République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : mathématiques fondamentales et appliquées

Par

FENDA Rafiqa

Sujet

Approximation par les polynômes de BERNSTEIN, la solution d'une équation différentielle ordinaire

Date de soutenance : 28/05/2017

Devant le jury :

Mr. GAGUI Bachir	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr. LAKEHALI Belkacem	MCB. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. BENSALOUA Chenitti	MCB. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

إهـــــــداء

باسم الله الـــــــــرحمن الرحيم

<< وما توفيقي إلا بالله عليه توكلت واليه أنيب>>

الى النبع الذي لا يجف ، إلى من تربيت في حجرها ، إلى التي تربعت على عرش قلبي واستحوذت على كل حبي إلى أحلى أم إلى أمي أنا ، سيــــــــــــدة النساء "ربيحة".

إلى من حرم نفسه وأعطاني ، إلى من عرقه أعبق عطر وأحلاه إلى فخري وتاج رأسي إلى من غرس في مبادئي إلى أبي الغالي "موسى".

إلى زوجي Batali

سلطان قلبي وحياتي إلى سندي في الحياة..." نـــــاصر أنت قرة عيني ومبعث الأمل في خاطري.."

إلى أغلى ما أهداني والدي إخوتي ، أخواتي وأولادهم..

إلى أختي الغالية إسمهان وأميرتي الصغيرة سهيــــــــــــــلة..

إلى صديقاتي: ....

رفيـــــــــــــــقة

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volante pour finie ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur. **LAKEHALI Belkacem**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Mes remerciements s'adressent à tous les enseignants du département de mathématique pour leur dévouement et leurs générosités.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux **à mes chers parents** et **mon très cher mari HAMRIT Abdenacer** à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

NOTATIONS

- $\Bbbk$: L'ensemble des nombres entiers.
- $C([a,b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.
- $\|x\|$: La norme de vecteur x.
- $\langle .,. \rangle$: Un produit scalaire.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des réels.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes..
- $\simeq$: Approximation.
- $\mathcal{L}$: Opérateur linéaire borné.
- $B_{i,n}$: Polynôme de Bernstein.
- $f(t)$: Fonction donnée.
- λ, c : Paramètres réels non nul.
- u : La fonction inconnue dans l'EDO (Solution exacte).
- $\widetilde{u}$: Solution approchée.
- $R_n[x]$: L'espace du polynômes
- EDO : Équation diffèrentielle ordinaire.

Table des figures

Liste des tableaux

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresse au traitement numérique des équations différentielles ordinaires (EDO) via les polynômes de Bernstein. Les motivations sont diverses. D'abord, les EDO interviennent dans de nombreuses applications comme modèles scientifiques, comme par exemple l'équation de la chaleur, les équations des ondes, etc. ....

Ceci d'une part, d'autre part les polynômes de Bernstein ont des propriétés très importantes de point de vue d'approximation. Les polynômes de Bernstein (dû au mathématicien Sergé I. Bernstein) ont permis de donner une démonstration constructive du théorème d'approximation de Stone-Weierstrass. Ces polynômes représentent également un outil important pour approcher les solutions des équations différentielles et équation intégrales.

Dans le premier chapitre, on donne une brève introduction aux équations différentielles du premier et second ordre avec quelques théorèmes d'existence et d'unicité.

Dans le second chapitre, on essaye de présenter, en détail, les polynômes de Bernstein et leurs utilités dans l'approximation des fonctions continues dans un intervalle.

Enfin, dans le troisième chapitre, on a vérifié les résultats d'application des polynômes de Bernstein dans la résolution numériques des équations différentielles par des exemples en indiquant l'écart entre les solutions exactes et les solutions approchées.

Chapitre 1

Les équations différentielles

1.1 Definition générale

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme voir[9.page 3]:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{EDO}$$

Où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une solution à une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ (une fonction $y : I \to R$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x \in I$, on ait :

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

1.2 Probléme de Cauchy

Nous pouvons nous limiter aux équations différentielles du premier ordre, car une équation d'ordre $p > 1$ peut toujours se ramener à un système de p équations d'ordre 1.

Une équation différentielle ordinaire admet généralement une infinité de solutions. Pour en sélectionner une, on doit imposer une condition supplémentaire qui correspond à la valeur prise par la solution en un point de l'intervalle d'intégration. Si on impose la condition $y(t_0) = y_0$, on sélectionne l'unique solution correspondant à la valeur de la condition .

Définition 1.2.1 *Voir[1.page 208] On considérera par conséquent des problémes, dits de Cauchy, de la forme suivante :*
trouver $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*tel que :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{PVI}$$

Où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*est une fonction donnée et* y' *est la dérivée de* y *par rapport à* t*. Enfin,* t_0*est un point de* I *et* y_0 *une valeur appelée donnée initiale.*
On rappelle dans la proposition suivante un résultat classique d'analyse.

Proposition 1.2.1 *On suppose que la fonction* $f(t, y)$ *est :*

- *Continue par rapport à ses deux variables .*
- *Lipchitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive* L *(appelée constante de Lipchitz) telle que :*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors la solution $y = y(t)$ *du problème de Cauchy* ***existe****, est* ***unique*** et *elle appartient à* $C^1(I)$*.*

Définition 1.2.2 *La fonction* f*:*$[a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est lipchitzienne en* y *et uniforme en* t *s'il existe une constante* $L > 0$ *telle que :*

$$\forall t \in [a, b]\,, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m\ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\,\|y_1 - y_2\|$$

L *est appelée constante de lipschitz de* f*.*

Théorème 1.2.1 ***(Cauchy-Lipschitz)*** *On suppose que la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *et qu'il existe un réel* L *tel que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*, on ait*

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Alors le problème (PVI) admet une solution globale unique.

1.3 Probléme aux limites

Les problémes aux limites sont des problémes différentiels posés sur un intervalle $]a, b[$ de la droite réelle, ou sur un ouvert à plusieurs dimensions $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, pour lesquels les valeurs de l'inconnue (ou de ses dérivées) sont fixées aux extrémités a et b, ou sur la bord $\partial\Omega$ dans le cas multidimensionnel. Voici quelques exemples de problème aux limites. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}$ voir[3.page 175].

1. Le problème de Dirichlet ou premier problème aux limites :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & x \in [0, 1] \\ u = g & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

2. Le problème de Neumann ou deuxième problème aux limites :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & x \in [0, 1] \\ D_n u = g & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

$$D_n u = \partial u / \partial n = \nabla u.n.$$

3. Le problème de Dirichlet-Neumann ou troisième problème aux limites :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & x \in [0, 1] \\ D_n u + au = g & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Tel que a une fonction de x.

