REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'SILA
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Equation d'evolution de Navier-Stokes

Présenté par :
M^r BAKHTI Abdelaziz

Soutenu publiquement le : 04/06/2024.

Membres du jury :

Mr.Abdelhak MOKHTARI	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
Mr.Brahim BOUGHERARA	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur.**
Mr.Abderachid SAADI	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire : 2023/2024

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier ALLAH pour m'a donné la santé, la volonté, la patience et la force durant toute mes années d'étude. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur ***Mr.Brahim BOUGHRARA****, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé .Je tenais à remercier* ***Mr.Abdelhak MOKHTARI*** *et* ***Mr.Abderachid SAADI*** *les membres du jury pour acceptant de présider et examiner ce travail.*
J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants de département de mathématique et spécialement, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.
et toute ceux contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

DéDECATION

Je dédie ce modeste travail à :

mes parents
ma femme
mes enfants : Mohamed, Abdessamed ,Djomana , et Haydar
mes frères et ces enfants
ma sœur et ces enfants
mes beau frères et ces enfants
tous mes amis.
toutes mes adorables que j'ai connu pendant toute ma vie

NOTATION

$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N, N est un nombre naturel.
Ω	Partie ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω .
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\longrightarrow$	La convergence forte.
$(\ ,\ )$	Produit scalaire.
$\langle .,. \rangle$	Crochet de dualité .
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distribution sur Ω
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue.
$\\|.\\|_{L^p(\Omega)}$	Norme dans $L^p(\Omega)$
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	Espaces de Sobolev
$W_0^{m,p}(\Omega), H_0^m(\Omega)$	L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, respectivement dans $H^m(\Omega)$
$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Laplacien de u
$\mathrm{div} u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	Divergence de u
$\mathrm{div} u = 0$	$(i.e \sum\limits_{i=1}^{3} D_i u_i = 0)$
$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, \dots n$	Gradient de u
$L^2(0,T;H)$	Espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Hilbert H
$L^2(0,T;V)$	Espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach V
$\hookrightarrow$	L'injection canonique
$\hookrightarrow_c$	L'injection canonique compact

Table des matières

HISTORIQUE

HISTORIQUE

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont très largement utilisées en hydrodynamique. Elles tirent leur nom de leurs découvreurs au XIXe siècle, le mathématicien et ingénieur français Henri Navier et le physicien et mathématicien britannique George Stokes. L'histoire a malheureusement laissé dans l'ombre le rôle du physicien Barré de Saint-Venant. En physique classique, les équations de Navier-Stokes sont aussi importantes que les équations de Maxwell et d'Einstein. Elles décrivent l'évolution dans le temps et dans l'espace du champ de vecteur vitesse des fluides « newtoniens » considérés comme continus. Les météorologues et les océanographes s'en servent pour décrire l'atmosphère et les océans et les astrophysiciens pour décrire les étoiles et la formation des planètes dans un disque protoplanétaire. Surtout, les ingénieurs les utilisent en aérodynamique pour modéliser le comportement des voitures, des trains et des avions à grande vitesse.

INTRODUCTION

Les équations de Navier-Stokes modélisent la dynamique de fluides visqueux incompressibles. Il est possible que ce fluide soit liquide, gaz ou plasma. On trouve différentes versions de ces équations en météorologie, en océanographie, en magnétohydrodynamique...etc. Il est important de souligner que les équations de Navier-Stokes incompressibles sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3\}$ représentent le mouvement d'une particule de corps visqueux incompressibles et sont exprimées de la manière suivante :

$$(N\text{-}S) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i D_i u & = & f - \nabla p & \text{dans } \Omega_T =]0, T[\times \Omega; (\nu > 0), \\ \text{div } u & = & 0 & \text{sur } \Gamma =]0, T[\times \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_T =]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(x, 0) & = & u_0(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où :
ν représente le coefficient de viscosité du fluide, u représente sa vitesse (inconnue), p représente sa pression (inconnue), et f représente une force extérieure (donnée). Et étant donné que le fluide div $u = 0$ est incompressible : Il est nécessaire d'ajouter une donnée initiale u_0 et une condition au bord $u = 0$ à ces équations.

Ce mémoire est consacré à l'étude d'existence et l'unicité de l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^n$ où $(n = 2, 3)$. Le mémoire est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacrée aux rappels mathématiques des outils qui seront utilisées dans la résolution de nos systèmes d'équations comme quelque inégalité mathématique espace de Hilbertespaces de Sobolev et espaces aux valeurs vectoriels.

Dans le deuxième partie, les concepts essentiels de la mécanique des fluides sont exposés, ainsi que quelques définitions des différents types d'écoulements et les équations de la mécanique fluide.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant la méthode de Galerkin.

1 RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.1 Quelques inégalités mathématiques

Notation 1.1. *Pour $1 \leqslant p \leq +\infty$; on note q l'exposant conjugué*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder). Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité suivant :

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.1}$$

En particulier, si $p = 2$ et $q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Plus généralement, pour $p > 0, q \leq +\infty$ et r défini par

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ alors

$$uv \in L^r(\Omega) \quad et \quad \|uv\|_{L^r(\Omega)} \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.3}$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder généralisé 02).

$$u_i \in L^{p_i}(\Omega), \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1 alors$$

$$\int_\Omega u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_m \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \tag{1.4}$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Young). *Pour tout $a \geqslant 0$,Pour tout $b \geqslant 0$, supposons que $1 < p < +\infty$*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

qui est plus général que le précédent pour tout $\varepsilon = \epsilon^p/p > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

$$ab \leq \frac{1}{p}(\epsilon a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\epsilon}\right)^q = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.5}$$

Remarque 1.5. un cas simple de l'inégalité de Young avec pour $p = q = 2$ et($\epsilon > 0$)

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \tag{1.6}$$

Proposition 1.6. *(cas de particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq c \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.1 (Produit Scalaire)**.** Soit H un espace vectoriel.
Un produit scalaire (. , .) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$,

1. symétrique : $(u, v) = (v, u)\,, \forall u, v \in H$
2. définie positive $(u, u) > 0$ si $\quad u \neq 0$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifier l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u, v \in H$$

Définition 1.2 (**Espace de Hilbert**)**.** Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.3 (**Base Hilbertienne**)**.** Soit H un espace de Hilbert,on dit que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H si elle est :

i) ***orthogonale*** : $\forall n \neq m \in \mathbb{N}, \quad (e_n, e_m) = 0$

ii) ***normée*** : $\|e_n\| = 1 \quad \forall e_n \in \mathbb{N}$

iii) ***totale*** : l'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H ;
$H = \overline{\mathrm{vect}\{\mathrm{e_n}\}}_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 1.7. *[2] Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.4 (***Espaces de Sobolev***)**.** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $p \in [1, \infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \textit{pour tout}\ \alpha \in \mathbb{N}^N\ \textit{tel que}\ |\alpha| \leq m\}. \tag{1.7}$$

$$\textit{où}\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1.n},$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \textit{et}\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

on définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.8}$$

Tous les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Définition 1.5. *Avec les mêmes notations on définit les espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Remarque 1.8. *Pour $p = 2$, on note $H^m(\Omega) := W^{m,p}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,p}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert séparables.*

Théorème 1.9 (***Théorème d'injection de Sobolev***)**.** *Soit Ω un domaine (ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, l'injection canonique suivante*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si \quad p < N. \\ L^q(\Omega),\ \forall q > 1, & si \quad p = N. \\ L^\infty(\Omega) & si \quad p > N. \end{cases} \tag{1.9}$$

est continue, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. De plus, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalité suivantes :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.10}$$

$$|u|_\alpha \leq C_2\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.11}$$

où $C_1,\ C_2 > 0$, dépendent seulement de N, p et le diamètre de Ω.

Théorème 1.10 (**de Rellich-Kondrachov**)**.** *[2] Soit Ω un domaine (ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < N$. Alors on a :*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \begin{cases} L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*[& si \quad p < N. \\ L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, \infty[, & si \quad p = N. \\ C(\overline{\Omega}) & si \quad p > N. \end{cases} \tag{1.12}$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Un résultat important qui découle de ce théorème est l'inégalité de Poincaré :

Proposition 1.11 (**Inégalité de Poincaré**)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constant $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \textit{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.13}$$

De plus ; L'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente á celle induite par $H^1(\Omega)$

Définition 1.6. *L'espace noté $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$*

$$H^{-1}(\Omega) = \{\ell : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \textit{linéaire}, \ \exists C > 0 : |\ell(v)| \leq C\|v\|_{H_0^1}\}$$

Théorème 1.12 (Formules de Green). *[4](intégration par parties en dimension n) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, si u et $v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}dx = -\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x}vdx + \int_{\partial\Omega} uv\eta ds$$

où η est la i^{eme} composante sortante au domaine Ω.

