

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE de Technologie
DEPARTEMENT de Génie Mécanique



DOMAINE : Science Technologique
FILIERE : Génie Mécanique
OPTION : Construction Mécanique

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par :

Aimeur Noureddine

Intitulé

Etude dynamique d'un rotor par éléments finis

Soutenu devant le jury composé de :

Zaoui M	Université de M'sila	Président
Amroune S	Université de M'sila	Examineur
Menasri N	Université de M'sila	Encadreur
Douib N	Université de M'sila	Co-encadreur

Année universitaire : 2018/2019

Remerciements

La thèse est une période pleine d'enseignements, de découvertes, de remises en question, d'espoirs, de difficultés et de rencontres. Ces toutes ces choses qui font la richesse d'une thèse.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'avancement de mes travaux de recherche.

Je remercie profondément mon directeur de recherche, Mr Menasri.N, pour avoir accepté de diriger mes travaux et pour m'avoir guidé tout au long du mémoire pour ses conseils, ses critiques et son attitude exemplaire tout au long de la réalisation de ce travail de recherche, je remercie aussi tout le personnel du département du génie mécanique de l'université de Msila

Ensuite je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury pour le temps et l'énergie qu'ils ont dédiés à la lecture et à la correction de mon manuscrit.

Enfin. Je tiens à remercier tous les membres de ma famille mes amis pour leur appui moral surtout ma mère. Mon père. Je leur serai reconnaissant toute ma vie.

Sommaire

Remerciement

Sommaire

Liste des Figures

Liste Des Tableaux

Introduction générale.....1

Chapitre I : généralité

I.1. Introduction.....3

I.2. Revue aux modelés du rotor Rankine et jeffcott3

I.3. Définition du rotor7

 I.3.1. Disque.....7

 I.3.2. Arbre.....7

 I.3.3. Palier7

 I.3.4. Balourd8

I.4. Historique de la M.E.F :.....8

I.5. Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale9

Chapitre II : Modélisation des systèmes des rotors

Introduction 10

II.1 Modélisation du rotor..... 10

 II.1.1. Le disque..... 11

 II.1 .2 l'arbre 13

 II.1 .2 .1 l'énergie cinétique..... 13

 II.1.2.2 Energie de déformation 14

 I.1.3 paliers 17

 II.1.4 Le balourd 18

II.2 Modèle simple..... 20

 I.2.1. Description du modèle 21

 I.2.2 Elément de disque 22

 I.2.3 Elément de l'arbre 23

 I.2.4. Paliers à roulement 23

 I.2.5. Balourd 24

I.2.6. Equation du mouvement	24
I.2.7 validation du modèle	24
I.2.7.1 Modèle symétrique.....	27

Chapitre III : Modélisation par éléments finis

Introduction	33
III.1 Expressions des énergies des éléments du rotor	33
III.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor.....	34
III.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor.....	34
III.2 Formulation matricielle.....	35
III.2.1 Formulation matricielle des équations du disque	35
III.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre	36
L'énergie cinétique.....	38
L'énergie de déformation.....	40
III.2.3 Formulation matricielle des équations du palier.....	41
III.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd.....	42
III.3 Exemple de Montage de Matrices Globales	42
Matrice globale classique de masse	43
Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation	43
Matrice globale représentant l'effet gyroscopique	44
Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation.....	44
Matrice du palier.....	45
Matrice du balourd.....	45

Chapitre IV : Simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor (FAN 280) par élément finis (ANSYS)

IV.1. Description du ventilateur de tirage :	47
IV.1.1. Caractéristique technique de ventilateur	49
IV.1.2. Principe de Fonctionnement :	50
IV.2. La conception du ventilateur FN 280 par l'logiciel	51
IV.3. Modélisation des rotors par élément finis	54
IV.3.1. Eléments finis de rotor	55
IV.3.1.1. Disque	55
IV.3.1.2. Arbre.....	55
L'énergie cinétique :.....	55
L'énergie de déformation.....	56

IV.3.1.3. Paliers	57
IV.3.2. Système d'équations	57
IV.3. Analyse modale du ventilateur par logiciel Workbench ANSYS 15	58
IV.3.1. Caractéristique géométrique et mécanique de rotor	58
Propreté géométrique	58
Propreté mécanique	58
IV.3.2. Génération et maillage de la géométrie de rotor	58
IV.3.3. Les conditions aux limites	59
IV.3 : Résultant de simulation numérique	60
IV.3.1 : Le déplacements et les fréquences.....	60
IV.3.2 : L'évolutions des contraintes des modes déformés.....	66
IV.3.3 : Diagramme de Campbell.....	69
Conclusion générale	
Référence	

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Les données techniques de Ventilateur

Tableau IV.2 : Les Données techniques de Moteur

Tableau.IV.3 : Maillage du rotor

Tableau IV.4 : vitesses de rotation en fonctionnement de Ω

Tableau IV.5 : hypothèse de palier

Introduction générale

Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces maîtresses des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Parmi leurs fonctions on peut citer la transmission de puissance ou la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique.

L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse réparties tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. Pour cela des types variés de vibrations apparaissent dans ce système mécanique et souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération.

L'analyse dynamique des corps continus en rotation s'impose donc car la connaissance précise du comportement vibratoire est indispensable pour assurer un bon fonctionnement.

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus. Cependant, les problèmes vibratoires liés à leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception. Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur fonctionnalité et leur rentabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après modifier la conception pour les changer afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient. La dynamique des rotors a été développée pour surmonter ces difficultés techniques. L'arbre ou le rotor est la partie tournante d'une machine. Si sa déformation est négligeable pour des vitesses dans la gamme d'opération on dit qu'il est rigide. Par contre, s'il se déforme appréciablement à certaines vitesses de la gamme d'opération on dit qu'il est flexible.

Le comportement dynamique des arbres et des rotors est principalement dû aux vibrations de flexion qui peuvent être excités par plusieurs différentes causes. L'une des causes les plus connues est l'excentricité du centre de gravité quand on appelle le balourd. Avec ce dernier, on a une distribution de déséquilibre tout le long de l'arbre ou le rotor. Généralement, il y a aussi des vibrations

Introduction générale

de torsions qui peuvent concerner le comportement dynamique de tels systèmes, mais pour ce travail on s'intéresse principalement aux problèmes directs des vibrations de flexion.

Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation du rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou des disques. Dans le cas de la dynamique de l'ensemble, le repère fixe est le plus approprié.

La mise en équation est effectuée par le Lagrangien. Ces équations comportent ainsi de nombreux non-linéarités. Pour l'étude dynamique des rotors, l'hypothèse de petits déplacements est classiquement avancée, on suppose que la vitesse de rotation est constante où il s'agit d'une fonction connue du temps, cela permet d'obtenir les équations de mouvement linéaire.

Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation et le calcul des réponses à balourd lors du passage des vitesses critiques.

Pour réaliser ces études, on dispose aujourd'hui de nombre outils de modélisation, parmi eux la méthode des éléments finis qui prend en considération les particularités que présente la dynamique des rotors par rapport à la dynamique des structures fixes. On peut citer par exemple l'existence des moments gyroscopiques responsable de la variation de la fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation ou celle de forces circulaires qui rend le mouvement instable à partir de certaine vitesse dans le cadre purement linéaire.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude du comportement dynamique vibratoire d'un rotor (ventilateur de tirage ciment). Il comprend une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Les notions de base de la dynamique des rotors sont exposées dans le premier chapitre. Dans le deuxième chapitre on expose modélisation des systèmes des rotors. Dans celui-ci le phénomène du tournoisement est expliqué et la notion de vitesse critique est introduite. Les vibrations latérales du modèle élémentaire de Laval / Jeffcott sont étudiés sans paliers ensuite avec des paliers isotropiques puis anisotropies.

Le développement de la modélisation par éléments finis est exposé dans le troisième chapitre. Dans celui-ci on présente la procédure et les moyens pour faire une étude précise de l'analyse du comportement vibratoire des arbres ou des rotors avec un exemple de modèle de rotor pour montrer le montage de la matrice globale.

Dans le quatrième chapitre, on développe la simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor (FAN 280) par élément finis en utilisant le code de calcul ANSYS WORKBENCH. Enfin, on termine par une conclusion générale avec des suggestions pour des travaux futurs.



CHAPITRE I

I.1. Introduction

L'étude du comportement dynamique et vibratoire des rotors occupe une place importante dans l'histoire de la science, notamment dans la dynamique des structures et des machines. Il est considéré parmi les phénomènes les plus complexes dont la modélisation et la simulation exigent des moyens numériques très efficaces et rapides ; ainsi que la réalisation des expériences et des essais plus performants.

Le comportement dynamique et vibratoire des rotors a été étudié en détail, depuis les premiers travaux fondateurs de Rankine. Depuis ces premières tentatives, nous avons rassemblé plusieurs travaux traitant ce type de phénomène. Ce problème continue d'attirer l'attention des ingénieurs, chercheurs et savants jusqu'à nos jours malgré le nombre considérable de travaux théoriques, expérimentaux et numériques qui lui ont été consacrés.

Dans ce chapitre, on propose d'examiner quelques travaux (les plus importants) afin de préciser notre contribution dans l'ensemble des recherches consacrées à ce type de phénomène.

I.2. Revue aux modèles du rotor Rankine et Jeffcott

La dynamique de rotor a une histoire remarquable de développement, en grande partie due à l'effet entre sa théorie et sa pratique (Nelson, 2003). La dynamique de rotor a été conduite plus par la pratique que par théorie. Ce rapport est particulièrement approprié à l'histoire des débuts de la dynamique de rotor. La recherche sur la dynamique industrielle de rotor enjambe plus de 15 décennies de l'histoire. Rankine (1869) a exécuté la première analyse d'un axe de rotation (**voir la figure I.1**). Il a prévu cela au-delà d'une certaine vitesse de rotation, Il a défini cette certaine vitesse en tant que vitesse de tourbillonnement de l'axe.

En fait, il peut montrer qu'au-delà de cette vitesse de tourbillonnement le débattement radial du modèle de Rankine augmente sans limite, qui n'est pas vraie dans la réalité. Cependant, Rankine a ajouté le tourbillonnant au vocabulaire de dynamique de rotor.

Le tourbillonnement se rapporte au mouvement du centre du disque guidé (ou des disques) dans une perpendiculaire d'avion à l'axe de roulement (**voir la figure I.2**).

Généralement la fréquence du mouvement giratoire, ν , dépend de la rigidité et de l'atténuation du rotor, comme avec le cas de la vibration libre d'un système. L'amplitude de mouvement giratoire est une fonction de la fréquence de la force d'excitation et sa grandeur ω . La vitesse critique ω_{cr} se

produit quand la fréquence d'excitation coïncide avec la fréquence normale (transversale) ω_{nf} du rotor.

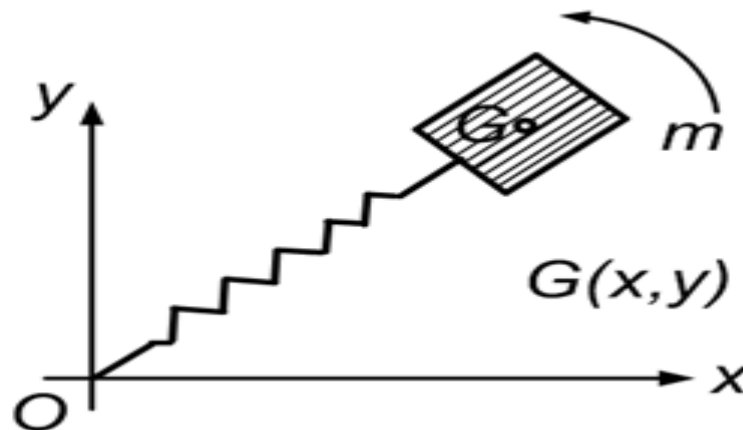


Figure I.1 : Modèle de rotor Rankine.[1]

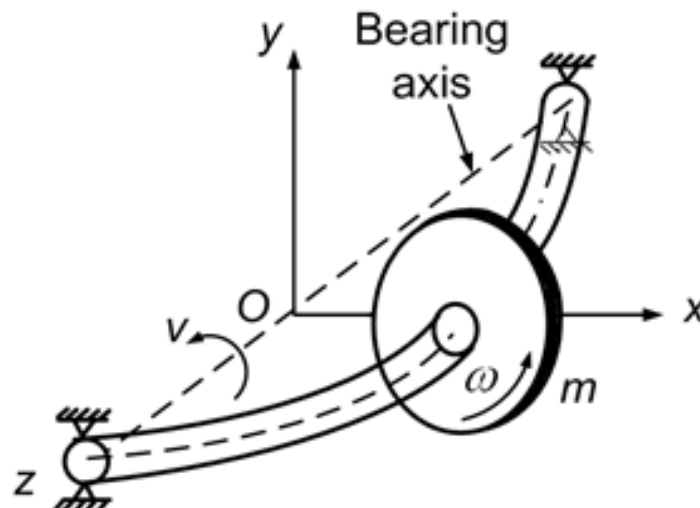


Figure I.2 : Modèle de rotor Jeffcott.[1]

Le système peut mener aux amplitudes excessives de vibration. Rankine a négligé l'accélération de Coriolis dans son analyse, qui a mené à des conclusions incorrectes qui ont confondu les ingénieurs de pratique pour la moitié par siècle. La turbine construite par Parsons en 1884 (Parsons, 1948) a fonctionné aux vitesses d'environ 18.000 t/mn, qui était 50 fois plus rapidement que le moteur existant à ce moment-là. En 1883, l'ingénieur suédois de Laval a développé une turbine à vapeur en une seule étape d'impulsion (**voir la figure I.2**) (baptisée du nom de lui) pour des applications marines et réussi à l'actionner à 42.000 t/mn. Il a visé le d'auto-centrage du disque au-dessus de la vitesse critique (**voir la figure I.3 et figure I.4**), un phénomène qu'il a instinctivement identifié. Il a utilisé la première fois un rotor rigide, mais plus tard a utilisé un rotor flexible et a prouvé qu'il était possible d'utiliser au-dessus de la vitesse critique par le fonctionnement à une vitesse de rotation environ sept fois la vitesse

critique (Stodola, 1924). Afin de calculer les vitesses critiques des axes cylindrique avec plusieurs disques et roulements, la théorie générale de Reynolds (Dunkerley, 1895) a été appliquée. L'effet gyroscopique a été également a été appliquée. L'effet gyroscopique a été également considéré, ainsi que sa dépendance à l'égard de la vitesse c.-à-d. diagramme de Campbell (voir la figure I.5). Le diagramme de Campbell est conçu pour montrer la fréquence de mouvement giratoire de rotor (la fréquence normale) avec la vitesse de rotation, de l'axe. Dans les rotors la fréquence de mouvement giratoire de rotor change avec la vitesse due à de diverses raisons (par exemple : Effets gyroscopiques, paramètres vitesse-dépendants de roulement, etc.).

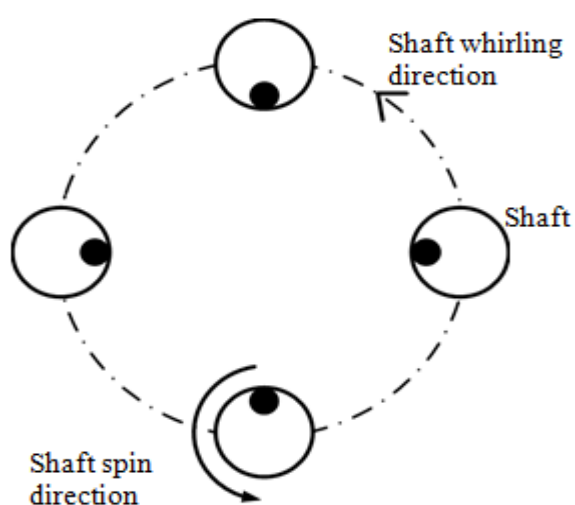


Figure I.3 : Tourbillon synchrone.[1]

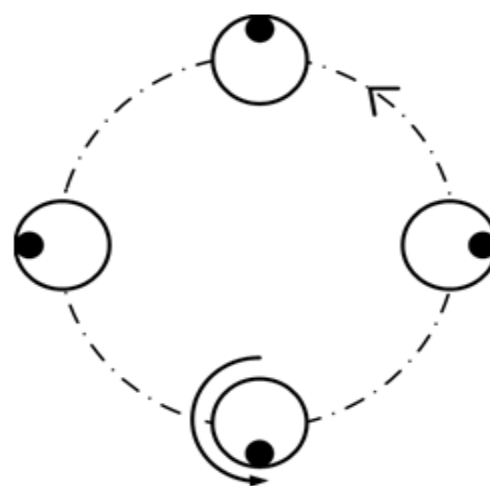


Figure I.4: Tourbillon synchrone.[1]

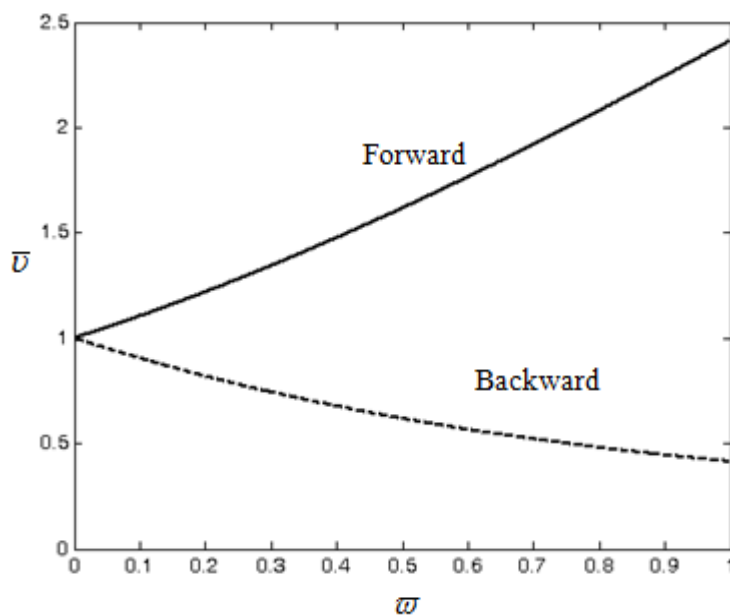


Figure I.5 : diagramme typique de Campbell.[1]

Cependant, ceci peut être employé pour obtenir des vitesses critiques des rotors (intersections des courbes de fréquence de mouvement giratoire avec rayez, par exemple, à la résonance quand la fréquence de mouvement giratoire est égale à la vitesse de rotation). Indépendamment de cette fréquence de mouvement giratoire, la décroissance logarithmique est également montrée dans le diagramme de Campbell, et le signe de celui montre étape stable/instable du rotor. Aujourd'hui plus d'information est mise dans ces graphiques, qui sont maintenant s'appellent le diagramme de Lee (Lee, 1993). Le diagramme de Campbell peut être tiré d'analyses théoriques/numériques aussi bien que par la mesure réelle de la machine. Dunkerley a trouvé par de nombreuses mesures que le rapport connu aujourd'hui par le travail de Southwell, par lequel la première vitesse critique peut être calculée, même pour le cas d'un rotor de multi-degré de liberté Dunkerley était le premier pour employer le vitesse critique de limite la vitesse de rotation de résonance. Même avec la connaissance générale des vitesses critiques, le comportement d'axe à n'importe quelle vitesse générale était encore peu clair, mais plus a été appris du calcul des vibrations de déséquilibres, comme indiqué par Föppl (1895). Il avait l'habitude un modèle sec pour prouver qu'un disque non équilibré tourbillonnerait synchroniquement avec (montré comme tache noire) le vol latéral lourd dehors (**voir Figure I.3**) quand la rotation était sous-critique et avec le vol latéral lourd dans (**voir Figure I.4**) quand la rotation était supercritique. En outre le comportement des rotors de Laval aux vitesses élevées a été confirmé par sa théorie. Des ingénieurs à ce moment-là ont été confondus par les concepts égalisant la vitesse de tourbillonnement de Rankine avec la vitesse critique de Dunkerley. Ceci frustrait en particulier parce que Rankine était bien davantage d'une autorité que Dunkerley, en conséquence, ses prévisions ont été largement acceptés et étaient responsables de décourager le développement des rotors à grande vitesse pendant presque 50 années. C'était en Angleterre en 1916 que les choses se sont terminées. Kerr a édité l'évidence expérimentale qu'un deuxième Vitesse critique existe et il était évident à tous qu'une deuxième vitesse critique pourrait seulement être atteinte par le coffre-fort traversal de la première vitesse critique. La théorie fondamentale d'abord enregistrée de dynamique de rotor peut être trouvée dans un papier classique par Jeffcott en 1919. Jeffcott a confirmé la prévision de Föppl qu'une solution supercritique stable a existé, et il a prolongé l'analyse de Foppl en incluant l'atténuation externe (c.-à-d. atténuant les forces qui dépendent seulement de la vitesse absolue du rotor, tandis que l'atténuation interne vient du taux de déformation de l'axe, a souvent appelé l'atténuation tournante) et a prouvé que la phase de la tache lourde change sans interruption pendant que le taux de rotation traverse la vitesse critique. Nous pouvons apprécier les grandes contributions de Jeffcott si nous nous rappelons qu'un axe flexible de la masse négligeable avec un disque dur au midspan s'appelle un rotor de Jeffcott (**voir la figure I.2**). Les roulements sont rigidement soutenus,

et l'atténuation visqueuse agit de s'opposer au mouvement absolu du disque. Ce modèle simplifié s'appelle également le rotor de Föppl de rotor de Laval, baptisé du nom de Laval et de Föppl, respectivement.[1]

I.3. Définition du rotor

Le rotor d'une turbomachine est constitué de l'arbre, le disque, le balourd, les paliers et l'aube. Ces éléments sont visibles à la (voir la figure I.6).

