g_\lambda : \xi \mapsto (\lambda - A(i\xi))^{-1}$: on a en effet par définition

$$(\lambda - A(i\xi))g_\lambda(\xi) = 1, \ \xi \in \mathbb{R},$$

d'où précisément (en utilisant la formule (3) reliant transformation de Fourier et dérivation)

$$(\lambda - A) \, \mathcal{F}^{-1}(g_\lambda) = \delta.$$

La fonction $G_\lambda = \mathcal{F}^{-1}(g_\lambda)$ est appelée la **fonction de Green** de l'opérateur $(\lambda - A)$. Cette fonction a une « singularité » en 0 dépendant de l'ordre de l'opérateur A. Plus précisément, puisque la fonction $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{p/2} g_\lambda(\xi)$ est bornée, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'intégrabilité de $\xi \mapsto 1/(1 + |\xi|^2)$ montrent que G_λ appartient à $H^{p-1}(\mathbb{R})$, et s'identifie par conséquent à une fonction de classe C^{p-2} lorsque $p \geq 2$. Dans le cas d'un opérateur A d'ordre 1, G_λ a une discontinuité en 0, à laquelle le reste de ce paragraphe est consacré.

Le point de départ pour calculer G_λ est de reformuler l'équation

$$(\lambda - A)u = f$$

en système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dU}{dx} = \mathbb{A}(\lambda)U + F(x)$$

où

$$F(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -(a_p)^{-1}f(x) \end{pmatrix}, \mathbb{A}(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 \; I_n \; 0 \; \dots \; 0 \\ \vdots \;\; \ddots \ddots \ddots \vdots \\ \vdots \quad \ddots \ddots 0 \\ 0 \; \cdots \; \cdots 0 \; I_n \\ \widetilde{a}_0(\lambda) \; \cdots \; \cdots \widetilde{a}_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{a}_j = -(a_p)^{-1}a_j \; \forall j \in \{1,...,p-1\}, \; \widetilde{a}_0(\lambda) = -(a_p)^{-1}(a_0 - \lambda).$$

On est ainsi en quelque sorte ramené au cas $p = 1$, car la fonction de Green $\mathbb{G}_\lambda$ de l'opérateur du premier ordre $\partial_x - \mathbb{A}(\lambda)$ permet de calculer la fonction de Green de $(\lambda - A)$.

2.2.1 Proposition

Soient

$$A = A(\partial_x) = \sum_{j=0}^{p} a_j \partial_x^j$$

un opérateur différentiel à coefficients constants et $\lambda \notin \sigma(A)$. Alors la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ définie comme ci-dessus est hyperbolique, et la fonction de Green G_λ de $(\lambda - A)$ est donnée par

$$G_\lambda = P \mathbb{G}_\lambda J,$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{où} & j & : & f \in \mathbb{C}^n \mapsto (0,...,0,-(a_p)^{-1}f)^t \in \mathbb{C}^{np}, P : U \in \mathbb{C}^{np} \mapsto U_1 \in \mathbb{C}^n, \\ \text{et} & \mathbb{G}(x) & = & 1_{\{x>0\}} e^{x\mathbb{A}(\lambda)} \Pi_s(\lambda) - 1_{\{x<0\}} e^{x\mathbb{A}(\lambda)} \Pi_u(\lambda), \end{array}$$

les opérateurs $\Pi_s(\lambda)$ et $\Pi_u(\lambda)$ désignant respectivement les projecteurs sur le sous-espace stable et le sous-espace instable de $\mathbb{A}(\lambda)$. Comme $\mathbb{G}_\lambda$, la fonction de Green G_λ dépend analytiquement de λ, et elle tend exponentiellement vite vers zéro, tout comme ses $(p-1)$ premières dérivées, lorsque x tend vers $\pm\infty$.

2.2.1 Exemple

Prenons simplement l'opérateur $A = \partial_x^2$. Le spectre de A est $\mathbb{R}^-$, et la fonction de Gre en de $(\lambda - A)$ pour $\lambda \notin \mathbb{R}^-$ se calcule directement par transformation de Fourier inverse :

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x|},$$

où$\sqrt{\lambda}$ désigne la racine carrée de λ de partie réelle strictement positive. En écrivant $(\lambda - A)u = f$ sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= v, \\ \frac{dv}{dx} &= \lambda u - f,\end{aligned}$$

les projecteurs spectraux sont donnés par

$$\Pi_s(\lambda).\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(u - \frac{v}{\sqrt{\lambda}})\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \Pi_u(\lambda)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(u + \frac{v}{\sqrt{\lambda}})\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbb{G}_\lambda(x).\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}1_{x>0}e^{-x\sqrt{\lambda}}(u - \frac{v}{\sqrt{\lambda}})\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}1_{x<0}e^{x\sqrt{\lambda}}(u + \frac{v}{\sqrt{\lambda}})\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

et en particulier

$$p\mathbb{G}_\lambda(x).\begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-|x|\sqrt{\lambda}}f.$$

Noter que le cas limite $\lambda \to 0$ donne $G_0(x) = -|x| \diagup 2$, ce qui est connu comme la fonction de Green de ∂_x^2 (le Laplacien en dimension 1 ! en effet, $\partial_x G_0 = -(1\diagup 2)\mathrm{sign}$ et $\partial_{xx}G_0 = \delta$ au sens des distributions). Sur cet exemple, on observe bien la décroissance exponentielle de la fonction de Green G tant que est en dehors du spectre de l'opérateur, et l'on constate que cette décroissance est perdue dès que λ entre dans le spectre (en 0).