Théorème 1.13. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors $\forall u \in H^2(\Omega), \ v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx + \int_{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \eta}.vds$$

1.4 Espaces aux valeurs vectorielles

Définition 1.7. *[3] Soit V un espace de Banach.Une fonction $f : (0,T) \to V$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite de fonctions étagées qui converge presque partout vers f.*

Soient E un espace de Banach et $T > 0$.

Définition 1.8. *[3] On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach E, et on note $L^p(0,T;E)$, l'espace des fonctions fortement mesurables $u : [0,T] \to E$ avec :*

$$\|u\|_{L^p(0,T;E)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad \textit{pour } 1 \leq p < \infty.$$

et

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;E)} := \underset{t\in[0,T]}{\textit{ess sup}}\|u(t)\|_E < +\infty \qquad \textit{pour } p = \infty.$$

Propriété 1.14. *i) Pour$1 \leq p \leq \infty, L^p(0,T;E)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0,T;E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.*
ii) Pour $1 < p < \infty$,si E est réflexif, alors $L^p(0,T;E)$ est un espace réflexif.
iii) Pour $1 \leq p < \infty$,si E est séparable, alors $L^p(0,T;E)$ est un espace séparable.

Démonstration. voir[3] □

Définition 1.9.

- *L'espace $\mathcal{C}([0,T];E)$ est l'ensemble des fonctions continues $u : [0,T] \to E$ avec :*

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T];E)} = \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_E < +\infty$$

Exemples 1.15.

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) = \{u : [0,T] \to H_0^1(\Omega) \quad mesurable : \int_0^T \|u(t)\|^2_{H_0^1} \mathrm{d}t < +\infty\}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0,T;H_0^1)} &= \left(\sum_{i=1}^n \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^T \|u(t)\|^2_{H_0^1} \mathrm{d}t < +\infty \end{aligned}$$

$$L^2(0,T;H^{-1}) = \{u : [0,T] \to H^{-1}(\Omega) \quad mesurable : \int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \mathrm{d}t < +\infty\}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,T;H^{-1})} &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle u,v \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}}{\|v\|_{L^2(0,H_0^1(\Omega))}} \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\int_0^T (u(t),v(t))_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}}{(\int_0^T \|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Remarque 1.16. *On a* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *car :*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega).$$

de plus on a :

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,L^{2^*}(\Omega))$$

Lemme 1.17 (lemme de DeRham). *[1] and [13] Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *connexe. Considère* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *avec :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), div\ \varphi = 0, \qquad \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0$$

Alors, il existe une fonction p *sur* Ω *telle que* $f = \nabla p, \quad p \in \mathcal{D}(\Omega)$

On déduit d'après ce lemme, une extension de théorème de DeRham aux distribution qui dépendent du temps.On a :

Lemme 1.18. *Soit* $h \in \mathcal{D}'((0,T), H^{-1}(\Omega))$ *telle que :*

$$\langle h, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$$

Alors, il existe $p \in \mathcal{D}'((0,T), L^2(\Omega))$ *telle que :* $h = \nabla p$.

Si de plus, $h \in W^{k,r}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ on peut choisir $p \in W^{k,r}(0,T;L^2(\Omega))$ Où $\mathcal{D}_s(\Omega)$ l'espace des fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ à divergence nulle.

Théorème 1.19. *[3]. Soient $p, q \geq 1$, E_1, E_2 deux espaces de Banach tels que $E_1 \hookrightarrow E_2$. Soit $u \in L^p(0,T;E_1)$ avec $u' \in L^q(0,T;E_2)$. Alors*

$$u \in \mathcal{C}([0,T];E_2)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ dépend seulement de T telle que

$$\underset{t\in[0,T]}{max}\|u\|_{E_2} \leq C\left(\|u\|_{L^p(0,T;E_1)} + \|u'\|_{L^q(0,T;E_2)}\right)$$

Théorème 1.20 (Aubin-Simon). *[3] Soient $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, V, E et F des espaces de Banach tels que*

$$V \hookrightarrow_c E \hookrightarrow F.$$

Soit $\{u_n\}_n$ une suite bornée dans $W^{1,p}(0,T;F)$ et dans $L^q(0,T;V)$. Alors, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}_k$ convergente dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ et dans $L^q(0,T;E)$.

Théorème 1.21 (Cauchy-Lipschitz). *[7] Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$)une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$,il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t,y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.De plus,il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, x_0).*

Lemme 1.22 (Lemme de Gronwall). *[5] Soient $\phi, \psi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction continues telles que $\phi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$, pour tout $t_0 \leq t$ on a*

$$\phi(t) \leq A + B\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds$$

Où A et B sont des constantes positives,alors pour $t_0 \leq t$ on a

$$\phi(t) \leq A\exp\left(B\int_0^t\psi(s)ds\right)$$

2 MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES

Un milieu continu est un ensemble infini de particules (solides ou fluides) qui seront étudiées de manière macroscopique, c'est-à-dire sans prendre en compte les éventuelles discontinuités existant au niveau microscopique (niveau atomique ou moléculaire). En conséquence, on admet qu'il n'y a pas de discontinuités entre les particules et que la description mathématique de ce milieu et ses propriétés peuvent être décrits par des fonctions continues. Il existe deux façon de décrire le mouvement des particules de fluides dans un flux.

2.1 L'état fluide

- **Propriétés d'un fluide** : L'état fluide caractérise un état de la matière. Les liquides, les gaz ainsi que les plasma (gaz de particules chargées) ont les propriétés d'un fluide. Pour décrire l'état fluide adoptons deux points de vue :
  point de vue macroscopique :Un fluide est un système déformable sans forme propre L'état liquide : les liquides sont des fluides très peu compressibles et ont donc un volume propre.
  Point de vue microscopique :Fondamentalement, un fluide se caractérise par l'absence d'ordre à longue portée (contrairement aux cristaux) et par l'existence d'un chaos moléculaire (contrairement aux solides). Certains systèmes peuvent présenter un ordre à longue portée suivant une seule direction ; c'est le cas des cristaux liquides par exemple.
  Les gaz : dans un gaz les particules interagissent peu, l'énergie est avant tout cinétique. les distances inter-atomiques sont grandes ce qui explique qu'on puisse comprimer les gaz.
  Les liquides : dans un liquide les interactions (l'interaction de Van der Waals, la liaisons hydrogène,l'interaction électrostatique dans une solution électrolytique etc ...) jouent un rôle clé. L'interaction est telle que les molécules sont quasi en contact ce qui explique le caractère quasi-incompressible des liquides.
- **Le modèle continu** : Avant toute chose, on doit se donner une échelle de description. L'échelle macroscopique n'est pas adaptée notamment parce que le fluide n'est pas solide (système que l'on peut décrire dans son ensemble à l'aide du vecteur rotation et du vecteur vitesse du centre d'inertie). À l'échelle microscopique les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible (cf. Physique statistique). On décide alors de décrire le fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique : on parle d'échelle mésoscopique. On considère, autour d'un point M, un volume $\delta\tau$, petit par rapport à l'échelle macroscopique et grand

par rapport à l'échelle microscopique. Typiquement un volume de$1\mu m^3$ convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des grandeurs moyennes qui elles vont évoluer de façon continu. On définira alors des grandeurs moyennes locales

La masse volumique locale en M : $\mu(M;t) = \frac{\delta m}{\delta \tau}$, où δm est la masse de l'ensemble des particules dans $\delta\tau$,à l'instant t.

la vitesse moyenne locale en $M : v(\vec{M}) = \langle \vec{v_i} \rangle$ où $\vec{v_i}$ est la vitesse d'une particule microscopique dans $\delta\tau$ à l'instant t.

2.2 Description d'un fluide

Les gaz et les liquides se distinguent des solides par leur manque de rigidité. Ils sont regroupés sous la dénomination de fluide.

Un fluide peut être considéré alors comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les uns par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.[12]

- **Description de Lagrange** : Considérons une particule de fluide P, placé en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0. Dans la description de Lagrange, on suit le mouvement d'une particule de fluide. Par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M(x, y, z)$ à l'instant t. On peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connaît les fonctions :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0) \\ y = y(x_0, y_0, z_0) \\ z = z((x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

la vitesse de la particule s'écrit :

$$\vec{v}(P) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Notion de Trajectoire d'une particule fluide :

Nous appelons "trajectoire" la courbe d'écrite au cours du temps par une particule fluide quelconque du domaine de l'écoulement.C'est une courbe paramétrée en temps.

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_1(x, y, z, t) \\ \dfrac{dy}{dt} = v_2(x, y, z, t) \\ \dfrac{dz}{dt} = v_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

où $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Description de Lagrange $\Rightarrow$ Trajectoire des particules de fluide
La méthode consiste alors à déterminer la trajectoire de chaque particule en fonction du temps et en fonction de la position qu'elle occupait à l'instant t_0.