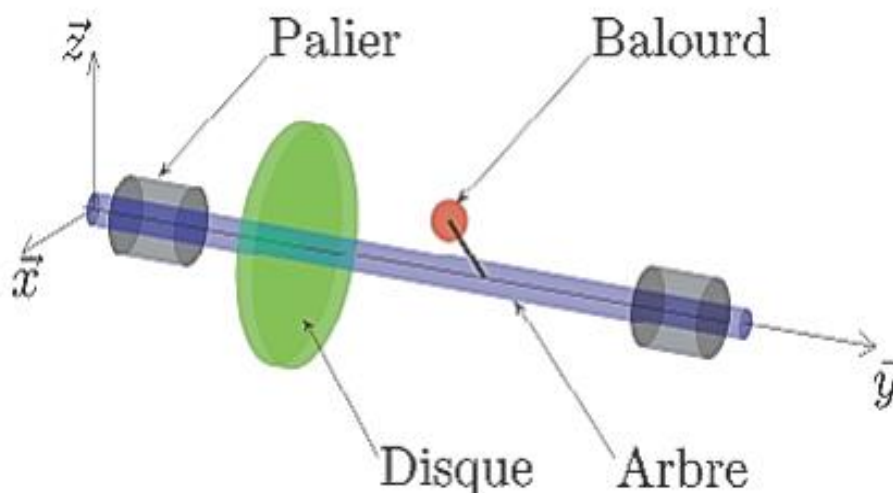


Figure I.6 : Description du rotor.[2]

I.3.1. Disque

La roue peut être modélisée par un disque, il peut être déformable ou rigide. Une roue peut être représentée géométriquement sous forme cylindrique ; mais dans l'analyse dynamique, cette forme s'avère limitée

I.3.2. Arbre

C'est un organe qui porte les roues. Il peut être rigide ou flexible, ces propriétés dépendent de son matériau. L'arbre est considéré déformable dans l'analyse dynamique, cela permet de tenir compte des effets des déformations. Géométriquement, la section de l'arbre peut être constante ou variable. L'étude en flexion devient complexe pour l'arbre à section variable du fait que le mouvement est décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients variables dont les solutions sont les fonctions de Bessel. [2]

I.3.3. Palier

Le palier est aussi appelé support, il peut être flexible (isotrope ou anisotrope) ou rigide. Le palier constitue un système de dissipation ou non lorsque la flexibilité est anisotrope. [2]

I.3.4. Balourd

Le balourd est toute masse excentrée m_b d'un rotor. Il est localisé en une distance d du centre de géométrie de l'arbre comme montré à la **Figure I.7**

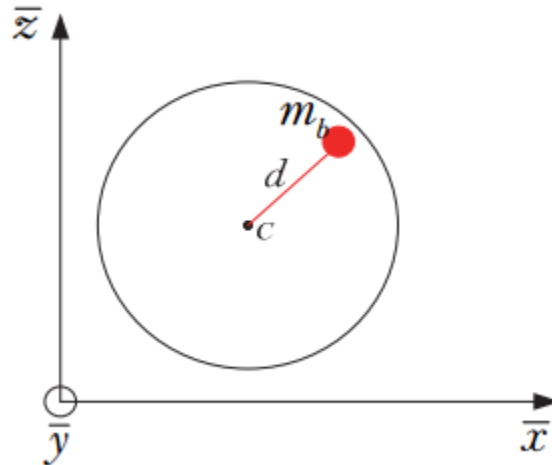


Figure I.7. Élément de balourd. [2]

I.4. Historique de la M.E.F :

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formation énergétique de la mécanique des structures dont la formulation des théorèmes énergétiques de l'élasticité a été effectuée au siècle dernier, en 1819 NAVIER définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité par MAX WELL en 1864 et CASTIGLIANO en 1878. [5] Et d'autres part les méthodes d'approximation, c'est au début du 20^{ème} siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ en 1902 et de GARLEKIN en 1915 puis en 1943 COURANT établit les bases de la M.E.F. En 1954 DENKE systématise la méthode des forces. En fin de 1955 AGURIS présente une approche unifiée des méthodes de déplacement et des forces, puis l'année suivante TURNER et CLOUTH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements, ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes

Dès lors, on laisse au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques. Par ailleurs le domaine d'application de la M.E.F limité au début à la statique linéaire s'étend maintenant à la dynamique. Cette histoire perçut incomplète si l'on omet de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse (encore appelés codes généraux), à partir des

années 60, ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement abouti à faire rentrer la M.E.F dans la pratique industrielle. Il est certain que d'une part, la M.E.F se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires) et que d'autre part, la M.E.F se caractérise par son universalité et son adoptabilité au traitement des problèmes les plus divers. [3]

I.5. Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale

La M.E.F dans l'analyse structurale est une technique qui se base primordialement sur l'idée de décomposer la structure en un ensemble (ou en sous-ensemble) de différents composants, ayant chacun un modèle géométrique avec des propriétés physiques particulières.

Notant que la structure peut être continue telle que les plaques, ou ayant par sa nature une forme discrète telle que les treillis. Chaque modèle de composants de la structure est connu comme un type spécifique d'élément fini. Chaque élément fini a une forme structurale bien déterminée et il est interconnecté avec les éléments qui lui sont adjacents par des nœuds ou « Points nodaux ». Les forces agissantes en chaque nœud sont dites « Forces nodales ». L'élément est sujet de déplacements ou rotations aux nœuds, appelés « Degrés de liberté ». [4]



Chapitre II

Chapitre II : Modélisation des systèmes des rotors

Introduction

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développés. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange.

La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base.

II.1 Modélisation du rotor

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle éléments finis à usage plus général.

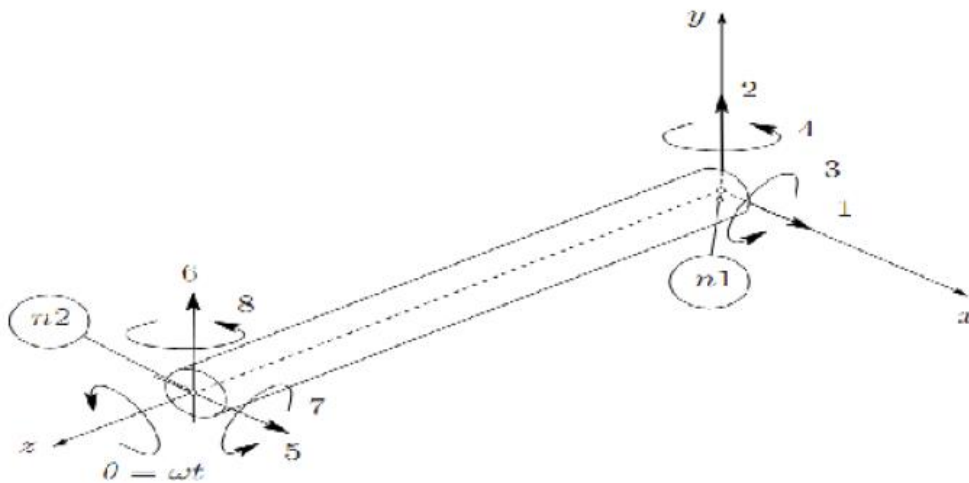


Figure II.1 Exemple de rotor

Les éléments de base des rotors sont l'arbre les disques et les palies. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (**figure II.1**)

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes

➤ L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U , et le travail virtuel δW sont calculés pour tous les éléments de système.

➤ Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée au se systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.

➤ Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (\text{II.1})$$

N ($1 \leq i \leq N$) représente le nombre de degrés de liberté.

q_i : sont les coordonnées généralisées indépendantes.

F_{q_i} : est le vecteur forces généralisées.

II.1.1. Le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient

R_0 (X, Y, Z) un repère fixe et R (x, y, z) un repère tournant lié au disque (**figure II.2**). Le système de coordonnées x, y et z est relié au système de coordonnées X, Y et Z par l'intermédiaire des angles θ_x, θ_y et θ_z . Pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle θ_z autour de l'axe Z , puis d'un angle θ_x autour du nouvel axe x , noté x_1 , en fin d'un angle θ_y autour de l'axe de rotation propre du disque y .

Le vecteur de rotation instantanée traduisant la position du repère R s'écrit

$$\omega_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (\text{II.2})$$

Où $\vec{Z}, \vec{x}_1, \vec{y}$ sont les vecteurs unitaires suivant les axes $\vec{OZ}, \vec{Ox}_1, \vec{Oy}$.

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse O est calculée dans le repère tournant R. le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (II.3)$$

ω_x, ω_y Et ω_z étant les composants du vecteur de rotation instantanée suivant \mathbf{x}, \mathbf{y} et \mathbf{z} . soient \mathbf{u} et \mathbf{w} les coordonnées du centre du disque \mathbf{O} suivant \mathbf{OX}, \mathbf{OZ} dans \mathbf{R}_0 les coordonnées suivant \mathbf{OY} restant constante. la masse de disque et \mathbf{m}_d , le tenseur d'inertie est noté :

$$\mathbf{I}_{/O} = \begin{bmatrix} I_{dx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{dy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (II.4)$$

I_{dx}, I_{dy} et I_{dz} sont le moment d'inertie suivant les axes \mathbf{X}, \mathbf{Y} et \mathbf{Z} .

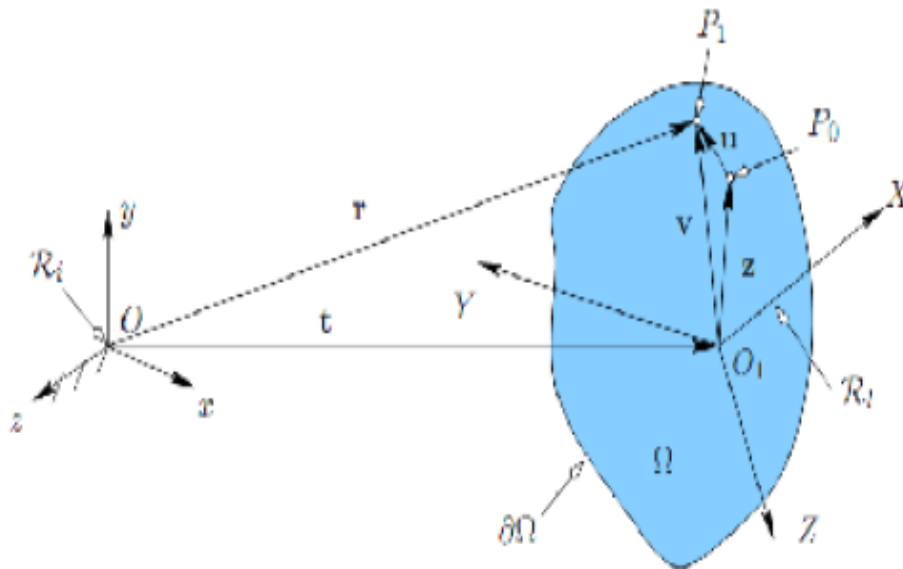


Figure II.2 : repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque T_d s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} \mathbf{m}_d (\dot{\mathbf{u}}^2 + \dot{\mathbf{w}}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (II.5)$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique $I_{dx} = I_{dz}$.

Lorsque les angles θ_x et θ_z sont petits et la vitesse angulaire constante $\theta_y = \Omega$ l'équation (I.5) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (\text{II.6})$$

$\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$: Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque .il n'a pas d'influence sur équation du mouvement.

$\frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$: Énergie cinétique d'un élément en translation dans plan.

$\frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_z^2)$: énergie cinétique de rotation de l'élément autour des axes x et z

$I_{dy} \Omega \dot{\theta}_z \theta_x$: effet gyroscopique (Coriolis)

II.1 .2 l'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par son énergie cinétique et potentielle.

II.1 .2 .1 l'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque équation (II.6). Pour un élément de longueur L de section droit constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega I_a \left[\theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (\text{II.7})$$

ρ : Est la masse volumique

S_a : Est la section

I_a : Est le moment d'énergie transverse

J_a : Est le moment d'inertie polaire

La première intégrale de l'équation (II.7) correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

II.1.2.2 Energie de déformation

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, (en néglige les effets de cisaillement). Les notations suivantes sont utilisées (figure II .3)

C Est le center géométrique de l'arbre, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ est un point typique de section, \mathbf{E} est le module d'Young du matériau, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ représentent la déformation et la contrainte, \mathbf{u}^* et \mathbf{w}^* sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes \mathbf{x} et \mathbf{z} (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droit s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.

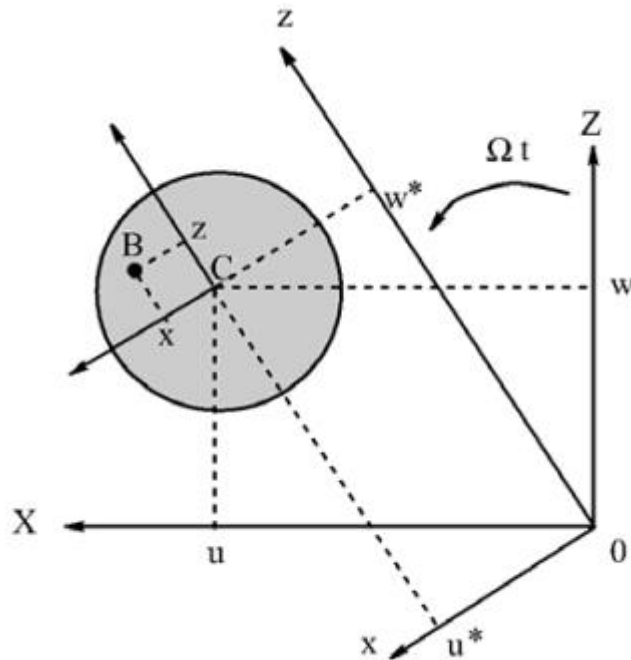


Figure II.3 : coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnée \mathbf{x} et \mathbf{z} dans \mathbf{R} est $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}$

avec :

Déformation linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = -\mathbf{x} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - \mathbf{z} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{II.8})$$

Déformation non linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.9})$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t [\boldsymbol{\sigma}] d\boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.10})$$

Où $\boldsymbol{\tau}$ est le volume de l'arbre et $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte de flexion.

La relation entre contraintes et déformations est : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_l^2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_l \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}) d\boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.11})$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes \mathbf{x} et \mathbf{y}

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \boldsymbol{\varepsilon}_l d\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Le troisième terme de l'intégrale (II.11) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (II.8)

$$\int_V \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-\mathbf{x} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - \mathbf{z} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{II.13})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(\mathbf{x}^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \mathbf{z}^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mathbf{x}\mathbf{y} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (\text{II.14})$$

Par symétrie, le troisième terme de (II.14) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_S \mathbf{z}^2 dS$$

$$I_z = \int_s x^2 dS \quad (\text{II.15})$$

$$\int_s xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.16})$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de \mathbf{U} et \mathbf{W} composantes du déplacement dans \mathbf{R}_0 . Le passage de \mathbf{u}^* , \mathbf{w}^* à \mathbf{u} , \mathbf{w} s'écrit (Figure II.3) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \cos \Omega t - \mathbf{w} \sin \Omega t \\ \mathbf{w}^* = \mathbf{u} \sin \Omega t + \mathbf{w} \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant \mathbf{u}^* et \mathbf{w}^* par leurs valeurs (II.17) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_s \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left(\cos^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^{-1} \Omega t \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u \partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + \\ I_s \left(\sin^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u \partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Pour un arbre symétrique où ($I_x = I_z = I_a$) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z (\cos^{-1} \Omega t + \sin^{-1} \Omega t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (\sin^{-1} \Omega t + \cos^{-1} \Omega t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \quad (\text{II.20})$$

Finalement :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (\text{II.21})$$

I.1.3 paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (Figure II.4). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère \mathbf{R}) par rapport au support (repère \mathbf{R}_s). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère \mathbf{R}_s par rapport au repère \mathbf{R}_0 . Le travail virtuel δW_p des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -K_{xx} u \delta u - K_{xz} w \delta u - K_{zx} u \delta w - K_{zz} w \delta w - C_{xx} \dot{u} \delta u - C_{xz} \dot{w} \delta u - C_{zx} \dot{u} \delta w - C_{zz} \dot{w} \delta w \quad (\text{II.22})$$

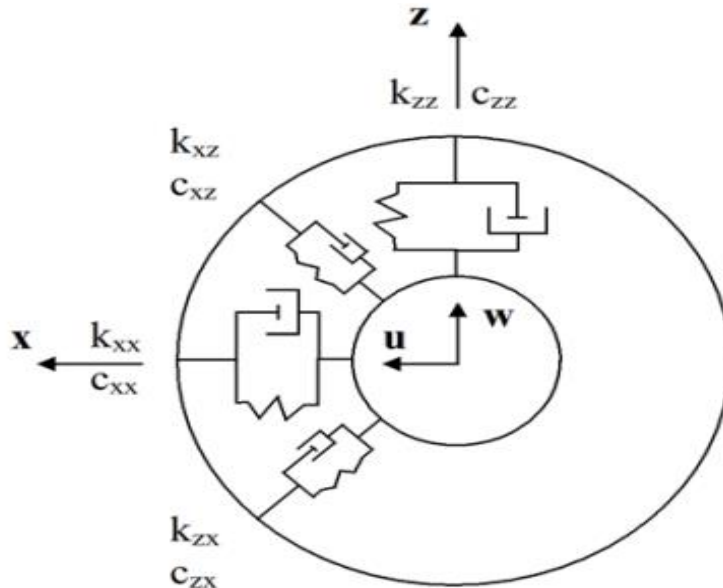


Figure II.4 : Amortissement et raideur des paliers

Où sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (\text{II.23})$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (Figure II.4). En utilisant les deux équations (II.22) et (II.23) il vient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Remarque :

Ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère R. ces dernières ne font intervenir que K_{xx} et K_{zz} sont

Obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

$$W_p = -K_{xx}(u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t)(\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) - K_{zz}(-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t)(-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \quad (\text{II.25})$$

$$\delta W_p = - \left[(K_{xx} \cos^{-1} \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) w^* \right] \delta u^* - \left[(K_{xx} \sin^{-1} \Omega t + K_{zz} \cos^{-1} \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) u^* \right] \delta w^* \quad (\text{II.26})$$

L'équation (II.26) montre que, si $K_{xx} \neq K_{zz}$ la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

II.1.4 Le balourd

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (**figure II.5**)

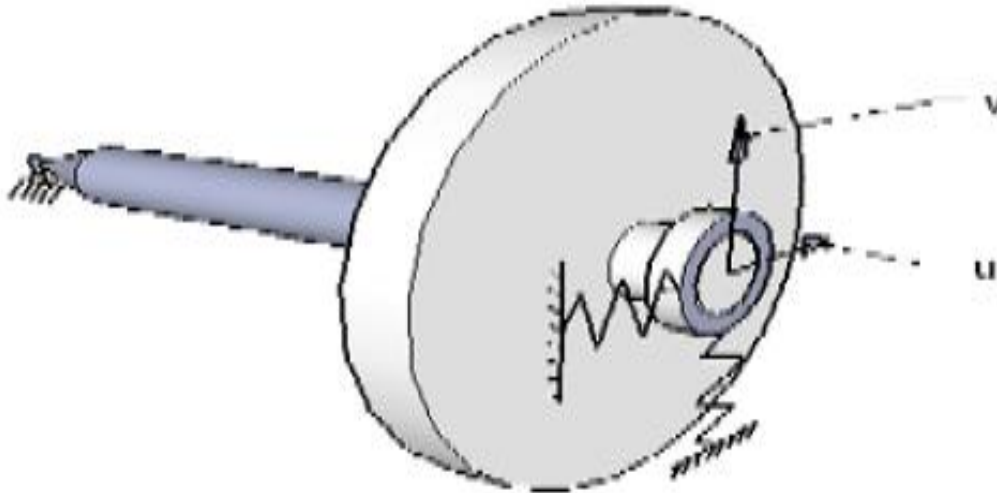


Figure II.5 : Répartition du balourd sur le rotor. [5]

Pour modéliser simplement le balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (**figure II.5**). Ces masses sont supposées avoir effet que le balourd Continu sur le comportement dynamique du rotor.

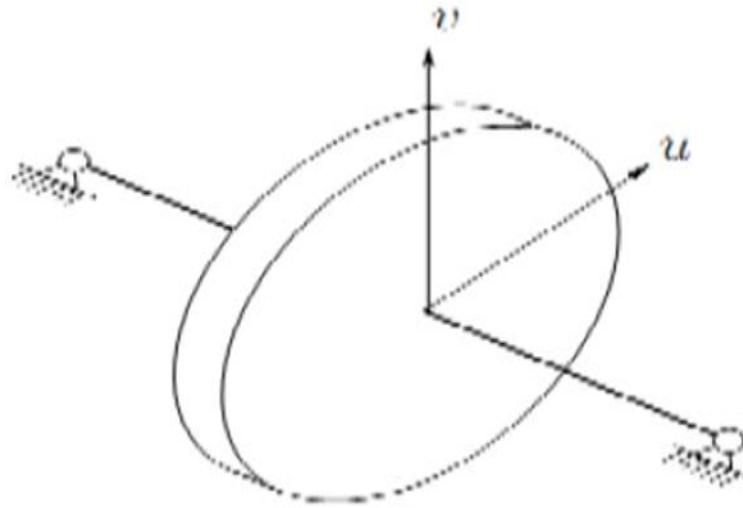


Figure II.6 : Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

A l'arrêt, la position M_i de chaque masse m_i est définie par son abscisse sur l'axe Y_i .

La distance $r_i = O_i M_i$, O_i étant le centre de la section de l'arbre, l'angle α_t que fait la position de la masse par rapport au repère tournant de référence. Lors de la rotation du rotor, chaque masse m_i est liée à l'arbre en position déformée (**figure II.7**).

La masse m située à la distance d du centre géométrique de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.

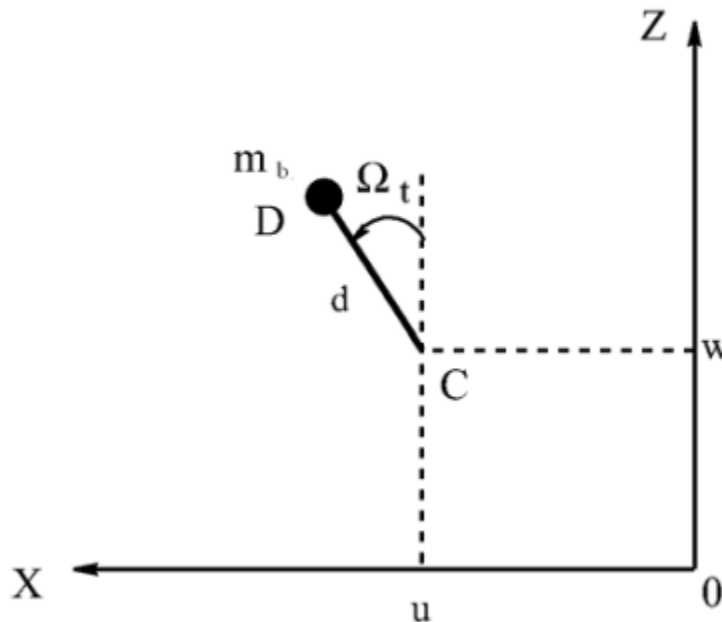


Figure II.7 : Masse de balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y , sa coordonnée selon cet axe dans le repère R_0 est donc constante.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (\text{II.27})$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (\text{II.28})$$

L'expression de l'énergie cinétique T_b du balourd :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b \left(\vec{V}^0(D) \right)^2 \quad (\text{II.29})$$

Introduisant (II.28) dans (II.29) :

$$T_b = \frac{m_b}{2} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega u d \cos \Omega t - 2\Omega w d \sin \Omega t \right) \quad (\text{II.30})$$

Le terme $\Omega^2 d^2/2$ est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (\text{II.31})$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et du travail virtuel étant établies, la dissipation due à l'amortissement interne peut être développée via des modèles analytiques ou élément finis.

II.2 Modèle simple

Notre objectif est de présenter la mise en place d'un modèle de calcul permettant, à l'aide d'un rotor vertical pas dans les temps. Ainsi, après avoir validé le modèle sur exemples de référence, nous pourrons évaluer l'influence de l'action non linéaire d'un palier à air sur le comportement de l'ensemble.

