



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

Chaâbi Sara

Sujet

Sur espaces de Herz type Besov

Devant le jury :

Mr. Djeriou Aissa

M.C.B. Univ de M'sila

Président

Mr. Drihem Douadi

Prof. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Heraiz Rabeh

M.C.B. Univ de M'sila

Co-encadreur

Mr. Tallab Abdelhamid

M.C.B. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné la possibilité de terminer ce travail .

*Je remercie mon encadreur de mémoire, **Pr.Douadi Drihem** pour sa soutien et pour sa bonne humeur . Je tiens à exprimer mon profond respect et de reconnaissance ce à mon co-encadreur, **Dr.Rabeh Heraiz**, pour ces conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce mémoire. Je remercie, **Dr.Djeriou Aissa**, pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de ce mémoire.*

*Je remercie sincèrement le **Dr.Tallab Abdelhamid**, qui me fait l'honneur de participer à mon jury.*

Il est important pour moi de remercie ma famille : mes parents, mes frères, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Un grand merci à mes amis et mes collègues de Master spécialement, Bouchouachi Rania.

Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Notations	1
Introduction	3
1 Espace de Herz et de Besov	4
1.1 Définition des espaces de Herz	4
1.2 Quelques remarques et inclusions	5
1.3 Espaces de Besov	9
1.3.1 Décomposition de Littlewood-Paley	9
2 Espaces de Herz-type Besov	13
2.1 Définition des espaces de Herz-type Besov	13
2.2 Inclusions	17
3 La continuité de certains opérateurs sur les espaces de Herz	22
3.1 La continuité de transformée de Fourier sur les espaces de Herz	22
3.2 Décomposition atomique des espaces de Herz	23
3.3 La continuité des opérateurs de type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz	26
Conclusion	31
Bibliographie	31

Notations

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
- La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi) f(\xi) d\xi.$$

- Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, alors $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .
- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y) dy$ est la convolution des fonctions f et g .
- Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \quad (\forall f \in A_1).$$

- p' est l'exposant conjugué de p où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a_+ = \max(a, 0)$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}^n$, τ_k : est l'opérateur de translation $\tau_k f(\cdot) = f(\cdot - k)$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, $\text{supp } f$ est le support de f , telle que:

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}.$$

- E' est l'espace dual de E .

- L^p : est l'espace des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- ℓ^q : est l'espace des suites $(a_k)_k$ telle que

$$\|(a_k)\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace des suites $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|\{f_k\}_k\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $N, R > 0$

$$\omega_{R,N}(x) = R^n (1 + R|x|)^{-N}.$$

- $B(x, r)$; La boule de centre x et de rayon r , definit par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

- $\ln_2(a) = \frac{\ln(a)}{\ln 2}$, $a > 0$.
- La fonction caractéristique χ_{R_k} est definit par

$$\chi_{R_k} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in R_k \\ 0 \text{ si } x \notin R_k \end{array} \right\}.$$

- $B_k := B(0, 2^k)$, $R_k := B_k \setminus B_{k-1}$ et $\chi_k = \chi_{R_k}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $C(u) = \{x \in \mathbb{R}^n, u/2 \leq |x| < u\}$ et $C_k := C(2^k)$.
- $p_N(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $N = 1, 2, 3, \dots$

Introduction

Cet mémoire constitue une introduction à trois espaces fondamentaux de l'analyse fonctionnelle, d'une part l'espace de Herz, deuxième part, espace de Besov et troisième part l'espace Herz-type Besov.

L'histoire des espaces de Herz remonte à les années soixantes avec les auteurs Beurling et Herz.

Les espaces de Besov sont des espaces d'interpolation intermédiaires entre les espaces de Sobolev, ces espaces doivent leur nom au mathématicien russe Oleg Vladimirovich Besov.

Les espaces de type Herz et de Besov ont attiré nombreux auteurs où quelques résultats dans espaces de Lebesgue classiques ont été généralisés dans ces espaces de type Herz et de type Besov. Cet mémoire est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre, on s'intéresse principalement aux définitions, quelques propriétés fondamentales et les notations essentielles des espaces de Herz et de Besov.

Le deuxième chapitre, on rappelle quelques définitions et notations essentielles de l'espace Herz-type Besov avec quelques propriétés de base (injection de Sobolev, la densité...).

Dans le dernier chapitre, on présente la bornitude de quelques opérateurs (opérateurs de Fourier et de Cadéon-Zygmund) sur les espaces de Herz.

Chapitre 1

Espace de Herz et de Besov

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et notations essentielles de l'espace de Herz et de Besov avec quelques propriétés principales.

1.1 Définition des espaces de Herz

Nous commençons par définir de l'espace de Herz homogène et non homogène.

Définition 1.1.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$,

(i) On définit l'espace de Herz homogène par:

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(ii) On définit l'espace de Herz non homogène par:

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

avec les modifications habituelles faites lorsque $p = \infty$ et /ou $q = \infty$.

1.2 Quelques remarques et inclusions

Dans cette section, nous présentons quelques remarques et inclusions dans l'espace de Herz.

Remarque 1.2.1 *Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$, alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach.*

Quand $\alpha = 0$ et $0 < p \leq \infty$, alors $\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ coincide sur les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

La relation entre Herz homogène et non homogène est donnée par :

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < p, q \leq \infty.$$

Proposition 1.2.1 ([1]) *Soient p, q, α et $\theta \in]0, \infty]$. si $p \geq \theta$, alors*

$$\dot{K}_q^{\alpha,\theta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. L'injection précédente est une conséquence simple de l'injection

$$\ell^\theta(L^q) \hookrightarrow \ell^p(L^q).$$

■

Proposition 1.2.2 ([1]) *Soient $\alpha \in]0, \infty[$, $0 < q_0 \leq q_1 < \infty$, $0 < p < \infty$. Alors*

$$\dot{K}_{q_1}^{\alpha+n/q_0-n/q_1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{q_0}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Soit $f \in \dot{K}_{q_1}^{\alpha+n/q_0-n/q_1,p}$

$$\|f\|_{\dot{K}_{q_0}^{\alpha,p}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{q_0}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et par inégalité de Hölder dans $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_{q_0}^{\alpha,p}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{q_0}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{q_1}^p \|\chi_k\|_t^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ avec } \frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{t} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k(\alpha+n/q_0-n/q_1)p} \|f\chi_k\|_{q_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha+n/q_0-n/q_1,p}}. \end{aligned}$$

■

Le lemme suivant est dû à [2, Lemme 1].