- **Description d'Euler** : L'approche d'Euler est à mettre en parallèle avec l'approche de Maxwell en électromagnétisme. De la même manière que l'on définit le champ électromagnétique en tout point de l'espace, à un instant t, ici, on va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t. On définit en chaque point du système les grandeurs :
$\mu(x, y, z, t), P(x, y, z, t); \vec{v}((x, y, z, t)$ etc...Ainsi, à un instant t, La méthode d'Euler, quant à elle, consiste à décrire l'écoulement en déterminant en chaque point de l'espace $M(x; y; z)$ et à chaque instant t, les fonctions caractéristiques du fluide (vitesse, pression,température,$\cdots$).

Notion de ligne de courant : Une ligne de courant est une ligne de champ du vecteur vitesse c'est-à- dire une courbe tangente en tout point $M(x; y; z)$ à $\vec{v}(x; y; z; t)$ à l'instant t. L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad \text{Description d'Euler} \Rightarrow \text{Ligne de courant}$$

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe C fermée constituent un tube de courant.
Remarque 2.1. Un ligne de courant n'est pas forcément une trajectoire d'une particule de fluide.

- **Régimes d'écoulement** :
  - **Régime stationnaire** : la vitesse ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial \vec{v}(x, y, z, t)}{\partial t} = \vec{0}$$

Attention : cela ne signifie pas que la particule n'est pas accéléré ! Cela signifie simplement que les lignes de courants n'évoluent pas au cours du temps. En régime stationnaire, une ligne de courant est aussi une trajectoire et vice-versa .

  - **Régime laminaire** : Ouvrez lentement un robinet et remarquez, qu'à faible débit, l'écoulement semble régulier : le fluide s'organise en filets. On peut alors décrire l'écoulement comme une superposition de filets ou de couches glissant les uns sur les autres.

  - **Régime turbulent** : Lorsque l'on ouvre le robinet au maximum, la vitesse d'écoulement varie de façon erratique dans l'espace et le temps. Dans ce cas, les lignes de courant s'entremêlent de façon complexe et chaotique.

- **Dérivée particulaire** :(***différentielle d'une fonction de plusieurs variables***)
 si $G(x,y,z,t)$ est une fonction à quatre variable possédant des dérivées partielles en (x,y,z,t) on appelle différentielle de G en (x,y,z,t) l'expression :

$$dG(x,y,z,t)=\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z,t)dx+\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z,t)dy+\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z,t)dz+\frac{\partial G}{\partial t}(x,y,z,t)dt$$

Considérons une grandeur physique locale $G(M,t)$ attachée à une particule de fluide située en $M(x,y,z,t)$ à l'instant t. On peut penser à la température, la pression, la densité etc. Cherchons à calculer le taux de variation de cette grandeur lorsque l'on suit la particule.
on a pour les variation $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$:

$$\frac{G(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t)-G(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$=\frac{\frac{\partial G}{\partial x}v_x\delta t+\frac{\partial G}{\partial y}v_y\delta t+\frac{\partial G}{\partial z}v_z\delta t+\frac{\partial G}{\partial t}\delta t}{\delta t}$$
$$=\frac{\partial G}{\partial x}v_x+\frac{\partial G}{\partial y}v_y+\frac{\partial G}{\partial z}v_z+\frac{\partial G}{\partial t}+0\frac{(v)}{\delta t}$$

$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla})G$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

On appelle cette grandeur la **dérivée particulaire** et on la note $\frac{DG}{Dt}$.[12]

$$\frac{DG}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{G(x+v_x\delta t, y+v_y\delta t, z+v_z\delta t, t+\delta t)-G(x,y,z)}{\delta t}$$
$$=\frac{G(x,y,z)+v_x\frac{\partial G}{\partial x}\delta t+v_y\frac{\partial G}{\partial y}\delta t+v_z\frac{\partial G}{\partial z}\delta t-G(x,y,z)}{\delta t}$$

ce qui donne la formule que l'on retiendra :

$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla})G$$

- **Accélération d'une particule de fluide** : Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien $\vec{v}(M,t)$. L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a} = \frac{Dv_x}{Dt}\vec{u}_x + \frac{Dv_y}{Dt}\vec{u}_y + \frac{Dv_z}{Dt}\vec{u}_z$$

ce qui donne :

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}_x$$
$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}_y$$
$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}_z$$

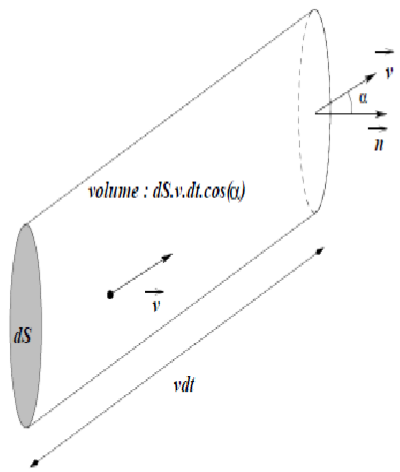
On pourra retenir le résultat sous forme compacte :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le second au fait que la particule, en se déplaçant, visite des endroits où la vitesse change. On l'appelle le ***terme convectif***.

2.3 Conservation de la masse

■ **Vecteur densité de matière** : On cherche à exprimer la masse qui traverse une surface (S) lors d'un écoulement.[12] Pour cela, imaginons un cylindre infiniment petit de base dS et de génératrice$\vec{v}dt$. Calculons la masse dm traversant cette élément de surface pendant la duréedt. Les particules situées dans le cylindre représenté sur la figure 1.4, traversent effectivement la section du cylindre pendant la durée dt. On a donc :



calcul débit

$$dm = \mu dt.\mu ds.\vec{v}.\vec{n}$$

■ **Équation de continuité** : La masse se conservant, cela se traduit par une équation de conservation de la masse, dite aussi « *équation de continuité* » . Prenons un système ouvert de volume constant V , entouré par une surface fictive (S). Soit $M(t)$ la masse contenue dans (S) à l'instant$t$. Cette masse varie si le débit massique entrant est différent du débit massique sortant ce qui modifie la masse volumique du système (S)

$$M(t) = \iiint_{(V)} \mu(x, y, z, t) dxdydz$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \iiint_{V)} \frac{\partial \mu}{\partial t} dxdydz = -\iint_{(S)} \mu\vec{v}dS\vec{n}$$

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{(V)} (\mathrm{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t}) dxdydz = 0 \quad \forall\ V$$

d'où l'équation de continuité :

$$\mathrm{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{dt} = 0$$

partout et à chaque instant.

■ **Écoulement incompressible** : Un fluide est en écoulement incompressible quand les particules de fluide ont un volume qui reste constant au cours de l'écoulement. pour un fluide incompressible, la masse volumique est constante. Cela concerne donc les liquides ainsi que les écoulements gazeux dont la vitesse est très inférieure à la vitesse du son dans ce gaz.

Si la masse volumique est constante,l'équation de continuité se simplifie :

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{v}dS\vec{n} = 0$$

la vitesse est à flux ***conservatif***.

2.4 Bilan des forces

On distingue deux types de forces :

1. Il y a les forces de contact entre particule de fluide que l'on appellera forces internes. Il s'agit de forces de surface.
2. Le fluide est également soumis à des forces dont l'origine est extérieure au fluide (existence d'un champ de pesanteur, champ électrique etc...). On parlera de forces extérieures[12]

■ **Forces de pression** : **Pression** : La force qui s'exerce sur un élément de surface dS infiniment petit, peut se décomposer en une composant normale $d\overrightarrow{F_n}$ et tangentielle$d\overrightarrow{F_t}$. Le rapport $\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{F}}{dS}$ désigne la contrainte.
On admettra que

1. Pour un fluide au repos, la contrainte est normale (sinon, ce n'est pas un fluide).
2. Cette contrainte s'appelle la pression et se note $P(M)$.

$$d\vec{F_n} = -P(M).dS.\vec{n}$$

   où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur.
3. La pression est un scalaire qui ne dépend pas de l'orientation de la surface

Origine de la pression : La pression est le résultat des chocs moléculaires sur la surface et de l'interaction à courte portée (interaction de Van Der Waals et liaisons H) des molécules voisines de la surface.