On a donc réglé le cas des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}$:

1. leur spectre est une réunion de courbes algébriques, définies par $\lambda = \omega_k(i\xi)$ si les ω_k désignent les valeurs propres de $A(\mu)$ pour $\mu \in \mathbb{C}$;
2. Il s'agit de spectre essentiel ;
3. En dehors du spectre, leur résolvante s'exprime au moyen d'une fonction de Green exponentiellement décroissante l'infini.

2.3 Opérateurs à coefficients variables

On revient maintenant à un opérateur

$$A = A(\partial_x) = \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\partial_x^j$$

dont les coefficients a_j admettent des limites finies en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_j(x) = a_j^{\pm}.$$

On note

$$A^{\pm} = \sum_{j=0}^{p} a_j^{\pm}\partial_x^j$$

les opérateurs à coefficients constants associés, et $A^{\pm}$ leurs symboles.

2.3.1 Proposition

Si $\lambda \in \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$ alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

2.3.1 Théorème

On suppose les coefficients de A tels que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \partial_x^k a_j = \partial_x^k a_j^{\pm} \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty} \partial_x^k a_j = 0, 1 \leq k \leq j \leq p.$$

si $\lambda \notin \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$ alors $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm.

On verra plus tard comment calculer l'indice.

2.3.1 Lemme

Si (u_n) est une suite bornée dans H^p telle que Au_n converge vers 0 dans L^2 alors (u_n) admet une sous-suite convergeant dans H^p vers $u \in KerA$.

2.3.2 Théorème 6

Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, si n'appartient au spectre d'aucun des opérateurs à coefficients gelés

$$A^y := \sum_{j=0}^{p} a_j(y)\partial_x^j, y \in [-\infty, +\infty],$$

alors $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

2.3.1 Remarque

L'hypothèse que l'on fait ici sur les opérateurs à coefficients gelés est suffisante mais pas nécessaire : en fait il suffit qu'il existe des fonctions $\widetilde{a}_j$ ayant pour limites $a^{\pm}_j$ (et de dérivées tendant vers 0) telles que n'appartienne au spectre d'aucun opérateur $\widetilde{A}^y = \sum_{j=0}^{p} \widetilde{a}_j(y)\partial_x^j$. Ceci est cohérent avec la remarque suivante.

2.3.2 Remarque

L'indice ne dépend que des opérateurs limites $A^{\pm}$. En effet, si les coefficients de deux opérateurs A_0 et A_1 ont les mêmes limites en $\pm\infty$, ils ont aussi mêmes limites que $\theta A_1 - (1-\theta)A_0$ quel que soit $\theta \in [0,1]$ et donc pour tout $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$, l'opérateur $(\lambda - \theta A_1 - (1-\theta)A_0)$ est de Fredholm. Comme il dépend continûment de θ, son indice est indépendant de θ.

Démonstration

Il s'agit de calculer la différence entre la dimension du noyau de $(\lambda - A)$ et celle du noyau de $(\lambda - A)^*$. On va ici utiliser l'interprétation de l'équation $(\lambda - A)u = 0$ sous forme de système du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \mathbb{A}(x;\lambda)U, \\ \textit{où} \;\; \mathbb{A}(x;\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & I \\ \widetilde{a}_0(x;\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{p-1}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et $\widetilde{a}_j(x) = -(a_p(x))^{-1}a_j^{\pm} \;\; \forall j \in \{1,...,p-1\}, \widetilde{a}_0(x,\lambda) = -(a_p(x))^{-1}(a_0(x)-\lambda)$.

L'hypothèse signifie que toutes les matrices $\mathbb{A}(x;\lambda)$ sont hyperboliques, c'est-à-dire n'ont pas de valeur propre imaginaire pure. Donc en particulier, les sous-espaces stables et instables de ces matrices sont de dimension constante. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve le

2.3.2 Lemme

Si $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$, l'indice de $(\lambda - A)$ est égal à la différence entre la dimension du sous-espace instable de $\mathbb{A}^-(\lambda)$ et celle du sous-espace instable de $\mathbb{A}^+(\lambda)$ (ou encore à la différence des dimensions des sous-espaces stables), les matrices $\mathbb{A}^{\pm}(\lambda)$ étant simplement les limites de $\mathbb{A}(x;\lambda)$ quand $x \to \pm\infty$.