Lemme 1.2.1 ([2]) Soit $r, R > 0$ et $m > n$. Alors il existe une constante $c = c(r, m, n) > 0$ telle que pour toute $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\text{supp } \mathcal{F}g \subset \overline{B}(0, R)$, On a

$$|g(x)| \leq c (w_{R,m} * |g|^r(x))^{1/r}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'inégalité de Plancherel-Polya-Nikolskij classique, dite que $\|f\|_q$ peut estimée par

$$c R^{n(1/p-1/q)} \|f\|_p$$

pour tout $0 < p \leq q \leq \infty$, $R > 0$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \overline{B}(0, R)$. La constante $c > 0$ est indépendante de R . Cette inégalité joue un rôle important en l'analyse Harmonique.

Lemme 1.2.2 ([2]) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ et $R \geq H > 0$. Il existe une constante $c > 0$ indépendante de R et H telle que pour tout $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \overline{B}(0, R)$, on a

$$\sup_{x \in B(0, 1/H)} |f(x)| \leq c \left(\frac{R}{H} \right)^{n/d} H^{n/q+\alpha} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}$$

pour tout $0 < d < \min(q, 1/(1/q + \alpha/n))$.

Preuve. Par le lemme 1.2.1 on a pour tout $d, R > 0, N > n/d$ et pour tout $x \in B(0, 1/H)$

$$\begin{aligned} |f(x)|^\varrho &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^d w_{R,dN}(x-y) dy \right)^{\varrho/d} \\ &\leq c \left(\int_{\overline{B}(0, 2^2/H)} (\dots) dy \right)^{\varrho/d} + c \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, 2^2/H)} (\dots) dy \right)^{\varrho/d}, \end{aligned}$$

où $\varrho = \min(1, d)$. On utilise la decomposition suivante

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}(0, 2^2/H)} (\dots) dy &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{C(2^{2-j}/H)} (\dots) dy, \\ \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, 2^2/H)} (\dots) dy &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{C(2^{j+3}/H)} (\dots) dy \end{aligned}$$

et l'inégalité

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right)^\sigma \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^\sigma, \quad \{a_j\}_j \subset \mathbb{C}, \quad \sigma \in [0, 1] \quad (1.2.1)$$

on obtient que $|f(x)|^\varrho$ peut être estimée par

$$c \sum_{j=0}^{\infty} (V_{j,R,H}^1(x) + V_{j,R,H}^2(x)), \quad (1.2.2)$$

où

$$V_{j,R,H}^1(x) = (w_{R,dN} * |f\chi_{C(2^{2-j}/H)}|^d(x))^{\varrho/d}, \quad V_{j,R,H}^2(x) = V_{-j-1,R,H}^1(x).$$

Ici N est choisit par $N > \max(n/d, n/d - n/q - \alpha)$.

L'estimation de la premier terme en (1.2.2). Par un changement de variables simple et par l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{d} = \frac{1}{q} + \frac{1}{d} - \frac{1}{q}$), donne pour tout $d, R > 0$ et tout $x \in B(0, 1/H)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} V_{j,R,H}^1(x) &\leq R^{n\varrho/d} \sum_{j=0}^{\infty} \|f\chi_{C(2^{2-j}/H)}\|_d^\varrho \\ &\leq R^{n\varrho/d} \sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} \|f\chi_{\tilde{C}_k}\|_d^\varrho \\ &\leq c R^{n\varrho/d} \sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} 2^{nk(1/d-1/q)} \|f\chi_{\tilde{C}_k}\|_q^\varrho, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où $\tilde{C}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} < |x| \leq 2^k\}$ et $[a]$ est la partie entière du nombre réel a . On distingue deux cas comme suit

Si $0 < q \leq \varrho$, alors par l'injection $\ell_{p/\varrho} \hookrightarrow \ell_1$, on trouve que la coté droite de (1.2.3) est bornée par

$$\begin{aligned} &c R^{n\varrho/d} \left(\sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} 2^{nk(1/d-1/q)p} \|f\chi_{\tilde{C}_k}\|_q^p \right)^{\varrho/p} \\ &\leq c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_{\tilde{C}_k}\|_q^p \right)^{\varrho/p} \\ &\leq c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^\varrho, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

où on utilise que $1/d > 1/q + \alpha$ et $2^{k-3}H < 1$. Si $\varrho < p$, alors l'inégalité de Hölder en ℓ_ϱ implique que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\infty} V_{j,R,H}^1(x) \\
 & \leq c R^{n\varrho/d} \sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} 2^{k\varrho\alpha} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q^\varrho 2^{k\varrho(n/d-n/q-\alpha)} \\
 & \leq c R^{n\varrho/d} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q^p \right)^{\varrho/p} \left(\sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} 2^{k\varrho(n/d-n/q-\alpha)p/(p-\varrho)} \right)^{(p-\varrho)/p} \\
 & \leq c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^\varrho
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

où en utilisant dans la dernière estimation $1/d > 1/q + \alpha$ et $2^{k-3}H < 1$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{2-\lfloor \ln_2 H \rfloor} (2^k H)^{\varrho(n/d-n/q-\alpha)p/(p-\varrho)} \right)^{(p-\varrho)/p} \leq c.$$

On estime le deuxième terme de (1.2.2). Il est connu que pour tout $y \in C(2^{3+j}/H)$ et tout $x \in B(0, 1/H)$, on a $|x - y| > 2^j/H$, alors pour tout $d > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}_0$

$$w_{R,N}(x - y) \leq R^n \left(\frac{2^j R}{H} \right)^{-N} \leq 2^{-jN} R^n.$$

Par un changement de variables simple et par l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{d} = \frac{1}{q} + \frac{1}{d} - \frac{1}{q}$),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\infty} V_{j,R,H}^2(x) \\
 & \leq R^{n\varrho/d} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jN\varrho} \left\| f \chi_{C(2^{j+3}/H)} \right\|_d^\varrho \\
 & \leq c R^{n\varrho/d} H^{-N\varrho} \sum_{k=2-\lfloor \ln_2 H \rfloor}^{\infty} 2^{-kN\varrho} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_d^\varrho \\
 & \leq c R^{n\varrho/d} H^{-N\varrho} \sum_{k=2-\lfloor \ln_2 H \rfloor}^{\infty} 2^{k\varrho(n/d-n/q-N)} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q^\varrho \\
 & = c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \sum_{k=2-\lfloor \ln_2 H \rfloor}^{\infty} (2^k H)^{(n/d-n/q-N-\alpha)\varrho} 2^{k\varrho\alpha} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q^\varrho.
 \end{aligned}$$