■ **Force volumique associée aux forces de pression** : Calculons la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un petit cube de fluide de volume infinitésimal

$$d\tau = dxdydz$$

. Pour le calcul on supposera dans un premier temps que la pression ne dépend que de la variable y . Dans ce cas, la résultante des forces de pression est suivant Oy. Calculons cette composante :

$$F_y = dxdz[P(x, y - \frac{dy}{2}, z) - P(x, y + \frac{dy}{2}, z)]$$
$$F_y = dxdz[P(x, y, z) - \frac{dy}{2}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) - (P(x, y, z) + \frac{dy}{2}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)] = -\frac{\partial P}{\partial y}d\tau$$

Si maintenant, nous supposons que la pression varie avec les trois coordonnées de l'espace, le bilan des forces fait apparaître trois composantes :

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\vec{u_z} = -\overrightarrow{\nabla}Pd\tau$$

Les forces de pression superficielles sont donc équivalentes à une force volumique de pression Force volumique de pression : $\overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{\nabla}P$

■ **Notion de viscosité** : Nous avons vu que la contrainte qui s'exerce sur une surface infinitésimale dans un fluide est normale à la surface lorsque le fluide est au repos. Lorsqu'il y a écoulement, la contrainte possède une composante tangentielle liée à la **viscosité**.

Viscosité : La viscosité est liée aux contraintes de frottements qui apparaissent dès qu'il y a écoulement. Pour un fluide dit newtonien, de viscosité η, la contrainte tangentielle qu'exerce un fluide sur un élément de surface dS s'écrit

$$\text{Définition de la viscosité : } \tau_{yx} = \frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

oùτ_{yx} est la contrainte s'exerçant suivant la direction x le long d'une surface normale à la direction y. Le gradient latéral de vitesse s'appelle aussi vitesse de cisaillemen.

■ **Force volumique associée à la contrainte visqueuse** :

La formule générale qui donne le bilan des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide est en général assez compliquée. Elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles. Nous prendrons un exemple pour faire le calcul et généraliserons le résultat. On traite l'exemple d'un écoulement unidimensionnel incompressible $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{u_x}$.
On remarque ici que $div\vec{v} = 0$ ce qui implique que le fluide est incompressible.

Le bilan de force que subit la particule de la part du fluide s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = \eta[\frac{\partial v}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v}{\partial y}(y)]dxdz\overrightarrow{u_x} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}d\tau\overrightarrow{u_x}$$

cette formule se généralise :

$$\text{Force volumique de viscosité : } \overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f_\eta}d\tau = \eta\overrightarrow{\Delta v}d\tau$$

où $\overrightarrow{\Delta}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.

■ **Forces extérieures** : Considérons une particule de fluide de volume $d\tau$. Cette particule subit de la part du fluide qui l'entoure les forces superficielles que sont les forces de pression et de viscosité. En plus de ces forces, d'autres forces d'origine extérieure au fluide agissent sur chaque particule de fluide. Ces forces sont proportionnelles au volume de la particule de fluide et s'écriront :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f_{ext}}d\tau$$

2.5 L'équation de Navier-Stokes

■ **L'équation de Navier-Stokes** : Considérons une particule de fluide de masse dm, et appliquons le **Principe Fondamentale de la Dynamique** :

$$dm\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\nabla}Pd\tau + \overrightarrow{f_{ext}}d\tau + \eta\overrightarrow{\Delta v}d\tau$$

Sachant que $dm = \mu d\tau$ on obtient la relation fondamentale des fluides newtoniens.

$$\mu\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\nabla}P + \overrightarrow{f_{ext}} + \eta\overrightarrow{\Delta v}$$

'est l'équation de Navier-Stokes que l'on peut écrire sous la forme :

$$\text{Équation de Navier-Stokes : } \mu(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla}P + \overrightarrow{f_{ext}} + \eta\overrightarrow{\Delta v}$$

On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$; c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement redoutables...

■ **Résoudre un problème de dynamique des fluides** : Distinguons deux cas :

- **le fluide est incompressible** ($\mu \approx$ constante) le problème présente ici 4 inconnues scalaires : le champ de pression $P(x,y,z,t)$ et le champ des vitesses (3 composantes) $\overrightarrow{v}(x,y,z,t)$). Il faut donc 4 équations l'équation de Navier-Stokes en donne 3. La quatrième est donnée par l'équation de continuité div$\overrightarrow{v} = 0$
- **le fluide est compressible** (gaz en écoulement rapide) : la masse volumique peut varier sous l'effet de la pression mais aussi sous l'effet de la chaleur.
  En général le fluide possède une équation d'état locale $\mu(P(x,y,z,t);T(x,y,z,t))$.
  le problème présente donc 6 inconnues scalaires :
  le champ de pression $P(x;y;z;t)$, le champ des vitesses (3 composantes)$\overrightarrow{v}(x,y,z,t)$ le champ $\mu(x,y,z,t)$ et la température $T(x,y,z,t)$. Il faut donc 6 équations. l'équation de Navier-Stokes en donne 3, la quatrième est donnée par l'équation de continuité $div(\mu\overrightarrow{v} + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$, la cinquième par l'équation d'état du fluide $\mu(P,T)$ et la cinquième par le premier principe de la thermodynamique. Dans ce cas une bonne modélisation des transferts thermiques est nécessaires ce qui rend le problème très ardu

2.6 Conditions aux limites

Les constantes d'intégration se déterminent par les conditions aux limites.

■ **Écoulement parfait** : Équation du premier ordre pour la pression et la vitesse. Il faut donc deux conditions aux limites. **première condition** : la composante de la vitesse perpendiculaire est continue lors de la traversée d'une interface. **deuxième condition** :la pression est continue à la traversée d'une interface fluide-fluide dans le cas où l'on néglige la capillarité ; sinon il faut appliquer la formule de Laplace

■ **Écoulement visqueux** il s'ajoute deux conditions supplémentaires :

- pour un fluide visqueux une discontinuité de vitesse tangentielle entraîne une contrainte infini. La composante tangentielle doit donc être continu. Par exemple sur un obstacle fixe dans un fluide visqueux, la vitesse d'écoulement sur la paroi doit être nulle.

- la composante tangentielle de la contrainte est continue entre deux fluides (elle est quelconque pour une interface liquide solide)

3 EXISTENCE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES

La méthode de Galerkin :

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante :

Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Faedo-Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

Dans ce chapitre, nous nous étudions l'existence d'une solution faible de l'équation de Navier-Stokes (cas d'évolution).

Le problème est de trouver u et p dans des espaces convenables qui satisfait les équations ci-dessus.

On démontre aussi l'unicité dans des cas particulier.

3.1 Position de problème

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence la solution faible d'un problème de Navier-Stokes. on aura besoin de la méthode de Faedo-Galerkin et le lemme de compacité d'Aubin-Simon.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de frontière Γ régulier et $T > 0$ un nombre réel. On note $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$, On désigne par u un champs de vecteur,(vecteur de vitesse) :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Les equation de Navier-Stokes (dans le cas d'évolution) sont données par :

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i D_i u &= f - \nabla p \quad \text{dans } \Omega_T =]0, T[\times \Omega; (\nu > 0), \\ \text{div } u &= 0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma =]0, T[\times \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma_T =]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \qquad\quad \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où :

- ν est une constante positive qui désigne la **viscosité** du fluide.

- p désigne le **tenseur de pression** est une fonction scalaire telle que :$p : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$

- u désigne la **vitesse de fluide**, est une fonction vectoriel telle que :$u : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- t représente le temps.
- f désigne la gravité ou toute autre force massique extérieure.
- div$u$ représente la variation de volume d'un élément de fluide est nulle si le fluide est **incompressible**.
- Δ désigne l'opérateur de Laplace défini par :

$$\Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- ∇p désigne le vecteur gradient défini par

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Notre but est de montrer l'existence de u et p. On va définir la solution faible,On a pour cela besoin de définir certains espaces fonctionnels notion suivantes :

3.1.1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$,on définit les espaces fonctionnels suivants :

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n, \text{div } u = 0\}$$

$$H = \{u \in (L^2(\Omega))^n, \text{div } u = 0\}$$

On a le lemme suivant concernant :

Lemme 3.1. *1. L'espace H est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant :*

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i g_i dx, \quad \textit{muni de la norme} \quad \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

2. *L'espace V est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :*

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(D_iu,D_iv)$$

Et on a l'injection suivante :

$$V\hookrightarrow H\equiv H'\hookrightarrow V'$$

Démonstration. On montre que V est un espace de Hilbert (l'espace H se démontre de la même façon). On a $V\subset(H_0^1(\Omega))^n$ qui est un espace de Hilbert. Alors, il suffit de montrer que V est fermé. On considère L'application

$$T:(H_0^1(\Omega))^n\to\mathbb{R}$$

défini par $Tu=\mathrm{div}u$. On observe que $V=T^{-1}(\{0\})$ l'image réciproque de fermé $\{0\}$. Donc il suffit de montrer que T est continue. On a pour tout $v\in(\mathcal{D}(\Omega))^n$:

$$\langle Tu,v\rangle=-\langle u,divv\rangle\leq\|u\|_{L^2(\Omega)^n}\|v\|_{L^2(\Omega)^n}\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)^n}\|v\|_{H_0^1(\Omega)^n}$$