2.3.2 Lemme

Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, l'indice de $(\lambda - A)$ est égal à l'indice de l'opérateur différentiel d'ordre 1

$$\partial_x - \mathbb{A}(.;\lambda).$$

2.3.2 Lemme

Si $a \in C^\infty(\mathbb{R}; M_N(\mathbb{C}))$ a des limites $a^\pm$ en $\pm\infty$ qui sont hyperboliques, et si $\partial_x a$ tend vers zéro en $\pm\infty$, alors l'opérateur $\partial_x - a$ (qui est de Fredholm d'après le théorème 3.1) est d'indice égal à

$$\dim E_n(a^-) - \dim E_n(a^+) = \dim E_s(a^+) - \dim E_s(a^-).$$

2.3.3 Théorème

Si $\lambda \notin \sigma(A)$, il existe une fonction G_λ satisfaisant

$$\|G_\lambda(x,y)\| \leq Ce^{-a|x-y|}x, y \in \mathbb{R},$$

avec $C, \alpha > 0$ localement uniformes en λ, telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$((\lambda - A)^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x;y)f(y)dy$$

Cette fonction est donnée par

$$G_\lambda = P\mathbb{G}_\lambda J;$$

où $J : f \in \mathbb{C}^n \to (0, ..., 0, -(a_p)^{-1}f)^t \in \mathbb{C}^{np}$,$P : U \in \mathbb{C}^{np} \mapsto U1 \in \mathbb{C}^n$; et $\mathbb{G}_\lambda$ est la fonction de Green de $\partial_x - \mathbb{A}(.;\lambda)$. De plus, G_λ dépend de façon analytique dans $\mathbb{C}\diagdown\sigma(A)$, et les constantes C et a dans l'estimation sont localement uniformes en λ.

Chapitre 3

Opérateur différentiel du second ordre

Nous considérons un opérateur différentiel ordinaire A de **second ordre** sur $L^2([\alpha, \beta]), (-\infty < \alpha < \beta < \infty)$, de la forme

$$Au = au^{''} + bu^{'} + cu$$

Où a, b, et c sont fonction continues sur $[\alpha, \beta]$, nous supposons que $\alpha(x) > 0$ pour tous les $x \in [\alpha, \beta]$, et A un opérateur d'ordre deux à chaque point.

Pour plus de détermination, nous considérons les conditions aux limites $Bu = 0$ est système homogène d'équations linéaires qui implique les valeurs de u et $u^{'}$ à l'extrémité $x = \alpha, \beta$ et dérivés plus élevés de u peut être exprimée en termes de u et $u^{'}$, par utilisation de l'équation différentielle.

Certains types courants de conditions aux limites sont:

$u(\alpha) = u(\beta) = 0$ *conditions de Dirichlet*

$u^{'}(\alpha) = u^{'}(\beta) = 0$ *conditions de Neumann*

$u(\alpha) = u(\beta)\,,\ u^{'}(\alpha) = u^{'}(\beta)$ *conditions de peridic*

$\delta u(\alpha) + \mu u^{'}(\alpha) = 0,\ \lambda u(\beta) + \theta u^{'}(\beta) = 0$ *conditions mixtes*

Et aussi, nous pouvons imposer deux conditions à l'une des extrémités

$u(\alpha) = 0,\ u^{'}(\alpha) = 0$ *les conditions initiales*

$u(\beta) = 0,\ u^{'}(\beta) = 0$ *conditions finales*

Supposons que A est donné par:

$$Au = au^{''} + bu^{'} + cu$$

où $a, b, c \in C^2([\alpha, \beta])$ puis; on utilise l'intégration par partie

$\langle v, Au\rangle = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{v}\left((x)\right)\left(au'' + bu' + cu\right)(x)\,dx$

$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\overline{v}(au'' + bu') + c\overline{v}u\right](x)\,dx$

$= \left[a\overline{v}u' + b\overline{v}u\right]_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[(a\overline{v})'u' - (b\overline{v})'u + c\overline{v}u\right](x)\,dx$

$= \left[a\overline{v}u' + b\overline{v}u - (a\overline{v})'u\right]_{\alpha}^{\beta} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[(a\overline{v})''u - (b\overline{v})'u + c\overline{v}u\right](x)\,dx$

$= \left[a(\overline{v}u' - \overline{v}'u) + (b - a')\overline{v}u\right]_{\alpha}^{\beta} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\overline{\left((\overline{a}v)'' - (\overline{b}v)' + \overline{c}v\right)}u\right](x)\,dx$

$$A^*v = (\overline{a}v)'' - (\overline{b}v)' + \overline{c}v$$

Cette expression est formel de l'adjoint de A.

Donc, nous avons

$$\langle v, Au\rangle - \langle A^*v, u\rangle = \left[a(\overline{v}u' - \overline{v}'u) + (b - a')\overline{v}u\right]_{\alpha}^{\beta}$$

cette égalité est appelée "formule de Green".

Si nous notons les termes de bord dans "formule de Green"

$$S(\alpha, \beta) = \left[a(\overline{v}u' - \overline{v}'u) + (b - a')\overline{v}u\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Conditions aux limites données $Bu = 0$, pour A, nous définissons des conditions aux limites de l'adjoint ($B^*v = 0$), pour A^* par l'exigence que les conditions aux limites $S(\alpha, \beta)$ disparaissent. Ainsi, pour $v \in C^2([\alpha, \beta])$ on dit que ($B^*v = 0$) si et seulement si $S(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $u \in C^2([\alpha, \beta])$, tels que $Bu = 0$.

Nous disons que le (CL) est auto-adjoint ($B = B^*$) si $S(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $u \in C^2([\alpha, \beta])$, de telle sorte que $Bu = 0$ si et seulement si $Bv = 0$.

Donc, nous disons que A est auto-adjoint si $Au = A^*u$, et $B = B^*$.