Puisque $N > n/d - n/q - \alpha$ et $2^k H > 1$, pour tout $k \geq 2 - [\ln_2 H]$, la coté droite de la dernière expression est bornée

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \left(\sup_{k \geq 2 - [\ln_2 H]} 2^{k\alpha} \left\| f \chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q \right)^\varrho \\ & \leq c \left(\frac{R}{H} \right)^{n\varrho/d} H^{(n/q+\alpha)\varrho} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^\varrho. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Finalement, grace à (1.2.4), (1.2.5) et (1.2.6) on a l'estimation demendée. ■

1.3 Espaces de Besov

Nous allons définir maintenant les espaces de Besov qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle.

1.3.1 Décomposition de Littlewood-Paley

On va rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée

Soit $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} \Psi(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1 \\ \text{et} \\ \Psi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

On définit φ_0 et φ_1 par

$$\mathcal{F}\varphi_0(x) = \Psi(x)$$

et

$$\mathcal{F}\varphi_1(x) = \Psi(x) - \Psi(2x)$$

et

$$\mathcal{F}\varphi_j(x) = \mathcal{F}\varphi_1(2^{-j}x) \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots$$

Alors $\{\mathcal{F}\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ est une décomposition de l'unité,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}\varphi_j(x) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution $\Delta_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par

$$\Delta_j f(x) = \varphi_j * f(x), \quad \text{pour } j \geq 0$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j * f \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées.

Définition 1.3.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$. L'espace de Besov homogène $B_{p,q}^s$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Remarque 1.3.1 $B_p^{s,q}$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach lorsque $\min(p, q) \geq 1$), ce espace est independant du choix de la fonction φ (au sens équivalente quasi-norme).

Proposition 1.3.1 ([5]) .

(i) Soient $-\infty < \sigma < s < \infty$ et $1 \leq p, r, t \leq \infty$, alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^\sigma(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq t \leq \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^s(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Soient $1 \leq p_0 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} = s_0 - \frac{n}{p_0}$, avec $s, s_0 \in \mathbb{R}$ alors

$$B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

(iv) Si $1 \leq p < \infty$, alors

$$B_{p,1}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,\infty}^0(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. .

(i) Soit $f \in B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,t}^\sigma} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma jt} \|\Delta_j f\|_p^t \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\sigma-s)jt} 2^{sjt} \|\Delta_j f\|_p^t \right)^{\frac{1}{t}}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder en ℓ^t , on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,t}^\sigma} &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\sigma-s)j\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjr} \|\Delta_j f\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{où } \frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\mu} \\ &\leq c \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjr} \|\Delta_j f\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}} = c \|f\|_{B_{p,r}^s} \quad \text{car } \sigma - s < 0. \end{aligned}$$

(ii) C'est une conséquence de l'injection classique suivante

$$\ell^r \hookrightarrow \ell^t \quad \text{car } r < t.$$

(iii) Nous besoin à l'inégalité suivante

$$\|\Delta_j f\|_p \leq 2^{n(1/p_0-1/p)j} \|\Delta_j f\|_{p_0},$$

cette inégalité est une application directe de l'inégalité de "Bernstein".

Soit $f \in B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{q(s+n/p_0-n/p)j} \|\Delta_j f\|_{p_0}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{qjs_0} \|\Delta_j f\|_{p_0}^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

(iv) Soit $f \in B_{p,1}^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \right\|_p \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\Delta_j f\|_p = \|f\|_{B_{p,1}^0}, \end{aligned}$$

donc $B_{p,1}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\Delta_j f(x) &= \varphi_j * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(y) f(x-y) dy,\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\|\Delta_j f\|_p \leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(y)| dy \leq c \|f\|_p.$$

■

Théorème 1.3.1 ([5]) *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < q, p_0, p_1 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, alors*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_q^{s+\varepsilon, p_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_q^{s, p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Pour la preuve voir H. Triebel[5]. ■

Chapitre 2

Espaces de Herz-type Besov

Dans ce chapitre, nous présentons les espaces de Herz type Besov où nous donnons certaines propriétés de base dans ces espaces. En particulier, nous présentons les résultats de D. Drihem dans [2].

2.1 Définition des espaces de Herz-type Besov

Nous allons commencer à donner la définition des espaces de Herz-type Besov et nous présentons quelques propriétés sur ces espaces.

Définition 2.1.1 Soient $\alpha, s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q, \beta \leq \infty$. L'espace de Herz-type Besov $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ est l'ensemble des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} \|\Delta_j f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty,$$

avec la modification évidente si $\beta = \infty$.

Remarque 2.1.1 .

(i) Pour $s \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty$ et $0 < \beta \leq \infty$, on a

$$\dot{K}_p^{0,p} B_\beta^s = B_{p,\beta}^s.$$

(ii) Les espaces de Herz-type Besov sont indépendant du choix de la décomposition de l'unité, c-à-dire si $\{\mathcal{F}\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\mathcal{F}\psi_j\}_{j=0}^\infty$ deux décompositions de l'unité avec $\alpha + \frac{n}{q} > 0$, alors

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s}^\varphi \approx \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s}^\psi.$$

(iii) Les espaces de Herz type Besov $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ sont des espace quasi-Banach et sont Banach si $p, q, \beta \geq 1$

Les deux lemmes suivantes sont la version- $\dot{K}_q^{\alpha,p}$ de l'inégalité de Plancherel-Polya-Nikolskij.