D'où

$$\|Tu\|_{(H_0^1(\Omega))^n}\leq\|u\|_(H_0^1(\Omega))^n$$

□

3.1.2 Formulation variationnelle

On va donner la formulation variationnelle du problème (P) : Soit $v\in\mathcal{D}(\Omega)$. On multiplie l'équation :

$$\partial_tu-\nu\Delta u+\sum_{i=1}^{n}u_iD_iu=f-\nabla p;(\nu>0)\tag{3.1}$$

par v , on obtient :

$$\langle u',v\rangle-\nu\langle\Delta u,v\rangle+\langle(\sum_{i=1}^{n}u_iD_iu),v\rangle=\langle f,v\rangle-\langle\nabla p,v\rangle$$

On a d'après 1.17 $\forall p\in\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(\nabla p,v)=-(p,\ \mathrm{div}\,v)=0,\ \forall v\in\mathcal{D}(\Omega).$$

D'après la formule de Green, pour tous champs vectoriels u, v réguliers :

$$\begin{aligned}-\langle \Delta u, v\rangle = -\int_{\Omega} \Delta u.v &= \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx - \int_{\Gamma} \underbrace{\nabla u.\eta.v ds}_{=0}\end{aligned}$$

Donc, la formulation variationnelle de problème (P) est donnée par :

$$\langle u'(t), v(t)\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \nu \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i(D_i u_j) v_j dx = \langle f(t), v(t)\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (3.2)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.3)$$

Pour que les termes ci-dessus soient bien définie, il suffit de choisir $u, v \in L^2(0, T; V)$ et $u' \in L^2(0, T; V')$.

Définition 3.1 (Solution faible). *Une solution faible du problème (P) est une fonction $u \in L^2(0, T; V)$ telle que $u' \in L^s(0, T; V')$, $s > 1$ et satisfait l'équation* (3.2) *et* (3.3).

Remarque 3.2.
- *D'après 1.20, la solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; V')$ et donc la condition* (3.3) *a un sens.*
- *L'existence de la pression p est une conséquence du lemme de DeRham 1.17.*

3.1.3 Propriétés du terme non-linéaire d'équation de Navier-Stokes

Soient u, v et w trois vecteurs dans V on pose :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \quad (3.4)$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^{n} \int u_k (D_k v_i) w_i dx \quad (3.5)$$

Lemme 3.3. *Pour tous u, v,w dans V on a :*

1. $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$
2. $b(u, v, v) = 0$

Démonstration. Montrons que :

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad (3.6)$$

Il suffit prouver que $b(u,v,w)+b(u,w,v)=0$:

$$\begin{aligned}
b(u,v,w)+b(u,w,v) &= \sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k(D_k v_i)w_i dx + \sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k(D_k w_i)v_i dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k(D_k v_i)w_i dx + u_k(D_k w_i)v_i dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k[(D_k v_i)w_i + (D_k w_i)v_i] dx \\
&= \underbrace{\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k[(D_k(v_i w_i)] dx}_{I}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Green , pour tout $u \in V$

$$\begin{aligned}
I &= \underbrace{-\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega}(v_i w_i)\mathrm{div}\ u_k dx}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Gamma} u_k(v_i w_i)\eta_i dx}_{=0}, \\
I &= 0.
\end{aligned}$$

d'où le résultat,

- On montre maintenant que $b(u,v,v)=0$

Pour $u,v \in V$ et d'après (3.6) alors :$b(u,v,v)=-b(u,v,v)$

$$\begin{aligned}
b(u,v,v) &= \sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k(D_k v_i)v_i dx \\
&= -\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k v_i(D_k v_i) dx \\
&= -b(u,v,v)
\end{aligned}$$

Donc

$$2\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Omega} u_k(D_k v_i)v_i dx = 0 \Leftrightarrow 2b(u,v,v)=0$$

Ce que signifier :

$$b(u,v,v)=0 \tag{3.7}$$

□

Lemme 3.4. *Pour $u \in V$, la forme bilinéaire b(u,u,.) :*

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto b(u,u,v),$$

est continue sur V c-à-d :

$$|b(u,u,v)| \leq c\|v\|_V, \ c > 0$$

On a :

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) u_j dx| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{L^6(\Omega)} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|u_j\|_{L^3(\Omega)}, \tag{3.8}$$

et on a :

$$\|g(u)\|_{V'} \leq c_3 \|u\|_V^2, \tag{3.9}$$

tel que :

$$b(u,u,v) = (g(u),v), \quad g(u) \in V' \tag{3.10}$$

Démonstration. (On démontre le lemme précédant pour $n = 3$)
D'aprés le théorème d'injection(1.9) on a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega), \text{comme } \ \text{n} = 3 \ \text{ donc } \ 2^* = 6$$
$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$$

D'aprés le lemme (3.3) on a :

$$\begin{aligned}
|b(u,u,v)| = |b(u,v,u)| &= |\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) u_j dx|, \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{L^6(\Omega)} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|u_j\|_{L^3(\Omega)}, \ \text{[D'après l'inégalité de Hölder (1.2)]}, \\
&= c\|u\|_{L^6(\Omega)} \|u\|_{L^3(\Omega)} \|v\|_V, \\
&= C\|v\|_V.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\|g(u)\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} \langle g(u), v\rangle &= b(u,u,v),\\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{L^6(\Omega)}\|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)},\\
&\le c\sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}\|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)},\\
&\le c'\|u\|_V^2\|v\|_V^2,\\
&= c'\|u\|_V^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 Résolution du problème (Méthode de Faedo-Galerkin)

Dans ce paragraphe, on va démontrer le théorème d'existence suivant en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

3.2.1 Théorème d'existence

Théorème 3.5 (**Théorème d'existence**). *soient*

$$u_0 \in H, \tag{3.11}$$

et

$$f \in L^2(0,T,V'). \tag{3.12}$$

Alors il existe une solution faible du problème (P) qui satisfait

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{3.13}$$

On commence par démontrer les deux lemmes suivants :

Lemme 3.6. *Soit V un espace de Banach séparable, de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}, v_i \subset V$, telle que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des v_i est denses dans V. De plus, on peut les choisir de sorte que la suite des sous-espaces vectoriels $V_m = vect\{v_i, 0 \le i \le m\}$ soit croissante.*

Démonstration. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de V. Il existe au moins un w_n non nul. On note $v_0 = w_{n_0}$ le premier d'entre eux. On procède ensuite par récurrence. Comme l'espace V est de dimension infini, alors il existe un nombre infinie des termes de la suite linéairement indépendante. Alors, supposons extraite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille

finie et libre $(w_{n_i})_{0\leq i\leq m}$. On pose $v_i = w_{n_i}$ $V_m := vect\{w_k, 0 \leq k \leq n_m\} = vect\{v_i, 0 \leq i \leq m\}$. Comme $dim V_m = m+1$, c'est un sous-espace vectoriel strict de V et il est fermé. Pour montrer que V_m est Fermé , on considère une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset V_m$,convergente vers u et on montre que $u \in V_m$.
Et puisque $\lambda_i^n \longrightarrow \lambda_i, \ \forall i \in 1,\ldots,n$ et $\quad u_n \longrightarrow u$
On a $u_n = \lambda_0^n v_0 + \lambda_1^n v_1 + \lambda_2^n v_2 + \cdots + \lambda_m^n v_m$ et par passage à la limite on obtient :
$u_n = \lambda_0^n v_0 + \lambda_1^n v_1 + \lambda_2^n v_2 + \cdots + \lambda_m^n v_m \longrightarrow u = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u^m. \in V_m.$
donc $u_n \longrightarrow u$ alors V_m est fermé.

Comme la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans V, l'ensemble des entiers $n > n_m$ tel que $w_n \notin V_m$ n'est pas vide. On prend pour n_{m+1} son plus petit élément ($\mathbb{N}$ est bien ordonné) et l'on pose $v_{m+1} = w_{n_{m+1}}$. Par construction, on a bien vect $\{w_k, 0 \leq k \leq n_{m+1}\} = V_{m+1}$. La famille $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question et la famille de sous-espaces vectoriels associée est bien croissante. □

Lemme 3.7. *L'espace* $H := \{u \in (L^2(\Omega))^n, \text{div u} = 0\}$ *est un espace de Hilbert.*$(n = 2, 3)$

Démonstration. Comme $H \subset (H_0^1(\Omega))^n$ et $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors Il suffit de montrer que H est fermé. On pose

$$\begin{aligned} F\colon (H_0^1(\Omega))^n &\longrightarrow (L^2(\Omega))^n \\ u &\longmapsto \text{div} u \end{aligned}$$

D'où $H = F^{-1}(\{0\})$. On montre que F est continue.C'est à dire on montrer qu'il existe $c > 0$ telle que : $\|F(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n}$
On a :

$$\begin{aligned} \|F(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} = \int_\Omega |\text{div} u|^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\frac{\partial u_i}{\partial x_i}|\right)^2, \\ &\leq c\int_\Omega |\nabla u|^2 = c\|u\|^2_{(H_0^1(\Omega))^n}. \end{aligned}$$

D'où F est continue.Et comme H est l'image réciproque de l'ensemble fermé $\{0\}$ par une application continue F alors il est aussi fermé. □

Maintenant,on commence à démontrer le théorème 3.5.