I.2.1. Description du modèle

$R_0(X, Y, Z)$ Est le repère initial, l'axe du rotor au repos étant porté par la direction Y. la vitesse de rotation est constante. Afin de pouvoir simplifier les calculs, un seul degré de liberté est utilisé pour le déplacement dans les directions X et Z .

Les expressions des déplacements dans les directions X et Z sont respectivement mises sous la forme (méthode de séparation des variables)

$$\begin{cases} u(y, t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \\ w(y, t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Ou q_1 et q_2 sont des coordonnées indépendantes généralisées. Etant donné, que les déplacements angulaires Ψ et θ (Figure I.8) sont petits, ils sont approchés par :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \\ \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

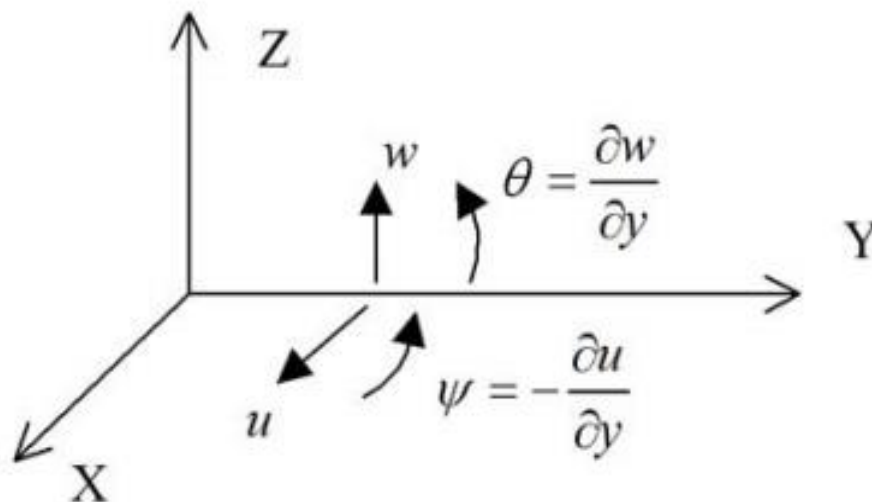


Figure II .8 : Représentation des coordonnées

Le second ordre des dérivées des déplacements \mathbf{u} et \mathbf{w} est nécessaire pour exprimer l'énergie élastique de l'arbre

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \mathbf{q}_1 = \mathbf{h}(y) \mathbf{q}_1 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \mathbf{q}_2 = \mathbf{h}(y) \mathbf{q}_2 \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

La fonction de déplacement f est choisie pour représenter exactement la forme du premier mode d'une poutre de section constante en flexion sur deux appuis situés à ses extrémités.

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} \quad (\text{II.35})$$

D'où

$$\mathbf{g}(y) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \quad (\text{II.36})$$

$$\mathbf{h}(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} \quad (\text{II.37})$$

Dans ce qui suit toutes les expressions seront données en fonction des coordonnées généralisées \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 et de leurs dérivées.

Les constituants de la ligne d'arbre à prendre en compte sont :

- Le(s) disque(s)
- Le rotor (section circulaire pleine ou creuse)
- Le(s) roulement(s), (palier(s) à action linéaire)
- Le(s) palier(s) aérodynamique(s), (palier(s) action non linéaire)
- Le(s) balourd(s)

I.2.2 Élément de disque

Le disque est considéré comme étant parfaitement axisymétrique. Son énergie cinétique T_D peut s'écrire de la façon suivante :

$$T_D = \frac{1}{2} [M_D \mathbf{f}^2(\mathbf{y}_{disk}) + I_{Dx} \mathbf{g}^2(\mathbf{y}_{dick})] (\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \dot{\mathbf{q}}_2^2) - I_{Dy} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{g}^2(\mathbf{y}_{dick}) \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (\text{II.38})$$

Le disque est considéré rigide, son énergie de déformation est donc nulle.

I.2.3 Elément de l'arbre

Le rotor est lui aussi axisymétrique. L'expression de son énergie cinétique,

T_s , est la suivante :

$$T_s = \frac{1}{2} \left[\rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (\text{II.39})$$

L'énergie de déformation de l'arbre U_S , s'écrit :

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) \quad (\text{II.40})$$

Il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique T_{DS} , de l'ensemble disque Rotor.

$$T_{DS} = T_S + T_D = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (\text{II.41})$$

Avec

$$m = \left[M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{dick}) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right]$$

Et

$$a = I_{Dy} g^2(y_{dick}) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (\text{II.42})$$

I.2.4 Paliers à roulement

La ligne d'arbre peut éventuellement recevoir des paliers à roulement.

L'expression du travail virtuel de la force exercée sur la ligne d'arbre s'écrit de la façon suivante :

$$\delta W = F_1 q_1 \delta q_1 + F_2 q_2 \delta q_2 \quad (\text{II.43})$$

Nous n'avons pris en compte ici que les termes directs de la matrice de raideur qui sont dans un premier temps assez représentatif du comportement des roulements. En plus de la géométrie du palier et de la déformation de sa structure, il prend en compte la position de à l'intérieur du palier qui peut être due au déplacement et à la déformation du rotor.

I.2.5. Balourd

La ligne d'arbre peut être déséquilibrée par la présence d'un balourd. L'énergie cinétique du balourd s'écrit :

$$T_u = m_b d \Omega f(y_{bal}) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (\text{II.44})$$

I.2.6. Equation du mouvement

L'application des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \delta W_i \text{ avec } i = 1, 2 \quad (\text{II.45})$$

Permet d'obtenir le système d'équations du rotor :

a) La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les déflexions de la ligne d'arbre en chacun de ses points.

b) Le système d'équation de la dynamique de rotor permet alors de calculer les composant de l'accélération du rotor.

Les conditions initiales sont choisies de façon arbitraire. Elles peuvent aussi résulter d'un calcul antérieur. Etant donné que la sollicitation extérieure est de nature cyclique. [5]

I.2.7 validation du modèle

Le premier cas concerne une ligne d'arbre simplement supportée par deux appuis.

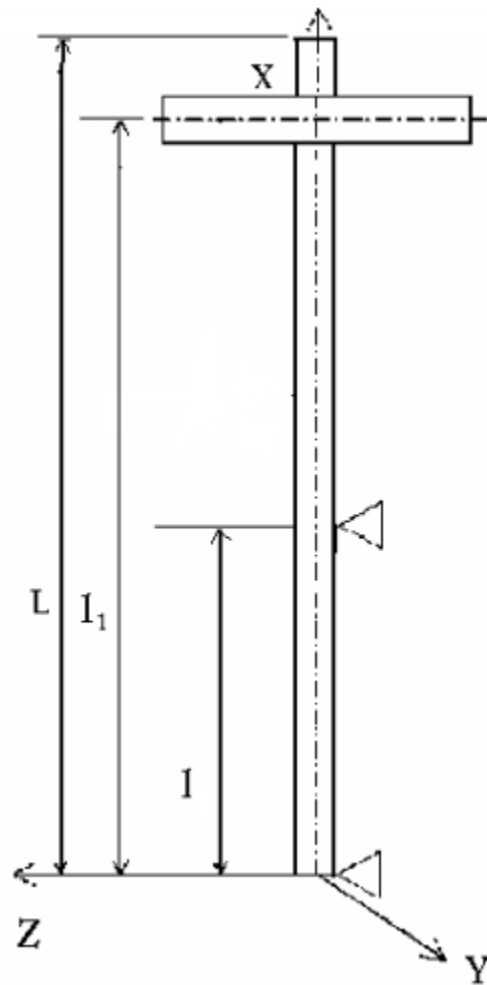


Figure II.9 : Schématisation du modèle simple du rotor. [6]

Les données numériques communes du cas étudié sont :

Exemple : données

➤ **Disque** :

Rayon intérieur $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Rayon extérieur $R_2 = 0.15 \text{ m}$

Epaisseur $h = 0.03 \text{ m}$

Masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Langueur $l_1 = 1 \text{ m}$

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho = 16,07 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) = 9,41 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

➤ **Arbre :**

Langueur $L = 1.2 \text{ m}$

Rayon de section droite $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$

$E = 200 \text{ GPa}$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie sont :

$$S = \pi R_1^2 = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 3,066 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

➤ **Balourd :**

Masse $m_b = 10^{-4} \text{ kg}$

Distance $d = 0.15 \text{ m}$

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{1,2}$$

Les expressions générales de l'énergie cinétique T , de l'énergie de déformation U et du travail virtuel δW peuvent être obtenues.

L'énergie cinétique a pour expression :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_d + \mathbf{T}_a + \mathbf{T}_b$$

Où $\mathbf{T}_d, \mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b$ sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre, du balourd.

Tous calculs faits, on a :

$$T = 2.25(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0.975\Omega\dot{q}_1q_2 + 7.5 \times 10^{-6}\Omega(\cos\Omega t\dot{q}_1 - \sin\Omega t\dot{q}_2) \quad (\text{II.46})$$

L'énergie de déformation à pour expression :

$$U_a = 17.28 \times 10^5 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (\text{II.47})$$

I.2.7.1 Modèle symétrique

L'application des équations de Lagrange (II.43) en utilisant les expressions (II.43) et (II.45) conduit aux équations mouvement :

$$\begin{cases} 4.5\ddot{q}_1 - 0.975\Omega\dot{q}_2 + 3.456 \times 10^6 q_1 = 0.75 \times 10^{-5}\Omega^2 \sin\Omega t \\ 4.5\ddot{q}_2 + 0.975\Omega\dot{q}_1 + 3.456 \times 10^6 q_2 = 0.75 \times 10^{-5}\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Qui, sous forme générale s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m_b d\Omega^2 f(l_1) \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m_b d\Omega^2 f(l_1) \cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

I.2.7.2 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution de système (II.49) sans second membre, est considérée :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.51})$$

La deuxième matrice, représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations sont de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \exp(rt) \\ q_2 = Q_2 \exp(rt) \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

En remplaçant (I.52) dans (I.51), il vient :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II.53})$$

La solution simple $Q_1 = Q_2 = \mathbf{0}$ est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de matrice. Le calcul du déterminant donne l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} (k + mr^2)^2 + a^2\Omega^2 r^2 = 0 \\ m^2 r^4 + (2km + a^2\Omega^2)r^2 + k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines r_{10} et r_{20} de (I.52) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m} \quad (\text{II.55})$$

Avec $j^2 = -1$

Et les pulsations :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{II.56})$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (II.52) sont r_1 et r_2 et les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 . Il vient :

$$r_1^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (\text{II.57})$$

Alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (\text{II.58})$$

Et

$$r_2^2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (\text{II.59})$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (\text{II.60})$$

A partir de (I.56) et (I.58) il est clair que :

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2 \quad (\text{II.61})$$

De plus, les équations (I.55) et (I.57) montrent que r_1^2 et r_2^2 sont des quantités négatives ; ainsi sont des quantités imaginaires et la solution générale du mouvement reste donc limitée dans le temps, le rotor est stable. La représentation de ω en fonction de la vitesse de rotation, $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ est le diagramme de Campbell. En générale le diagramme de Campbell représente f_1 et f_2 :

$$\begin{cases} f_1 = \omega_1/2\pi \\ f_2 = \omega_2/2\pi \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

En fonction de la vitesse de rotation N (tr/min) qui est reliée à Ω (rad/s) par :

$$N = 30\Omega/\pi \quad (\text{II.63})$$

Ici ω et Ω sont des pulsations et f une fréquence. Dans ce qui suit les trois quantités SONT simplement appelées fréquences. Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit. Les formes modales (modes) sont examinées ensuite. La première équation de (I.51) donne :

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + m\Omega^2} \quad (\text{II.64})$$

Il est clair que les modes sont complexes ($r = \pm j \omega$) et leur interprétation délicate. Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant, à $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \\ \dot{q}_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ \dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10} \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

Tous calculs faits, il vient :

$$\begin{cases} q_1 = -q_{10} \cos \omega_2 t \\ q_2 = q_{10} \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Les déplacements u et v d'un point situé à de l'origine de l'axe du rotor sont donnés par (1.32), soit :

$$\begin{cases} u(l, t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \\ u(l, t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l, t) + w^2(l, t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L} \quad (\text{II.68})$$

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

$$r^4 + (1.536 * 10^6 + 4.69 * 10^{-2} \Omega^2) r^2 + 5.898 * 10^{11} = 0 \quad (\text{II.69})$$

Les fréquences à l'arrêt du rotor sont :

$$f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 139.48 \text{ Hz} \quad (\text{II.70})$$

Les fréquences en rotation sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (\text{II.71})$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (\text{II.72})$$

Le diagramme de Campbell

$[f_1 = f_1(N) f_2 = f_2(N)]$ Est présenté sur la (Figure I.10) et les intersections de $f_1(N), f_2(N)$ avec deux droites sont indiquées. Les points **C** points **A** et **B** correspondent aux intersections avec la droite $f = N60$; correspondent à une fréquence du rotor égale la fréquence de rotation. Les points **C** et **D** correspondent aux intersections avec la droite $f = \frac{0.5N}{60}$ ces deux points correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences des fréquence correspondant aux points **A, B, C, D**.

La relation entre ω et Ω est :

$$\omega = s\Omega \quad (\text{II.73})$$

Où $S = 1$ en **A** et **B, $S = 0,5$ en **C** et **D**, les expressions $r_1^2 = j^2 \omega_1^2$ et $r_2^2 = j^2 \omega_2^2$ permettent d'écrire :**

$$r = \pm j\omega = \pm js\Omega \tag{II.74}$$

Substituent dans (I.52) on trouve :

$$\begin{cases} s^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 = 0 \\ s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2kms^2 \Omega^2 + k^2 = 0 \end{cases} \tag{II.75}$$

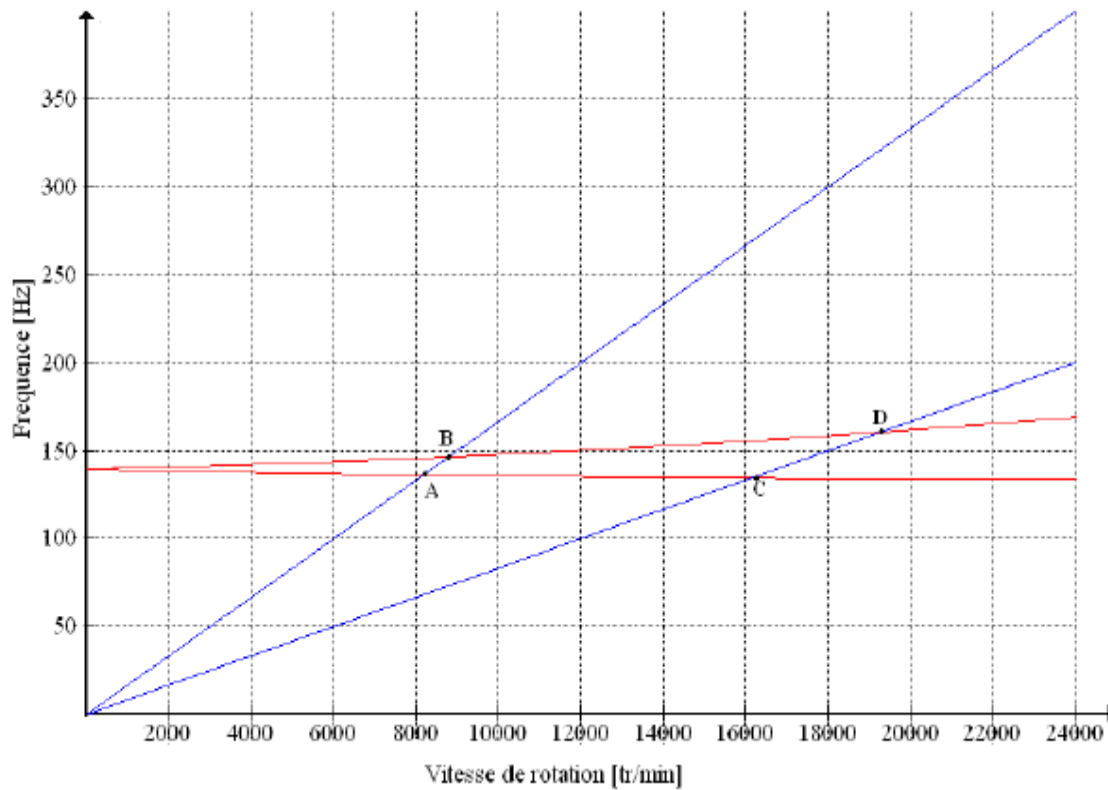


Figure I.10 : Diagramme de Campbell pour modèle simple

Les solutions de (I.73) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \tag{II.76}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \tag{II.77}$$

Eta partir de (1.71) on tire la fréquence ω_1 qui correspond aux points **A**(s=1) et **C**(s=0,5)

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (\text{II.23})$$

Et de (1.71) ω_2 qui correspond aux points **B** ($s=1$) et **D** ($s=0,5$)

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (\text{II.23})$$

Pour l'application :

- En A : $f_1 = 135,5 \text{ Hz}$; $N = 8190 \text{ tr/min}$
- En B : $f_2 = 146,5 \text{ Hz}$; $N = 8795 \text{ tr/min}$
- En C : $f_1 = 134,7 \text{ Hz}$; $N = 16170 \text{ tr/min}$
- En D : $f_2 = 160,5 \text{ Hz}$; $N = 19260 \text{ tr/min}$



Chapitre III

Chapitre III : Modélisation par éléments finis

Introduction

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vu son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui permet de traiter facilement des systèmes d'équation complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométrique et de la condition aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation).

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

III.1 Expressions des énergies des éléments du rotor

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser la structure en éléments sur leur dimensions finis qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour. A partir d'hypothèses raisonnables sur le déplacement d'un point de l'élément, on calcule les énergies cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des nœuds.

Si la structure est composée de N éléments alors :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (\text{III.1})$$

$$T = \sum_{i=0}^N T_i \quad (\text{III.2})$$

$$R = \sum_{i=0}^N R_i \quad (\text{III.3})$$

Où U_i est l'énergie de déformation ; T_i est l'énergie cinétique et R_i est la fonction de dissipation de l'élément i . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces

extérieures. Dans la dynamique des rotors R_i sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

III.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} d\tau \quad (\text{III.4})$$

Le vecteur de déplacement d d'un point de l'élément est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice N , résultat de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de la forme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta} \quad (\text{III.5})$$

Qui donne après dérivation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{B}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta} \quad (\text{III.6})$$

C'est la relation qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

La relation qui relie les contraintes et les déformations est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{III.7})$$

Où D est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young E et le coefficient de poisson ν .

En substituant les équations (III.6) et (III.7) dans (III.4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta})^t \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta} d\tau \quad (\text{III.8})$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^t \left[\int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau \right] \boldsymbol{\delta} \quad (\text{III.9})$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^t \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{III.10})$$

Où

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau$$

C'est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice D est symétrique ainsi que la matrice produit $B^t D B$

III.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 d\tau \tag{III.11}$$

Où ρ est masse volumique d'un élément d'arbre et V est la vitesse d'un point de l'arbre obtenu par dérivation par rapport au temps du déplacement d donné par (III.5), soit :

$$V = N(y) \frac{d\delta}{dt} = N(y) \dot{\delta} \tag{III.12}$$

subsumant (III.12) dans (III.11) et en considérant que $V^2 = (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta}$ On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta} d\tau \tag{III.13}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[\int \rho N^t N d\tau \right] \dot{\delta} \tag{III.14}$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t m \dot{\delta} \tag{III.15}$$

Ou $m = \int \rho N^t N d\tau$

C'est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice K .

III.2 Formulation matricielle

III.2.1 Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté ; deux translations u et w et deux rotations θ et Ψ respectivement autour des axes x et z (voir figure III.1).

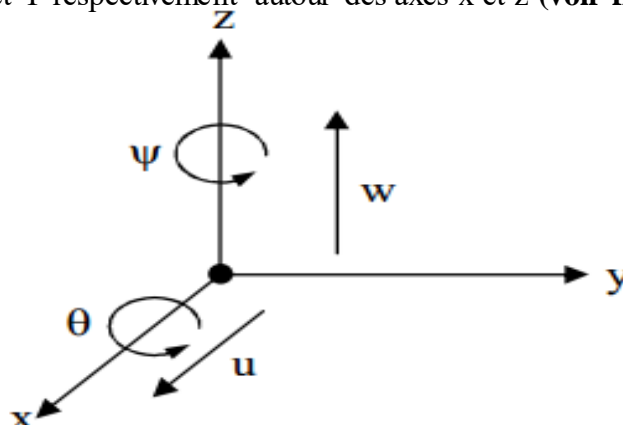


Figure III. 1 : Degrés de liberté du disque

Le vecteur des déplacements nodaux δ s'écrit sous la forme : $\delta = [\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Psi}]^t$ La matrice masse et la matrice gyroscopique sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (III.10) soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[\frac{1}{2} \mathbf{M}_d (\dot{\mathbf{w}}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \dot{\boldsymbol{\Psi}}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{M}_d (\dot{\mathbf{u}}^2 + \dot{\mathbf{w}}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \dot{\boldsymbol{\Psi}}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (III.16)$$

Ou aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{dx'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{dx'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\Psi}} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I_{dy'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{dy'} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}} \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

\mathbf{M}_d \mathbf{G}_d

\mathbf{M}_d Étant la matrice masse et \mathbf{G}_d la matrice gyroscopique.

III.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre de section constante. L'élément fini utilisé à deux nœuds et quatre degrés de liberté (figure III.2).