Lemme 2.1.1 ([2]) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $0 < s, p, q, r \leq \infty$. On suppose que $\alpha_1 + n/s > 0, 0 < q \leq s \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Alors il existe une constante positive $c > 0$ indépendante de R telle que pour tout $f \in \dot{K}_q^{\alpha_2,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \overline{B}(0, R)$, on a

$$\|f\|_{\dot{K}_s^{\alpha_1,r}} \leq c R^{n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,\theta}},$$

où

$$\theta = \begin{cases} r & \text{si } \alpha_2 = \alpha_1 \\ p & \text{si } \alpha_2 > \alpha_1. \end{cases}$$

Preuve. $f \in \dot{K}_s^{\alpha_1,r}(\mathbb{R}^n)$ on écrit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_1 r} \|f\chi_k\|_s^r = \sum_{k=-\infty}^{-[\ln_2 R]} (\dots) + \sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} (\dots) = I_R + II_R. \quad (2.1.1)$$

Estimation de I_R . Par le lemme 1.2.2 on a pour tout $R > 0$

$$I_R \leq \sup_{x \in B(0, 2/R)} |f(x)|^r \sum_{k=-\infty}^{-[\ln_2 R]} 2^{k(\alpha_1+n/s)r} \leq c R^{(n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^r,$$

car $\alpha_1 + n/s > 0$ et $2^{k-1}R < 1$.

Estimation de II_R . Premièrement on considère le cas $q = s = \infty$. Il est simple de vérifier que

$$\begin{aligned} II_R &= R^{(\alpha_2-\alpha_1)r} \sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} (2^k R)^{(\alpha_1-\alpha_2)r} 2^{k\alpha_2 r} \|f\chi_k\|_\infty^r \\ &\leq R^{(\alpha_2-\alpha_1)r} \sup_{k \in \mathbb{Z}} (2^{k\alpha_2} \|f\chi_k\|_\infty)^r \sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} (2^k R)^{(\alpha_1-\alpha_2)r} \\ &\leq c R^{(\alpha_2-\alpha_1)r} \|f\|_{\dot{K}_\infty^{\alpha_2,p}}^r, \end{aligned}$$

si $\alpha_2 > \alpha_1$.

Si $\alpha_2 = \alpha_1$ alors il est clair que

$$II_R = \sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} 2^{k\alpha_2 r} \|f\chi_k\|_{\infty}^r \leq \|f\|_{\dot{K}_{\infty}^{\alpha_2, r}}^r.$$

Nous considérons le cas où $q < \infty$. Par le lemme 1.2.1 on a pour tout $R > 0, N > n/d$ et tout $x \in C_k$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q w_{R,qN}(x-y) dy \right)^{1/q} \\ &\leq c \left(\int_{B(0,2^{k-2})} (\dots) dy \right)^{1/q} + c \left(\int_{\tilde{C}_k} (\dots) dy \right)^{1/q} \\ &\quad + c \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2^{k+2})} (\dots) dy \right)^{1/q} \\ &= V_{R,k}^1(x) + V_{R,k}^2(x) + V_{R,k}^3(x). \end{aligned}$$

où $\tilde{C}_k := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+2}\}$. On choisit N de sorte que

$$N > \max(n/s, n/d, n/s - \alpha_2 + \alpha_1 + n/d, n/d - \alpha_2), \quad (2.1.2)$$

avec d comme dans le lemme 1.2.2. Il est simple de vérifier que pour tout $x \in C_k$ et $y \in B(0,2^{k-2})$, alors $|x-y| > 2^{k-2}$. Cette estimation et le lemme 1.2.2, on trouve pour tout $x \in C_k$ et tout $k > -\lfloor \ln_2 R \rfloor$

$$\begin{aligned} V_{R,k}^1(x) &\leq c \sup_{y \in B(0,2^{k-2})} |f(y)| \left(\int_{2^{k-2} < |x-y| < 2^{k+1}} w_{R,qN}(x-y) dy \right)^{1/q} \\ &\leq c R^{(n/q-N)} (2^k R)^{n/d} 2^{-(\alpha_2+N)k} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, p}}. \end{aligned}$$

Cette estimation et (2.1.2), on trouve

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} 2^{k\alpha_1 r} \|V_{R,k}^1 \chi_k\|_s^r \\ &\leq c R^{(n/q-N+n/d)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, p}}^r \sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} 2^{k(n/s+n/d+\alpha_1-\alpha_2-N)r} \\ &\leq c R^{(n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, p}}^r. \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\|V_{R,k}^2 \chi_k\|_s \leq c R^{n/q} \left\| (1 + R|\cdot|)^{-N} \right\|_s \left\| f\chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q \leq c R^{n/q-n/s} \left\| f\chi_{\tilde{C}_k} \right\|_q,$$

où on utilise $N > n/s$. Donc

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} 2^{k\alpha_1 r} \|V_{R,k}^2 \chi_k\|_s^r \right)^{1/r} \\
 & \leq c R^{n/q-n/s} \left(\sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} 2^{k(\alpha_1-\alpha_2)r} 2^{k\alpha_2 r} \|f \chi_{\tilde{C}_k}\|_q^r \right)^{1/r} \\
 & \leq c R^{n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{k\alpha_2} \|f \chi_{\tilde{C}_k}\|_q \right) \left(\sum_{k=1-[\ln_2 R]}^{\infty} (2^k R)^{(\alpha_1-\alpha_2)r} \right)^{1/r} \\
 & \leq c R^{n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}},
 \end{aligned}$$

si $\alpha_2 > \alpha_1$. Le cas $\alpha_2 = \alpha_1$ peut être facilement traité. Pour $V_{R,k}^3$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2^{k+2})} (\cdot \cdot \cdot) dy$ se décompose en

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{C_{k+i+3}} (\cdot \cdot \cdot) dy.$$