1.4 Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si et seulement si elle est de la forme voir[9.page 5]:

$$\mathcal{L}(y) = f(x). \tag{1.4.1}$$

Avec :

$$\mathcal{L}(y) = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}.$$

Proposition 1.4.1 *L'application $\mathcal{L}$: $C^n \to C^0$ qui à la fonction y associe la nouvelle fonction $\mathcal{L}(y)$, est une application linéaire. L'équation différentielle*

$$\mathcal{L}(y) = 0 \tag{E.H}$$

S'appelle ***équation homogène*** *associée à* (1.3.1)*.*

Proposition 1.4.2 *L'ensemble S_0 des solutions à $(E.H)$ est le noyau de l'application linéaire $\mathcal{L}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $C^n(\mathbb{R})$. L'ensemble S des solutions à* (1.3.1) *est donné par :*

$$S = y_p + S_0 = \{y_p + y_h; y_h \in S_0\} \text{ avec } \mathcal{L}(y_p) = f(x)$$

c'est-à-dire que les solutions sont de la forme $y = y_p + y_h$, ou y_p est une solution particulière de (1.3.1)*, et y_h parcourt toutes les solutions de l'équation homogène $(E.H)$.*

1.4.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire (EDL) du 1^{er} ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme voir[9.page 7]:

$$a(x)y' + b(x)y = c(x). \tag{E}$$

Ou a, b, c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et on demandera que $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

A cette équation différentielle on peut associer la même équation avec $c = 0$:

$$a(x)y' + b(x)y = 0. \tag{E.H}$$

C'est l'équation homogène associée à (EDO) linéaire, ou équation sans second membre.

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de l'existence de Peano)*** *Voir[7.page 12] Soit $R.(a,b)$ être un rectangle dans le plane xy et le point $.x_0, y_0$ est à l'intérieur de telle sorte que :*

$$R.(a,b) = (x;y) : |x - x_0| < a; : |y - y_0| < b.$$

Si $f(x;y)$ est continu et $f(x;y) < M$ à tous les points. $(x,y) \in R$ puis le IVP a une solution $y(x)$, qui est définie pour tout x dans l'intervalle $|x - x_0| < c$ Où $c = \min\{a, b/M\}$

Preuve. Voir[7.page 12]. ■

Théorème 1.4.2 ***(Théorème de l'unicité de Picard et Lindelöf).*** *Voir[7.page 12] Laissez les hypothèses Du théorème précédent être satisfait. Si en plus $\partial f\ /\partial y(x,y)$ est continu et borné Pour tous les points. (x,y) in R, alors le PVI a une solution unique $y\,(x)$, qui est Définit pour tout x dans l'intervalle $|x-x_0|<c$.*

Preuve. Voir[7.page 12].. ■

1.4.2 Solution d'une équation différentielle linéaire du 1^{er}ordre

Proposition 1.4.3 *Voir[9.page 7] L'ensemble des solutions S_0 à $(E.H)$ est un sous espace vectoriel des fonctions $C^1(I)$. L'ensemble des solutions S a (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de $(E.H)$ une solution particulière quelconque de (E).*

Résolution de l'équation homogène associée

En effet, $(E.H)$ est une équation différentielle à variables séparées, en l'écrivant

$$\frac{y'}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}.$$

En l'intégrant, on obtient

$$\ln|y|=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx+C.$$

Et avec $K\in\{\pm e^c,0\}$

$$y=Ke^{F(x)},K\in\mathbb{R},F(x)=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx.$$

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y=K(x)e^{F(x)}$, avec K une fonction à déterminer (variation de la constante). On trouve que y est solution ssi

$$K\prime(x)=\frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}\iff K(x)=\int\frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

(On peut intégrer car c'est une composée de fonction continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de$(E.H)$).

Une solution particulière est donc

$$y = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{-F(x)} dx.$$

Et la solution générale est donc

$$y = e^{F(x)} \left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{-F(x)} dx \right), K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)} dx.$$

Exemple 1.4.1 *Résoudre sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle*

$$(\sin(x))y\prime - (\cos(x))y = x. \tag{E}$$

Solution 1.4.1 *Résolvons d'abord sur I l'équation homogène*

$$(\sin(x))y\prime - (\cos(x))y = 0. \tag{E.H}$$

On obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Longrightarrow \ln|y| = \ln|\sin(x)| + k, k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (EH) est donc

$$y = K \sin(x), K \in \mathbb{R}.$$

(Avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et $K = 0$ étant solution aussi). Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x) \sin(x), K \in C^1(I).$$

(C'est-à-dire K est ici une fonction continument dérivable sur I). On a alors :

$$y'(x) = K'(x) \sin(x) + K(x) \cos(x).$$

Ce qui donne dans (E) :

$$(\sin(x))[K\prime(x) \sin(x) + K(x) \cos(x)] - (\cos(x))K(x) \sin(x) = x.$$

Et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$\forall x \in I : K'(x) \sin^2(x) = x \iff K\prime(x) = \frac{x}{\sin^2(x)} \iff K(x) = \int \frac{x}{\sin^2(x)} dx$$

On intègre par partie, en posant

$$u(x) = x, v\prime(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \text{ et } u\prime(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$

Ce qui donne

$$K(x) = \frac{-x}{\tan(x)} + \int \frac{1}{\tan(x)} dx = \frac{-x}{\tan(x)} + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \frac{-x}{\tan(x)} + \ln|\sin(x)| + C.$$

Sur I, $\sin x > 0$; une solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$,

$$y = -x \cos(x) + (\sin(x)) \ln(\sin(x))$$

Et la solution générale de (E) est donné par

$$y = -x \cos(x) + (K + \ln(\sin(x))) \sin(x), K \in \mathbb{R}.$$

1.4.3 Équations différentielles ordinaire linéaires du 2^e ordre a coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du 2^e ordre, mais seules aux EDO linéaires ou les coefficients a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles voir[9.page 10].

-Une EDO linéaires du 2nd ordre a coefficients constants est une équation différentielle de la forme :

$$ay'' + by' + c = f(x) \tag{E.2}$$

Où $a, b, c \in \mathbb{R}(a \neq 0)$, et $f \in C^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est :

$$ay'' + by' + c = 0. \tag{E.H.2}$$

1.4.4 Solution d'une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre

Le théorème de l'existence et de l'unicité pour les ODE linéaires de second ordre peut être déclaré comme suit voir[9.page 10-12]:

Théorème 1.4.3 ***(Théorème fondamental)****. Voir[7.page 49] Si les fonctions $p(x), q(x)$ et $r(x)$ sont Continues sur un intervalle ouvert $a < x < b$, puis (E.H.2) avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ où*

$x_0 \in (a, b)$ a une solution unique $y = \phi(x)$ qui existe sur l'ensemble de l'intervalle.

Preuve. Voir[7.page 49] ■

Théorème 1.4.4 *Si y_1 et y_2 sont des solutions au EDO linéaire alors on dite que la combinaison linéaire*

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x).$$

Est aussi une solution pour cette équation.

Preuve. Voir[7.page 49] ■

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.2)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y\prime = ry$ et $y'' = r^2y$, donc$(E.2)$ devient $y(ar^2 + br + c) = 0$.

-L'équation

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{E.C}$$

Se nomme **équation caractéristique** de $(E.H)$.

Proposition 1.4.4 *voir[9.page 10] Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

$\Delta > 0$: $(E.C)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y_1(x) = e^{r_1x}, y_2(x) = e^{r_2x}$$

$\Delta = 0$: $(E.C)$ admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, et

$$y_1(x) = e^{rx}, y_2(x) = xe^{rx}.$$

$\Delta < 0$ *: $(E.C)$ admet deux racines complexes conjuguées*

$$r_1 = \alpha + i\beta$$
$$et$$
$$r_2 = \alpha - i\beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0).$$

Et

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta y.$$

Dans chacun des cas, la solution générale à $(E.H)$ est donc

$$y = Ay_1 + By_2.$$

Avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Solution particulière à $(E.2)$

On distingue encore deux cas particulières et une méthode générale :

Le premier cas :

$$f(x) = e^{\alpha x} P(x) \ où \ \alpha \in \mathbb{C} \ et \ P \in R_n[x] \text{ (un polynôme).}$$

On cherche la solution sous la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, ou Q est un polynôme, dont on peut préciser le degré :

– si α n'est pas racine de (EC), alors $degQ = degP$.