3.2.2 Construction des solutions approchées via l'approche de Faedo - Galerkin

. On a l'espace $(H_0^1(\Omega))^n$ est un espace de Hilbert séparable .
$V = \{u \in (H_0^1(\Omega)^n), \ \text{div} u = 0\}$ est aussi est un espace de Hilbert séparable. D'après le lemme 3.6, il existe une base hilbertienne $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$.

C'est à dire

$$V = \overline{Vect\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace V_m comme l'espace engendré par $\{w_1, \ldots, w_m\}$:

$$V_m = \text{Vect}\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$$

On cherche u^m de $L^2(0, T; V_m)$ de la forme

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t) w_j \tag{3.14}$$

qui satisfait le problème (P_m) suivant :

$$(P_m) \qquad \begin{cases} \int\limits_\Omega (u^m)'.w_j dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla u^m.\nabla w_j dx + \int\limits_\Omega \Big(\sum\limits_{i=1}^{3} u_i^m D_i u^m \Big).w_j dx & = \int\limits_\Omega f_m.w_j dx, \\ 1 \leq j \leq m. & \\ u^m(0) & = u_{0m} \end{cases} \tag{3.15}$$

oùf_m et u_{0m} sont les projections orthogonales de f et u_0(respectivement) sur le sous-espace V_m donc :$u^m(0) = u_{0m} \in \text{Vect}\{w_1, \ldots, w_m\}$ et

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{dans } H, \text{pour } m \longrightarrow \infty \tag{3.16}$$

Et on a le résultat suivant :

Proposition 3.8. *$f_m :=$ la projection de f sur V_m c-a-d :*

$$f_m = \sum_{j=1}^{m} (f, w_j) w_j$$

On a : $f = \lim\limits_{m \to \infty} f_m, \quad f_m \in L^2(0, T, V_m')$

$$\|f_m\|_{L^2(0,T;V')} \leq c \|f\|_{L^2(0,T;V')}$$

Et on a aussi :

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} (u_0, w_i) w_i$$

$$\|u_{0m}\|_H \leq c \|u_0\|_H$$

En remplaçant $u^m(t)$ dans la formulation variationnelle on obtient :

$$\int\limits_\Omega ((u^m)'.w_j) dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla(u^m) \nabla w_j dx + \int\limits_\Omega (u^m.\nabla u^m).w_j dx = \langle f, w_j \rangle, \; 1 \leq j \leq m. \tag{3.17}$$

D'après le théorème 1.21 de Cauchy-Lipschitz,Ce système de m équations différentielles ordinaires à m inconnues admit une solution u^m. définie sur un intervalle du type $0 < T_m \leqslant T$,Donc il existe une solution $u^m \in V_m$ qui satisfait le problème (P_m).

3.2.3 Estimation a priori

Pour passer à la limite, on va démontrer quelques estimations qui sont données par les propositions suivantes :

Proposition 3.9. ***(Estimation a priori(I))***

$$(u^m) \textit{est bornée dans} \quad L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$$

Démonstration. On multiplie l'équation de problème (P_m) (3.15) d'indice j par g_j^m et on additionne en j et comme $b(u^m, u^m, u^m) = 0$ d'après (3.7) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega u'_m(t) g_j^m(t).w_j dx &= \int_\Omega (u^m)'(t).u^m(t)dx,\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\nu \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega \Delta u^m(t) g_j^m(t).w_j dx &= -\nu \int_\Omega \Delta u^m.u^m dx,\\ &= \nu \int_\Omega \nabla u^m(t).\nabla u^m(t)dx,\\ &= \nu \|u^m(t)\|^2_V.\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^m D_i u_i^m\Big) \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t).w_j dx = b(u^m, u^m, u^m) = 0,$$

et

$$\langle f(t), u^m(t)\rangle \leq \|f(t)\|_{V'}.\|u^m(t)\|_V.$$

On obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_\Omega \nabla u^m(t).\nabla u^m(t)dx = \langle f_m(t), u^m(t)\rangle. \tag{3.18}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_H + \nu\|u^m(t)\|^2_V \leq \|f_m(t)\|_{V'}\|u^m(t)\|_V. \tag{3.19}$$

Et par l'inégalité de Young ($ab \leq \frac{\nu a^2}{2} + \frac{b^2}{2\nu}$), le seconde membre de l'inégalité 3.19 est majoré comme suivant :

$$\|f_m(t)\|_{V'}\|u^m(t)\|_V \leq \frac{\nu}{2}\|u^m(t)\|_V^2 + c_\nu\|f(t)\|_{V'}^2, \text{ avec } \mathrm{c}_\nu = \frac{1}{2\nu}$$

. Alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|_H^2 + \nu\|u^m(t)\|_V^2 \leq \frac{\nu}{2}\|u^m(t)\|_V^2 + c_\nu\|f_m(t)\|_{V'}^2$$

. Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|u^m(t)\|_V^2 \leq c_\nu\|f_m(t)\|_{V'}^2$$

.

Si on intégrant sur $]0, t[$ on trouve :

$$\|u^m(t)\|_H^2 - \|u_{0m}\|_H^2 + \nu\int_0^t \|u^m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq 2c_\nu\int_0^t \|f(\sigma)\|_{V'}^2 d\sigma.$$

Alors :

$$\|u^m(t)\|_H^2 + \nu\int_0^t \|u^m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq \|u_{0m}\|_H^2 + c_\nu\int_0^t \|f_m(\sigma)\|_{V'}^2 d\sigma. \tag{3.20}$$

Et d'après (3.11) on a $u_0 \in H$ donc $\|u_{0m}\|_H \leq c_1$
Et on a d'après(3.12) $f \in L^2(0, T; V')$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f_m(\sigma)\|_{V'}^2 d\sigma \leq \int_0^T \|f_m(\sigma)\|_{V'}^2 d\sigma &= \|f_m\|_{L^2(0,T;V')} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(0,T;V')} \\ &= C_2'\end{aligned}$$

On trouve

$$\|u^m(t)\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \nu\|u^m(t)\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C \tag{3.21}$$

Et puisque la constante C ne dépend pas de m on peut prendre donc $t = T$.
D'après (3.21)on déduire :

$$(u^m) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \tag{3.22}$$

□

Proposition 3.10. ***(Estimation a priori(II))*** *Si $n = 3$ alors :*

$$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée dans } L^{\frac{8}{3}}(0, T; (L^4(\Omega))^3)$$

$$\{(u^m)'\}_{m\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; V')$$

Démonstration. 1- Montrons que $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\frac{8}{3}}(0, T; (L^4(\Omega))^3$

D'après le théorème d'injection de Sobolev(1.9) ,on a

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega), \quad \text{comme } n = 3 \text{ alors} \quad 2^* = 6$$

. D'où :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$$

. Donc :

$$V \hookrightarrow (L^6(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^4(\Omega))^3$$

. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,on obtient pour presque par tout $t \in]0, T[$

$$\begin{aligned}\|(u^m)\|^4_{(L^4(\Omega))^3} &= \int_\Omega |u^m(t)|^4 dx = \int_\Omega |u^m(t)|^3 |u(t)| dx, \\ &\leq \left[\int_\Omega |u^m(t)|^6 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |u^m(t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \|u^m(t)\|^3_{(L^6(\Omega))^3} \|u^m(t)\|_{(L^2(\Omega)^3)}.\end{aligned}$$

D'après l'estimation I,on a $\|u^m(t)\|_H$ est borné indépendamment de t D'où :

$$\|u^m\|^4_{(L^4(\Omega))^3} \leq C \|u^m\|^3_{(L^6(\Omega))^3}. \tag{3.23}$$

Donc :

$$\|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{(L^4(\Omega))^3} \leq C \|u^m\|^2_{(L^6(\Omega))^3}$$

. D'où :

$$\int_0^T \|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{(L^4(\Omega))^4} dt \leq C \int_0^T \|u^m\|^2_{(L^6(\Omega))^3} dt$$

. comme $(u^m)_m$ est borné dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ (estimation I)
D'après l'injection :$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^6(\Omega))$
Alors :

$$\int_0^T \|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{(L^4(\Omega))^4} dt \leq C \|u^m\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \leq C'$$

d'où $(u^m)_m$ est borné dans $L^{\frac{8}{3}}(0, T; (L^4(\Omega))^3)$

2- Montrons que :$\{(u^m)'\}_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; V')$. Soit $v \in V$.D'après la formulation faible de (P_m)(3.15), on a :

$$\langle (u^m)'(t), v \rangle_{V' \times V} = -\nu \int_\Omega \nabla u^m . \nabla v dx + b(u^m, u^m, v) + (f_m, v)$$

- On a

$$|\int_\Omega \nabla u^m . \nabla v| \leq \|u^m\|_V \|v\|_V$$

- Et on a

$$\begin{aligned}
|b(u^m,u^m,v)| &= |b(u^m,v,u^m)|,\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int u_i^m u_j^m D_i v_j dx,\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_\Omega \left(u_i^m u_j^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \left(D_i v_j\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{(D'après C.S)},\\
&\leq c\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_\Omega (u_i^m)^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_\Omega (u_j^m)^4\right)^{\frac{1}{4}}\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)},\\
&\leq C'\|u^m\|^2_{(L^4(\Omega))^3}\|v\|_V.
\end{aligned}$$

- Et on a :

$$(f_m,v)\leq \|f_m\|_{V'}\|v\|_V$$

.