3.0.1 Exemple

Supposons que $A = D^2$, puis la formule de Green écrite soit

$$\langle v, Au\rangle - \left\langle v'', u\right\rangle = \left[\overline{v}u' - \overline{v}'u\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Si nous avons

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0 (conditions\ de\ Dirichlet),$$

puis $S(\alpha,\beta) = \overline{v}u^{'}(\beta) - \overline{v}u^{'}(\alpha) = 0$ pour tout $u^{'}(\beta)$ et $u^{'}(\alpha)$ si et seulement si $v(\alpha) = v(\beta) = 0$. puis

$$B = B^{*} et \ Au = A^{*}u = u^{''}.$$

Ensuite, l'opérateur $A = D^{2}$ avec les conditions de Dirichlet est autoadjoint.

Si nous avons le (BC) $u\,(\alpha) = 0,\, u^{'}\,(\alpha) = 0 \quad (conditions\ initiales)$

$$S(\alpha,\beta) = \left[\overline{v}u^{'} - \overline{v}^{'}u\right]_{\alpha}^{\beta} = \overline{v}\,(\beta)\,u^{'}\,(\beta) - \overline{v}^{'}\,(\beta)\,u\,(\beta)\,.$$

$S(\alpha,\beta) = 0$ pour tout $u^{'}(\beta)$ et $u(\beta)$ si et seulement si $v(\beta) = 0$,et $v^{'}(\beta) = 0$ (état final). Alors conditions définitives sont adjoint des conditions initiales ($B \neq B^{'}$), Ainsi, l'opérateur $A = D^{2}$, avec des conditions initiales ne sont pas auto-adjoint.

3.0.1 Définition

L'opérateur différentiel A est dite **formellement auto-adjoint** si, pour tout $u \in C^{2}(I)$, $Au = A^{*}u$.

3.0.1 Théorème

1. L'opérateur A est formellement auto-adjoint si, et seulement si, les coefficients a et b sont reliés par $a^{'} = b$.

2. Tout opérateur A, formellement auto-adjoint (à coefficients réels), s'écrit sous la forme

$$Au = (pu^{'})^{'} + qu$$

Démonstration

1. On vérifie facilement que pour toute fonction u dans $C^{2}(I)$

$$A^{*}u = au^{''} + (2a^{'} - b)u^{'} + (a^{''} - b^{'} + c)u.$$

Il en résulte que $A = A^{*}$ si, seulement si,

$$2a^{'} - b = b \text{ et } c = a^{''} - b^{'} + c$$

ce qui est équivalent à la relation $b = a^{'}$.

Le théorème qui suit dit précisément que tout opérateur différentiel du second ordre, linéaire et à coefficients réels, peut être transformé en un opérateur formellement auto-adjoint.

3.0.2 Théorème

Soit A l'opérateur différentiel défini par

$$Au = au^{''} + bu^{'} + cu.$$

Alors l'opérateur μA, avec

$$\mu(x) = \exp(\int_{\tau}^{x} \frac{b - a^{'}}{a} dy)$$

Est formellement auto-adjoint(τ est quelconque dans I).

Démonstration

D'Après le théorème précédent, l'opérateur μA est formellement auto-adjoint si, et seulement si,

$$(\mu a)^{'} = \mu b.$$

L'expression de μ s'en déduit immédiatement.

3.0.2 Exemple

L'opérateur d'Hermite est donné pour x réel par:

$$Lu = u^{''} - xu^{'}$$

Le facteur μ est, dans ce cas,

$$\mu(x) = \exp(\int_{0}^{x} -ydy) = \exp(\frac{-x^2}{2})$$

et par suite $\exp(\frac{x^2}{2})L$ est un opérateur formellement auto-adjoint dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Pour deux fonctions f et g dans $C^2(\mathbb{R})$ et à supports compact

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{-x^2}{2}) Lf(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(\frac{-x^2}{2})\overline{Lg(x)}dx.$$

Cette égalité traduit le fait que l'opérateur d'Hermite est formellement auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}; \exp(-x^2/2)dx)$ qui est donc l'espace adapté à l'étude de cet opérateur.

3.1 Expression de Sturm-Liouville

Dans cette paragraphe, nous trouvons tous les formellement auto-adjoints des opérateurs différentiels ordinaires de second ordre $\left(Au = au^{''} + bu^{'} + cu\right)$ pour a, b, et c sont des fonctions complexes et $u \in C^2\left([\alpha, \beta]\right)$.

La formule de Green donne que

$$A^*u = (\overline{a}u)^{''} - (\overline{b}u)^{'} + \overline{c}u = \overline{a}u^{''} + (2\overline{a}^{'} - \overline{b})u^{'} + \left(\overline{a}^{''} - \overline{b}^{'} + \overline{c}\right)u$$

Pour l'égalité $(Au = A^*u)$, ce qui implique

$$au^{'} + bu^{'} + cu = \overline{a}u^{''} + (2\overline{a}^{'} - \overline{b})u^{'} + \left(\overline{a}^{''} - \overline{b}^{'} + \overline{c}\right)u.$$

nous devons donc avoir

$$a = \overline{a}, b = 2\overline{a}^{'} - \overline{b}, c = \overline{a}^{''} - \overline{b}^{'} + \overline{c}$$