– si α est l'une des deux racines de (EC), alors $degQ = degP + 1$.

– si α est racine double de (EC), alors $degQ = degP + 2$.

1. Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c-à-d. $f(x) = P(x)$.

2. On peut aussi chercher une solution sous la forme $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$, ou z est une fonction à déterminer ; en remplaçant ceci dans (E), on obtient une équation différentielle pour z, de laquelle on tire z (qui doit être égal à Q, modulo les constantes d'intégration qui correspondent à une solution homogène). Ce procédé est en fait équivalent à la méthode de la variation de la constante.

Le deuxième cas :

$$f(x) = M\cos(\omega x) + N\sin(\omega x) \;\; où\; \omega, M, N \in \mathbb{R}.$$

On distingue encore une fois deux cas :

1. ω n'est pas racine de $(E.C)$: Dans ce cas, les fonctions $x \rightarrow \cos(\omega x)$, $x \rightarrow \sin(\omega x)$ ne sont pas solutions de $(E.H.2)$. Une solution particulière de $(E.2)$ sera de la forme

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

   Où les constantes A, $B \in \mathbb{R}$ se déterminent par identification.

2. ω est racine de $(E.C)$, donc les fonctions $x \rightarrow \cos(\omega x), x \rightarrow \sin(\omega x)$ sont solutions de $(E.H.2)$. Une solution particulière de $(E.2)$ sera de la forme

$$y = x(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)).$$

   Où les constantes A, $B \in \mathbb{R}$ se déterminent par identification.

1.4.5 Méthode de variation des constantes

Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de $(E.H.2)$. On cherche une solution particulière de $(E.2)$ sous la forme

$$y = Ay_1 + By_2,$$

Où A et B sont des fonctions vérifiant $A'y_1 + B'y_2 = 0$. Ainsi, $y' = Ay_1' + By_2'$, et $(E.2)$ devient $a(A'y_1' + B'y_2') = f(x)$ (car $ay_i'' + by_i' + cy_i = 0$ pour i = 1,2).

Donc, A', B' sont solutions du système :

$$\begin{cases} A'y1 + B'y2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \frac{1}{a}f(x). \end{cases}$$

Ce système se résoudre aisément, ce qui donne A', B', puis A, B par intégration.

Chapitre 2

Polynômes de Bernstein

Les polynômes sont des outils mathématiques très utiles car ils sont simplement définis, peuvent être calculés rapidement sur les systèmes informatiques et représentent une énorme variété de fonctions. Ils peuvent être différenciés et intégrés facilement, et peuvent être assemblés pour former des courbes splines qui peuvent approximer n'importe quelle fonction à toute précision souhaitée. La plupart des étudiants sont introduits dans les polynômes à un stade très précoce de leurs études de mathématiques, et prennent la forme suivante :

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Qui représente un polynôme en tant que combinaison linéaire des monômes : $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.

En général, toute fonction polynomiale ayant un degré inférieur ou égal à n peut être écrite de cette manière, et les raisons sont simplement

- L'ensemble des polynômes de dégrée inferieure au égale à n forme un espace vectoriel
- L'ensemble des fonctions $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ forme une base pour l'espace vectoriel des polynômes, dite la base canonique bien sûr elle n'est pas unique.

Dans ce chapitre on va choisir et étudier une autre base pour l'espace vectoriel des polynômes qui est la base de Bernstein.

2.1 L'idée principale

Supposons que nous sommes concernés par un polynôme $p(t)$ sur l'intervalle $t \in [0, 1]$. A n'importe quel point de cet intervalle, les valeurs t et $1 - t$ représentent les distances des points d'extrémités de l'intervalle, $t = 0$ et $t = 1$. Nous appelons t et $1 - t$ *les coordonnées barycentriques* d'un point par rapport à l'intervalle $t \in [0, 1]$. Si l'on considère l'intervalle comme une tige rigide, il équilibrera précisément le point de choix lorsque nous placerons des poids proportionnels à $1 - t$ et t aux extrémités $t = 0$ et $t = 1$.les coordonnées barycentriques $(t, 1 - t)$ d'un point sont évidemment redondantes, puisque $t + 1 - t \equiv 1$ pour n'importe quel t, mais ils fournissent une spécification ou une position plus symétrique ou "équilibrée" sur l'intervalle $[0, 1]$.

En prenant l'identité $t + 1 - t \equiv 1$ et en effectuant un développement binomiale de l'expression à la puissance n^{ieme}, on obtient

$$[t + (1 - t)]^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (1 - t)^{n-k} t^k \equiv 1.$$

Définition 2.1.1 *Voir[5.page 2] Les polynômes Bernstein de degré n sont définis par*

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1 - t)^{n-i} & si \quad 0 \leq i \leq n \\ 0 & ailleurs \end{cases} . \tag{2.1.1}$$

Où

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!\,(n - i)!}.$$

Quelques polynômes

les polynomes de Bernstein de dégreé 1 sont :

$B_{0,1}(t) = 1 - t$

$B_{1,1}(t) = t.$

Les premiers polynômes de Bernstein sur l'intervalle $[0,1]$, pour $n = 10$ sont :

$$
\begin{aligned}
B_{0,10}(t) &= (1-t)^{10} \\
B_{1,10}(t) &= 10(1-t)^{9}t \\
B_{2,10}(t) &= 45(1-t)^{8}t^{2} \\
B_{3,10}(t) &= 120(1-t)^{7}t^{3} \\
B_{4,10}(t) &= 210(1-t)^{6}t^{4} \\
B_{5,10}(t) &= 252(1-t)^{5}t^{5} \\
B_{6,10}(t) &= 210(1-t)^{4}t^{6} \\
B_{7,10}(t) &= 120(1-t)^{3}t^{7} \\
B_{8,10}(t) &= 45(1-t)^{2}t^{8} \\
B_{9,10}(t) &= 10(1-t)t^{9} \\
B_{10,10}(t) &= t^{10}.
\end{aligned}
$$

On voit entres autre qu'il sont tous positives pour $t \in [0, 1]$:

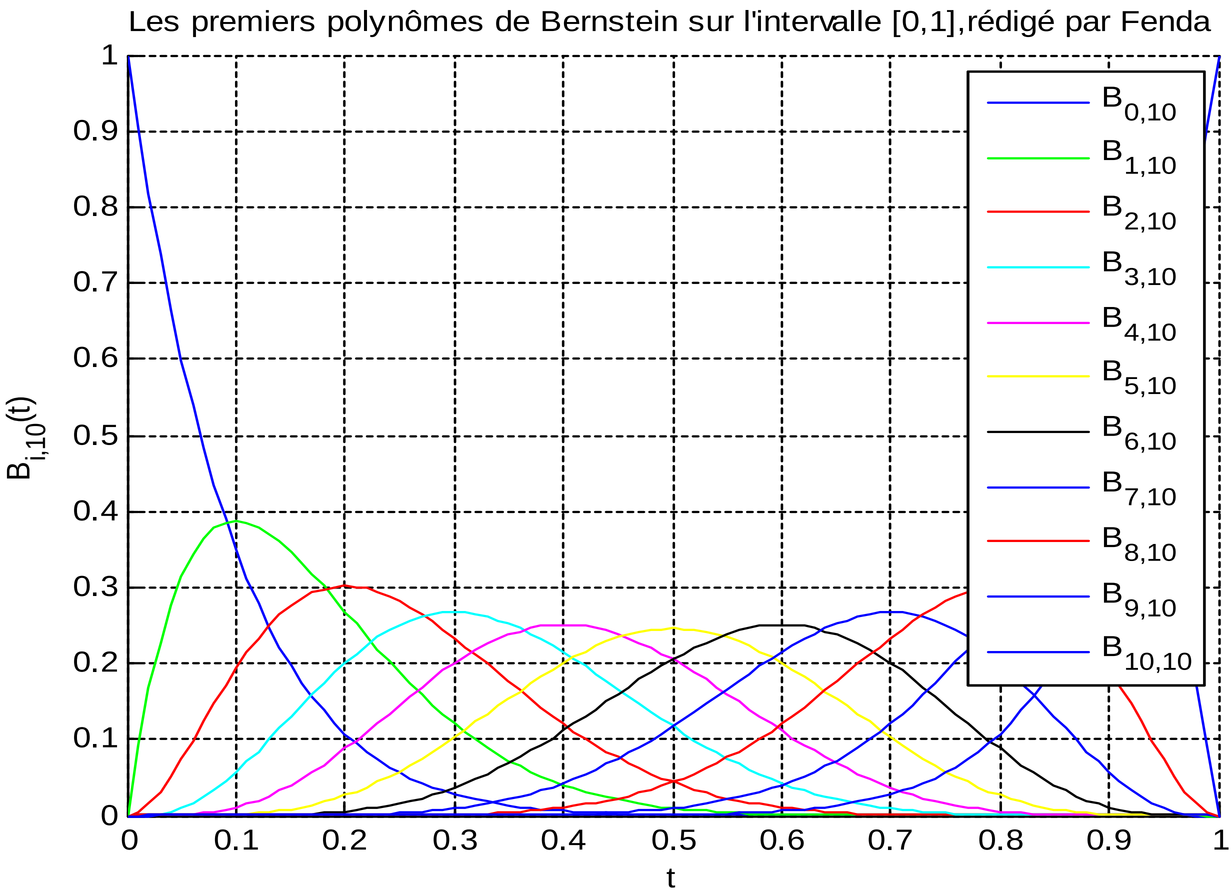


figure (01)

2.2 Propriétés des polynômes de Bernstein

Ces polynômes constituent une base de $\mathbb{R}_n[t]$ (l'ensemble des polynômes définis sur $\mathbb{R}$) et vérifient, pour tout $t \in [0,1]$, les identités suivantes :

1. **Les polynômes de Bernstein sont définis par une relation de récurrence**

Proposition 2.2.1 *Voir[5.page 5] On peut définir les polynômes de Bernstein de dégrée n par deux polynômes de Bernstein de dégrée $n-1$*

$$B_{k,n}(t) = (1-t)\,B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)\,. \tag{2.2.1}$$

Preuve. pour démontrer ça, on utilisant la définition des polynômes de Bernstein et quelques opérations algébriques :

$$\begin{aligned}
(1-t)\,B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) &= (1-t)\tbinom{n-1}{k}t^k(1-t)^{n-1-k} + t\tbinom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)} \\
&= \tbinom{n-1}{k}t^k(1-t)^{n-k} + \tbinom{n-1}{k-1}t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \left[\tbinom{n-1}{k} + \tbinom{n-1}{k-1}\right]t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \\
&= B_{k,n}(t)
\end{aligned}$$

■

2. **Les polynômes de Bernstein sont tous non négatifs**

Proposition 2.2.2 *Voir[5.page 5] Une fonction $f(t)$ n'est pas négative sur un intervalle $[a,b]$ si $f(t) \geq 0$ pour $t \in [a,b]$. Dans le cas des polynômes de Bernstein de degré n, chacun n'est pas négatif sur l'intervalle $[0,1]$.*

Preuve. Pour montrer cela, nous utilisons la propriété de définition récursive ci-dessus et l'induction mathématique. Il est facile de voir que les fonctions $B_{0,1}$ et $B_{1,1}$ ne sont pas négatives pour $0 \leq t \leq 1$.si nous supposons que tous les polynômes de Bernstein de degré moins alors k ne sont pas négatifs, puis en utilisant la définition récurrente des polynômes de Bernstein, nous pouvons écrire

$$B_{i,k} = (1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$$

Et affirment que B n'est pas non plus négatif pour 0$\leq t \leq 1$, puisque tous les composants du côté droit de l'équation sont des composants non négatifs pour l'induction $0 \leq t \leq 1$.By, tous les polynômes Bernstein ne sont pas négatifs pour 0$\leq t \leq 1$. Dans ce processus, on a

$$B_{i,n} \geq 0, \forall t \in [0,1]. \tag{2.2.2}$$

■

3. **Les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité**

Proposition 2.2.3 *Voir[5.page 6] Un ensemble de fonctions $f_i(t)$ est dit une partition d'unité si :*

$$\forall t, \sum f_i(t) = 1.$$

Les $k+1$ polynômes de Bernstein de degré k forment une partition d'unité si :

$$\forall t \in [0,1], \sum_{i=0}^{k} B_{i,n}(t) = 1. \tag{2.2.3}$$

Preuve. Pour montrer que cela est vrai, il est plus facile de montrer d'abord un fait légèrement différent, pour chaque $k+1$, la somme des k polynômes de Bernstein du degré $k-1$. C'est,

$$\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t).$$

Ce calcul est simple, en utilisant la définition récursive et réorganisant intelligemment les sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^{k} \left[(1-t) B_{i,k-1}(t) + t B_{i-1,k-1}(t)\right] \\ &= (1-t)\left[\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + B_{k,k-1}(t)\right] + t\left[\sum_{i=1}^{k} B_{i-1,k-1}(t) + B_{-1,k-1}(t)\right] \\ &= (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t\sum_{i=0}^{k-1} B_{i-1,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t).\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé

$$B_{k,k-1}(t) = B_{-1,k-1}(t) = 0.$$

Il est facile d'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(t) = (1-t) + t = 1.$$

La partition de l'unité est une propriété très importante lors de l'utilisation des polynômes de Bernstein dans la modélisation géométrique et l'infographie. En particulier, pour tout ensemble de points P_0, P_1 dans l'espace tridimensionnel, et pour tout t, l'expression

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P_0} B_{0,n}(t) + \mathbf{P_1} B_{1,n}(t) + \cdots + \mathbf{P_n} B_{n,n}(t).$$

Dans une combinaison affine de l'ensemble des points p_0, p_1, ... et si $0 \leq t \leq 1$, c'est une combinaison convexe des points. ■

4. **Relation des polynômes de Bernstein entre eux** *(*formules d'élévation de degré) voir[5.page 8]

L'un des polynômes de Bernstein à degré inférieur (degré <n) peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n. En particulier, tout polynôme de Bernstein de degré $n-1$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n. Nous notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} tB_{i,n}(t) &= \tbinom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{n-i} \\ &= \tbinom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{i+1,n+1}(t) \\ &= \tfrac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1-t)B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i}(1-t)^{n+1-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_{i,n+1}(t) \\ &= \frac{n-i+1}{n+1} B_{i,n+1}(t). \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) &= t^{i}(1-t)^{n-i} + t^{i+1}(1-t)^{n-(i+1)} \\ &= t^{i}(1-t)^{n-i-1}((1-t)+t) \\ &= t^{i}(1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_{i,n-1}(t). \end{aligned}$$