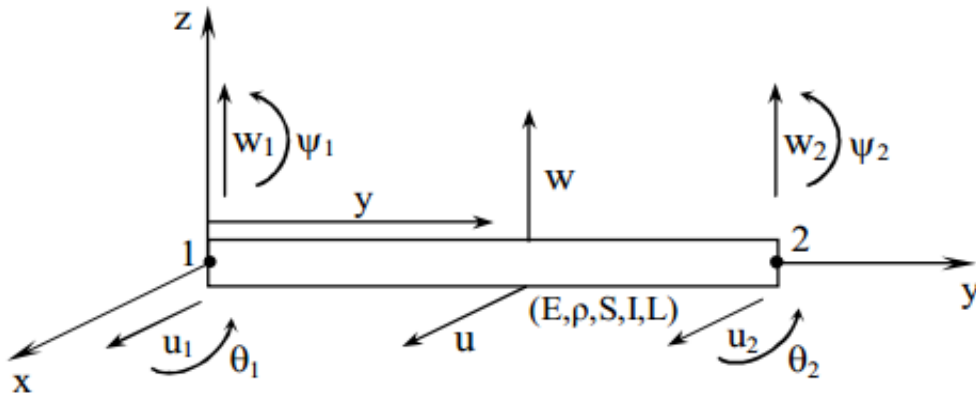


Figure III.2 : Degrés de liberté d'un élément arbre

La fonction de déplacement w qui est normale à la poutre (arbre) est donnée par le polynôme d'interpolation du 3^{ième} degré.

$$w = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 \quad (\text{III.18})$$

L'inclinaison ou la autour de z est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement w .

$$\theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 \quad (\text{III.19})$$

Les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 sont déterminées en appliquant les conditions aux limites sur les polynômes (III.18) et (III.19)

Pour $y = 0$ (nœud 1) on a $\begin{cases} w_1 = a_1 \\ \theta_1 = a_2 \end{cases}$ système (a)

Pour $y = L$ (nœud 2) on a $\begin{cases} w_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \end{cases}$ système (b)

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes a_1 et a_2 par leurs valeurs on trouve :

$$a_1 = w_1$$

$$a_2 = \theta_1$$

$$a_3 = 3 \frac{w_2 - w_1}{L^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{L}$$

$$a_4 = -2 \frac{w_2 - w_1}{L^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{L^2}$$

On remplace les valeurs des constants a_1, a_2, a_3, a_4 dans w pour avoir :

$$w(y) = \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_2 \quad (\text{III.20})$$

Ou bien :

$$w(y) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(y) \delta_i \quad (\text{III.21})$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2]^t \quad (\text{III.22})$$

Qui est à son tour séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction :

$$\delta u = [u_1, \Psi_1, u_2, \Psi_2]^t \quad (\text{III.23})$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^t \quad (\text{III.24})$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$u = N_1(y)\delta u \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Et } w = N_2(y)\delta w \quad (\text{III.26})$$

Où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classique d'un élément de poutre en flexion

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{III.27})$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{III.28})$$

Où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont obtenues en posant $u(y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$ avec la rotation autour de x donnée par $\Psi = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$.

Les relations exprimant donc les déplacements et les pentes sont :

$$\theta = \partial w / \partial y \quad (\text{III.29})$$

$$\Psi = -\partial u / \partial y \quad (\text{III.30})$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est de quatre ; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille 8×8 qui obtenues en remplaçons u, w, θ, Ψ par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

a) L'énergie cinétique

L'utilisation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (III.15) pour un élément conduit à :

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_2^t N_2 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy \quad (\text{III.31})$$

En substituant (III.25) et (III.26) ainsi que leurs dérivées dans (III.31) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_4 \delta \dot{w} + \delta \dot{u}^t M_5 \delta w + \rho l L \Omega^2 \quad (\text{III.32})$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4*4. M_1 et M_2 sont les matrices classiques de masse, M_3 et M_4 représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice M_5 représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à une contribution nulle de l'application des équations de Lagrange. L'expression (III.32) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta} \quad (\text{III.33})$$

Où M_c et M_g sont déduites respectivement de M_1 , M_2 , M_3 , et M_4 et G est déduite de M_5 , Les matrices sont donc les suivantes :

$$M_1 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

$$M_2 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

Rassemblons les matrices qui ont les mêmes propriétés $M_c = M_1 + M_2$ et

$M_g = M_3 + M_4$ d'où :

$$M_c = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (III.39)$$

$$M_g = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (III.40)$$

Et

$$G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.41)$$

b) L'énergie de déformation

L'application des expressions (III.27) et (III.28) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (III. 10) donne :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^1} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (III.42)$$

Où

$$U_a = \frac{EI}{2} \left[\delta u^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right) \delta u + \delta w^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (III.43)$$

Qui peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w \quad (III.44)$$

Où

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (III.45)$$

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (III.46)$$

K_1 et K_2 sont les matrices classiques de raideur.

La matrice global K est :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement notre matrice prend la forme suivante

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L \end{bmatrix} \quad (III.48)$$

La quantité caractérisant le cisaillement est $a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de

cisaillement et ν est le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ (section réduite).

III.2.3 Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'influence des pentes des moments est négligée pour les paliers on ne tient compte que des forces généralisées F_u et F_w qui sont liées aux déplacements u et w . En tenant compte de (3.1.30) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (III.49)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de vitesse de rotation.

III.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd

L'application des équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique d'un balourd donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{T_b}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (III.50)$$

Avec $\delta = [u \ w]^t$.

III.3 Exemple de Montage de Matrices Globales

Considérons le modèle de rotor étudié qui est schématisé sur la **figure III.3** ayant quatre nœuds et cinq éléments : un élément disque, un élément palier et trois éléments arbre de même longueur

$$l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3 .$$

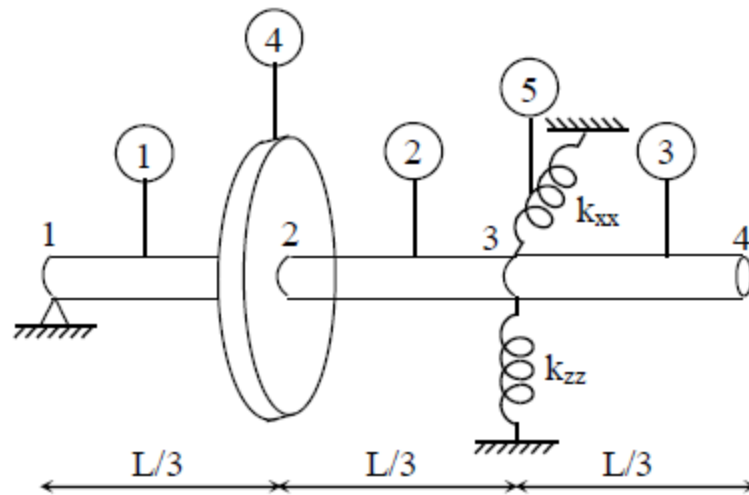


Figure III.3 Modèle de rotor avec éléments et nœuds.[7]

Dans le modèle au-dessus, les nœuds de chaque élément de l'arbre, du palier ou du disque sont en rapport avec les nœuds du rotor d'après la table ci-dessous :

Nombre d'éléments	Type d'élément	Nœuds du rotor	Vecteurs de déplacements δ
1	Arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
2	Arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3$
3	Arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \Psi_4$
4	Disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
5	Palier	3	u_3, w_3

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont obtenues en superposant les matrices élémentaires selon le tableau. Chaque type de matrice globale est obtenu en sommant les trois matrices des trois éléments.

a) Matrice globale classique de masse

$$M_{ct} = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -221 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 221 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221 & 41^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -221 & 0 & 0 & 41^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 156 & 0 & 0 & 221 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 156 & -221 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & -221 & 41^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 221 & 0 & 0 & 41^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \Psi_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \Psi_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \Psi_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}$$

Où $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $s = 3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et $l = 0.1333 \text{ m}$

b) Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation

$$M_{gt} = \frac{\rho l}{301} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -36 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & 41^2 & 361 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 31 & 0 & 0 & 41^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \Psi_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \Psi_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \Psi_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0,13333 \text{ m}$$

c) Matrice globale représentant l'effet gyroscopique

$$C_t = \frac{\rho l \Omega}{151} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -36 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 0 & -41^2 & -31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & -81^2 & -31 & 0 & 0 & -41^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & -81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & -81^2 & -31 & 0 & 0 & 1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 31^2 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 1^2 & -31 & 0 & 0 & -41^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \Psi_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \Psi_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \Psi_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}$$

d) Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation

$$M_{gt} = \frac{\rho I}{301} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -61 & -12 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 61 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 41^2 & 0 & 0 & -61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61 & 0 & 0 & 41^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 61 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -61 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 61 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -61 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -61 & 21^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 61 & 12 & 0 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 12 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & -61 & 41^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 21^2 & 61 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \Psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}$$

Avec $I = 7,854 \cdot 10^{-9} m^4$ et $E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$

e) Matrice du palier

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\Psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \Psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$K_{xx} = \frac{10^5 N}{m} \quad K_{zz} = 5 \cdot 10^5 N/m$$

f) Matrice du balourd

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = 1,5 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

Où

$$m_b \cdot d = 1,5 \cdot 10^{-5} Kg \cdot m$$

g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique)

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{Bmatrix}$$

Avec $\mathbf{M}_d = 16,47Kg$ $\mathbf{I}_{dx} = 9,247 \cdot 10^{-2}Kg.m^2$ et $\mathbf{I}_{dy} = 0,1861Kg$

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV : Simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor (FAN 280) par élément finis (ANSYS)

Ce chapitre sera réservé pour présenter la description du ventilateur de tirage, son principe de fonctionnement et à la fin la conception et l'analyse vibratoire du ventilateur FN280 par éléments finis.

IV.1. Description du ventilateur de tirage :

Les ventilateurs de type FN 280 sont prévus pour le transport de gaz chauds dont la teneur en poussière non-abrasive est limitée. Le ventilateur (**Figure IV.1**) et (**Figure IV.2**) est du type aspirant sans caisson d'aspiration



Figure IV.1 : Images du ventilateur de cimenterie de LAFARGE M'sila. [8]

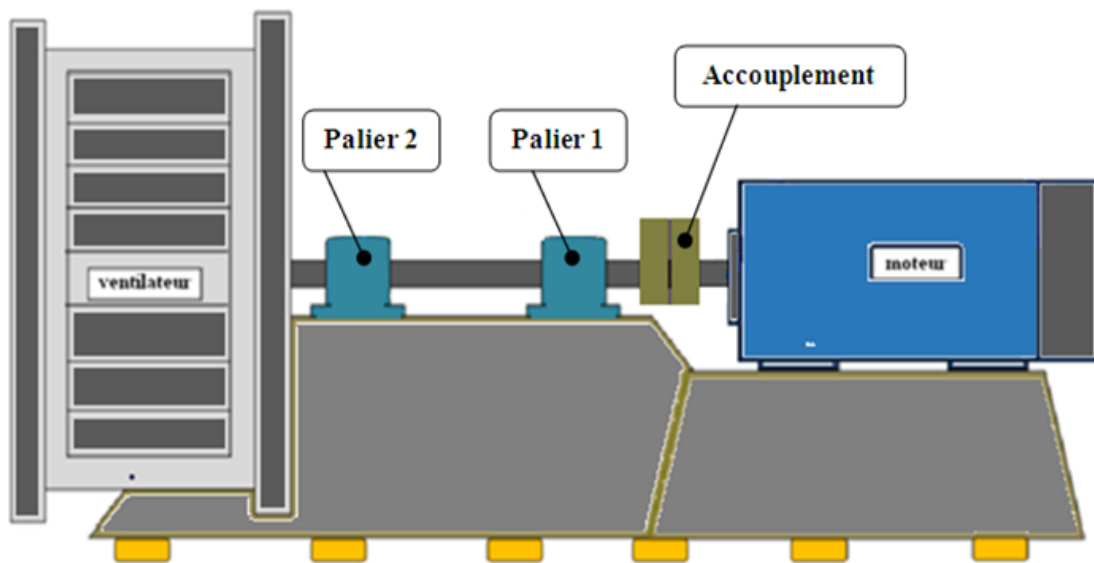


Figure IV.2: Diagramme du ventilateur de ciment.[8]

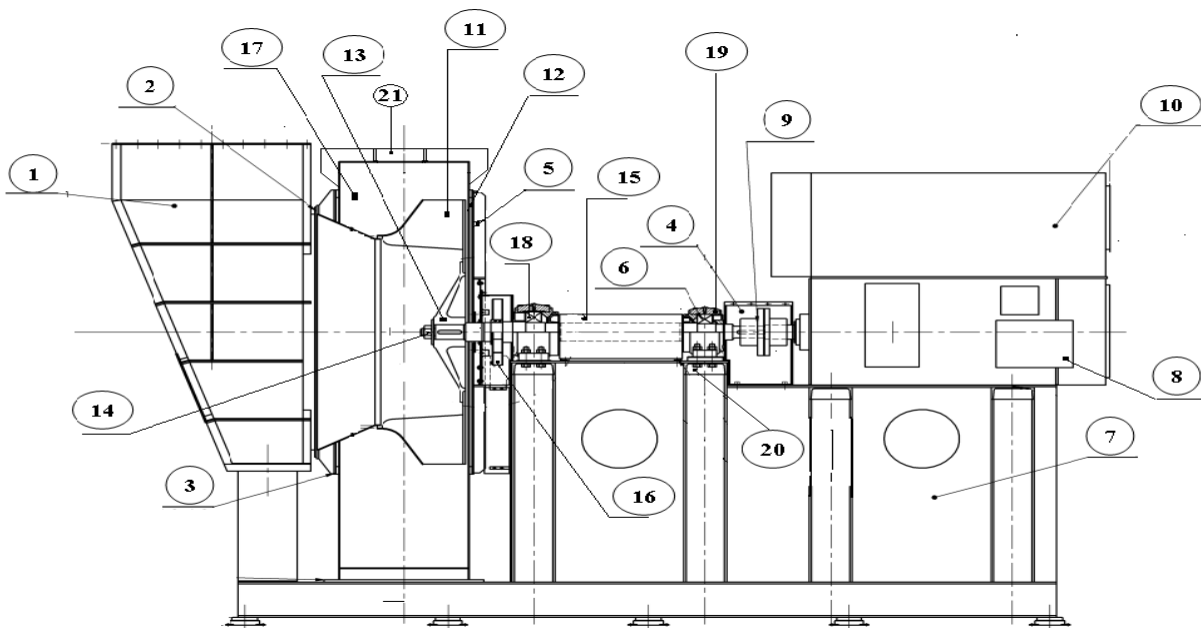


Figure IV.3 : Dessin d'ensemble du ventilateur FN280.[8]

- 1- Enveloppe et ouïe de refoulement
- 2- Pavillon d'aspiration
- 3- Flasque avant
- 4- Carter d'accouplement
- 5- Flasque arrière
- 6- Palier à roulement (22328/C3)
- 7- Support moteur
- 8- Moteur

- 9- Accouplement flexible
- 10- Protecteur moteur
- 11- Roue à aubes
- 12- Corde de bourrage
- 13- Moyeu
- 14- Ecrou
- 15- Arbre
- 16- Tabouret de palier
- 17- Corps de palier
- 18- Palier à roulement (22332/C3)
- 19- Trappe de visite

Le ventilateur est constitué de la roue à aubes (11) avec moyeu d'assemblage (13), arbre (15), turbine de refroidissement (16), paliers (18) et (06) et enveloppe (17) à flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02).

La roue à aubes (11) est conçue comme roue fermée constituée d'un moyeu coulé (13) auquel la roue elle-même est boulonnée.

L'ajustement entre arbre et moyeu (13) est un ajustement glissant, h/H . La roue à aubes a subi un équilibrage dynamique.

L'arbre est construit en acier d'arbre. Les paliers (18) et (06) sont à roulements à rouleaux à butée sphérique Désignation de base 22332 à voile C3 pour le palier (18) et 22328 à voile C3 pour le palier (06). Ils sont freinés sur l'arbre. L'un d'eux, conçu comme palier de guidage, est monté près du moteur. L'autre est mobile dans son corps.

Tous ces deux paliers sont montés dans des corps de paliers FLS coulés (19), montés sur le tabouret (20). Une turbine de refroidissement (16) est montée sur l'arbre à proximité de l'enveloppe vu que les ventilateurs doivent travailler à des températures supérieures à 125°C . L'enveloppe du ventilateur est constituée de la carcasse elle-même (17), flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02). L'enveloppe du ventilateur étanchée par corde de bourrage (12), est dotée d'une trappe de visite (21). La flasque avant est boulonnée à l'enveloppe.

IV.1.1. Caractéristique technique de ventilateur

Le ventilateur comprend essentiellement:

- Un moteur d'entraînement ABB
- Un accouplement flexible
- Une turbine à aubes montées sur un arbre avec 2 paliers SKF, munis de roulements à rotule sur rouleaux coniques.

Les données techniques de Ventilateur et de Moteur sont données dans **Tableau IV.1**, **Tableau IV.2**

Type		MTSS 224/224
Nbre de pales		16
Température		84 C°
Vitesse		985 tr/mn
Roulements	Palier 1	22328/C3
	Palier 2	22332/C3

Tableau IV.1 : Les données techniques de Ventilateur

Marque		ABB
Puissance		500 kW
Tension		11000 V
Poids		53 Kg
Intensité		33 A
Vitesse		995 tr/mn
Roulements	DE	6324/C3
	NDE	6326/C3

Tableau IV.2 : Les Données techniques de Moteur

IV.1.2. Principe de Fonctionnement :

Déplacer l'air d'un emplacement à un autre en créant une pression différentielle qui crée un courant d'air.

- Le moteur de commande entraîne le rotor du Ventilateur
- Le ventilateur renvoie l'air vers l'extérieur grâce à la force centrifuge
- Cela crée une pression statique négative (P_s) à l'entrée du ventilateur
- La pression atmosphérique (P_a) force l'air dans l'entrée
- L'air qui quitte le ventilateur a une pression positive.
- La Pression totale = Pression dynamique + Pression Statique ($P_t = P_s + P_d$)

IV.2. La conception du ventilateur FN 280 par l'logiciel

SOLIDWORKS 2016 :

Les figures ci-dessous présentent la conception des pièces et leur assemblage du ventilateur FN280 en utilisant **SolidWorks**