Ces relations sont satisfaites si et seulement si un est réel, $\operatorname{Re} b = a^{'}$, et $\operatorname{Im} c = \dfrac{\operatorname{Im} b^{'}}{2}$

Pour les opérateurs avec les valeurs des coefficients réels, que l'on note p et q où $\left(a = -p,\ b = -p^{'}, \text{ et } c = q\right)$ si

$$Au = -pu^{''} - p^{'}u^{'} + qu.$$

La résultant de la formule de l'opérateur auto-adjoint, est appelé **opérateur de Sturm-Liouville**

$$Au = -\left(pu^{'}\right)^{'} + qu,\ \ ou\ A = -D(pD) + q$$

Nous avons besoin seulement d'imposer des conditions aux limites de auto-adjoint sur les fonctions dans le domaine d'un opérateur Sturm-Liouville, pour obtenir un opérateur autoadjoint.

Donc la théorie de Sturm-Liouville étudie le cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux de la forme:

$$-\frac{d}{dx}[P(x)\frac{dy}{dx}] + Q(x)y = \lambda\omega(x)y.$$

Dans laquelle le paramètre λ fait partie comme la fonction y des inconnues. Cette équation est fréquemment posée sur un segment $[a, b]$ et accompagnée de conditions limites reliant les valeurs $y(a)$, $y^{'}(a)$, $y(b)$ et $y^{'}(b)$.

(CI) désigne des conditions aux limites de l'une des quatre formes suivantes:

$y(a) = y(b) = 0, y(a) = y^{'}(b) = 0, y^{'}(a) = y(b) = 0, y^{'}(a) = y^{'}(b) = 0.$

Les solutions λ et y du problème apparaissent alors comme valeur propre et vecteur propre d'un certain opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Le résultat principal de la théorie est l'existence d'une base hilbértienne de vecteurs propres associés à des valeurs propres formant une suite strictement croissante.

3.2 Forme de Sturm-Liouville pour une équation homogène

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre deux, scalaire, homogène

$$P(x)y^{''} + Q(x)y^{'} + R(x)y = 0.$$

Il est possible de la mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{P(x)}\frac{d}{dx}y(x)] + q(x)y = 0$$

dite forme de Sturm-Liouville, avec une fonction p à valeurs strictement positives. En général, il faut pour cela utiliser un facteur intégrant. En l'occurrence, après division par P(x) et multiplication par le facteur

$$\mu(x) = \exp(\int_a^x \frac{Q(t)}{P(t)}dt), \text{ et } q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}\mu(x)$$

on obtient le résultat désiré. Cette technique ne peut pas être généralisée aux équations vectorielles.

3.1.1 Exemple

Voici pour quelques équations classiques, la forme de Sturm-Liouville correspondante :

1. équation de Bessel

$$x^2y^{''} + xy^{'} + (\lambda x^2 - v^2)y = 0 \Longleftrightarrow (xy^{'})^{'} + \lambda^2 x - v^2 \diagup x) = 0.$$

2. équation de Legendre

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{''} + v(v+1)y = 0 \Longleftrightarrow [(1-x^2)y^{'}]^{'} + v(v+1)y = 0.$$

3. Dans le cas d'une équation telle que

$$x^3y^{''} - xy^{'} + 2y = 0.$$

Diviser tout au long de x^3:

$$y^{''} - \frac{1}{x^2}y^{'} + \frac{2}{x^3}y = 0$$

Multipliant tout au long par un facteur d'intégration de

$$\mu(x) = \exp(\int -\frac{1}{x^2}dx) = \exp(\frac{1}{x}),$$

donne

$$\exp(\frac{1}{x})y^{''} - \frac{\exp(\frac{1}{x})}{x^2}y^{'} + \frac{2\exp(\frac{1}{x})}{x^3}y = 0$$

qui peuvent être facilement mis en forme de Sturm-Liouville depuis

$$D\exp(\frac{1}{x}) = -\frac{\exp(\frac{1}{x})}{x^2}$$

donc l'équation différentielle est équivalente à

$$(\exp(\frac{1}{x})y^{/})^{/} + \frac{2\exp(\frac{1}{x})}{x^3}y = 0.$$

3.3 Opérateur de Sturm-Liouville Régulier

Un opérateur de Sturm-Liouville est la donne d'un opérateur différentiel linéaire et de second ordre

$$Lu = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) - q(x)u$$

sur un intervalle $[a, b]$ et de conditions aux extrémités de l'intervalle, appelées conditions au bord (ou à la frontière).

$$\begin{aligned} p(a)u^{'}(a)\sin\theta - u(a)\cos\theta &= 0 \\ p(b)u^{'}(b)\sin\gamma - u(b)\cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

La fonction p est dans C^1 et strictement positive sur $[a, b]$, la fonction q est réelle et continue sur $[a, b]$.

Le domaine D_L de l'opérateur de Sturm-Liouville est l'espace des fonction dans $C^2([a, b])$ vérifiant les conditions à la frontière. L'opérateur de Sturm-Liouville, associé à l'opérateur différentiel aux condition à la frontière, est l'application

$$L : D_L \to C([a, b])$$

Et on parlera alors de l'opérateur (D_L, L). Le problème de Sturm-Liouville consiste à résoudre le système

$$\lambda u - Lu = f$$
$$u \in D_L$$

Où f est une fonction continue sur $[a, b]$ donnée, λ est un paramètre complexe et où u est la fonction inconnue à chercher.