En utilisant cette équation finale, on peut écrire un polynôme arbitraire de Bernstein en termes de polynômes Bernstein de degré supérieur :

$$\begin{aligned} B_{i,n-1}(t) &= \binom{n-1}{i}\left[\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t)\right] \\ &= \left(\frac{n-i}{n}\right) B_{i,n}(t) + \left(\frac{i+1}{n}\right) B_{i+1,n}(t). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Qui exprime un polynôme de Bernstein de degré $n-1$ en termes d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n. Nous pouvons facilement étendre cela pour montrer que tout polynôme Bernstein de degré k (moins que n) peut être écrit comme une combinaison linéaire de Les polynômes de Bernstein de degré n, un polynôme de Bernstein de degré $n-2$ peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de degré $n-1$, Chacun d'entre eux pouvant être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de de degré n etc.

2.3 Dérivation des polynômes de Bernstein

Proposition 2.3.1 *Voir[5.page 9] Les dérivés des polynômes de Bernstein de degré n sont des polynômes de degré $n-1$. En utilisant la définition du polynôme de Bernstein, nous pouvons montrer que cette dérivée peut être écrite comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de degré $n-1$ En particulier*

$$\frac{d}{dt}B_{i,n}(t) = n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right). \tag{2.3.1}$$

Preuve. Pour $0 \leq k \leq n$. Cela peut être démontré par une différenciation directe :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}B_{k,n}(t) &= \tfrac{d}{dt}\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \tfrac{kn!}{k!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{(n-k)\,n!}{k!\,(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k-1} \\
&= \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}t^k(1-t)^{n-k-1} \\
&= n\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}t^k(1-t)^{n-k-1}\right) \\
&= n\left(B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)\right).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que la dérivée d'un polynôme de Bernstein peut être exprimée comme le degré du polynôme, multiplié par la différence des polynômes Bernstein de grenaille du degré $n-1$.

■

2.4 Base des polynômes de Bernstein

2.4.1 Conversion de la base de Bernstein à la base des monômes

Puisque la base de puissance des monômes constitue une base pour l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n. Alors tout polynôme Bernstein de degré n peut être écrit en termes de base des monômes. Cela peut être calculé directement en utilisant la définition des polynômes de Bernstein et le théorème binomial, comme suit, voir[5.page 8] :

$$\begin{aligned} B_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\ &= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\ &= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i. \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé le théorème binomial pour développer $(1-t)^{n-k}$.

Pour montrer que chaque élément de base des monômes peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein, nous utilisons les formules d'élévation de degré et l'induction pour calculer :

$$\begin{aligned} t^k &= t(t^{k-1}) \\ &= t \sum_{i=k-1}^{n} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t B_{i-1,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \\ &= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(t), \end{aligned}$$

Où l'hypothèse d'induction a été utilisée dans la deuxième étape.

2.4.2 Les polynômes de Bernstein forment une base pour l'espace des polynômes

Voir[5.page 10] Pourquoi les polynômes Bernstein d'ordre n forment-ils une base pour l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n ?

- Ils couvrent l'espace des polynômes - tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut être écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein.

Les polynômes de Bernstein sont une polarisation des polynômes.

- Ils sont linéairement indépendants :

$$c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \cdots + c_n B_{n,n}(t) = 0 \implies c_0 = c_1 = ... = c_n = 0.$$

Tient pour tout t, alors c_i doit être nul.

Si cela était vrai, nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 B_{0,n}(t) + c_{{}_1} B_{1,n}(t) + \cdots + c_n + B_{n,n}(t) \\ &= c_0 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} t^i \\ &+ \cdots + c_n \sum_{i=n}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n} t^i \\ &= c_0 + \left[\sum_{i=0}^{1} c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] t^1 + \cdots + \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] t^n. \end{aligned}$$

Puisque la base de puissance est un ensemble linéairement indépendant, nous devons avoir cela

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ \sum_{i=0}^{1} c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_0 = c_1 = \cdots = c_n$ (c_0 est clairement nul, en remplaçant ceci dans la seconde équation donne $c_1 = 0$, en remplaçant ces deux par la troisième équation ...)

2.5 Reprèsentation matricielle des polynômes de Bernstein

Dans plusieurs applications, les matrices associées aux polynômes de Bernstein sont très importants voir[5.page 12].

Le polynôme donné est écrit comme une combinaison linéaire des fonctions des bases de Bernstein

$$B(t) = c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \cdots + c_n B_{n,n}(t).$$

On peut facilement écrire :

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Où :

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i} & si \quad 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} . \tag{2.5.1}$$

Et

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

Et on peut convertir à :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Telle que les $b_{i,j}$ sont les coefficients de la base canonique de l'espace des polynômes et on dit que la matrice est triangulaire inférieur.

Dans le cas carrée $n = 2$ on a :

$$B(t) = \left[1,\, t,\, t^2\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas cubique $n = 3$ on a :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (2.5.3)$$

2.6 Approximation par les polynômes de Bernstein

2.6.1 Développement d'une fonction en série de Bernstein

Une fonction $f \in L^2[0,1]$ peut être écrite

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{i,n} b_{i,n}(t).$$

Où, $c_{i,n} = \langle f, b_{i,n} \rangle$ et $\langle , \rangle$ est le produit scalaire standard sur $L^2[0,1]$.

Si la série est tronquée au $n = m$, alors nous avons

$$f \cong \sum_{i=0}^{m} c_{i,m} b_{i,m} = C^T B(t).$$

où, C et $B(t)$ sont les matrices $(m+1)\times 1$ données par

$$C = [c_{0,m}, c_{1,m}, ..., c_{m,m}]^T.$$

et

$$B(t) = [b_{0,m}(t), b_{1,m}(t), ..., b_{m,m}(t)]^T.$$

Exemple 2.6.1 *Soit la fonction f definit par :*

$$f(t) = -4t\exp(t).$$

La développement de f en série de Bernstein pour $n = 3$:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{i,n} b_{i,n}(t).$$

$$f \cong \sum_{i=0}^{3} c_{i,3} b_{i,3} = C^T B = \tilde{f}.$$

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2963 & 0.4444 & 0.2222 & 0.0370 \\ 0.0370 & 0.2222 & 0.4444 & 0.2963 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ -1.8608 \\ -5.1940 \\ -10.8731 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.4172 \\ -3.7295 \\ -10.8731 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(t) = -1.2553t^4 - 1.4318t^3 - 4.2121t^2 - 3.9740t.$$

t	f	$\tilde{f}$	*erreur*
0	0	0	0
1/3	-1.8608	-1.8612	0.4000
2/3	-5.1940	-5.1936	0.4000
1	-10.8731	-10.8732	0

Tableau(1)