Alors, on utilise (1.2.1), on trouve pour tout $x \in C_k$

$$(V_{R,k}^3(x))^\varrho \leq c \sum_{i=0}^{\infty} \left(w_{R,qN} * |f \chi_{C_{k+i+3}}|^q(x) \right)^{\varrho/q},$$

tel que $\varrho = \min(1, q)$. Puisque $|x - y| > 3 \cdot 2^{k+i}$ pour tout $x \in C_k$ et tout $y \in C_{k+i+3}$, la coté droite de la dernière inégalité est majorée par

$$\begin{aligned}
 & c R^{\varrho(n/q-N)} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(k+i)\varrho N} \left\| f \chi_{C_{k+i+3}} \right\|_q^\varrho \\
 & = c R^{\varrho(n/q-N)} \sum_{j=k+3}^{\infty} 2^{-j\varrho N} \left\| f \chi_{C_j} \right\|_q^\varrho \\
 & \leq c R^{\varrho(n/q-N)} \sum_{j=k+3}^{\infty} 2^{j\varrho(n/q-N)} \sup_{x \in B(0,2^j)} |f(x)|^\varrho \\
 & \leq c R^{\varrho(n/q-N+n/d)} \sum_{j=k+3}^{\infty} 2^{j\varrho(n/d-N-\alpha_2)} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^\varrho \\
 & \leq c R^{\varrho(n/q-N+n/d)} 2^{k\varrho(n/d-N-\alpha_2)} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^\varrho,
 \end{aligned}$$

où on utilise le lemme 1.2.2 (car $j > k > -\lfloor \ln_2 R \rfloor$) et (2.1.2). On obtient,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} 2^{k\alpha_1 r} \|V_{R,k}^3 \chi_k\|_s^r \\
 & \leq c R^{(n/q-N+n/d)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^r \sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} 2^{k(n/s-\alpha_2+\alpha_1-N+n/d)r} \\
 & \leq c R^{(n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^r \sum_{k=1-\lfloor \ln_2 R \rfloor}^{\infty} (2^k R)^{(n/s-\alpha_2+\alpha_1-N+n/d)r} \\
 & \leq c R^{(n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1)r} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}^r,
 \end{aligned}$$

où nous utilisons (2.1.2). La preuve est terminée. ■

Lemme 2.1.2 ([2]) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $0 < s, p, q, r \leq \infty$. On suppose que $\alpha_1 + n/s > 0, 0 < s \leq q \leq \infty$ et $\alpha_2 > \alpha_1 + n/s - n/q$. Alors il existe une constante positive c indépendante de R telle que pour tout $f \in \dot{K}_q^{\alpha_2,p} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \overline{B}(0, R)$, on a

$$\|f\|_{\dot{K}_s^{\alpha_1,r}} \leq c R^{n/q-n/s+\alpha_2-\alpha_1} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2,p}}.$$

Preuve. Pour la preuve voir D. Drihem [2]. ■

2.2 Inclusions

Le théorème suivant donne quelques injections dans les espaces de Herz type Besov.

Théorème 2.2.1 ([2]) Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$ et $\alpha > \frac{-n}{q}$

(i) Si $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_1}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_2}^s.$$

(ii) Si $0 < \beta_1, \beta_2 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_1}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_2}^s.$$

(iii) Si $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1} B_{\beta}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2} B_{\beta}^s.$$

(iv) Si $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p} B_{\beta}^s \hookrightarrow \dot{K}_{q_1}^{r,p} B_{\beta}^s.$$

où $r = \alpha - n(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2})$.

Preuve. .

(i) L'injection (i) c'est une consequence de l'injection

$$\ell^{\beta_1} \hookrightarrow \ell^{\beta_2}.$$

(ii) Soit $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_1}^{s+\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_2}^s} &= \left\| (2^{vs} \varphi_v * f)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta_2}(\dot{K}_q^{\alpha,p})} \\ &\leq c \sup_{v \geq 0} \left\| (2^{v(s+\varepsilon)} \varphi_v * f) \right\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}} \\ &\leq c \left\| (2^{v(s+\varepsilon)} \varphi_v * f)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta_2}(\dot{K}_q^{\alpha,p})}. \end{aligned}$$

(iii) L'injection (iii) c'est une consequence de l'injection

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1} \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2}.$$

(iv) Soit $f \in \dot{K}_{q_2}^{\alpha,p} B_{\beta}^s$. Si en appliquant le théorème 2.1.1, on trouve

$$\|\varphi_v * f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}} \leq c 2^{v(\frac{n}{q_1} - \frac{n}{q_2})} \|\varphi_v * f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}}$$

alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{r,p} B_{\beta}^s} &= \left\| (2^{vr} \varphi_v * f)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p})} \\ &= \left\| \left(2^{v(\alpha - n(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}))} \varphi_v * f \right)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p})} \\ &\leq \left\| (2^{v\alpha} \varphi_v * f)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p})} \\ &= \|f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p} B_{\beta}^s}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.2 ([2]) Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q, \beta \leq \infty$, et $\alpha + \frac{n}{q} > 0$. Alors on a

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.2.1)$$

Preuve. On montre premièrement la coté droite de 2.2.1. Comme

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s$$

donc pour montrer que

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

il suffit de montrer que

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\infty^s \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Soit $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une décomposition de l'unité. On pose $\omega_j = \sum_{i=j-1}^{i=j+1} \varphi_i$ si $j = 1, 2, \dots$ (avec $\varphi_{-1} = 0$).

Si $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p} B_\infty^s$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $f(\psi)$ denote la valeur de f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour une fonction de teste ψ . On obtient

$$\begin{aligned} |f(\psi)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f(\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi)| = \sum_{j=0}^{\infty} \|\Delta_j f \cdot (\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi)\|_1 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \Delta_j f \cdot (\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi) \mid \dot{K}_1^{0,1} \right\|. \end{aligned}$$

Cette somme peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\Delta_j f \cdot \mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{x \in B(0, 2^k)} |\Delta_j f(x)| \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1. \end{aligned}$$

On divise la dernière somme en deux parties

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{-j-1} \dots + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \dots$$