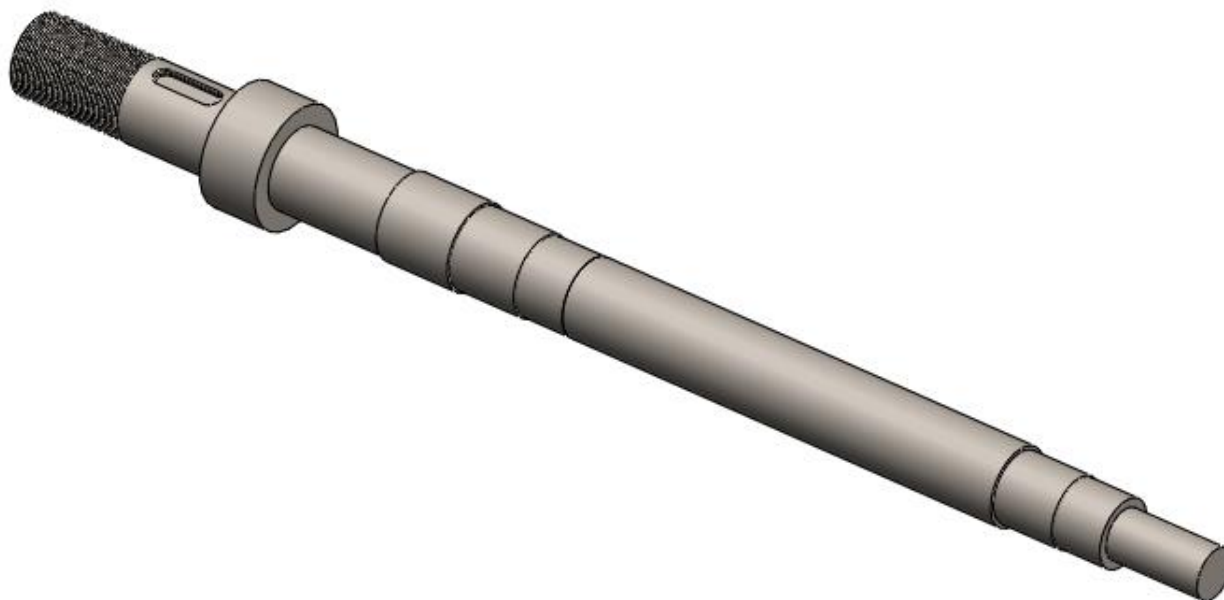


Figure IV.4: Conception de l'arbre

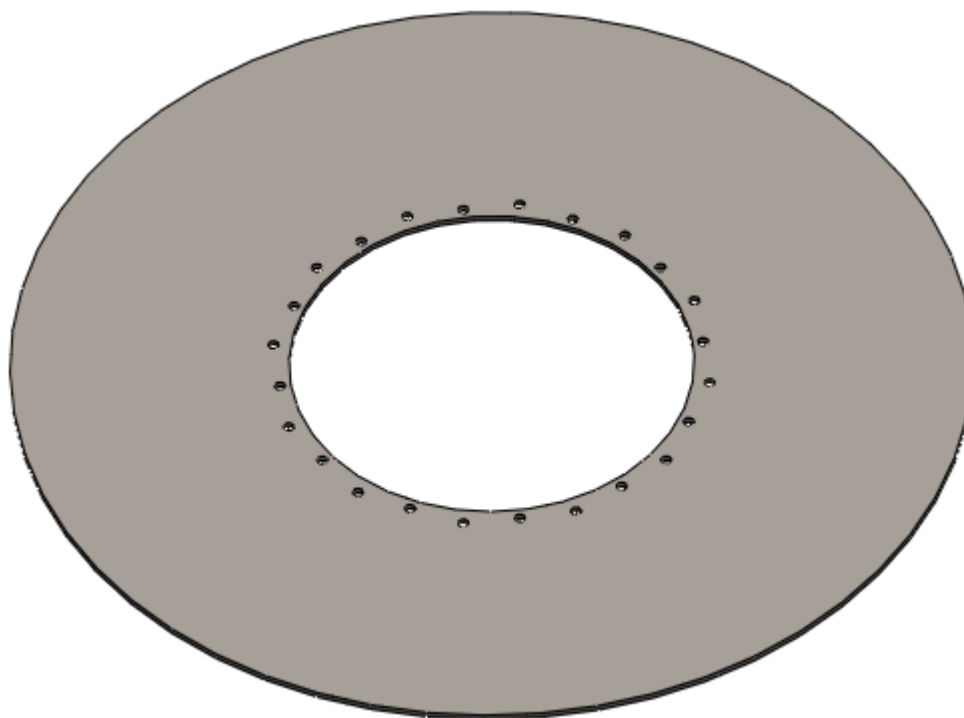


Figure IV.5 : Conception de Flasque arrière

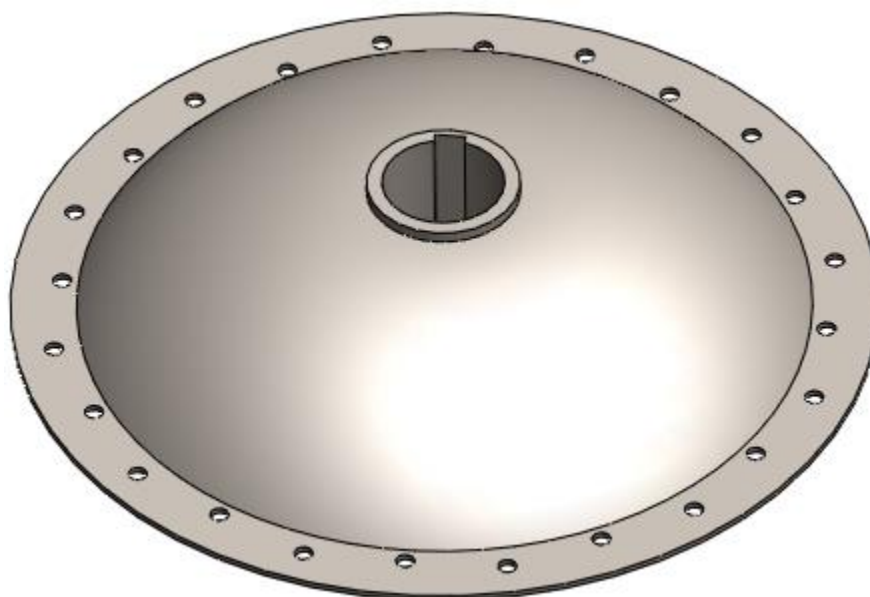


Figure IV.6 : Conception de moyeu

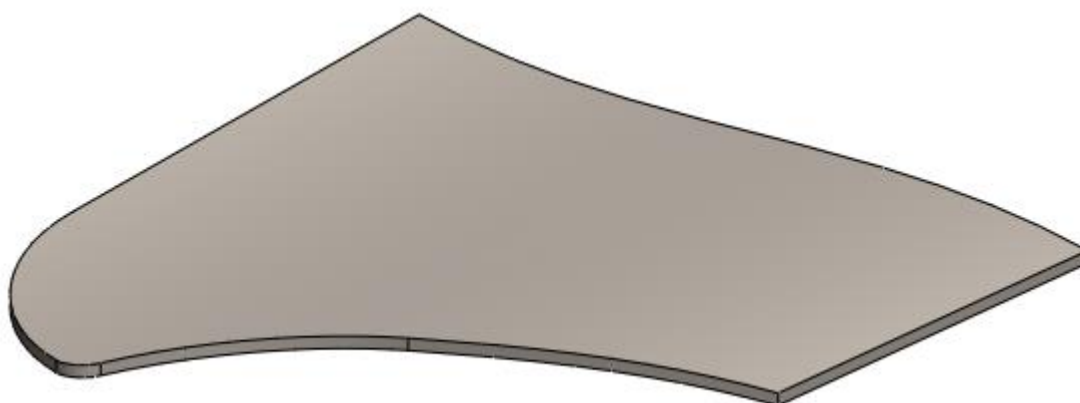


Figure IV.7: Conception de l'ailette

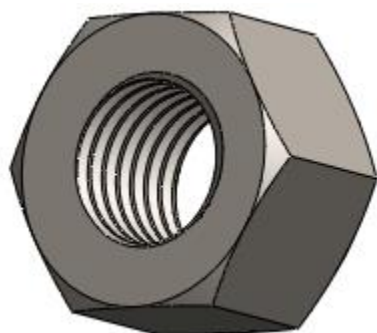


Figure IV.8 : Conception d'écrou

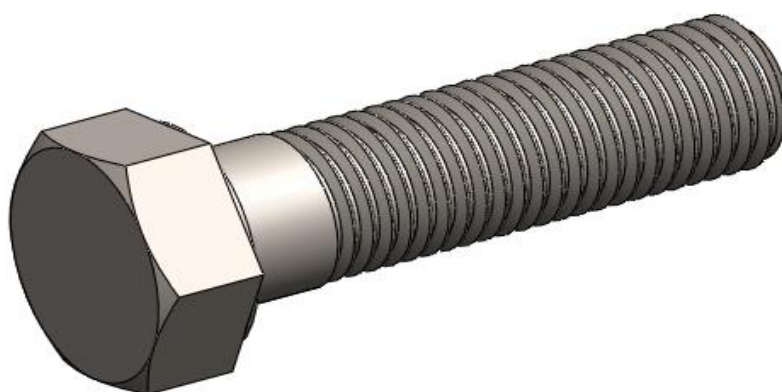


Figure IV.9 : Conception de Vis



Figure IV.10 : Conception de Flasque avant

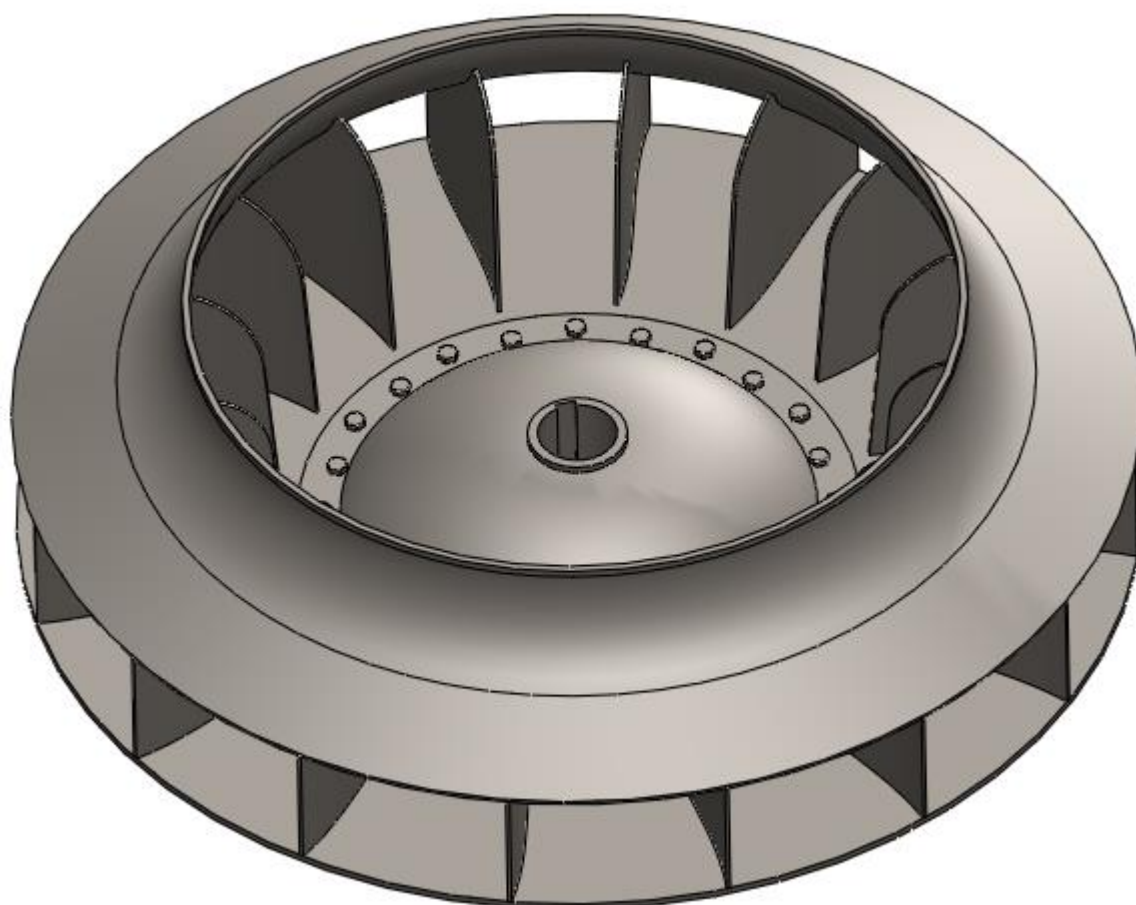


Figure IV.11 : Assemblage des éléments de la roue

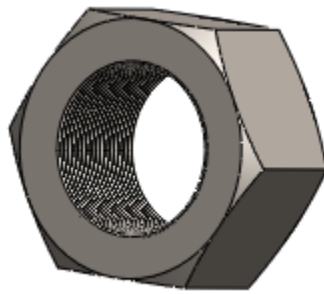


Figure IV.12: Conception écrou arbre

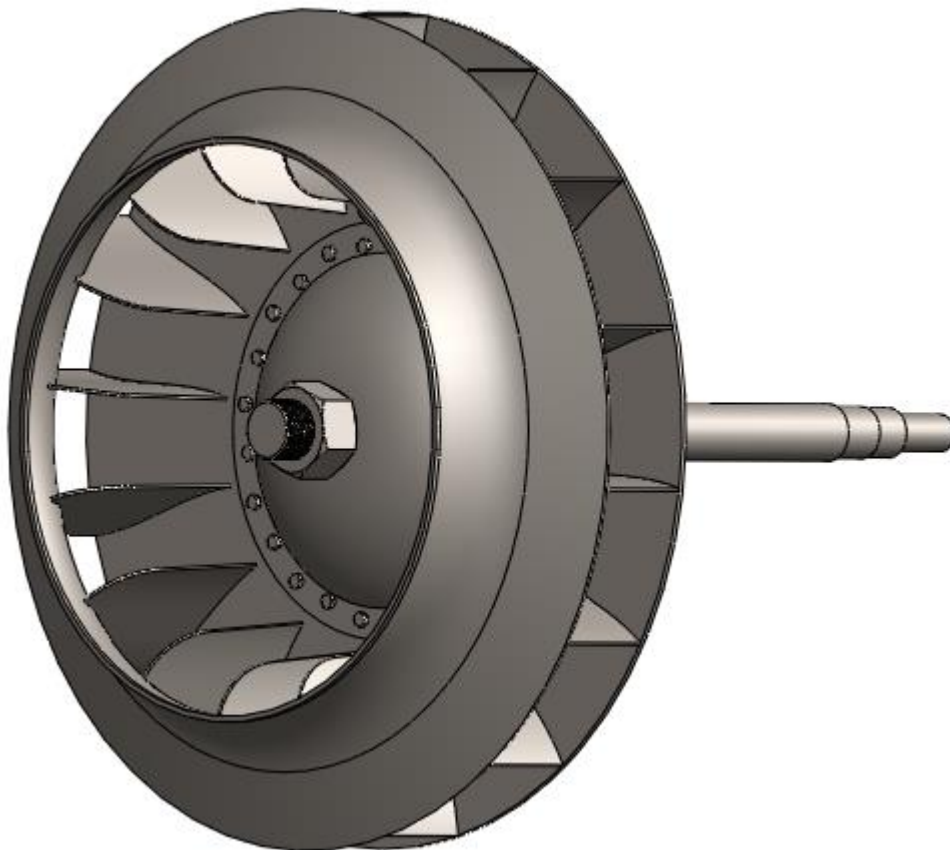


Figure IV.13: Assemblage des éléments du ventilateur FN280

IV.3. Modélisation des rotors par élément finis

La mise en équations d'un système de solides, reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) et des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. La modélisation en système continu (masse et rigidité réparties sur tout l'élément) fournit des résultats analytiques en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus. Ses formulations sont générales mais se limitent à des cas élémentaires. Les vibrations d'une structure plus complexe, admettant un nombre élevé de degrés de liberté (ddl), nécessitent une méthode générale, modulable et programmable. La méthode des éléments finis (MEF) décompose une structure en éléments simples élémentaires, de type poutre, plaque, rotor... Le comportement vibratoire de l'élément est ramené à

celui des nœuds. Ensuite on connecte les différents éléments (maillage) en respectant les conditions de continuité.

On peut alors extraire les matrices de masse et de raideur de la structure complète et déduire les pulsations propres du système non amorti et ses modes normaux. Cet outil de simulation de systèmes mécaniques permet de mieux comprendre le comportement d'un rotor.

L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

IV.3.1. Eléments finis de rotor

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : disque, arbres, paliers, et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

IV.3.1.1. Disque

On applique les équations de Lagrange sur l'expression (III.16) de l'énergie cinétique de disque on toure les différents matrice et vecteur de disque (matrice de masse, matrice d'amortissement, matrice de raideur et vecteur force).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = [M_d] \{\ddot{\delta}\} [C_d] \{\dot{\delta}\} + [K^*_d] \{\delta\}$$

Avec $[M_d]$ et $[C_d]$ respectivement son le matrice de masse et la matrice l'effèt gyroscopique qu'ont pour expression

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} &= \begin{bmatrix} 1034.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1034.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 415.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 415.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -415.42 \\ 0 & 0 & 415.42 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

IV.3.1.2. Arbre

a- L'énergie cinétique :

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4*4. M_1 et M_2 sont les matrices classiques de masse, M_3 et M_4 représentant l'effèt secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice M_5 représente l'effèt gyroscopique. Le terme qui est une constante à une contribution nulle de l'application des équations de Lagrange. L'expression (III.32) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta}$$

Où M_c et M_g sont déduites respectivement de M_1, M_2, M_3 , et M_4 et G est déduite de M_5 , Les matrices sont donc les suivantes :

$$G = \frac{\rho I \Omega}{38.77} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -7.75 & 0 & 0 & 36 & -7.75 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -7.75 & -36 & 0 & 0 & -7.75 \\ 7.75 & 0 & 0 & -26.72 & -7.75 & 0 & 0 & 6.68 \\ 0 & 7.75 & 26.72 & 0 & 0 & -7.75 & -6.68 & 0 \\ 0 & 36 & 7.75 & 0 & 0 & -36 & 7.75 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -7.75 & 36 & 0 & 0 & 7.75 \\ 7.75 & 0 & 0 & 6.68 & -7.75 & 0 & 0 & -26.72 \\ 0 & 7.75 & -6.68 & 0 & 0 & -7.75 & 26.72 & 0 \end{bmatrix}$$

M_c

$$= 0.096 \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -56.87 & 54 & 0 & 0 & 33.60 \\ 0 & 156 & 56.87 & 0 & 0 & 54 & -33.60 & 0 \\ 0 & 56.87 & 26.72 & 0 & 0 & 33.60 & -20.046 & 0 \\ -56.87 & 0 & 0 & 26.72 & -33.60 & 0 & 0 & -20.04 \\ 54 & 0 & 0 & -33.605 & 156 & 0 & 0 & 56.87 \\ 0 & 54 & 33.60 & 0 & 0 & 156 & -56.87 & 0 \\ 0 & -33.60 & -20.04 & 0 & 0 & -56.87 & 26.72 & 0 \\ 33.60 & 0 & 0 & -20.04 & 56.87 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \frac{\rho I}{77.55} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -7.75 & -36 & 0 & 0 & -7.75 \\ 0 & 36 & 7.75 & 0 & 0 & -36 & 7.75 & 0 \\ 0 & 7.75 & 26.72 & 0 & 0 & -7.75 & -26.72 & 0 \\ -7.75 & 0 & 0 & 26.72 & 7.75 & 0 & 0 & -6.68 \\ -36 & 0 & 0 & 7.75 & 36 & 0 & 0 & 7.75 \\ 0 & -36 & -7.75 & 0 & 0 & 36 & -7.75 & 0 \\ 0 & 7.75 & 6.68 & 0 & 0 & -7.75 & 26.72 & 0 \\ -7.75 & 0 & 0 & 6.68 & 7.75 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix}$$

b- L'énergie de déformation

L'application des expressions (III.27) et (III.28) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (III. 10) done:

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w$$

Où K_1 et K_2 sont les matrices classiques de raideur. L'effet de cisaillement n'est pas pris en compte.

Déformation de celle-ci dans les paliers nous présentons pat la suite une réflexion sur la résolution du système d'équation dynamique mis place.

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -15.51 & -12 & 0 & 0 & -15.51 \\ 0 & 12 & 15.51 & 0 & 0 & -12 & 15.51 & 0 \\ 0 & 15.51 & 26.72 & 0 & 0 & -15.51 & 13.36 & 0 \\ -15.51 & 0 & 0 & 26.72 & 15.51 & 0 & 0 & 13.36 \\ -12 & 0 & 0 & 15.51 & 12 & 0 & 0 & 15.51 \\ 0 & -12 & -15.51 & 0 & 0 & 12 & -15.51 & 0 \\ 0 & 15.51 & 13.36 & 0 & 0 & -15.51 & 26.72 & 0 \\ -15.51 & 0 & 0 & 13.36 & 15.51 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

IV.3.1.3. Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement relient les forces aux déplacements et vitesses. L'influence des pentes et des moments est habituellement négligée et compte

$$\begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{\Psi_1} \\ F_{w_1} \\ F_{\theta_1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3,2 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,3 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{u_2} \\ F_{\Psi_2} \\ F_{w_2} \\ F_{\theta_2} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3,69 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,6 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

IV.3.2. Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant les équations de Lagrange.

Le système d'équations générales est :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{Effort\}$$

Il convient de le réécrire en dissociant les équations en forces et en moments :

$$\begin{cases} [M_f]\{\ddot{q}\} + [C_f]\{\dot{q}\} + [K_f]\{q\} = \{F_{ext}\} \\ [M_M]\{\ddot{\theta}\} + [C_M]\{\dot{\theta}\} + [K_M]\{\theta\} = \{M_{ext}\} \end{cases}$$

Avec $\{q\}$ le vecteur des inconnues en déplacement et $\{\theta\}$ le vecteur des inconnues angulaires. Les équations de mouvements pour un système en tenant compte l'effet de l'amortissement interne s'écrit :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([C] + [C_i])\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_i])\{\delta\} = \{Effort\}$$

La résolution des équations que nous venons de déterminer conduira donc à obtenir les informations relatives au comportement dynamique du rotor, c'est -à-dire le mouvement et la

IV.3. Analyse modale du ventilateur par logiciel Workbench ANSYS 15

Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de vitesse de rotation et le calcul des réponses à balourd principalement lors du passage des vitesses critiques. Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode des éléments finis. Dans ce qui suit on présente la simulation numérique du rotor (ventilateur de tirage ciment FAN 280) par le code calcul ANSYS 15 Workbench.

IV.3.1. Caractéristique géométrique et mécanique de rotor

a- Propriété géométrique

- Pour l'arbre : longueur $L_a = 2,585m$, diamètre $D_a = 0,16m$
- Pour le disque : diamètre extérieur $D_{a_e} = 2,255m$, diamètre intérieur $D_{a_i} = 0,16m$

b- Propriété mécanique

- Pour l'arbre et disque : masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, module de Young $E = 2e11 \text{ Pa}$

Et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

- Pour paliers :

Pour palier 1 (Roulements 22328/C3) : raideur $K_{yy} = 3.2 \times 10^7 \text{ N/m}$; $K_{zz} = 1.2 \times 10^7 \text{ N/m}$ et d'amortissement visqueux $C_{yy} = 3.3 \times 10^3 \text{ N.s/m}$; $C_{zz} = 1.510^3 \text{ N.s/m}$

Pour palier 2 (Roulements 22332/C3) : raideur $K_{yy} = 3.69 \times 10^7 \text{ N/m}$; $K_{zz} = 1.4 \times 10^7 \text{ N/m}$ et d'amortissement visqueux $C_{yy} = 2.6 \times 10^3 \text{ N.s/m}$; $C_{zz} = 1.5 \times 10^3 \text{ N.s/m}$

IV.3.2. Génération et maillage de la géométrie de rotor

La génération de la géométrie du rotor dans le code de calcul ANSYS est obtenue par importation de la géométrie **SolidWorks** et son maillage est obéi au choix des éléments de maillage correspondant à chaque élément de rotor.

Le maillage global de rotor (élément arbre, disque, et palier additionnés) représente le modèle global de rotor à élément fini est illustré sur la **Figure IV.14**

Structure	Élément	Nœud
Rotor	485526	485526

Tableau.IV.3: Maillage du rotor

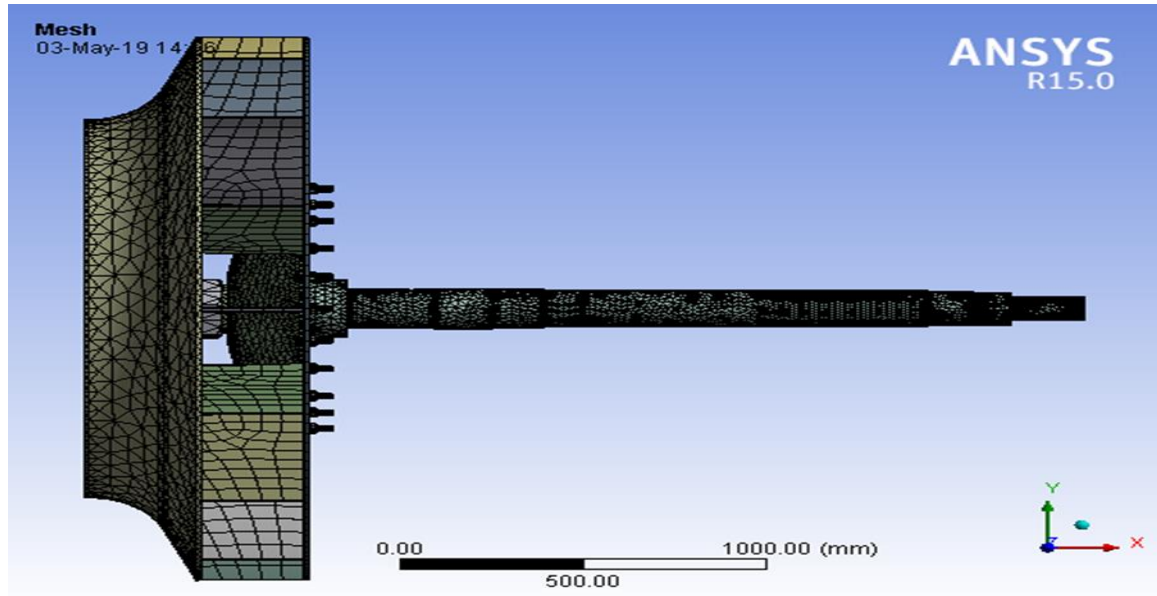


Figure IV.14: Maillage du rotor

IV.3.3. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites dans notre modèle de rotor correspondent :

Le système en rotation suivant l'axe OX (Rot_x), les mouvements de flexion suivant l'axe Z et Y . Pour les paliers dans le cas où son effet est négligeable on suppose qu'ils sont rigides (on supprime tous les degrés de liberté suivant les 3 directions dans le point de raccordement avec l'arbre et les points de raccordement avec la fondation. Si son effet n'est pas négligeable on garde les degrés de liberté suivant les axes OY et OZ et on supprime le déplacement et la rotation suivant OX dans les points de raccordement avec l'arbre voire la Figure IV.15

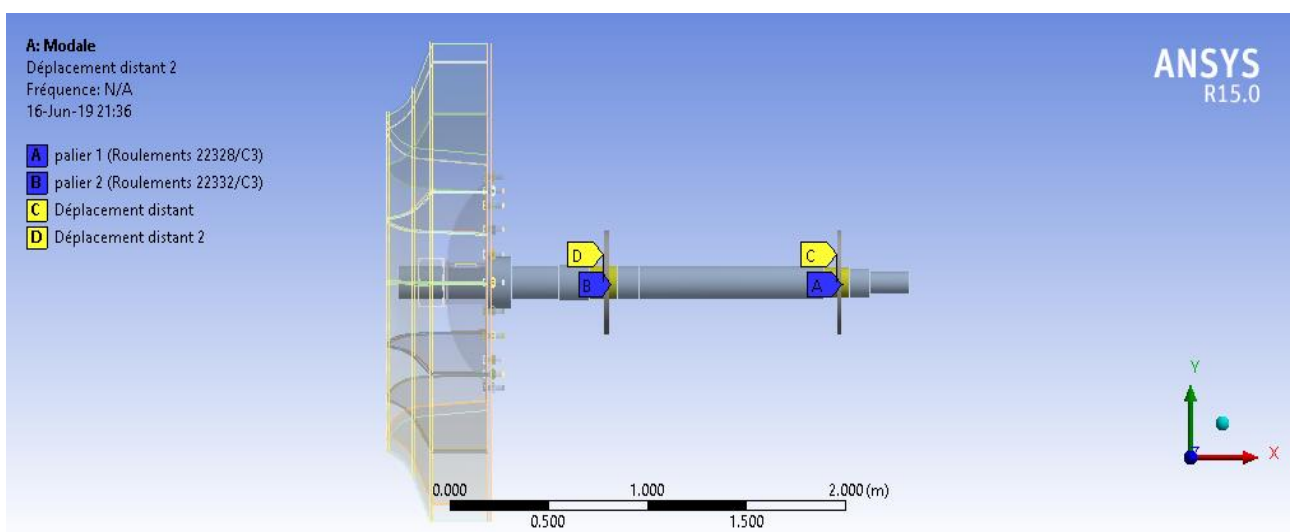


Figure IV.15: condition aux limité

IV.3 : Résultant de simulation numérique

La simulation a été faite pour les vitesses de rotation de fonctionnement Ω différentes et différentes hypothèses des paliers :