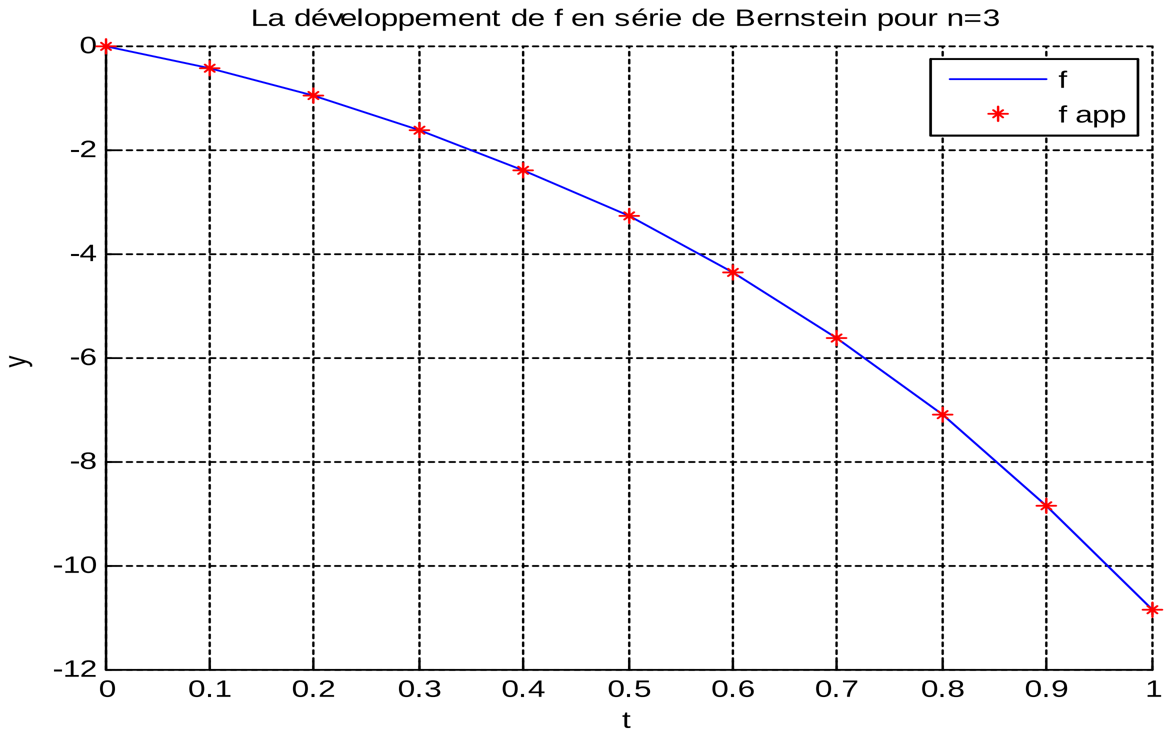


figure (2)

2.6.2 Théoreme de Weierstrass

Définition 2.6.1 *Voir[10.page 111] le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à* f*:*$[a,b]$ $\rightarrow \mathbb{R}$ *est égal à :*

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k\,(1-x)^{n-k} \tag{2.6.1}$$

Les polynômes de Bernstein permettent de démontrer facilement le théorème de **Weierstrass**

Théorème 2.6.1 ***(Weirstrass)*** *pour toute fonction continue* $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$*,il existe une suit* (B_n) *de polynômes qui converge vers f uniformément sur* $[a,b]$*.*

La démonstration que nous allons en donner est due à Bernstein . L'intérêt essentiel de cette preuve est de fournir un procédé constructif d'une telle suite : ce sont les fameux polynômes de Bernstein.

Par un changement de variable affine, nous pouvons ramener notre étude à l'intervalle $[0,1]$. Ce que nous ferons désormais.

Théorème 2.6.2 ***(Bernstein) Voir[10.page 113].*** *Pour toute fonction continue* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *la suite* $(B_n(f))$ *converge vers* f *uniformément sur* $[0,1]$.

Preuve. Voir[10.page 113] Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, elle bornée sur cet intervalle : il existe $M > 0$ tel que : $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$. Puisque f est continue sur $[0,1]$. Elle est uniformément continue. Autrement dit, Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que. Pour tout x et $y \in [0,1]$, $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et le $\delta > 0$ correspondants. Pour tout $x \in [0,1]$, on a,:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \leq \sum_{|x-k\ /n| \leq \delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \\ &\quad + \sum_{x-k\quad n > \delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

La première somme est majorée par $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon B_{n,k}(x) = \varepsilon$ et le second somme par :

$$\sum_{|x-k\quad n| > \delta} 2M B_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{|x-k\ /n| > \delta} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2}.$$

En utilisant les propriètès de polynômes de Bernstein et l'inégalité $x(1-x) \leq 1/4$. On obtient donc :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \leq 2\varepsilon.$$

Dès que $n \geq \left[\frac{M}{2n\delta^2} \right] + 1$ (les crochets indiquent la partie entière). Comme cette dernière quantitè est indépendante de $x \in [0,1]$. On a bien prouvé que la convergence est uniforme sur cet intervalle. ■

Chapitre 3

Applications

L'objectif est de trouver une solution très proche à la solution exacte pour une **EDO** de premier et second ordre via **les polynômes de Bernstein.** Quand X et Y sont de dimension infinie, un traitement direct du problème est, en général, impossible et l'on doit le reformuler en dimension finie

$$\mathcal{L}_n X_n = Y_n.$$

Avec $x_n \in X_n, u_n \in Y_n$, $\mathcal{L}_n : X_n \to Y_{n,}$ X_n et Y_n de dimensions finies. Un tel procédé est appelé **discrétisation** et il introduit naturellement une erreur, l'erreur de discrétisation. Il faudra donc pouvoir mesurer l'écart entre x et x_n. Il sera également nécessaire de savoir si (x_n) converge vers x (ou (y_n) vers y, ou $(\mathcal{L}_n)$ vers $\mathcal{L}$) lorsque les dimensions de X_n et Y_n tendent vers l'infini. On cherche une approximation solution avec la méthode de **collocation** telle que la calcule d'une solution pour cette **EDO** est ainsi un problème courant souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique.

3.1 Méthode de collocation

3.1.1 Principe général

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée d'opérateur équation

$$\mathcal{L}u = f.$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés *points de collocation.*

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$. Soit $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ une base de X_n. On cherche une fonction $u_n \in X_n$, de la forme:

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t), \ t \in G.$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation , et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \mathcal{L}u_n - f(t) \\ &= \mathcal{L} \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j - f(t), \ \ t \in G \\ &= \sum_{j=1}^{n} cj\mathcal{L}(\phi_j(t)) - f(t). \end{aligned}$$

Soit nul sur un système de noeuds $t_1, t_2, ..., t_n \in G$, (i.e, aux points de collocation).

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j = f(t_i), \ i = 1, 2, ..., n$$

de la forme $\phi_n X = f_n$. Évidement, ce système admet une solution unique si le det ϕ_n est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

Dans la mèthode de collocation, on force le reste $R_n(t_j)$ pour les point de collocation.