Le lemme 1.2.2, donne pour tout $0 < d < 1/\max(1/q, 1/q + \alpha/n)$ et tout $N > n/d - n/q - \alpha$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{-j-1} \sup_{x \in B(0, 2^{-j})} |\Delta_j f(x)| \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{-j-1} 2^{(n/q+\alpha)j} \left\| \Delta_j f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} \right\| \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\ &\leq c \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_\infty^s \right\| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{-j-1} 2^{(\alpha+n/q-s)j} \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\ &\leq c \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_\infty^s \right\| \left\| \psi \mid B_{1,1}^{\alpha+n/q-s} \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.2.2, on a pour tout $0 < d < 1/\max(1/q, 1/q + \alpha/n)$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \sup_{x \in B(0, 2^k)} |\Delta_j f(x)| \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\
 & \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} 2^{jn/d} 2^{(n/d-n/q-\alpha)k} \left\| \Delta_j f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} \right\| \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\
 & \leq c \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s \right\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(n/d-s)j} \sum_{k=-j}^{\infty} 2^{(n/d-n/q-\alpha)k} \|\mathcal{F}^{-1} \omega_j * \psi \cdot \chi_k\|_1 \\
 & \leq c \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s \right\| \left\| \psi \mid \dot{K}_1^{n/d-n/q-\alpha,1} B_1^{n/d-s} \right\|.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 & |f(\psi)| \\
 & \leq c \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s \right\| \max \left(\left\| \psi \mid B_{1,1}^{\alpha+n/q-s} \right\|, \left\| \psi \mid \dot{K}_1^{n/d-n/q-\alpha,1} B_1^{n/d-s} \right\| \right).
 \end{aligned}$$

Par notre hypothèse sur d , nous avons $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_1^{n/d-n/q-\alpha,1} B_1^{n/d-s}$. De cette injection et l'injection suivante $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{1,1}^{\alpha+n/q-s}$, on obtient

$$|f(\psi)| \leq cp_N(\psi) \left\| f \mid \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s \right\|.$$

Ceci prouve que $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\infty}^s$ est injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Remarque 2.2.1 Si $0 < p, q, \beta < \infty, s \in \mathbb{R}$ et $\alpha + \frac{n}{q} > 0$, alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta}^s$.

Théorème 2.2.3 ([2]) Soient $\alpha_1, \alpha_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q, r, \beta \leq \infty, \alpha_1 > -n/s$ et $\alpha_2 > -n/q$. Supposons que

$$s_1 - n/s - \alpha_1 \leq s_2 - n/q - \alpha_2. \quad (2.2.2)$$

Soient $0 < q \leq s \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ou $0 < s \leq q \leq \infty$ et

$$\alpha_2 + n/q \geq \alpha_1 + n/s. \quad (2.2.3)$$

Alors

$$\dot{K}_q^{\alpha_2, \theta} B_{\beta}^{s_2} \hookrightarrow \dot{K}_s^{\alpha_1, r} B_{\beta}^{s_1}, \quad (2.2.4)$$

où

$$\theta = \begin{cases} r & \text{si } \alpha_2 + n/q = \alpha_1 + n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha_2 = \alpha_1, q \leq s \\ p & \text{si } \alpha_2 + n/q > \alpha_1 + n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha_2 > \alpha_1, q \leq s. \end{cases}$$

Preuve. Soit $f \in \dot{K}_q^{\alpha_2, \theta} B_\beta^{s_2}$. Par le Lemme 2.1.1, on trouve

$$\|\Delta_j f\|_{\dot{K}_s^{\alpha_1, r}} \leq c 2^{j(\alpha_2 + n/q - n/s - \alpha_1)} \|\Delta_j f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, \theta}},$$

où $c > 0$ est indépendante de $j \in \mathbb{N}_0$.

L'estimation demandée est une conséquence immédiate de l'estimation précédente. ■

Théorème 2.2.4 ([2]) Soient $\alpha, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q \leq \infty, s_1 - n/s \leq s_2 - n/q - \alpha$ et $0 < \beta \leq \infty$.

Si $\alpha \geq 0, 0 < q \leq s \leq \infty$ ou $\alpha + n/q \geq n/s$ et $0 < s \leq q \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha, \theta} B_\beta^{s_2} \hookrightarrow B_{s, \beta}^{s_1},$$

où

$$\theta = \begin{cases} s & \text{si } \alpha + n/q = n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha = 0, q \leq s \\ p & \text{si } \alpha + n/q > n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha > 0, q \leq s. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est une conséquence de

$$\dot{K}_s^{0, s} B_\beta^{s_1} = B_{s, \beta}^{s_1}$$

■

Corollaire 2.2.1 Soient $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q \leq \infty, s_1 - n/s \leq s_2 - n/q$ et $0 < \beta \leq \infty$.

Alors

$$B_{q, \beta}^{s_2} \hookrightarrow \dot{K}_q^{0, s} B_\beta^{s_2} \hookrightarrow B_{s, \beta}^{s_1}, \quad 0 < q \leq s \leq \infty.$$

Preuve. Pour la preuve, il suffit de remplacer dans le théorème 2.2.4, $\theta = s$ et $\alpha = 0$.

L'injection demandée est une conséquence immédiate du fait que

$$B_{q, \beta}^{s_2} = \dot{K}_q^{0, q} B_\beta^{s_2} \hookrightarrow \dot{K}_q^{0, s} B_\beta^{s_2}.$$

■

Chapitre 3

La continuité de certains opérateurs sur les espaces de Herz

Dans ce chapitre, on va étudier la continuité de certains opérateurs sur les espaces de Herz, en particulier on va étudier les opérateurs de Fourier et de Calderón-Zygmund.

Il ya des chercheurs traitent ce point par exemple S. Lu et D. Yang [3] et J. Zhou et Y. Cao [7].

3.1 La continuité de transformée de Fourier sur les espaces de Herz

L'un des problèmes centraux de l'analyse Harmonique classique est l'étude de la bornitude de la transformée de Fourier dans un espace fonctionnel donné. Ici et au-dessous, nous définissons la transformée de Fourier de $f \in L^1 \cap L^p$ par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx.$$

où $1 \leq p \leq 2$, \mathcal{F} est bornée de L^p dans $L^{p'}$. Si les espaces sont de Lebesgue ou de Herz, les résultats suivants sont prouvés.

Théorème 3.1.1 [8] Soient $1 \leq p \leq 2$ et $0 \leq \alpha < \frac{1}{p'}$, alors

1-

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f|^{p'} |x|^{-n\alpha p'} dx \right)^{1/p'} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p |x|^{n\alpha p} dx \right)^{1/p}.$$

2-

$$\|\mathcal{F}f\|_{\dot{K}_2^{-\alpha,p'}} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,p}}$$

Preuve. Pour la preuve voir [8]. ■

3.2 Décomposition atomique des espaces de Herz

La décomposition atomique joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique, c'est un outil puissant pour traiter les théorèmes de dualité, les théorèmes d'interpolation et certaines inégalités fondamentales dans l'analyse harmonique.