D'où :

$$\langle (u^m)',v\rangle_{V'\times V}\leq \|u^m\|_V\|v\|_{V'}+c'\|u^m\|^2_{L^4(\Omega)}\|v\|_V+\|f_m\|_{V'}\|v\|_V$$

. Donc :

$$\sup_{\|v\|_V\leq 1}\langle (u^m)',v\rangle_{V'\times V}\leq \|u^m\|_V+c'\|u^m\|^2_{L^4(\Omega)}+\|f_m\|_{V'}$$

. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^T\left[\sup_{\|v\|_V\leq 1}\langle (u^m)',v\rangle_{V'\times V}\right]^{\frac{4}{3}}dt &\leq c\left(\int_0^T\|u^m\|_V^{\frac{4}{3}}dt+c_1\int_0^T\|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{(L^4(\Omega))^3}+c_2\int_0^T\|f_m\|^{\frac{4}{3}}dt)\right)\\
&\overbrace{\leq}^{Holder} c\left(\left(\int_0^T\|u^m\|_V^2dt\right)^{\frac{2}{3}}+c_1\int_0^T\|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\Omega)}dt+c_2\left(\int_0^T\|f_m\|^2_{V'}dt)\right)^{\frac{2}{3}}\right),\\
&\leq c''\left(\|u^m\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(0,T;V)}+\|u^m\|^{\frac{8}{3}}_{L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^4(\Omega))}+\|f_m\|^2_{L^2(0,T;V')}\right),\\
&\leq C.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.11. ***(Estimation a priori(II))*** *si* $n=2$

$$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2)$$

$$\{(u^m)'\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V')$$

Démonstration. 1- On montre d'abord que

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|v\|^{\frac{1}{2}}_{H^1_0(\Omega)}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{3.24}$$

Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$, on peut supposer que $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Alors, on a

$$D_i(v^2) = 2vD_i$$

D'où

$$v(x)^2 = 2\int_{-\infty}^{x_i} vD_ivdx_i, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2$$

. Donc

$$|v(x)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_iv|dx_i, i = 1, 2$$

Par conséquence

$$|v(x)|^4 \leq 4\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_1v|dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_2v|dx_2$$

. Donc

$$\begin{aligned}
\|v\|^4_{L^2(\Omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|^4dx_1dx_2 &\leq 4\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_1v|dx_1dx_2 \times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_2v|dx_2dx_1,\\
&\leq 4\int_{\Omega} |v||D_1v|dx \int_{\Omega} |v||D_2v|dx,\\
&\leq 4\|v\|_{L^2(\Omega)}\|D_1v\|\|v\|_{L^2(\Omega)}\|D_2v\|_{L^2(\Omega)},\\
&= 4\|v\|^2(\|D_1v\| \times \|D_2v\|),\\
&= 4\|v\|^2\frac{1}{2}(\|D_1v\|^2 + \|D_2v\|^2),\\
&\leq 2\|v\|^2\|v\|^2_{H^1_0}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|v\|^4_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{H^1_0}$$

. Donc

$$\|u^m\|_{L^4(\Omega))^2} \leq 2^{\frac{1}{4}}\|u^m\|^{\frac{1}{2}}_{(L^2(\Omega)^2}\|u^m\|^{\frac{1}{2}}_{(H^1_0(\Omega))^2}$$

. D'où

$$\int_0^T \|u^m\|^4_{L^4(\Omega))^2}dt \leq 2^{\frac{1}{4}} \int_0^T \|u^m\|^2_{(L^2(\Omega)^2}dt \int_0^T \|u^m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^2}dt,$$
$$\leq 2T \underbrace{\|u^m\|_{L^\infty(0,T;H)}}_{\text{borné}} \underbrace{\|u^m\|_{L^2(0,T;V)}}_{\text{borné}},$$
$$\leq C.$$

2- En suivant les même étapes de la preuve précédente,on aura :

$$\sup_{v\leq 1}\langle (u^m)', v\rangle_{V'\times V} \leq \|u^m\|_V + c\|u^m\|^2_{L^4(\Omega))^2} + \|f\|_{V'}$$

. Donc

$$\left(\sup_{v\leq 1}\langle (u^m)', v\rangle_{V'\times V}\right)^2 \leq c\left(\|u^m\|^2_V + \|u^m\|^4_{L^4(\Omega))^2} + \|f\|^2_{V'}\right)$$

.

$$\int_0^T \left(\sup_{v\leq 1}\langle (u^m)', v\rangle_{V'\times V}\right)^2 \leq c\left(\|u^m\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u^m\|^4_{L^4(\Omega))^2} + \|f\|^2_{V'}\right),$$
$$\leq C.$$

□

3.2.4 Passage à la limite

Maintenant on est prêt à passe à la limite dans la formulation variationnelle (P_m)

Proposition 3.12. *Il existe une sous suite de (u^m) noté encore$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que :*

$$u^m \rightharpoonup u \ \textit{dans} \quad L^2(0,T;V).$$

Démonstration. D'après l'estimation précédant (voir la proposition 3.9),on a $(u^m)_m$ est borné dans $L^2(0,T;V)$.Donc il existe une sous suite de $(u^m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$u^m \rightharpoonup u \qquad \text{dans} \qquad L^2(0,T;V).$$

C-à-d :

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u^m \nabla v dx \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx, \forall v \in L^2(0,T;V).$$

□

Proposition 3.13. *Il existe une sous suite de (u^m) noté encore$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que :*

$$\textit{pour} \quad n=2 : (u^m)' \rightharpoonup u' \ \textit{dans} \quad L^2(0,T;V'),$$

$$pour \quad n = 3 : (u^m)' \rightharpoonup u' \ dans \quad L^{\frac{4}{3}}(0, T; V').$$

Démonstration. On démontre le résultat dans le cas $n = 2$, et l'autre se fait de manière analogue. D'après la proposition 3.11, il existe une sous-suite (u^m) noté encore$\{(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$(u^m)' \rightharpoonup w \qquad \text{dans} \qquad L^2(0, T; V'),$$

et on a d'après la proposition 3.12 :

$$u^m \rightharpoonup u \qquad \text{dans} \qquad L^2(0, T; V).$$

Et on a $V \hookrightarrow V'$ donc : $\quad u^m \rightharpoonup u$ dans $\quad L^2(0, T; V')$.
D'où

$$\begin{cases} (u^m)' \longrightarrow & w \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T; V'), \\ u^m \longrightarrow & u \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T; V'). \end{cases}$$

Alors $w = u'$ D'où $u'_m \rightharpoonup u'$ dans $L^2(0, T; V')$ c-à-d :

$$\langle (u^m)'(t), v\rangle \longrightarrow \langle u'(t), v\rangle, \ \forall v \in L^2(0, T; V')$$

. $\square$

Proposition 3.14. *Il existe une sous suite* (u^m) *noté encore*$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$b(u^m, u^m, v) \longrightarrow b(u, u, v) \qquad dans \ L^1(0, T).$$

Démonstration. On démontre le résultat dans le cas $n = 3$. On a :

$$b(u^m, u^m, v) = \sum_{i,j=1}^{m} \int_{\Omega)} u_i^m (D_i u_j^m) v_j$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev 1.10 on a :

$$(H_0^1(\Omega))^3 \hookrightarrow_c (L^3(\Omega))^3$$

D'où pour une sous-suite :

$$u_i^m \longrightarrow u \ \text{ dans } \quad L^3(\Omega)$$

D'où comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$:
$u_i^m v_j \longrightarrow u_i v_j$ dans $\quad L^2(\Omega)$ D'autre part ,d'après proposition 3.12 on a :

$$D_i u_j^m \rightharpoonup D_i u_j \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

Donc presque pour tout $t \in]0,T[$, on a :

$$b(u^m, u^m, v) = \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega u_i^m v_j v_j (D_i u_j^m) \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega u_i v_j v_j (D_i u_j),$$

et on a

$$|b(u^m, u^m, v)| \leq \|u^m\|_{(L^4(\Omega))^3} \|u^m\|_{(L^4(\Omega))^3} \|v\|_V \leq C\|v\|_V \in L^2(\Omega).$$

On conclut par le théorème de convergence dominé de Lebesgue. □

Maintenant on est prêt à démontrer le théorème d'existence

Démonstration. **(de Théorème 3.5)** D'après les propositions 3.12, 3.13 et 3.14 la limite u satisfait la formulation faible (3.2) et rappelons que $u^m(0) = u_{0m}$. Et on a aussi l'injection $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$
D'où :

$$\begin{cases} u^m \text{ borné dans} & L^2(0,T;V) \\ (u^m)' \text{ borné dans} & L^s(0,T;V')(s = 2 \ si \ n = 2, s = 4/3si \ n = 3) \end{cases}$$

Alors d'après le théorème d'Aubin-Simon 1.20 (u^m) est borné dans $\mathcal{C}([0,T];V')$.
En particulier on a : $u^m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ et par l'unicité de la limite on obtient $u(0) = u_0$.
Ce qui fini la preuve du théorème 3.5 □

3.2.5 Unicité de la solution

On commence par donner le théorème d'unicité suivant dans le cas $n = 2$.