3.2 Résolution d'une EDO par les polynômes de Bernstein

La méthode de collocation est une méthode de *projection* permet d'approcher la solution d'une équation différentielle ordinaire à l'aide *des polynômes de Bernstein*

3.2.1 Discrétisation d'une EDO

Dans cette partie, nous voulons à l'EDO de $1^{ére}$ et $2^{ème}$ ordre qui défini par :

$$\mathcal{L}u(t) = f(t), \quad t \in [a,b]. \tag{3.2.1}$$

Où $f(t)$ est une fonction continue dans $[a,b]$

Nous convertissons cette équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimes la solution de EDO. De sort que, nous choisissons des polynômes de Bernstein comme les fonctions de base.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de **Collocation**

Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $u(t)$ comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n.}$$

Où $B_{i,n}$ sont des polynômes de Bernstein et, c_i, $i = 0,1,...,n$ sont des paramètres inconnus, être déterminé.on remplace dans l'équation (3.2.1), nous obtenons

$$\mathcal{L}\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{i,n}(t).$$

Ou

$$\sum_{i=0}^{n} c_i [\mathcal{L}B_{i,n}(t)] = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{i,n}(t).$$

Alors les équations de Collocation sont obtenues et ainsi pour chaque $(j = 0,1,...,n)$ nous prenons une équation linéaire avec les inconnus $(n+1)$ $(c_i,\ i = 0,1,...,n)$.

Enfin représente le système $(n+1)$ des équation linéaires dans les inconnue $(n+1)$, sont donné.

$$A_{i,j}Xi = b_j, \quad i,j = 0,1,...,n.$$

Où

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \mathcal{L}B_{i,n}(t_j) \\ b_j &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_{i,n}\left(t_j\right), \quad j = 0,1,...n \\ x_i &= \left(c_i\right), \quad i = 0,1,...,n \end{aligned}$$

3.3 Illustration par des exemples numériques

Exemple 3.3.1 *Soit l'équation :*

$$\begin{cases} u' = u; \ t \in [0,1] \\ u\left(0\right) = 1, \end{cases}.$$

La solution exacte de cette équation est :

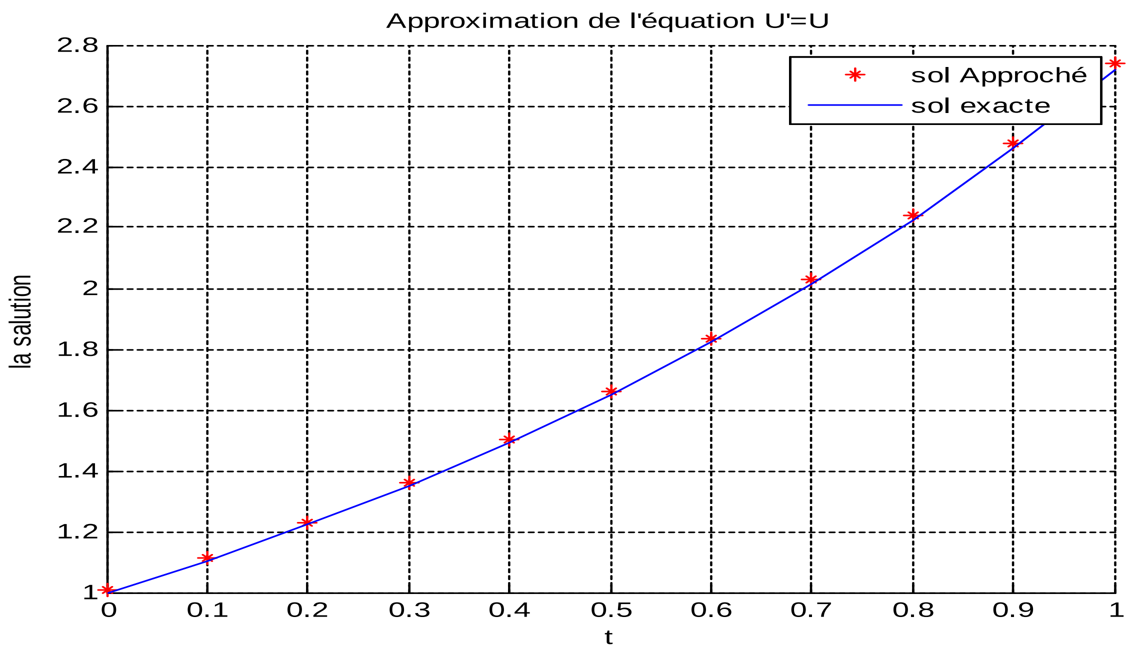
$$u(t) = \exp(t).$$

La solution approché $\tilde{u}\,(t)$de la solution exacte $u(t)$est obtenu par la solution du systéme des équations linéaires pour $n = 4$:

ans =

t	sol ex	sol app	erreur
0	1.0000	1.0074	0.0074
0.1000	1.1052	1.1128	0.0077
0.2000	1.2214	1.2297	0.0083
0.3000	1.3499	1.3590	0.0092
0.4000	1.4918	1.5020	0.0102
0.5000	1.6487	1.6600	0.0113
0.6000	1.8221	1.8346	0.0125
0.7000	2.0138	2.0275	0.0138
0.8000	2.2255	2.2407	0.0152
0.9000	2.4596	2.4764	0.0168
1.0000	2.7183	2.7369	0.0186

$Tableau(2)$



$Figure\ (3)$

Exemple 3.3.2 *Soit le probléme suivant :*

$$\begin{cases} u' - u = t; \quad t \in [0,1] \\ u(0) = 1. \end{cases} .$$

La solution exacte est :

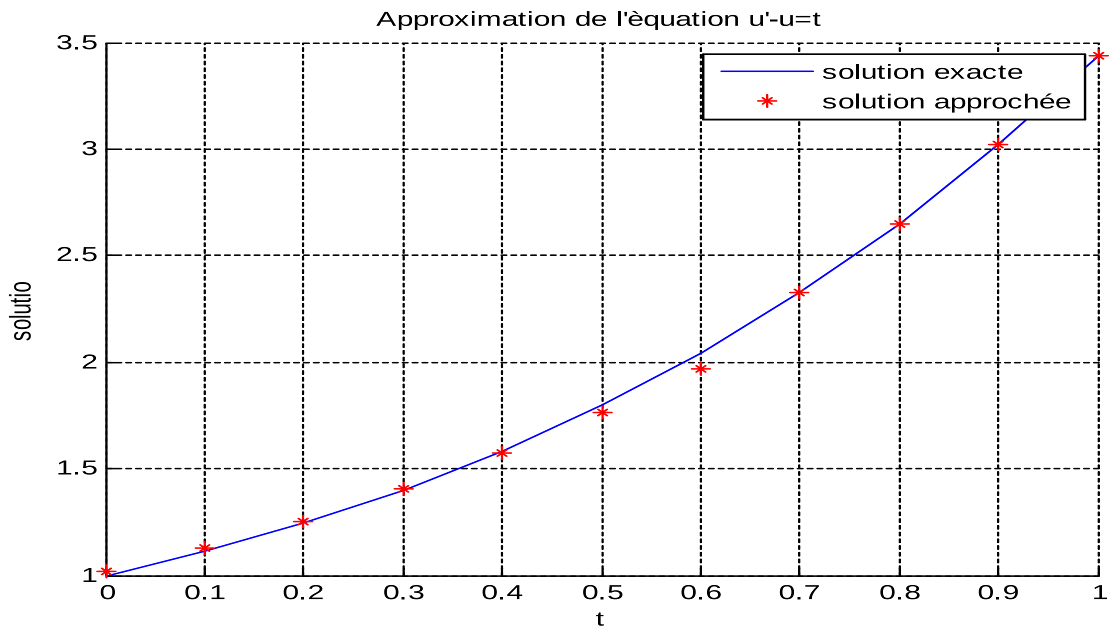
$$u(t) = 2\exp(t) - t - 1.$$

La solution approchée $\tilde{u}(t)$ de la solution exacte $u\,(t)$est obtenu par la solution du systéme des équations linéaires pour $n = 4$:

ans =

t	sol ex	sol app	erreure
0	1.0000	1.0149	0.0149
0.1000	1.1103	1.1253	0.0150
0.2000	1.2428	1.2557	0.0129
0.3000	1.3997	1.4053	0.0056
0.4000	1.5836	1.5736	0.0100
0.5000	1.7974	1.7605	0.0369
0.6000	2.0442	1.9663	0.0779
0.7000	2.3275	2.3275	0.0000
0.8000	2.6511	2.6510	0.0001
0.9000	3.0192	3.0190	0.0002
1.0000	3.4366	3.4360	0.0006