Vitesse	Ω_1	Ω_2	Ω_3
Valeur (rpm)	10	400	985

Tableau IV.4 : vitesses de rotation en fonctionnement de Ω

N° de cas	1	2	3
Hypothèses	Palier rigide	Palier élastique	Palier hydrodynamique

Tableau IV.5 : hypothèse de palier

IV.3.1 : Le déplacements et les fréquences

Cas 1 : palier rigide

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse par palier rigide

Definer	Vitesse de rotation [rpm]	Mode	Frequences [Hz]	Deplancement Maximax
1.	1.	1.	0.	8.4331e-004
2.		2.		8.4336e-004
3.		3.	2.5137e-003	
4.		4.	0.72844	1.3399e-003
5.		5.	0.73304	1.6793e-003
6.		6.	6.4166	1.6723e-003
7.	2.	1.	0.	8.4331e-004
8.		2.		8.4336e-004
9.		3.	2.5137e-003	
10.		4.	0.32837	1.697e-003
11.		5.	0.72847	1.3295e-003
12.		6.	14.323	1.6696e-003
13.	3.	1.	0.	8.4331e-004
14.		2.		8.4337e-004
15.		3.	2.5137e-003	
16.		4.	0.28903	1.6968e-003
17.		5.	0.72848	1.3295e-003
18.		6.	16.273	1.6695e-003

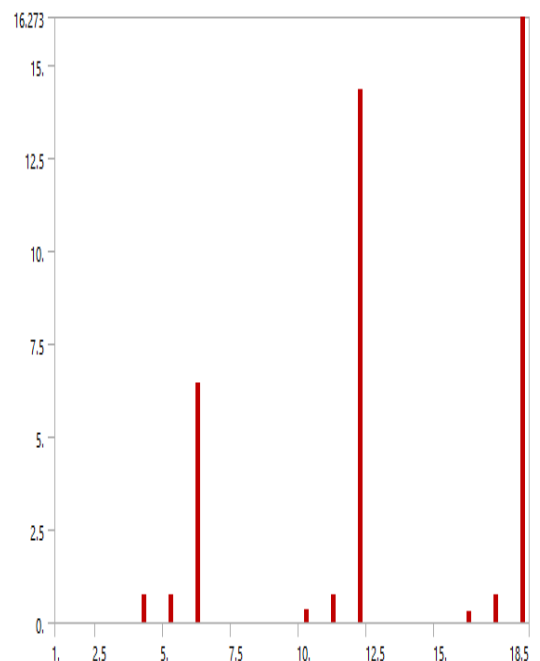


Figure IV.16 : Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé

Les résultats de déplacement illustrent aux figures suivant (voir figures IV 17.18.19)

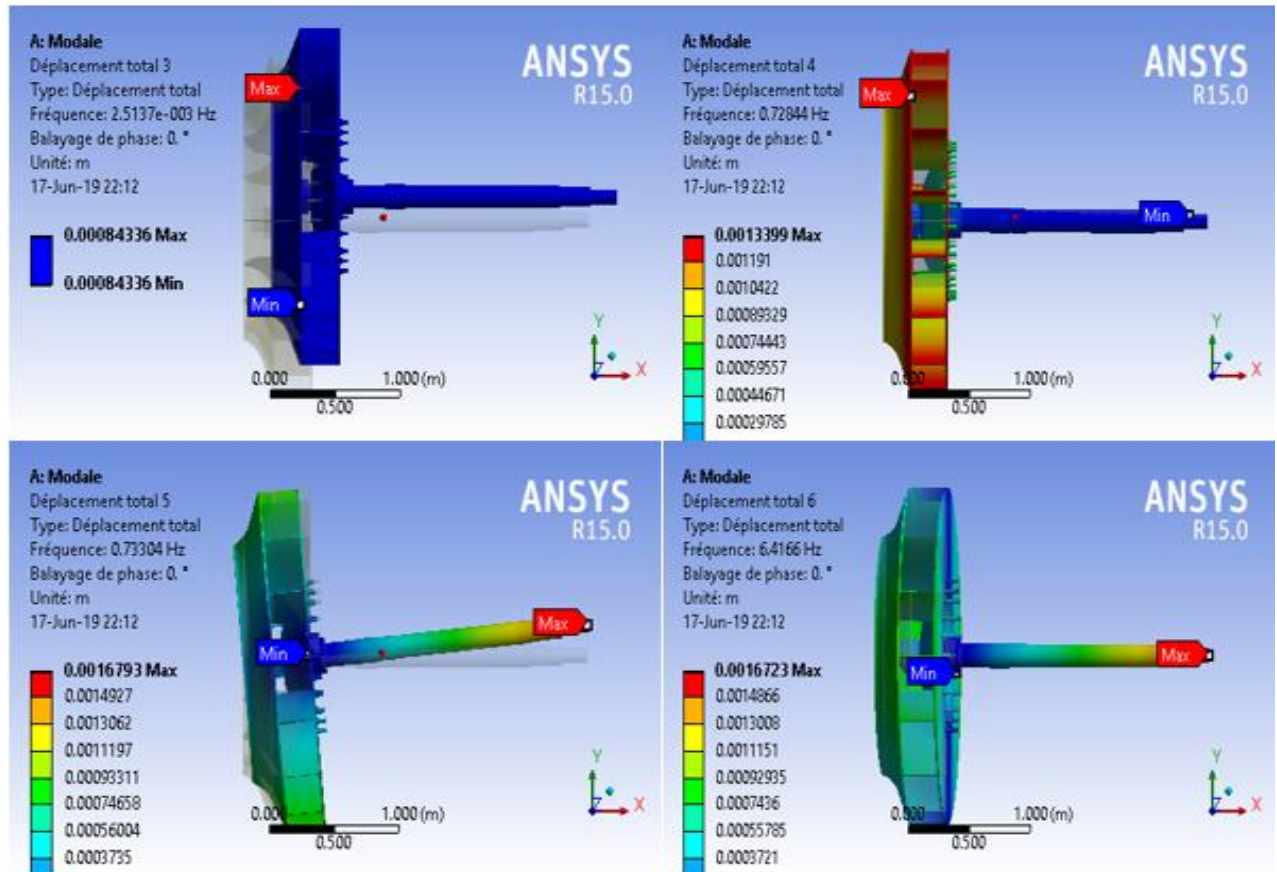


Figure IV.17 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

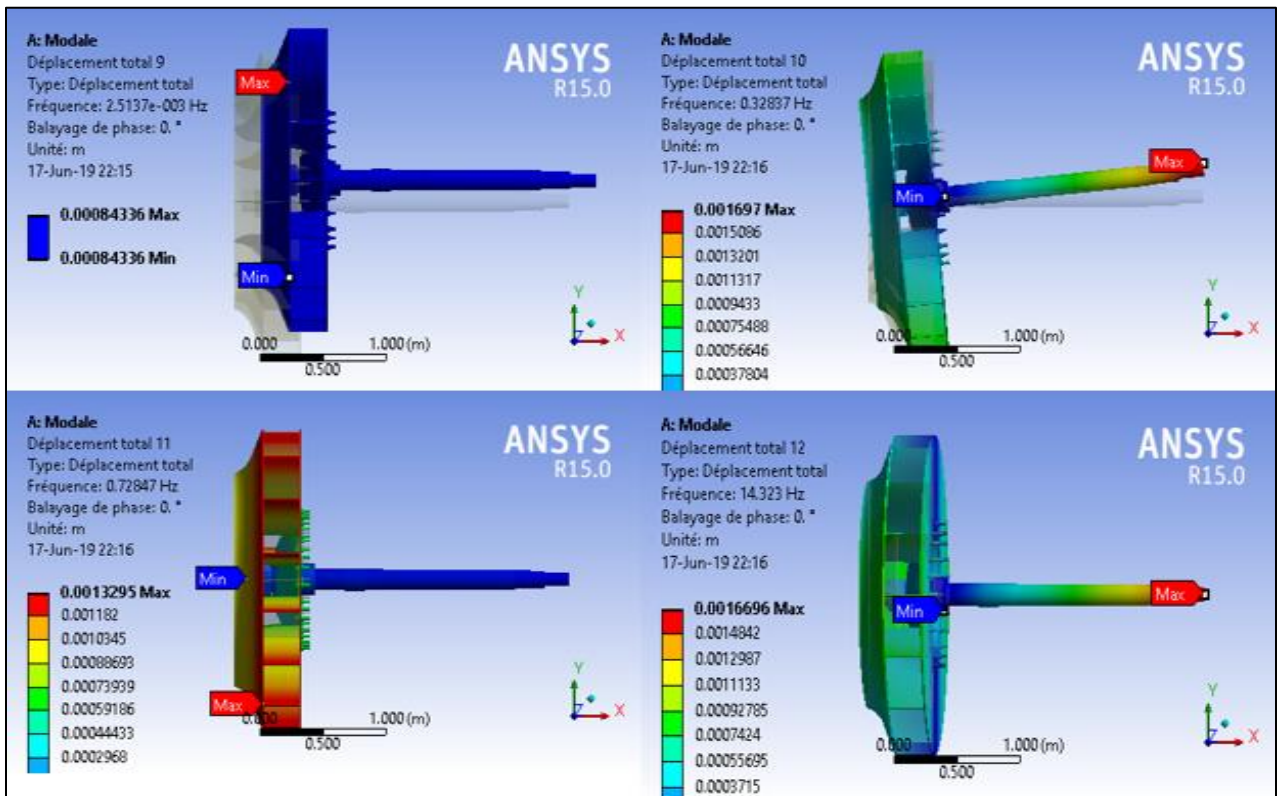


Figure IV.18 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

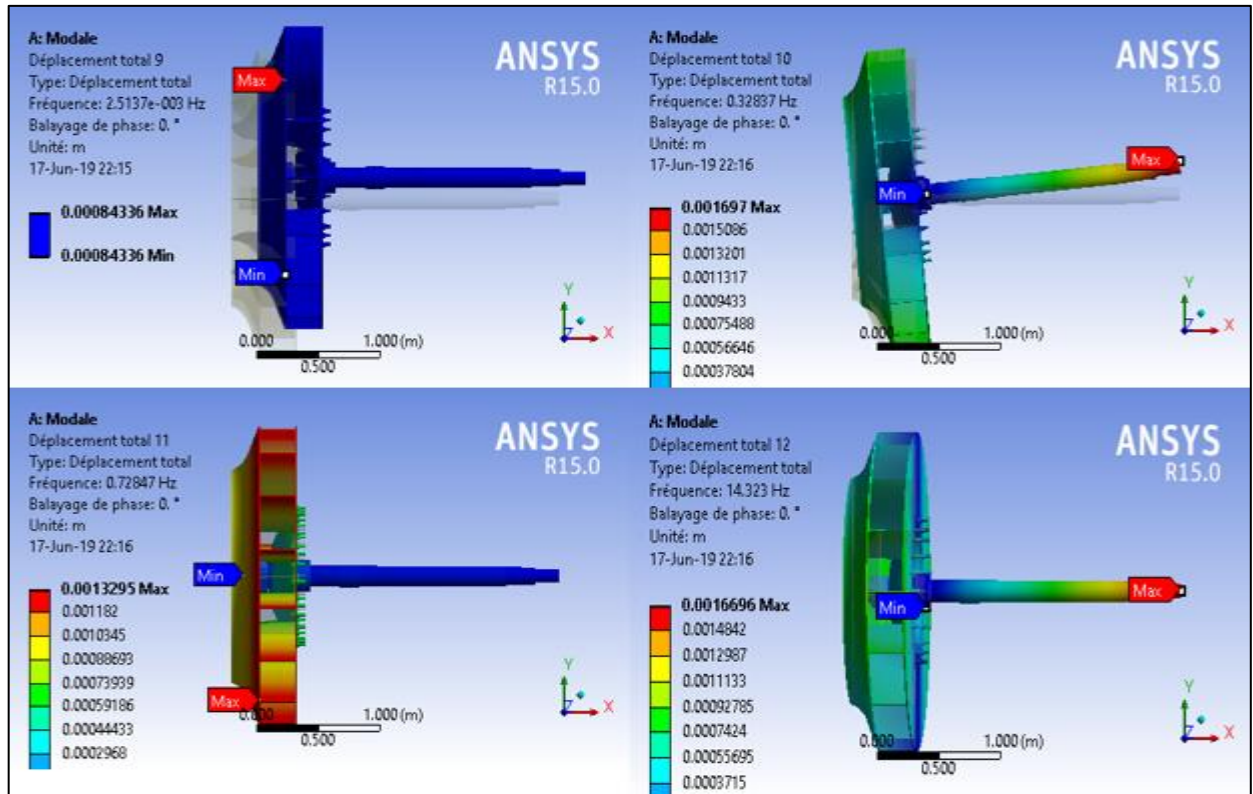


Figure IV.19 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

Cas 2 Palier élastique

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse par palier élastique.

Definer	Vitesse de Rotation [rpm]	Mode	Fréquence [Hz]	Deplancement Maximax [m]
1.	1.	1.	7.3435e-004	2.6667e-002
2.		2.	0.72052	4.2042e-002
3.		3.	4.4401	4.1888e-002
4.		4.	9.5045	3.3019e-002
5.		5.	13.062	3.3663e-002
6.		6.	17.561	4.1569e-002
7.	2.	1.	7.3435e-004	2.6667e-002
8.		2.	0.72053	4.2042e-002
9.		3.	2.3222	4.1597e-002
10.		4.	9.5596	3.4013e-002
11.		5.	13.21	3.4922e-002
12.		6.	33.01	4.1131e-002
13.	3.	1.	7.3435e-004	2.6667e-002
14.		2.	0.72053	4.2042e-002
15.		3.	2.0681	4.1582e-002
16.		4.	9.5622	3.4059e-002
17.		5.	13.215	3.495e-002
18.		6.	37.041	4.1104e-002

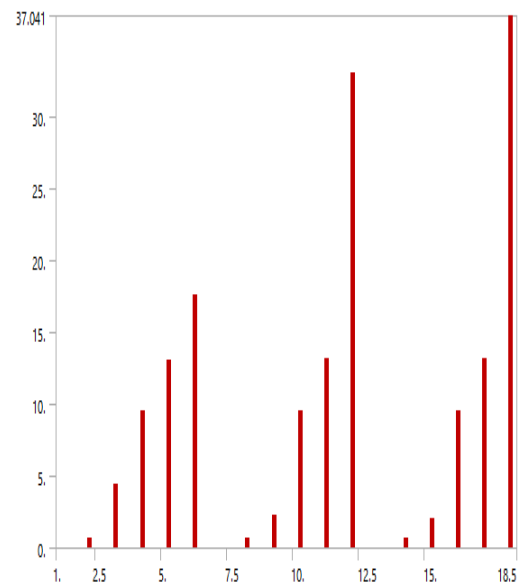


Figure IV.20 : Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé

Les résultats de déplacement illustrent aux figures au-dessous (voir figures IV.21.22.23)

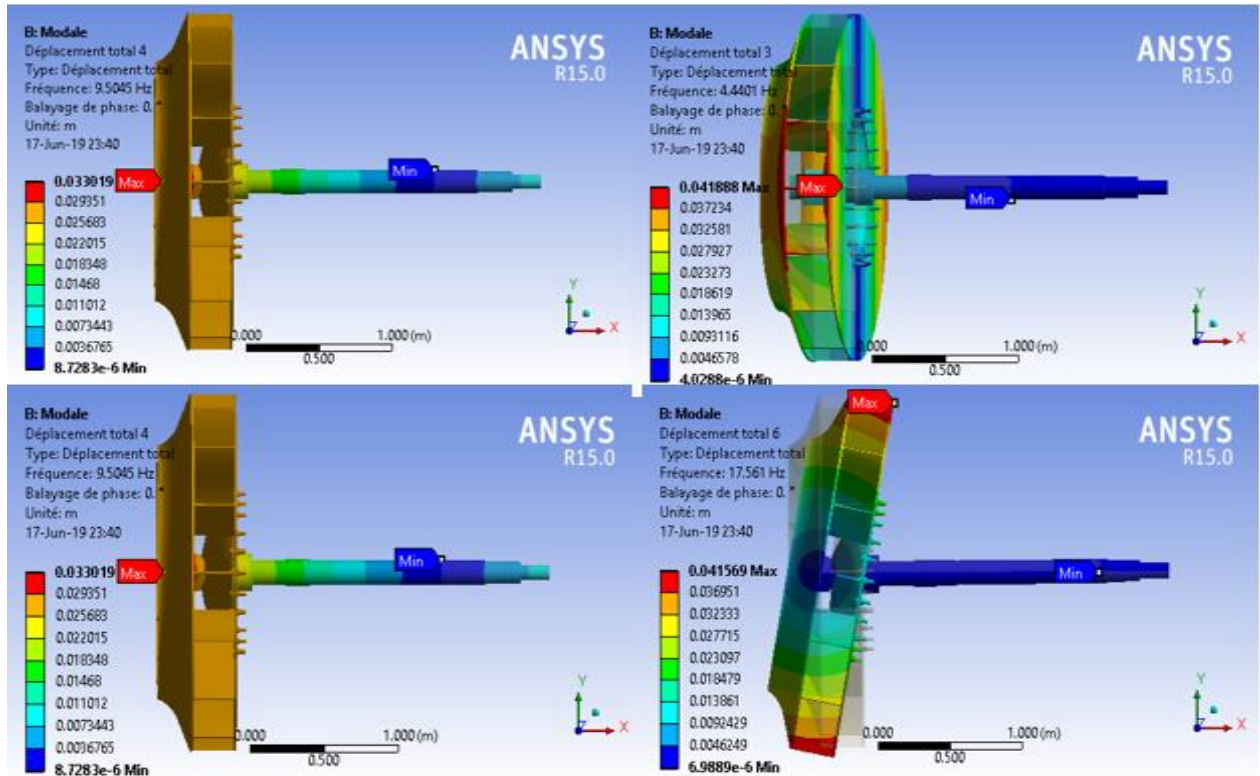


Figure IV.21 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

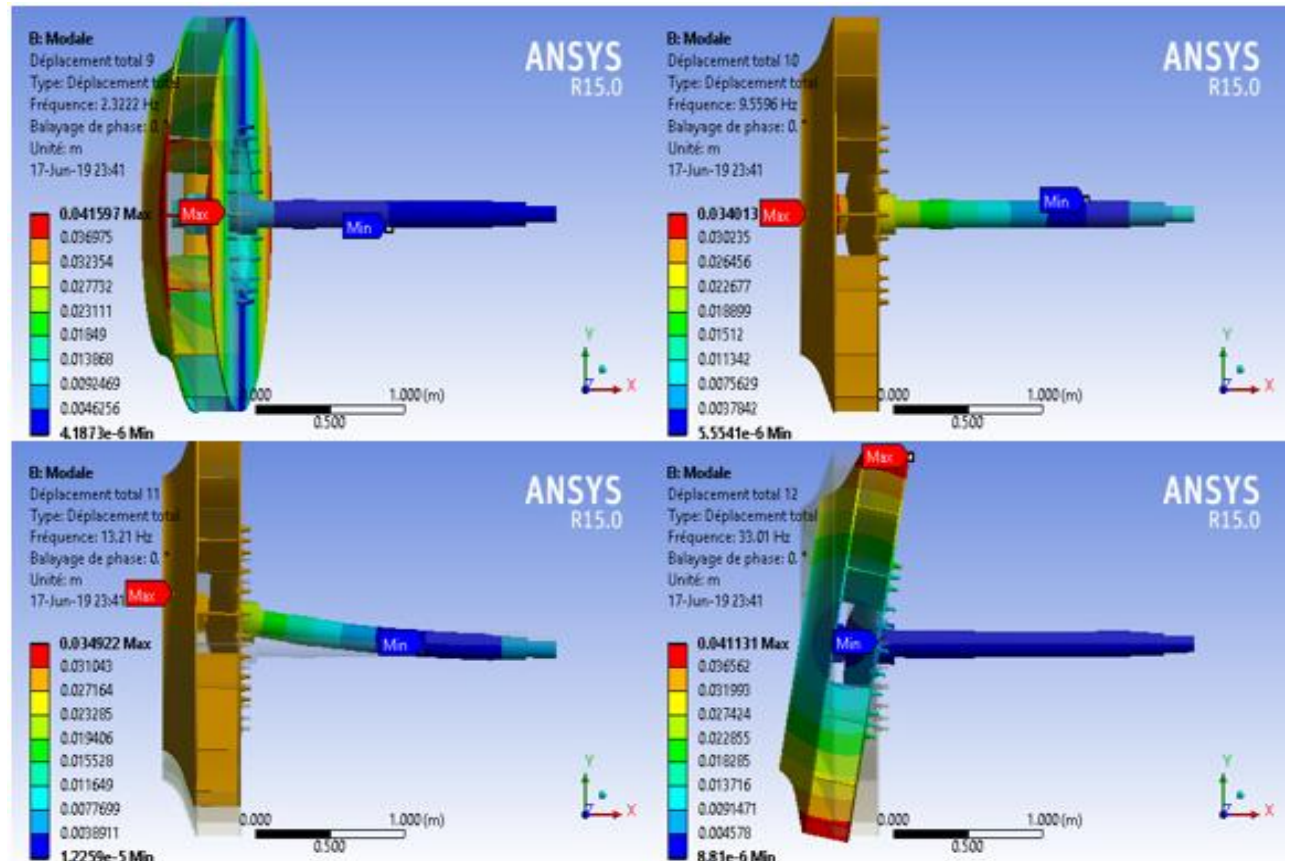


Figure IV.22 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

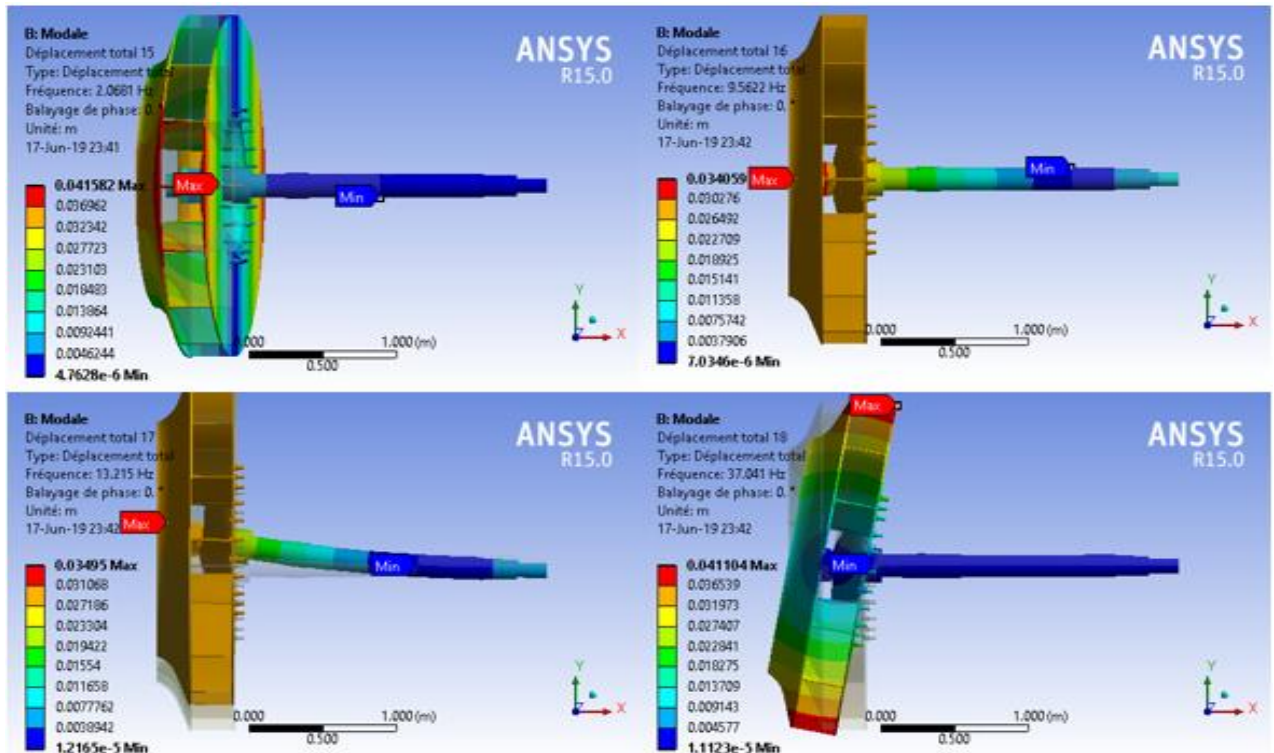


Figure IV.23 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

Cas 3 : Palier hydrodynamique

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse par palier hydrodynamique