Théorème 3.15. *Pour $n = 2$, la solution faible u du problème (P) est unique.*

Démonstration. Soient u et u^* deux solution et soit $w = u - u^*$.
Comme u est un solution Alors :

$$(u', v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = 0 \tag{3.25}$$

Et Comme u^* est un solution Alors :

$$((u^*)', v) + \nu a(u^*, v) + b(u^*, u^*, v) = 0 \tag{3.26}$$

Par soustraction on a :

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(u, u, v) - b(u^*, u^*, v) = 0 \tag{3.27}$$

$$
\begin{aligned}
b(u,u,v)-b(u^*,u^*,v) &= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}\left(u_kD_ku_iv_i-u_k^*D_ku_i^*v_i\right)dx,\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}\left(u_kD_ku_i-u_k^*D_ku_i^*\right)v_idx,\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}\left((u_k-u_k^*+u_k^*)D_ku_i-u_k^*D_ku_i^*)v_idx\right),\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}\left(w_kD_ku_i+u_k^*D_kw_i\right)v_idx,\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}w_kD_ku_iv_idx+\sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_k^*D_kw_iv_idx.
\end{aligned}
$$

Donc

$$b(u,u,v)-b(u^*,u^*,v)=b(w,u,v)+b(u^*,w,v) \tag{3.28}$$

Et on a

$$
\begin{aligned}
b(u^*,w,v) &= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_k^*D_kw_iv_idx\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}(u_k^*+u_k-u_k)D_kw_iv_idx\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Omega}(u_kD_kw_iv_i-w_kD_kw_iv_i)dx
\end{aligned}
$$

Donc

$$b(u^*,w,v)=b(u,w,v)-b(w,w,v) \tag{3.29}$$

En remplacent (3.28)et (3.29) dans (3.27) on obtient :

$$(w',v)+\nu a(w,v)+b(w,u,v)+b(u,w,v)-b(w,w,v)=0,\forall v\in V \tag{3.30}$$

Et d'après la proposition 3.13 on a $w'\in L^2(0,T;V')$, on peut donc choisir $v=w(t)$ d'où (3.30) devient après intégration sur $]0,t[$:

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2+\nu\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla w|^2dxd\sigma+\int_0^t\left[b(w,u,w)+b(u,w,w)-b(w,w,w)\right]d\sigma=0 \tag{3.31}$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2+\nu\int_0^t\|w\|_V^2dt=-\int_0^t b(w,u,w)d\sigma \tag{3.32}$$

Car $b(u, w, w) = b(w, w, v) = 0$, d'après le lemme 3.3 donc (3.31) donne

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma = -\int_0^t b(w, u, w) d\sigma. \tag{3.33}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
|\int_0^t b(w, u, w) d\sigma| &\leq C \int_0^t \int_\Omega |w|^2 |Du| dx d\sigma, \\
&\leq \int_0^t \left[\int_\Omega |w|^4\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |Du|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} d\sigma, \\
&= \int_0^t \|w\|^2_{(L^4(\Omega))^2} \|u\|_V d\sigma. (\textit{par Cauchy-Schwartz}).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\int_0^t b(w, u, w) d\sigma| &\leq C \int_0^t \|w\|_V \|w\|_H \|u\|_V d\sigma \quad (\textit{D'après}(3.24)) \\
&\leq \nu \int_0^t \|w\|^2_V d\sigma + c' \int_0^t \|w(\|^2_H \|u\|^2_V d\sigma \quad (\textit{par l'inégalité de Young})
\end{aligned}$$

Donc (3.33) devient :

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_H \leq C' \int_0^t \|w\|^2_H \|u\|^2_V d\sigma \tag{3.34}$$

D'après le lemme de Gronwall 1.22 $\|w\|_H = 0$ donc $u = u^*$ $\square$

Concernant l'unicité dans le cas où $n = 3$, c'est une question ouvert, mais si la solution u satisfait certaine régularité on peut démontrer l'unicité de la solution et on le théorème suivant

Théorème 3.16. *Pour $n = 3$, si la solution faible u appartient à $\mathbf{L^s(0, T; L^r(\Omega))}$ où $\frac{2}{s} + \frac{3}{r} = 1$, alors u du problème (P) est unique.*

Remarque 3.17. *Il est clair que $r > 2$ et $s > 3$ et on a par exemple si $s = 6$ alors $r = 4$ et si $s = 4$ alors $r = 8$.*

Démonstration. On suit les même étape de la démonstration du théorème précédente 3.15. la seule différence est dans la majoration du terme non linéaire $b(w, u, w)$. En effet, en utilisant l'inégalité de Holder généralisé et l'inégalité d'interpolation et puis l'injection de

Sobolev, on aura

$$\begin{aligned}
|b(w,u,w)| &\leq \|u\|_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|_{(L^\alpha(\Omega))^3}\|w\|_V, \quad (\text{ avec } \frac{1}{r}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}=1 \ i.e. \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{r}>0) \\
&\leq \|u\|_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|^{2/s}_{(L^2(\Omega))^3}\|w\|^{1-2/s}_{(L^6(\Omega))^3}\|w\|_V \quad (\frac{1}{\alpha}=\frac{2/s}{2}+\frac{1-2/s}{6}) \\
&\leq \|u\|_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|^{2/s}_{(L^2(\Omega))^3}\|w\|^{3/r}_{(L^6(\Omega))^3}\|w\|_V \quad (1-2/s=3/r) \\
&\leq C\|u\|_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|^{2/s}_{(L^2(\Omega))^3}\|w\|^{1+3/r}_V \\
&\leq C\|u\|^s_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\nu\|w\|^2_V \quad (\text{Par Young avec } s, s')
\end{aligned}$$

Donc (3.33) devient :

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_H \leq C\int_0^t \|u\|^s_{(L^r(\Omega))^3}\|w\|^2_H d\sigma \tag{3.35}$$

D'après le lemme de Gronwall 1.22 $\|w\|_H=0$ donc $u=u^*$

□

Conclusion

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée ont été étudiées dans ce travail. Dans cette étude, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée pour les fluides incompressibles ont été examinées en utilisant la méthode de compacité (méthode d'approximation de Faedo-Galerkin).Il est nécessaire d'utiliser des estimations priori avant de passer aux limites. Nous examinons l'unicité dans $\mathbb{R}^2$, tandis que dans $\mathbb{R}^3$, elle demeure un problème ouvert. pour les estimations, à la différence de la méthode de compacité.

Références

[1] F. Alliot Étude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs(Thèse Doctorat),École des Ponts chaussées ParisTech, 1998.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle :Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[3] J, Droniou Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, 2001.

[4] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[5] S-B. Gavage, Calcul différentiel et équations différentielle,Dunod, Paris, 2010

[6] V.Girault et Pierre-Arnaud.Raviart Finite element approximation of the Navier-Stokes equations,Springer Berlin, 1979.

[7] X.Gourdon Les maths en tête. Analyse,Editions Ellipses,2020.

[8] J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, 2, Dunod Paris (1968)

[9] J.Lions,Quelques méthodes de résolution des problèmes au limites. Dunod, Paris,1969

[10] H. Le Dret, H. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer, Heidelberg, 2013.

[11] J-E. Rakostoson, J-M. Rakostoson. Analyse fonctionelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Presses Universitaires de France, Paris, 1999.

[12] J, Roussel Cours de mécanique des fluide, CPI, 2021.

[13] J, Simon Representation of distributions and explicit antiderivatives up to the boundary, In M. Chipot, editor, Progress in P.D.E : The metz surveys, pages 201-215. Longman , 1993.