Soient u et v deux fonctions dans $C^2([a, b])$. On pose

$$W(u, v) = uv^{'} - vu^{'}$$

et

$$[u, v] = pW(u, v)$$

On a

$$\frac{d}{dx}[u, v] = uLv - vLu$$

de telle sorte que

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = [u, v](b) - [v, u](a)$$

et si u et v sont dans D_L, le second membre de l'égalité ci-dessus est nul et on obtient

$$\int_a^b uLvdx = \int_a^b vLudx$$

Pour cette raison, on dit que l'opérateur est symétrique ou formellement auto-adjoint.

3.3.1 Exemple

Soit (D_L, L) l'opérateur défini par: $Lu = u^{''}$ et D_L l'ensemble des fonctions u dans $C^2([0, \pi])$ vérifiant les conditions au bord

$$\begin{aligned} u(\pi) &= au(0) + bu^{'}(0) \\ u'(\pi) &= cu(0) + du'(0) \end{aligned}$$

Comment choisir les réels a, b, c, et d pour que (D_L, L) est symétrique, c'est-à-dire pour que l'on ait

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle\,, \quad \forall u, v \in D_L$$

En posant $W(u, v) = uv^{/} - vu^{/}$, on vérifie que

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = W(u, v)(0) - W(u, v)(\pi)$$

L'opérateur (D_L, L) est donc symétrique si, et seulement si, on a $W(u, v)(0) = W(u, v)(\pi)$, pour tout u et v dans le domaine D_L. Or, pour de tels élément, $W(u, v)(\pi) = (ad - bc)W(u, v)(0)$ et la condition précédent est équivalente à: $ad - bc = 1$.

3.3.1 Fonction de Green et Résolvante

3.3.1.1 Théorème (Fonction de Green)

On suppose l'opérateur (D_L, L) injectif.

1. Soient f une fonction de $C([a, b])$ et u la fonction définie par

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy$$

alors, la fonction u appartient à D_L et vérifie $Lu = -f$.

2. Soient u une fonction de D_L et $f = -Lu$, alors

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy$$

Si l'opérateur (D_L, L) est injectif, et si u_1 la solution de $Lu = 0$ qui vérifie $u_1(a) = sin\theta$, $p(a)u_1^{'}(a) = cos\theta$ et u_2 la solution de $Lu = 0$ qui vérifie $u_2(b) = sin\gamma, p(b)u_2^{'}(b) = cos\gamma$.

Alors

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{-1}{[u_1,u_2]}u_1(y)u_2(x), \text{ si } a\leq y\leq x\leq b\\ \frac{-1}{[u_1,u_2]}u_1(x)u_2(y), \text{ si } a\leq x\leq y\leq b.\end{cases}$$

3.3.1.1 Définition

La fonction $G(.,.)$ s'appelle la fonction (ou le nouveau) de Green de l'opérateur (D_L, L).

Si l'opérateur (D_L, L) est injectif, alors il est inversible est que son inverse est l'opérateur auto-adjoint compact à noyau donné par

$$Gf(x)=\int_a^b G(x,y)f(y)dy$$

La fonction de Green et caractérisée par les propriétés suivantes qui permettent donc de la construire.

3.3.1.1 Proposition

Soit G_x la fonction $y\mapsto G(x,y)$.

1. La fonction G_x vérifie les conditions à la frontière en a et en b, elle est ce classe C^2 sur $[a,x[$ et $]x,b]$ et sur chacun de ces intervalles elle satisfait: $LG_x = 0$.

2. En x la dérivée de G_x est discontinue et le saut en ce point est

$$\frac{d}{dx}G_x(x+0)-\frac{d}{dx}G_x(x-0)=-\frac{1}{p(x)}$$

3.3.1.1 Exemple

Soit (D_L, L) l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} D_L &= \{u\in C^2([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}\\ Lu &= u^{//}, u\in D_L\end{aligned}$$

Pour trouver son inverse, on doit résoudre

$$\begin{aligned} u^{''} &= -f\\ u(0) &= u(1)=0\end{aligned}$$

Après deux intégrations par parties, on trouve

$$u(x)=-\int_0^x\left(\int_0^t f(y)dy\right)dt+c_1x+c_2$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient

$$u(x) = \int_0^x (x-y)f(y)dy + c_1x + c_2$$

Ecrivant que $u(0) = u(1) = 0$, il vient

$$c_2 = 0 \text{ et } c_1 = \int_0^1 (1-y)f(y)dy$$

et la solution u s'écrit donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x (1-x)yf(y)dy + \int_x^1 (1-y)xf(y)dy \\ &= \int_0^1 G(x,y)f(y)dy \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-x)y, 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ (1-y)x, 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

3.3.1.2 Théorème

On suppose l'opérateur $(D_L, \lambda I - L)$ injectif

1. Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et u la fonction définie par

$$u(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)f(y)dy$$

   Alors, la fonction u appartient à D_L et vérifie $\lambda u - Lu = f$.

2. Soient u une fonction de D_L et $f = \lambda u - Lu$, alors

$$u(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)f(y)dy$$

   La famille des opérateur G_λ s'appelle la résolvante de l'opérateur (D_L, L).