$Tableau(3)$



$Figure\ (4)$

Exemple 3.3.3 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{aligned} u'(t) &= -150u(t) + 49 - 150t; t \in [0,1] \\ u(0) &= 1/3 + \epsilon \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Pour résoudre :

$$u'(t) = -150u(t) + 49 - 150t.$$

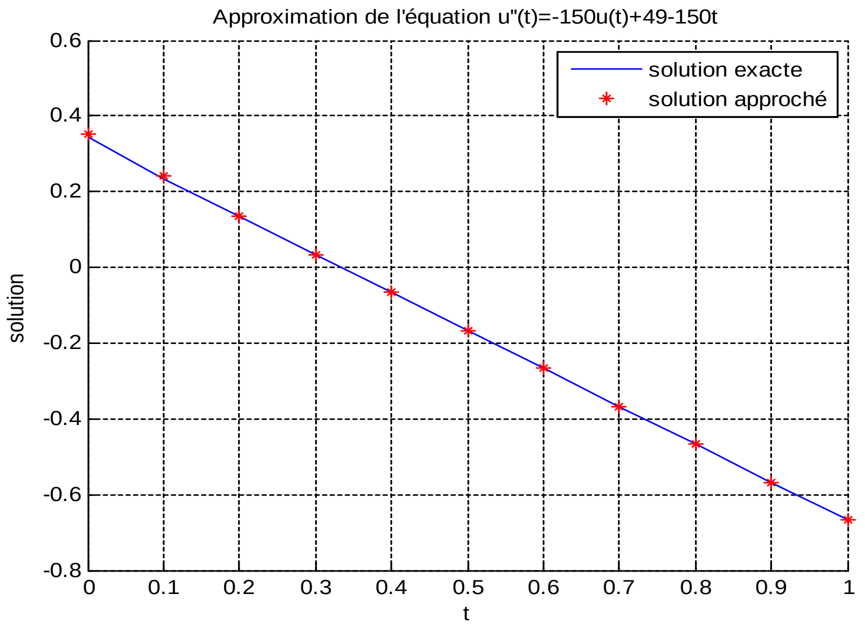
On résout tout d'abord l'équation homogène $u'(t) + 150u(t) = 0$ *dont les solutions forment un espace vectoriel de* $C^1(\mathbb{R})$ *et vérifient* $u(t) = \lambda e^{-150t}$ *. En cherchant une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré* 1*, on trouve* $u(t) = 1/3 - t$*. Les solutions de* (3.1) *sont donc définies sur* $\mathbb{R}$ *et vérifient* $u(t) = 1/3 - t + \lambda e^{-150t}$*. Si on précise la condition initiale* $u(0) = 1/3 + \varepsilon$ *on trouve une solution exact unique définie par* $u^{\varepsilon}(t) = 1/3 - t + \varepsilon e^{-150t}$*.*

La solution approché $\tilde{u}(t)$de la solution exacte $u(t)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 4$:

ans =

t	sol ex	sol app	erreur
0	0.3433	0.3517	0.0084
0.1000	0.2333	0.2404	0.0071
0.2000	0.1333	0.1348	0.0015
0.3000	0.0333	0.0328	0.0005
0.4000	-0.0667	-0.0672	0.0005
0.5000	-0.1667	-0.1667	0.0000
0.6000	-0.2667	-0.2663	0.0004
0.7000	-0.3667	-0.3664	0.0003
0.8000	-0.4667	-0.4669	0.0002
0.9000	-0.5667	-0.5674	0.0007
1.0000	-0.6667	-0.6668	0.0001

$Tableau(4)$



$Figure\ (5)$

Conclusion générale

La résolution numérique d'équation différentielle ordinaire est très souvent nécessaire, faute de l'existence de solution analytiques.

Les méthodes de résolution numérique des EDO jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voir impossible à résoudre.

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique des EDO " par les polynômes de Bernstein". Cette étude, une méthode de collocation sur la base des polynômes de Bernstein a été développé pour la solution d'équations.

Bibliographie

[1] ALFIO. Q, FAUSTO. S, PAOLA G, *Calcul Scientifique, Cours, exercices corrigès et illustrations en MATLAB et Octave*, Springer-Verlag Italia 2010.

[2] JEAN-L MERRIEN, *Exercices_ et_problemes_ d-_ Analyse_ numerique_ avec_ MATLAB,* Paris 2007.

[3] JEDRZEJEWSKI. F,*Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition*, Springer-Verlag France, Paris 2005 Imprimé en France.

[4] ISAACSON E. AND KELLER H. B.,*Analysis of numerical methods*, Dover, New York, 1994.

[5] KENNETH I. JOY, 2000. *Bernstein polynomials*, University of California, Davis

[6] LORENTZ G. G., *Bernstein polynomials, Chelsea publishing*, New York, N.Y.,(1986)

[7] MARTIN. H, MASOUD. S, *A First Course in Ordinary Diffèrential Equations, Analytical and Numerical Methods*, Friedrich Schiller University, Islamic Azad University, Springer India 2014

[8] MICHAEL A. BELLCUCCI.,*On the explicit representation of orthonormal Bernstein Polynomials,* Département of Chemical Engering, Massachusetts Institute of Technology. Cambridage. Massachachusetts 02139.*U.S.A.*

[9] MAXIMILIAN F. HASLER, *Cours de Mathèmatiques première partie : Analyse 2*, Département Scientifique Interfacultaire, (version du 21 avril 2002).

[10] ALAIN.Y, JACQUE-ARTHER WEIL, *Mathématiques appliquées.*

الخلاصة

في هذه الأطروحة قمنا بمعالجة عددية للمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والدرجة الثانية باستعمال كثيرات حدود برنشتاين بواسطة طريقة التجميع، للتحقق من كل هذا قدمنا امثلة توضيحية لمقارنة الحل الدقيق والحل التقريبي للتحقق من دقة وفعالية الطريقة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية خطية، كثيرات حدود برنشتاين، طريقة التجميع.

Résumé

Dans ce mémoire, on a traité numériquement les équations différentielles linéaires du premier et second ordre, à l'aide des polynômes de Bernstein avec la méthode de collocation. A la fin, on a comparé les solutions exactes avec les solutions approchées pour quelques exemples numériques sont illustrés pour voire l'efficacité et la précision de la méthode.

Mots clés : équation différentielle linéaire, polynôme de Bernstein, méthode de Collocation.

Abstract

In this memory, we investigate the numerical solution of initial value for linear differential equations of one and two order, by a collocation method based on Bernstein polynomials defined on [0.1]. At last, on compared the exact solution with approximate once for some examples, are giving to illustrate the accuracy and implementation of the method.

Key words: linear differential equations, Bernstein polynomials, collocation method.