Definer	Vitesse de Rotation [rpm]	Mode	Fréquence [Hz]	Deplanement Maximax [m]
1.	1.	1.	7.1646e-004	2.6667e-002
2.		2.	0.72052	4.2136e-002
3.		3.	0.82845	3.4344e-002
4.		4.	5.1783	3.7915e-002
5.		5.	13.033	3.3684e-002
6.		6.	17.481	4.0019e-002
7.	2.	1.	7.1646e-004	2.6667e-002
8.		2.	0.65277	3.4524e-002
9.		3.	0.72053	4.2123e-002
10.		4.	3.4385	3.1168e-002
11.		5.	13.207	3.494e-002
12.		6.	32.981	4.1002e-002
13.	3.	1.	7.1646e-004	2.6667e-002
14.		2.	0.61096	3.4557e-002
15.		3.	0.72053	4.2086e-002
16.		4.	3.2721	3.0634e-002
17.		5.	13.214	3.4964e-002
18.		6.	37.013	4.1004e-002

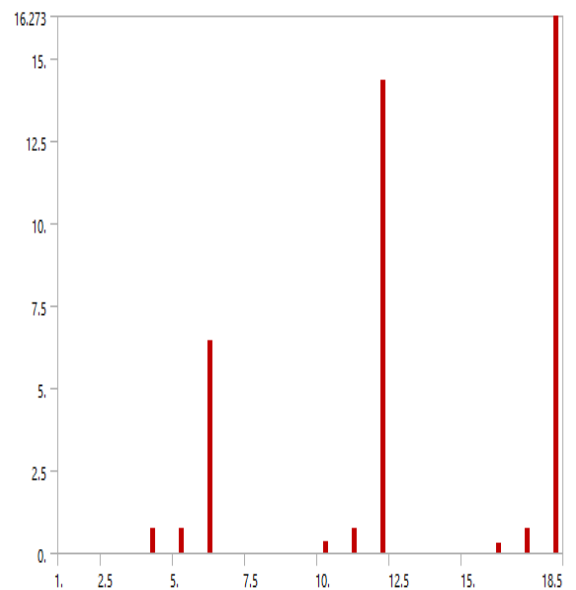


Figure IV.24 : Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé

Les résultats de déplacement illustrent aux figures au-dessous (voir figures IV 25.26.27)

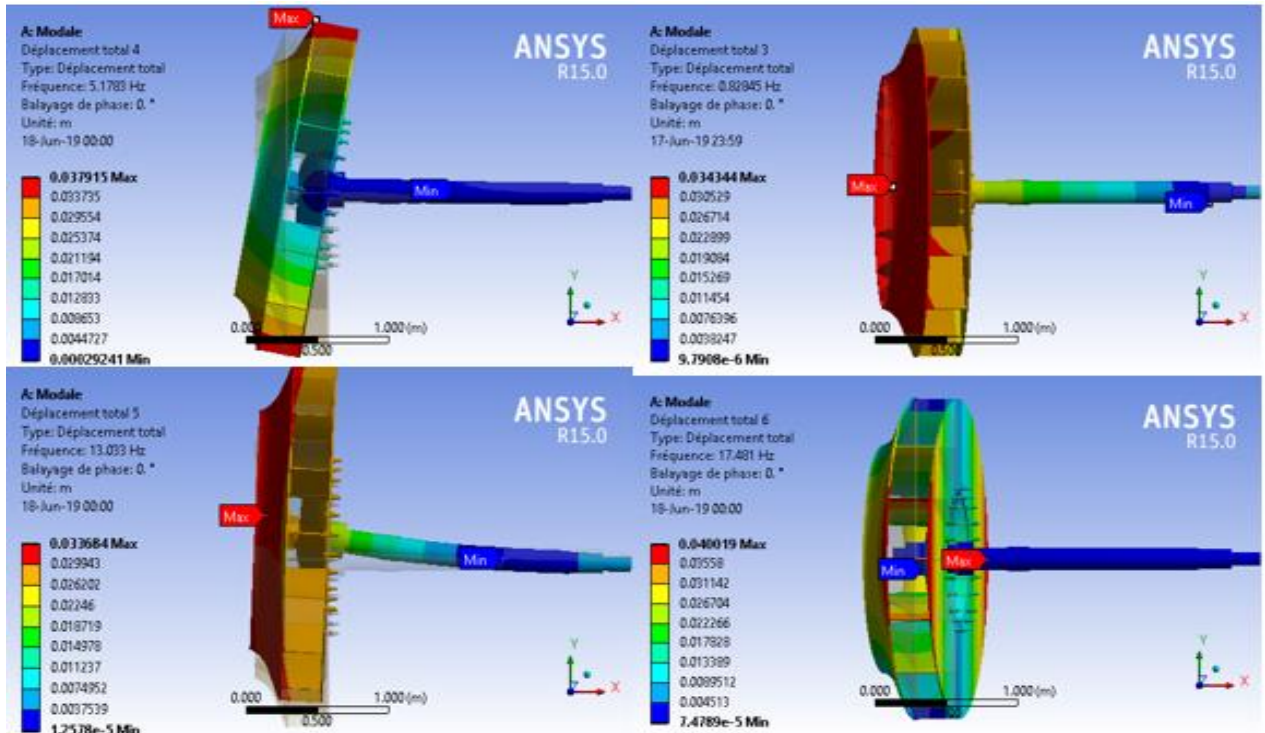


Figure IV.25 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

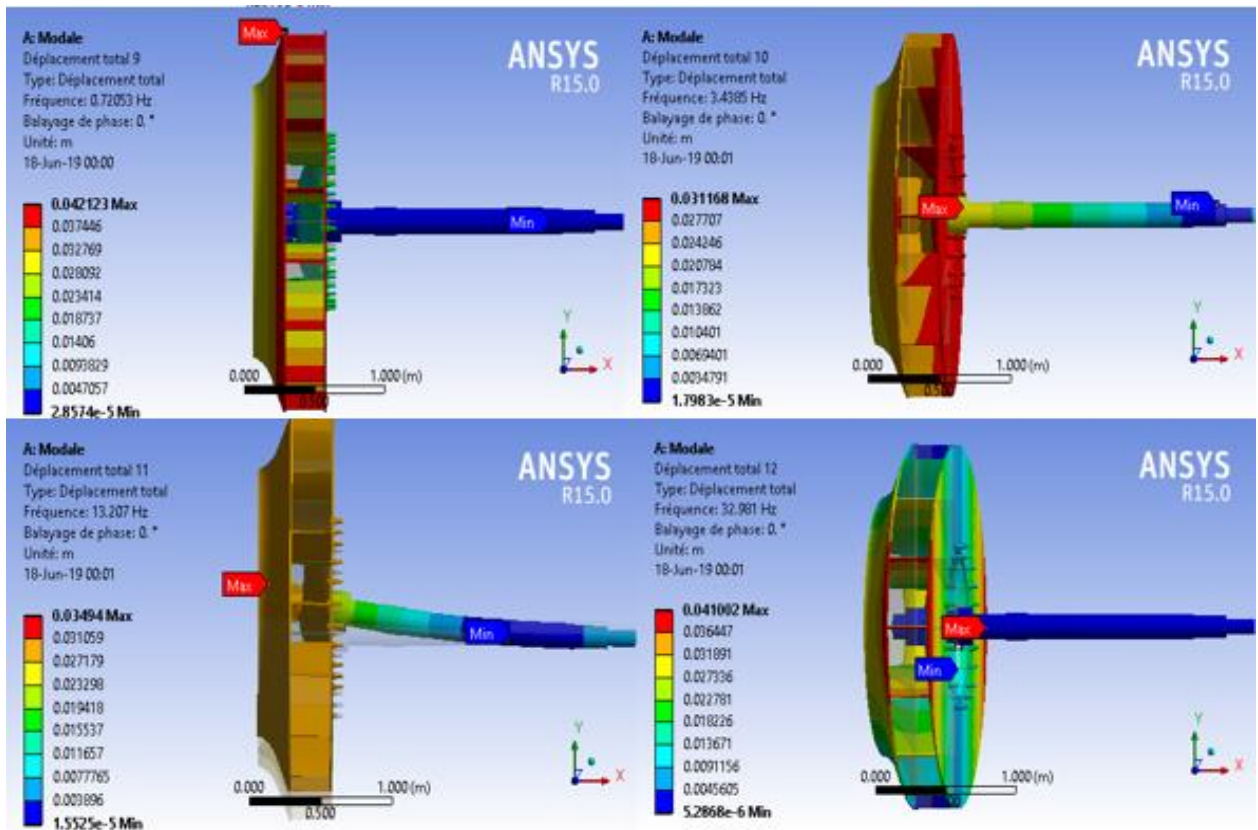


Figure IV.26 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

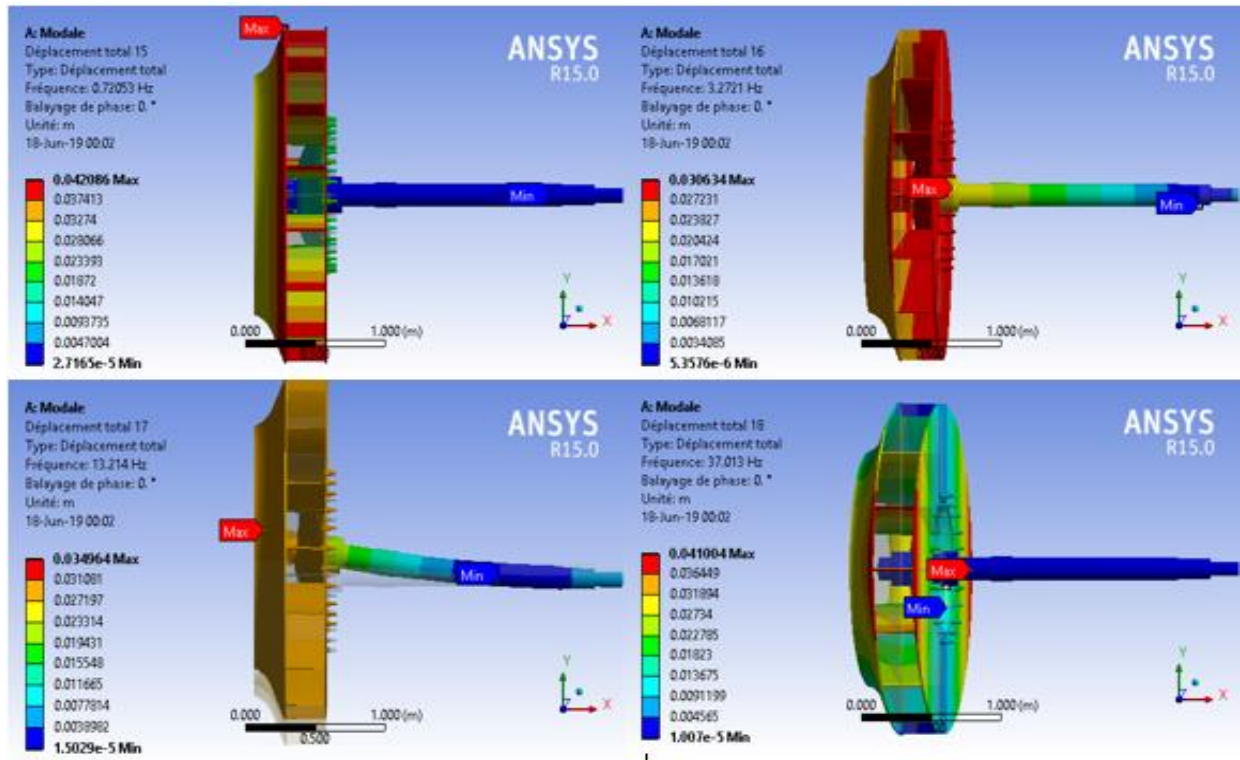


Figure IV.27 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

IV.3.2 : L'évolutions des contraintes des modes déformés

L'analyse des contraintes engendre lors de déformation de rotor représenté des contraintes équivalent de von-Mises pour trois hypothèses de palier en fonction différentes vitesses Ω