Si $\lambda I - L$ est injectif, et si $u_1(.,\lambda)$ la solution de $\lambda I - Lu = 0$ qui vérifie

$$u_1(a,\lambda) = sin\theta, p(a)u_1^{'}(a,\lambda) = cos\theta,$$

et u_2 la solution de $\lambda I - Lu = 0$ qui vérifie

$$u_2(b,\lambda) = sin\gamma, p(b)u_2^{'}(b,\lambda) = cos\gamma.$$

Alors

$$G_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_1(.,\lambda),u_2(.,\lambda)]} u_1(y,\lambda)u_2(x,\lambda), \text{ si } a \le y \le x \le b \\ \frac{-1}{[u_1(.,\lambda),u_2(.,\lambda)]} u_1(x,\lambda)u_2(y,\lambda), \text{ si } a \le x \le y \le b \end{cases}$$

avec $[u_1(.,\lambda),u_2(.,\lambda)]$ est une constante non nulle qui ne dépend que de λ.

3.3.1.2 Définition

Un nombre complexe λ est une valeur propre de (D_L,L) s'il existe une fonction u dans D_L, non nulle et vérifiant

$$\lambda u - Lu = 0$$

la fonction u est alors appelée une fonction propre de (D_L,L) associée à la valeur propre λ.

3.3.1.3 Théorème

Les valeurs propres de l'opérateur (D_L,L) sont réelles.

Les sous-espaces propres correspondant sont de dimension 1 et deux à deux orthogonaux.

Soit (D_L,L) l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} D_L &= \{u \in C^2([0,1]) : u(0)=0, u(1)=0\} \\ Lu &= u'', u \in D_L \end{aligned}$$

on a, avec les notations utilisées,

$$u_1(x,\lambda) = \frac{sh\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, u_2(x,\lambda) = \frac{sh\sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}}, [u_1,u_2] = \frac{sh\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

Les valeurs propres de l'opérateur (D_L,L) sont les complexes λ tels que $[u_1,u_2]=0$, on en déduit que les valeurs propres de (D_L,L) et les fonctions propres (normalisées) associées sont

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), n \ge 1$$

la fonction de Green G_λ est définie pour $\lambda \ne \lambda_n$ par

$$G_\lambda(x,y) = \frac{\sqrt{\lambda}}{sh\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \frac{sh\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \frac{sh\sqrt{\lambda}(1-y)}{\sqrt{\lambda}}, 0 \le x \le y \le 1 \\ \frac{sh\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}} \frac{sh\sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}}, 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

3.4 Etude spectrale des opérateur de Sturm-Loiuville

Si λ_0 n'est pas valeur propre de (D_L, L), le problème

$$\begin{cases} \lambda u - Lu = f \\ u \in D_L \end{cases}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$(\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0}u + u = G_{\lambda_0}f$$

qui fait intervenir l'opérateur intégral G_{λ_0} de noyau la fonction de Green $G_{\lambda_0}(.,.)$. Nous allons voir qu'il est possible de choisir λ_0 de façon que $G_{\lambda_0}(.,.)$ soit un noyau de type positif.

3.4.1 Théorème

L'opérateur (D_L, L) est semi-borné supérieurement. C'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, pour tout u dans D_L, on ait

$$\langle Lu, u\rangle \leq M \|u\|^2$$

Démonstration

Par intégration par parties on obtient

$$\langle Lu, u\rangle = [pu'\overline{u}]_a^b - \int_a^b (p\left|u'\right|^2 + q\left|u\right|^2)dx$$

Si les nombres θ et γ sont des multiples de $\pi/2$, le crochet est nul pour toute fonction u de D_L, donc pour une telle fonction

$$\langle Lu, u\rangle = -\int_a^b (p\left|u'\right|^2 + q\left|u\right|^2)dx \leq M \|u\|^2$$

avec

$$M = -\inf\{q(x); a \leq x \leq b\}$$

Dans les autres cas, on a

$$\langle Lu, u\rangle = \left|u(b)\right|^2 \cot g\gamma - \left|u(a)\right|^2 \cot g\theta - \int_a^b (p\left|u'\right|^2 + q\left|u\right|^2)dx$$

(en convenant de poser, $\theta = k\pi$, $\left|u(a)\right|^2 \cot g\theta = 0$).

3.4.1 Lemme

Soit u une fonction dans $C^2([a,b])$. Pour tout ϵ strictement compris entre 0 et$(a+b)/2$,

$$\max_{a\leq x\leq b} |u(x)|^2 \leq \frac{2}{\epsilon}\int_a^b |u(y)|^2\, dy + 2\epsilon \int_a^b \left|u^{'}(y)\right|^2 dy.$$

Terminons la preuve du théorème 4.1. Posons

$$A = \inf_{a\leq x\leq b} p(x), B = \inf_{a\leq x\leq b} q(x), C = \sup\{|\cot g\gamma|\,, |\cot g\theta|\}$$

Nous avons

$$\langle Lu, u\rangle \leq C\max|u|^2 - A\int_a^b \left|u^{'}\right|^2 dx - B\int_a^b |u|^2\, dx$$

D'après le lemme, pour tout $\epsilon > 0$

$$\langle Lu, u\rangle \leq (2C\epsilon - A)\int_a^b \left|u^{'}\right|^2 dx + (\frac{2C}{\epsilon} - B)\int_a^b |u|^2\, dx$$

Or, par hypothèse l'opérateur A est strictement positif ; on peut donc choisir ϵ de sorte que $2C\epsilon$ soit inférieur ou égal à A et il suffit alors de poser $M = 2C\epsilon^{-1} - B$.