La décomposition atomique est l'une des méthodes les plus importantes pour étudier la bornitude de certains opérateurs sur les espaces de Herz.

Tout d'abord, nous présentons la notation de base de la décomposition atomique.

Définition 3.2.1 Soient $0 < \alpha < \infty$, $1 \leq p < \infty$. Une fonction a est dite (α, p) -atome central, si

$$(i) \text{supp } a \subset \overline{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}, r > 0.$$

$$(ii) \|a\|_p \leq |\overline{B}(0, r)|^{-\alpha/n},$$

$$(iii) \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) dx = 0, \quad |\beta| \leq s.$$

Maintenant, nous établissons des caractérisations des espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ en termes de décompositions atomiques centrales, ce qui permet d'étudier la bornitude de quelques opérateurs sur ces espaces.

Théorème 3.2.1 ([3]) Soient $0 < \alpha < \infty$, $1 \leq q < \infty$, et $0 < p < \infty$. Les deux assertions sont équivalentes

$$(i) f \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) f peut représenter par

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \tag{3.2.1}$$

où les séries sont convergentes au sens de distributions, $\lambda_k \geq 0$, chaque a_k est un (α, q) -atome central de support Contenu dans B_k et

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, les normes $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}$ et $\inf \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ sont équivalentes où le minimum pris dans toutes les décompositions de f comme dans (3.2.1).

Preuve. Nous prouvons premièrement (i) implique (ii). Pour toute $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \chi_k(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q \frac{f(x) \chi_k(x)}{2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \end{aligned}$$

où $\lambda_k = 2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q$ et $a_k(x) = \frac{f(x)\chi_k(x)}{2^{k\alpha}\|f\chi_k\|_q}$. Il est clair que $\text{supp} a_k \subset B_k$ et

$$\|a_k\|_q = 2^{-k\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, chacun a_k est un (α, q) -atome central avec le support inclu dans B_k et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}} < \infty. \end{aligned}$$

Nous montrons que (ii) implique (i). Soit $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x)$ une décomposition de f qui satisfait l'hypothèse (ii) du Théorème 3.2.1. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, Par l'inégalité de Minkowski

$$\|f\chi_j\|_q \leq \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda_k| \|a_k\|_q. \quad (3.2.2)$$

Le cas où $0 < p \leq 1$. Par (3.2.2), il s'ensuit que $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}$ est borné par

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_q \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \left(\sum_{j=k}^{+\infty} 2^{k\alpha} \|a_j\|_q \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \left(\sum_{k \leq j}^{+\infty} 2^{(k-j)\alpha} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Le cas où $1 < p < \infty$. Par l'inégalité de Hölder ($1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$), on a

$$\begin{aligned} \|f\chi_j\|_q &\leq \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda_k| \|a_k\|_q^{\frac{1}{2}} \|a_k\|_q^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=j}^{\infty} |\lambda_k|^p \|a_k\|_q^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \|a_k\|_q^{\frac{p'}{2}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p 2^{-\frac{k\alpha p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \geq j} 2^{-\frac{k\alpha p'}{2}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^p &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \|f\chi_j\|_q^p \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p 2^{-\frac{k\alpha p}{2}} \right) \left(\sum_{k \geq j} 2^{-\frac{k\alpha p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}}, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq j} 2^{-\frac{k\alpha p'}{2}} &\leq c 2^{-\frac{j\alpha p'}{2}} \sum_{k \geq j} 2^{-(k-j)\frac{\alpha p'}{2}} \\ &\leq c 2^{-\frac{j\alpha p'}{2}}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}^p &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p 2^{-(k-j)\frac{\alpha p}{2}} \right) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \left(\sum_{k \geq j} 2^{-(k-j)\frac{\alpha p}{2}} \right) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p < +\infty. \end{aligned}$$

■

3.3 La continuité des opérateurs de type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz

Dans cette section, on va étudier la continuité des opérateurs de type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz. Rappelons que un opérateur est dit opérateur de Calderón-Zygmund de noyau K s'il est borné dans L^2 et :

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund de noyau $K(x) \in \mathcal{C}^\infty$ loin de l'origine, satisfait

1. $|K(x)| \leq c|x|^{-n}$, si $x \neq 0$;
2. $\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (K(x-y) - K(x)) \right| \leq c_\beta \frac{|y|}{|x|^{n+|\beta|+1}}$ si $|x| \geq 2|y|$, où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ est un multi-
indice.

Théorème 3.3.1 ([3]) *Soit $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ et $0 < \alpha < n(1 - \frac{1}{p})$. Chaque opérateur sous-linéaire T satisfait la condition*

$$|Tf(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x|^n} dy, \quad \text{si } d(x, \text{supp } f) \geq \frac{|x|}{2} \quad (3.3.1)$$

pour toute fonction f intégrable de support compact et T est borné sur $L^q(\mathbb{R}^n)$, alors T est aussi borné sur $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ et $K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.

Dans le théorème précédent $d(x, \text{supp } f)$ est la distance minimale entre l'élément x et le $\text{supp } f$.

Preuve. Soit $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Par le Théorème 3.2.1, on écrit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x),$$

où $\lambda_k \geq 0$ et a_k est un (α, q) -atome central de support Contenu dans B_k et

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \approx \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \|(Tf)\chi_j\|_q^p \\
 &\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p + c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\
 &= c(I_1 + I_2).
 \end{aligned}$$

Estimation de I_1 . En utilisant (3.3.1) on trouve

$$\begin{aligned}
 \|(Ta_k)\chi_j\|_q^q &\leq \int_{R_j} \frac{|Ta_k(y)|^q}{|x|^{nq}} dy \\
 &\leq \int_{R_j} |x|^{-nq} \left(\int_{B_k} |a_k(y)|^q dy \right) dx \\
 &\leq c2^{-nqj} c2^{nkq} \int_{B_k} |a_k(y)|^q dy \\
 &\leq c2^{n(k-j)(q-1)} \times 2^{n(k-j)} \times 2^{-\alpha kq} \\
 &\leq c2^{n(k-j)(q-1)} \times 2^{-\alpha kq} \text{ car } k \leq j
 \end{aligned}$$