Cas 1 : palier rigide

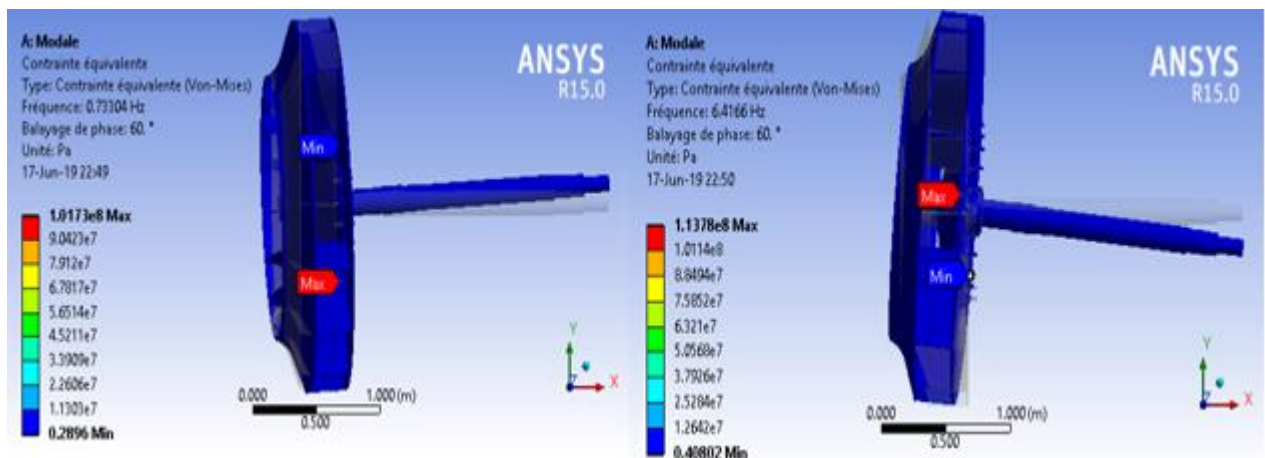


Figure IV.28 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

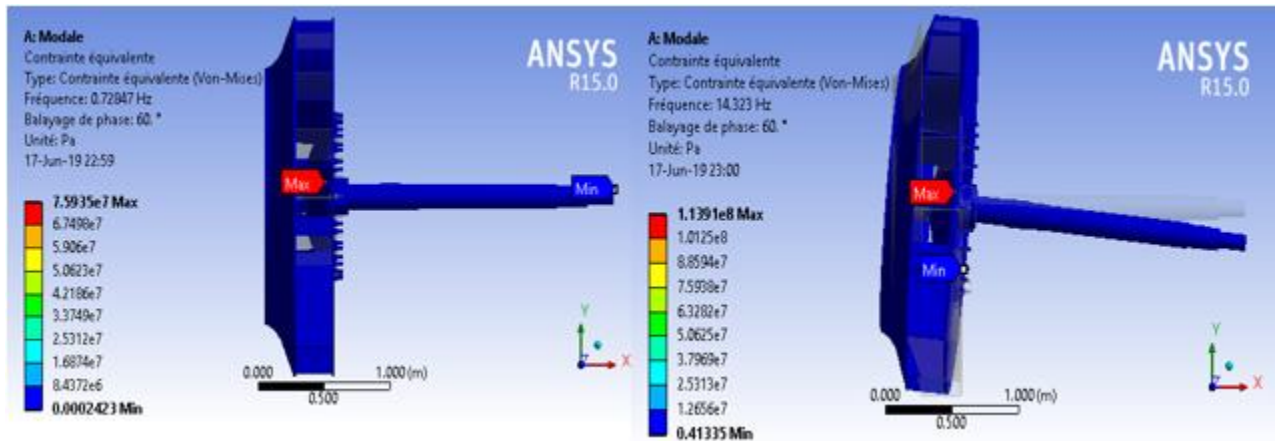


Figure IV.29 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

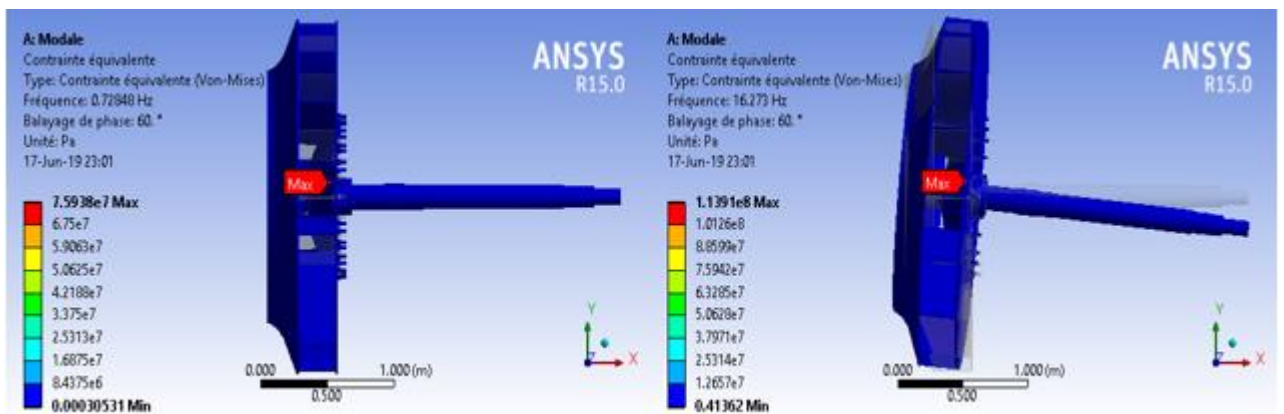


Figure IV.30 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

Cas 2 : palier élastique

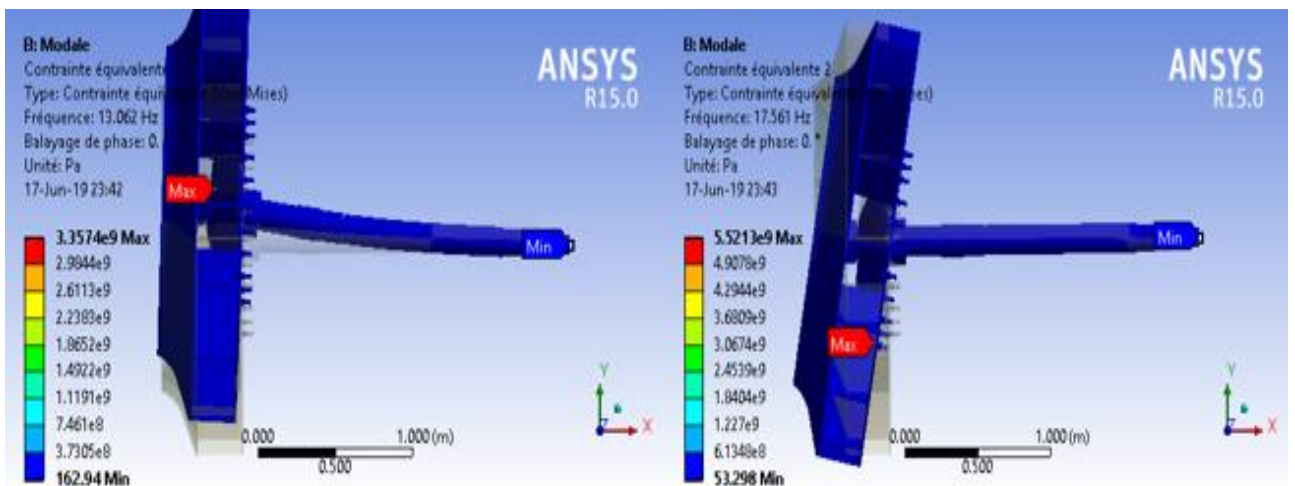


Figure IV.31 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

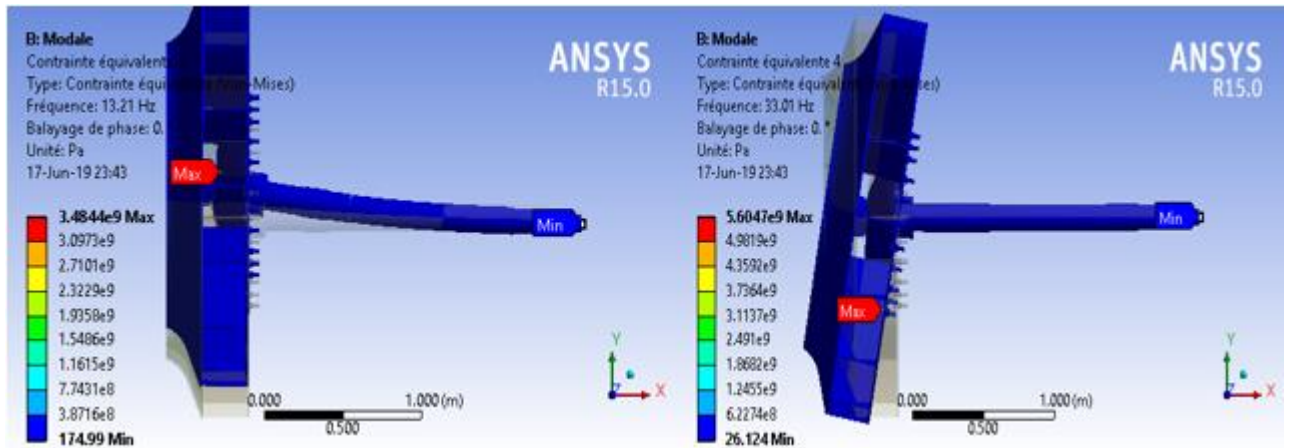


Figure IV.32 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

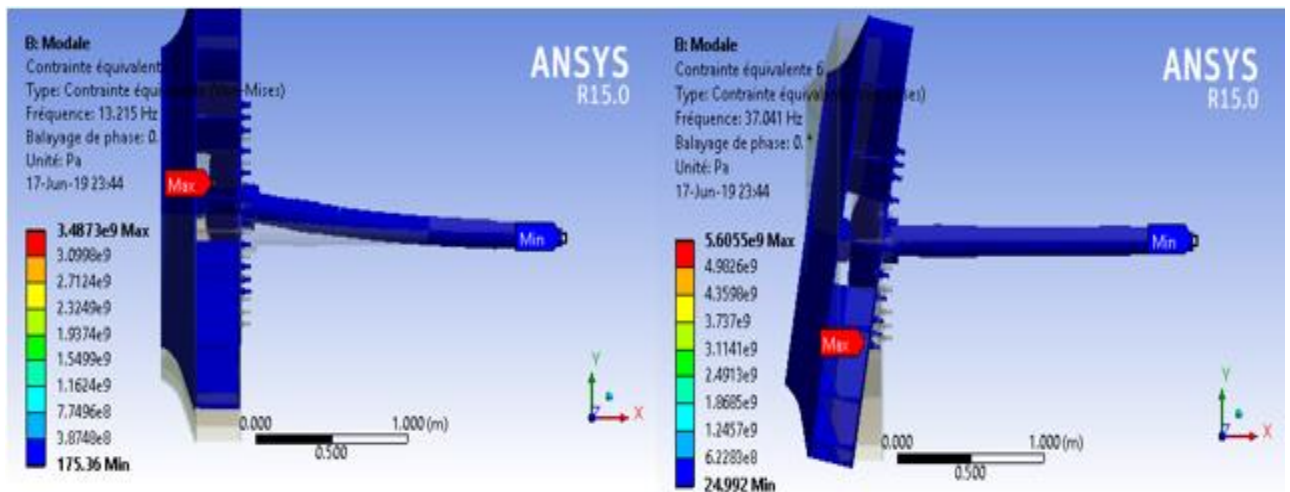


Figure IV.33 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

Cas 3 : palier hydrodynamique

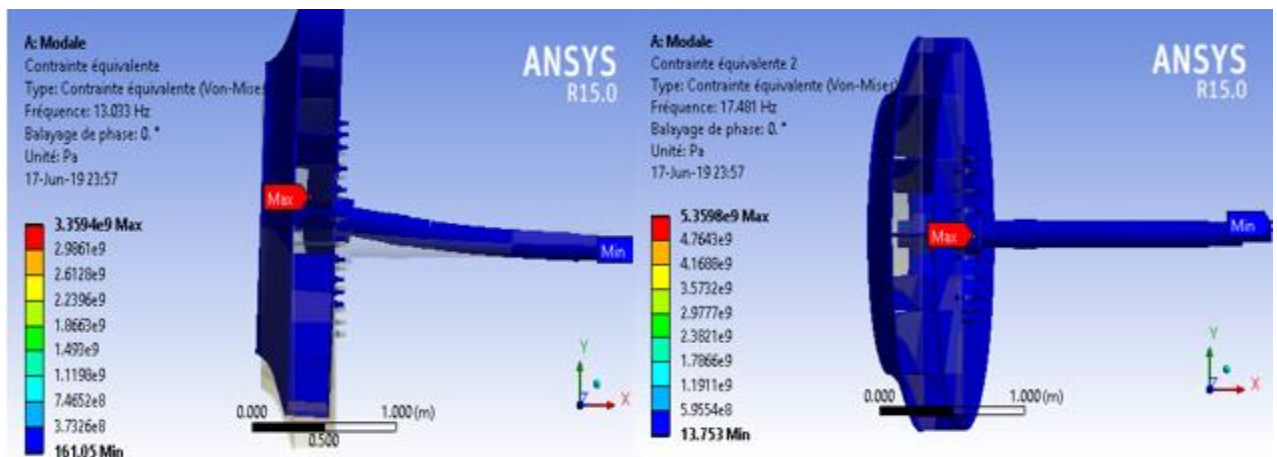


Figure IV.34 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 400 rpm

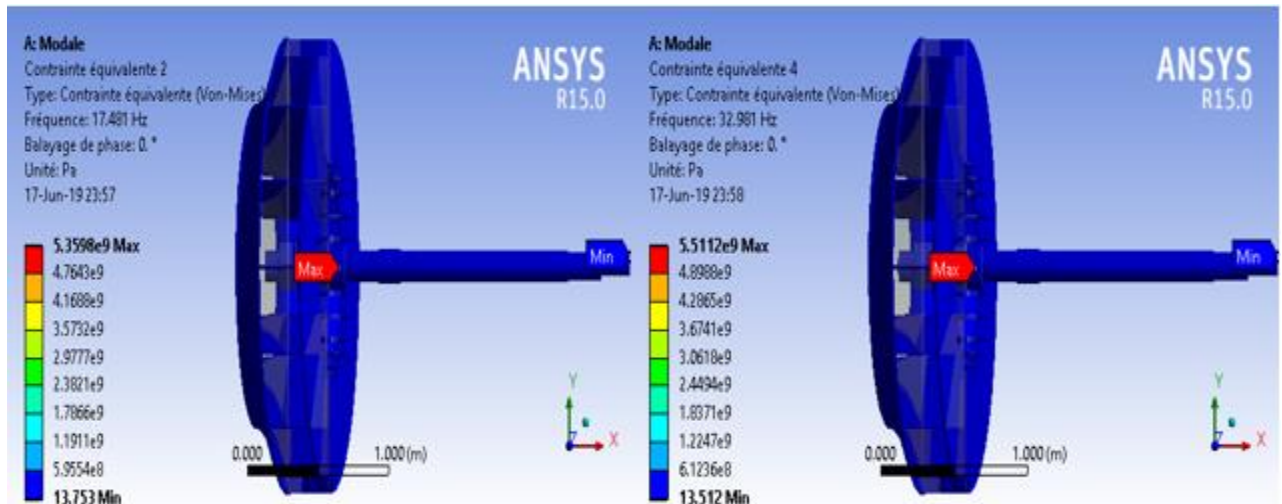


Figure IV.35 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 985 rpm

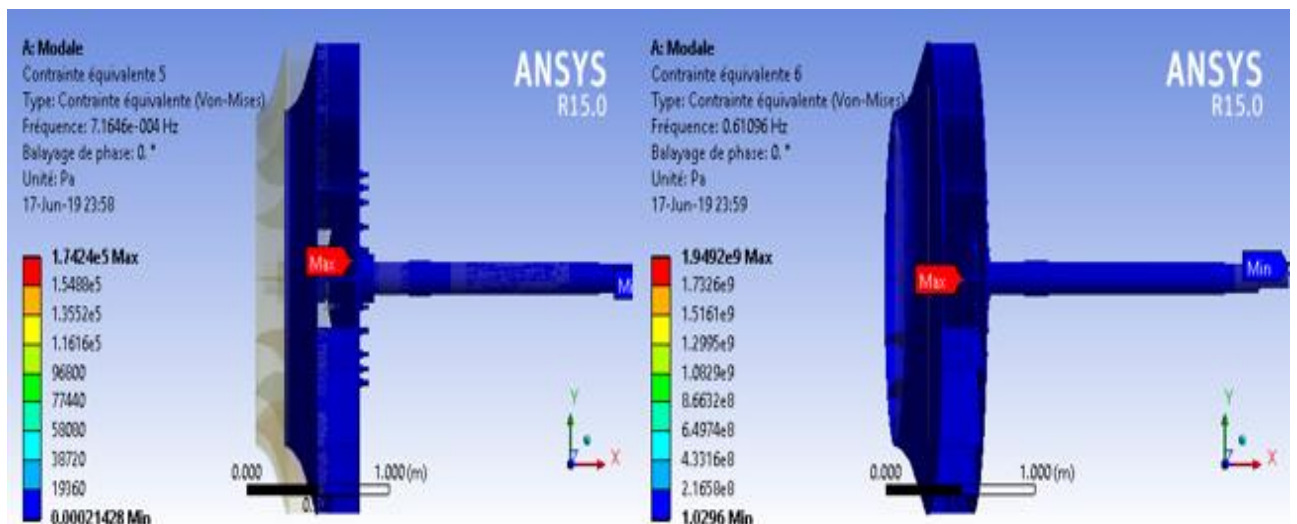


Figure IV.36 : Contraint équivalent de Von-Mises pour la vitesse de fonctionnement 1125 rpm

IV.3.3 : Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell permet nous de déterminer les vitesse critique pour divers types d'excitation, pour une excitation synchrone de type force de balourd la vitesse critique est obtenue par l'intersection de droit harmonique bissectrice avec les droits des modes de vibration de rotor, le diagramme de Campbell pour les hypothèses de palier aux figures (37.38.39)

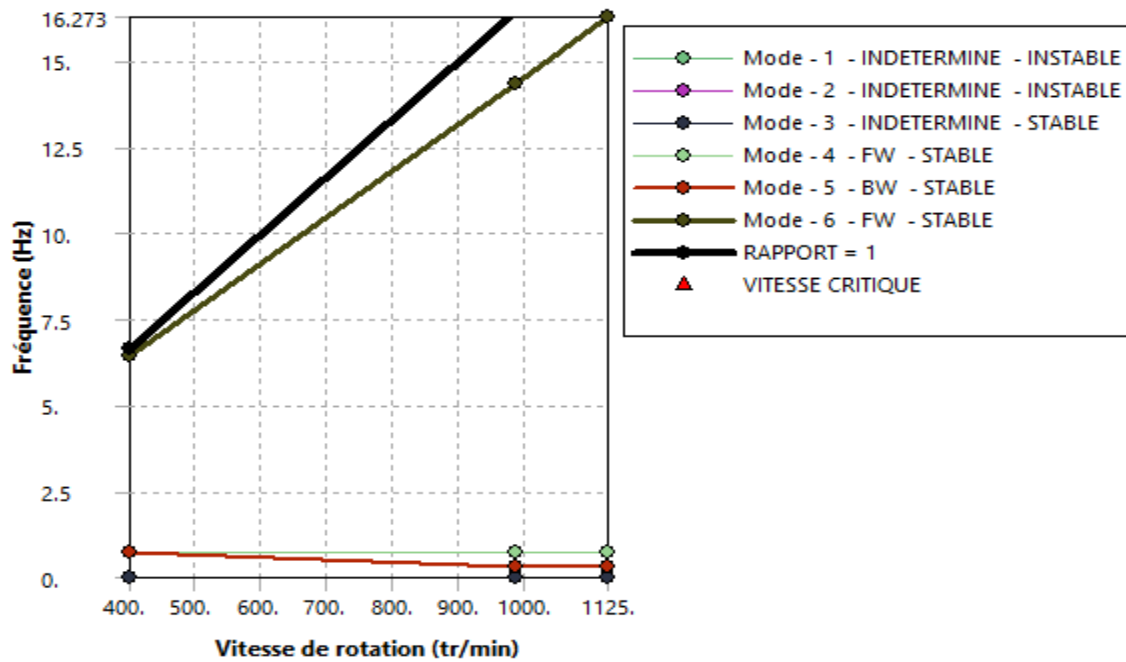


Figure IV.37 : Digramme de Campbell (palier rigide)

La vitesse n'est pas apparue mais elle est possible de la voir pour des grande vitesse et d'absence le gyroscopiques, les modes 1et2 sont instable.

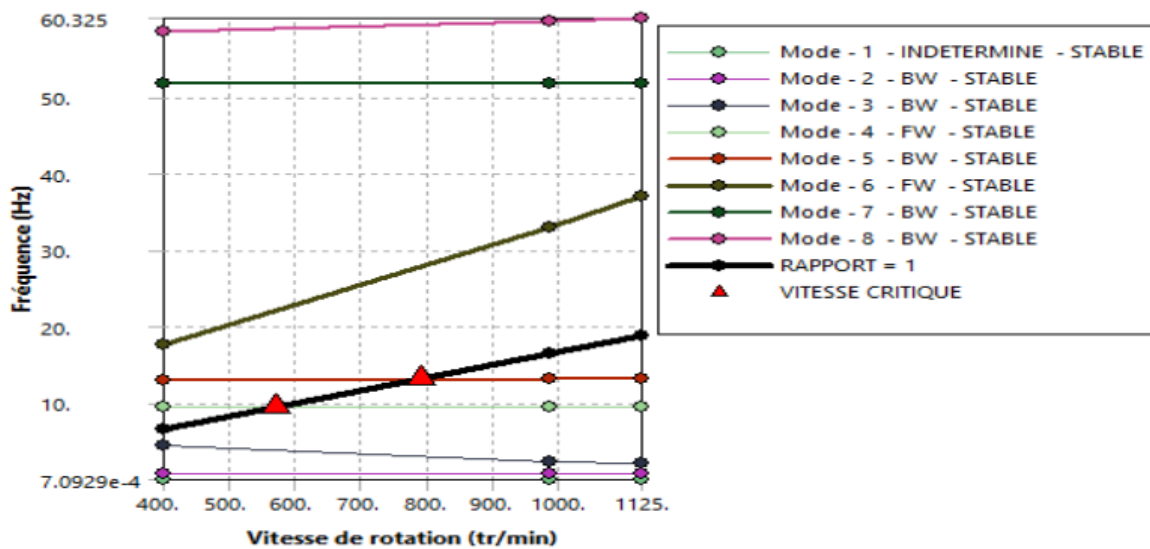


Figure IV.38 : Digramme de Campbell (palier élastique)

Le cas palier élastique présent 2 vitesse critique la première vitesse critique correspond le quatrième mode est située à la vitesse $\Omega_{c_1} = 571.24$ tr/min et la deuxième vitesse critique correspond le cinquième mode est située à la vitesse $\Omega_{c_2} = 789.64$ tr/min

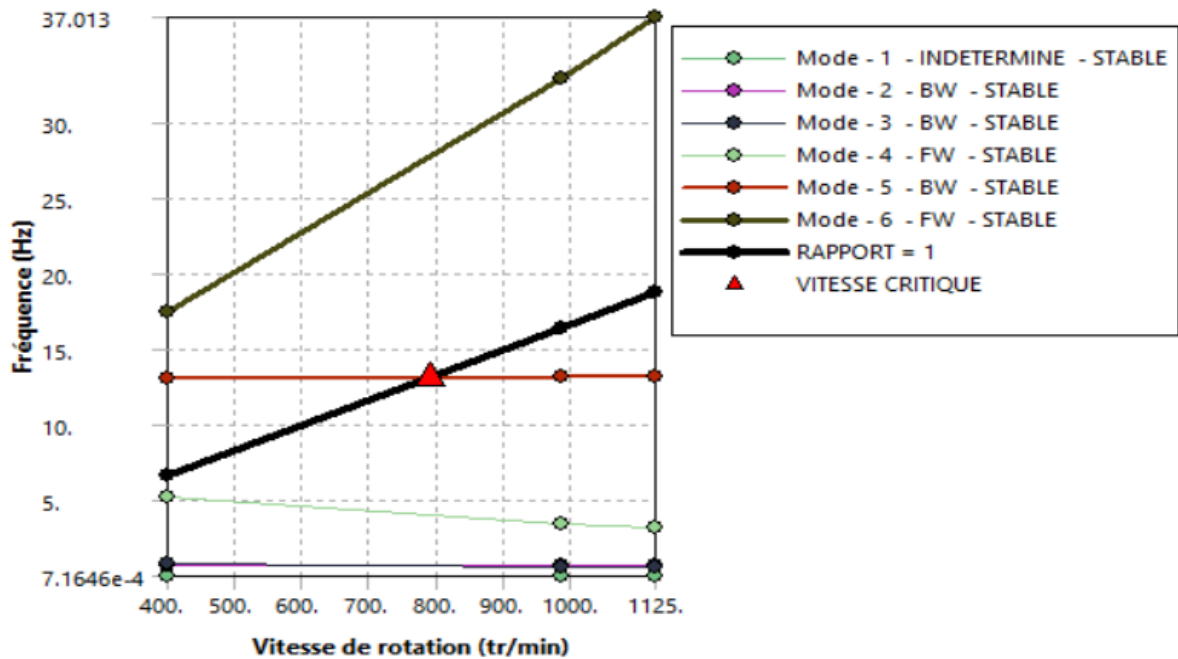


Figure IV.39 : Digramme de Campbell (palier hydrodynamique)

Une seule vitesse critique $\Omega_{c_1} = 788.94$ tr/min est apparu pour le cas palier hydrodynamique en le mode cinquièmes.

Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif d'apporter d'étude dynamique de rotors par élément finis

Le premier chapitre Le premier chapitre d'après l'introduction générale de ce travail est édifié à partir d'une synthèse bibliographique sur le comportement dynamique et vibratoire d'un rotor flexible. Il synthétise les généralités sur les rotors des machines tournantes industrielles, l'histoire et les travaux de recherche qui contribuent au développement sur le dynamique de rotor ,D'après une étude détaillée dans les littératures qu'on a vue, on est conclus que le début de recherche sur le comportement dynamique des rotors est généralement limité sur la détermination des vitesses critiques et les modes de vibrations, mais récemment les points de vue des chercheurs s'orientent vers l'étude des systèmes non linéaire et l'analyse de stabilité du système dynamique.

Le deuxième chapitre est consacré aux modélisations de rotor par équation fondamentales de mouvement de rotor. On a déterminé les énergies (cinétiques et déformation), On est appliqué, les équations de Lagrange pour trouver finalement les équations de mouvement de rotor.

Le troisième chapitre consacré à la modélisation de rotor par la méthode des éléments fini, on a déterminé les différentes matrices des paramètres dynamique de rotor, matrice de masse, matrice d'amortissement et matrice de rigidité, enfin on est proposé la méthode de Newmark comme une méthode très efficace pour la résolution de système obtenue.

Enfin, L'étude menée au dernière chapitre est pour objectif de détermine les fréquences est déplacements max par trois hypothèse (rigide, élastique et hydrodynamique), ces études ont été faite par simulation en ANSYS WORKBENSH et ils sont présentés par le diagramme de Campbell, ou cela on constate que la vitesse critique proportionnel aux grandes vitesses sans oublier et comme une condition très important il faut que le coefficient de gyroscopique égale zéro

D'après le thème que je le traite dans ma mémoire, j été obligé d'apprendre l'utilisation de logiciel ANSYS WORKBENSH pour trouver ces difficiles résultats, on souhaite au futur d'approfondir le développement et le recherche sur l'Eudes dynamique de rotor par élément fini

Références

[1] **Dr.RAGIV** “TIWARI “ROTOR SYSTEMS analysis and identification”

[2] **TR2SOR KANYIK** “Simulation par la méthode des éléments finis du comportement vibration d’un rotor”

[3] **RAHMANIO et Kebdanis** « introduction à la méthode des élément finis pour les ingénieurs »

[4] **GLLAGHERR.H.** « introduction aux élément finis »

[5] **BOUHALI MOHAMMED ELAMINE** « analyse dynamique d’arbre moteur »

[6] **CHELLIL AHMED** « Indentification par éléments finis des charges dynamique du rotor principal d’hyphes »

[7] **BELAHRCHE SALAHA.** « Analyse dynamique des corps continus en rotation : application aux arbres moteur »

[8] **fiches LAFARGE M’sila**

Résumé

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus.

Cependant, les problèmes vibratoires liés leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception. Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur fonctionnalité et leur fiabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après modifier la conception pour les changer afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient.

Le travail présenté dans ce mémoire traite un problème réel concernant l'analyse du comportement dynamique vibratoire d'un ventilateur de tirage ciment. La modélisation a été faite par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ANSYS pour déterminer les fréquences propres, les déformées modales, les vitesses critiques du rotor et de calculer les contraintes agissant sur le rotor pour les différents modes propres.

Mots clés : Simulation, rotors, éléments finis, analyse modale.

ملخص

التقدم التكنولوجي يتطلب أنظمة أكثر فعالية من أي وقت مضى. بالنسبة للأجهزة الدوارة، تعد الطاقة العالية والسرعات العالية من بين الأهداف المرجوة. ومع ذلك، فإن المشاكل الاهتزازية المتعلقة بعناصرها الأساسية مثل المحاور والدورات هي ظواهر لا تزال مقلقة على الرغم من التقدم المحرز في التصميم. هذه، على سبيل المثال، بسبب أخطاء تصنيع وتجميع لا مفر منها، تحد من أداء الماكينة من خلال التأثير على الأداء الوظيفي والموثوقية. يمكن أن تسبب أضرارًا خطيرة أو تؤدي إلى تلفهم. لذلك فإن الفهم الكامل لسلوك الاهتزاز والمعرفة الكافية لديناميكيات الدوار ضرورية لإيجاد طرق لتجنب أو تقليل الاهتزازات أو التخلص منها. في البداية، كانت المخاوف والجهود الأولى هي التنبؤ بسرعات دوران الرنين الحرجة وبعد تعديل التصميم لتغييرها من أجل تجنبها. ولكن، لوحظ منذ فترة طويلة أنه عندما تتجاوز سرعات التشغيل السرعات الحرجة، تنشأ العديد من مشاكل عدم الاستقرار غير المرغوب فيها.

العمل المقدم في هذه الرسالة يتعلق بتحليل السلوك الديناميكي اهتزازية لمروحة الاسمنت. تم إجراء النمذجة باستخدام طريقة العناصر المنتهية باستخدام كود ANSYS لتحديد حالات الرنين الذاتي، وتشوهات الذاتية، والسرعات الحرجة للدوار، ولحساب الاجهادات المأثرة على الدوار للأنماط الذاتية المختلفة. الكلمات المفتاحية: المحاكاة، الدورات، العناصر المنتهية، التحليل الذاتي..