Corollaire

Toute valeur propre de (D_L, L) est inférieure ou égale à $M - \inf\{q(x); a \leq x \leq b\}$.

Posons

$$m = \sup\{\langle Lu, u\rangle : u \in D_L, \|u\| = 1\}$$

D'Après le théorème 3.4.1 , m est fini, inférieur ou égal à M et tout valeur propre de (D_L, L) est inférieur ou égal à m.

3.4.2 Théorème

Si $\lambda_0\rangle m$, la fonction de Green $G_{\lambda_0}(.,.)$ est un noyau de type positif.

Démonstration

Soit f une fonction de $C([a,b])$ et soit $u = G_{\lambda_0}f$. On sait que $u \in D_L$ et $\lambda_0 u - Lu = f$ d'où

$$\langle G_{\lambda_0}f, f\rangle = \langle u, \lambda_0 u - Lu\rangle = \lambda_0 \|u\|^2 - \langle Lu, u\rangle \geq (\lambda_0 - m)\|u\|^2 \geq 0$$

ce qui est le résultat cherché.

Existe-t-il des nombres complexes λ tels que l'équation $\lambda u = Lu$ possède des solutions vérifiant les conditions aux limites(CL)? De telles valeurs de λ sont les valeurs critiques du problème de Sturm-Loiuville.

3.4.3 Théorème

1. Les valeurs propres ou valeur critique de (D_L, L) constituent une suite de réels (λ_n) qui tend vers $-\infty$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ soit convergente.

2. Les fonctions propres correspondantes, (ϕ_n), normalisées constituent une base hilbértienne de $L^2[a,b]$.

3. Toute fonction u de D_L s'écrit

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \, \phi_n(x)$$

   où la convergence est absolue et uniforme sur $[a,b]$.

4. Si λ n'est pas valeur propre de (D_L, L), le problème

$$u \in D_L, \lambda u - Lu = f$$

   admet, pour toute f continue, une solution unique.

5. Si λ est une valeur propre et ϕ une fonction propre correspondant à λ, le problème

$$u \in D_L, \lambda u - Lu = f$$

   admet une solution si, et seulement si, $\langle f, \phi \rangle = 0$.

6. Si λ n'est pas valeur propre, le noyau de la résolvante G_λ s'écrit

$$G_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda - \lambda_n}$$

   la convergence étant absolue et uniforme sur $[a,b] \times [a,b]$.

3.4.1 Exemple

Soit l'opérateur (D_L, L) telle que:

$$\begin{cases} Lu = u'', u \in D_L \\ D_L = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\} \end{cases}$$

Alors les valeurs propres constituent une suite (λ_n)

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

de fonction propre associée

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$$

et le fonction de Green est:

$$G(x,y) = \begin{cases} (x-1)y \text{ si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ (y-1)x \text{ si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \end{cases} = xy - \min_{[0,1]}(x,y)$$

et la solution de l'opérateur différentielle linéaire de Sturm-Loiuville avec conditions aux bords $u(0) = u(1) = 0$ est donc la fonction

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x,y)f(y)dy \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{n^2\pi^2} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n. \end{aligned}$$

Conclusion générale

Les opérateur différentiels ne sont pas continues sur $L^2(\mathbb{R})$, mais ils se peuvent fermés ou fermable ce qui me prennent d'adapter l'étude spectrale sur un opérateur symétrique à un opérateur de Sturm-Liouville, ce dernier a des valeurs propres forment une suites de nombres réels qui tend vers $-\infty$. Si λ n'est pas un terme de cette suite le problème à une solution obtenu de l'opérateur intégral à noyau de Green.

Bibliographie

[1] ANALYSE FONCTIONNELLE ET THEORIE SPECTRALE MT404, deuxieme partie, 2000-2001.

[2] B. Buffoni; F.Genoud, Théorie spectrale et Évolution en mécanique quantique,2008.

[3] CH.Chellali, Sur les theoreme de Fuglede-Putnam, mémoire Magister,université D'oran 2011.

[4] E.Cancès; C.Lebris;Y.Maday, Mathématique & Application 53,Méthodes mathématique en chimie quantique une introduction, France 2000.

[5] Houcin Chebli, Analyse Hilbertienne, Tunis 2001

[6] N.Chiboub, Etude spectrale des opérateurs compacts, mémoire master,université de Mahamed Boudiaf de M'sila, 2012/2013.

[7] O.Werner; M. Andreas; B. David, Loiuville theory: Past and present, 2000.

[8] Pierre lévy-Bruhl, INTRODUTION À LA THEORIE SPECTRALA, cours et exercices corrigés, Dunod,Paris 2003.

[9] Seymour Goldberg, unbounded linear operators theory and applications, university of maryland.

[10] Sylvie Benzoni-Gavage, Spectre des opérateurs différentiels, Février 2010, janvier 2005.