Si $0 < p \leq 1$ et $0 < \alpha < n(1 - \frac{1}{q})$, on a

$$\begin{aligned}
 I_1 &= c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\
 &\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k|^p 2^{n(j-k)(1-\frac{1}{q})p} 2^{-\alpha kp} \\
 &= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \sum_{j \geq k+2} 2^{-(j-k)(n-\frac{n}{q}-\alpha)p} \\
 &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p.
 \end{aligned}$$

Si $1 < p < +\infty$ et $0 < \alpha < n(1 - \frac{1}{q})$, d'après le cas précédent, on a

$$\|(Ta_k)\chi_j\|_q^q \leq c2^{n(j-k)(q-1)} \times 2^{-\alpha kq},$$

par l'inégalité de Hölder ($1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$), on trouve

$$\begin{aligned}
I_1 &= c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k| 2^{n(j-k)(q-1)} \times 2^{-\alpha k q} \right)^p \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k|^p \times 2^{(j-k)(\frac{n}{q}-n-\alpha)\frac{p}{2}} \right) \times \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} 2^{(j-k)(\frac{n}{q}-n-\alpha)\frac{p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k|^p 2^{(j-k)(\frac{n}{q}-n-\alpha)\frac{p}{2}} \right) \\
&= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \left(\sum_{j \geq k+2} 2^{-(j-k)(n-\frac{n}{q}-\alpha)\frac{p}{2}} \right) \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Estimation de I_2 . De la manière on distinguait deux cas comme suit:

Si $0 < p \leq 1$, on utilisant la continuité de T sur $L^q(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
I_2 &= c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p \|a_k\|_q^p \right) \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p 2^{-\alpha k p} \right) \\
&= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \left(\sum_{j \leq k+1} 2^{(j-k)\alpha p} \right) \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$, par l'inégalité de Hölder ($1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$) et la continuité de T sur $L^q(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
I_2 &= c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k| \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p \|(Ta_k)\chi_j\|_q^{\frac{p}{2}} \right) \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} \|(Ta_k)\chi_j\|_q^{\frac{p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p \|a_k\|_q^{\frac{p}{2}} \right) \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} \|Ta_k\|_q^{\frac{p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p 2^{-\frac{\alpha k p}{2}} \right) \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} 2^{-\frac{\alpha k p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{j\alpha p}{2}} \left(\sum_{k=j-1}^{+\infty} |\lambda_k|^p 2^{-\frac{\alpha k p}{2}} \right) \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \left(\sum_{j \leq k+1} 2^{(j-k)\frac{\alpha p}{2}} \right) \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Estimation de I_1 et I_2 , donne

$$\|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui termine la preuve. ■

Soit T un opérateur sous-linéaire satisfait la condition

$$|Tf(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \quad x \notin \text{supp } f \quad (3.3.2)$$

pour des fonctions f intégrables de support compact.

Théorème 3.3.2 ([3]) Soient $1 < q < \infty$, $0 < p < \infty$ et $0 < \alpha < n(1 - \frac{1}{q})$. Chaque opérateur sous-linéaire T satisfait la condition (3.3.2) est un opérateur borné sur $L^q(\mathbb{R}^n)$ et aussi borné sur $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ et $K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.

Preuve. La preuve du théorème 3.3.2 est une conséquence du théorème [3]. ■

Remarque 3.3.1 *La condition (3.3.2) est satisfaite par plusieurs opérateurs classiques dans l'analyse Harmonique, comme l'opérateur de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal de Carleson et l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood. Alors on conclut que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont des opérateurs bornés sur les espaces de Herz.*

Conclusion

La transformée de Fourier et tout opérateur sous-linéaire T satisfait la condition suivante

$$|Tf(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \quad x \notin \text{supp } f$$

sont bornés sur les espaces de Herz.

Un exemple sur cette classe d'opérateurs satisfait la condition précédente : l'opérateur de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal de Carleson et l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood.

Bibliographie

- [1] A. Almeida and D. Drihem, Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, *J. Math. Anal Appl.* 394(2012), 781-795.
- [2] D. Drihem, Embeddings properties on Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, *Math. Ineq and Appl.* 16 (2013), 439-460.
- [3] S. Lu and D. Yang, The decomposition of weighted Herz space on \mathbb{R}^n and its applications, *Sci. China (Ser. A)*. 38 (1995), 147-158.
- [4] S. Lu, D. Yang and G. Hu, Herz Type Spaces and Their Applications, Beijing: Science Press, 2008.
- [5] H. Triebel, Theory of function spaces, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
- [6] J. Xu and D. Yang, Herz-type Triebel-Lizorkin spaces I, *Acta Math. Sci (English) (Ed.)* 21 (2005), 643-654.
- [7] J. Zhou and Y. Cao, The boundedness of Fourier transform on the Herz type amalgams and Besov spaces, *Ineq and Appl.* 296 (2014).
- [8] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, *J.Math.Mech* 18 (1968), 283-324.

ملخص المذكرة :

في هذه المذكرة درسنا فضاءات هارز-بيزوف حيث قمنا بدراسة بعض الخصائص الاساسية في هذه الفضاءات (مثل دراسة الاحتواءات المستمرة في هذه الفضاءات).

وفي نهاية المذكرة تطرقنا الى دراسة محدودية مؤثرات فوريي ومؤثرات من نوع كالدرون زيجموند.

الكلمات المفتاحية

فضاءات هارز, فضاءات بيزوف, فضاءات هارز-بيزوف, مؤثرات من نوع كالدرون زيجموند

Résumé de mémoire :

Dans ce mémoire nous avons étudié les espaces de Herz type Besov, où nous avons discuté quelques propriétés de base dans ces espaces (par exemple l'étude des injections entre ces espaces).

A la fin de mémoire nous avons parlé de la continuité de transformée de Fourier et la continuité des opérateurs de type Caldéron Zygmund sur l'espace de Herz.

Mots clés :

Espaces de Herz, Espaces de Besov, Espaces de Herz type Besov, les opérateurs de type Caldéron-Zygmund .

Abstract of thesis :

In this thesis, we studied Herz-Besov spaces, where we studied some basic properties of these spaces (for exemple the continuous embeddings on this spaces).

Finally we studied the boundedness of Fourier and the operator of Calderon Zygmund.

Key words:

Herz spaces, Besov spaces, Herz type Besov, operator of Calderon Zygmund.