Table des matières

0.1 Introduction 2

1 Résultats préliminaires sur les opérateurs faiblement compacts et espaces réflexifs 3

1.1 Introduction 3

1.2 Espaces de Banach reflexifs 3

1.3 Opérateurs linéaires faiblement compacts 7

1.4 Factorisation des opérateurs linéaires faiblement compacts 8

1.5 Applications multilinéaires bornées 9

1.6 Opérateurs m-linéaires faiblement compacts 11

2 Opérateurs m-linéaires qui se factorisent par un espace de Hilbert 13

2.1 Introduction 13

2.2 La classe des opérateurs multilinéaires $\mathcal{L}_{fact}$ 13

2.3 Caractérisation des opérateurs m-linéaires factorisables par un Hilbert . . 23

3 Polynômes homogènes qui se factorisent par un espace de Hilbert 29

3.1 Introduction 29

3.2 Polynôme homogène de degré m 29

3.3 Polynômes homogènes faiblements compacts 32

3.4 Factorisation des polynômes homogènes par un espace de Hilbert 33

3.5 Relation avec les polynômes homogène 2-factorable 38

0.1 Introduction

Il est bien connu qu'un opérateur linéaire $u : X \to Y$ est faiblement compact si, et seulement si, il se factorise par un espace réflexif, i.e., $\exists$ un espace de Banach réflexif G et deux opérateurs linéaires $w : X \to G$, $v : G \to Y$ tels que $u = v \circ w$. Ce célèbre résultat reste vrai dans le cas des opérateurs multilinéaires. Si G un espace de Hilbert, on obtient une classe d'opérateurs faiblement compacts intéressante et mérite une étude approfondie.

Les travaux de ce présent mémoire se situent dans le cadre des opérateurs multilinéaires et polynômes homogènes de degré m faiblement compacts. On s'intéressera à une classe particulière des opérateurs multilinéaires faiblement compacts. Les opérateurs de cette calsse se caractérisent par leurs factorisations autour d'un espace de Hilbert.

Ce mémoir se divise en trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on définit les espaces de Banach réflexif. On consacrera le reste de ce chapitre à étudier les opérteurs linéaires et multilnéaires faiblement compacts en donnant les principaux résultats de ces opérateurs.

Dans le deuxième chapitre, on traite une classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un espace de Hilbert. Cette classe coïncide avec la classe des opérateurs multilinéaires 2-factorable intoduite par Martin Cerna Maguina dans [BMCM05]. On met l'accent sur certaines propriétés importantes relatifs à cette classe et on donnera des théorèmes de caractérisation similaires au cas linéaire.

Dans le troisième chapitre et en premier lieu, on donnera un survol sur les polynômes homogènes de degré m. Cette classe de polynômes s'identifier avec la classe des opérateurs multilinéaires symétriques. On fera une étude similaire à celui de deuxième chapitre en transmettant les définitions et résultats de ce chapitre au cas des polynômes homogènes de degré m.

Chapitre 1

Résultats préliminaires sur les opérateurs faiblement compacts et espaces réflexifs

1.1 Introduction

Dans ce chapitre et en premier lieu on donne la définition des espaces de Banach réflexifs ainsi que certaines propriétés relatives à ces espaces. Ensuite, on exposera des résultats classiques concernant les opérateurs linéaires et multilinéaires bornés. On fera aussi une étude détaillée sur les opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compacts.

1.2 Espaces de Banach reflexifs

Tous les espaces vectoriels sont toujours supposés des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ représente le corps de nombre réel $\mathbb{R}$ ou bien celle de nombre complexe $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

Espace de Banach. Un espace vectoriel normé X est dit de Banach, si tout suite de

Cauchy de X est convergente dans X. Un espace de Banach est alors un espace vectoriel normé complet pour la distance déduite de la norme.

Espace de Hilbert. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.

Opérateurs linéaires bornées. Soient X, Y deux espaces normés et $u : X \to Y$ une application. Elle est linéaire si

1) $\forall x, y \in X; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

Soit $u \in L(X, Y)$. L'application linéaire u est continue (bornée) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues (bornées).

On définit l'application $\|.\|$ de $\mathcal{B}(X, Y)$ dans $\mathbb{R}_+$ en posant

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$$

On a aussi

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|.$$

La quantité $\|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X; Y)$. Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{B}(X; Y)$ est aussi un espace de Banach.

Dual topologique. Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^*, l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X, i.e.,

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

telle que la norme (*norme des opérateurs*) est la suivante

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)| \,. \end{aligned}$$

Exemple 1.2. Soit $1 \leq p < +\infty$. On définit l'espace ℓ_p par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

qui est un espace de Banach pour la norme suivante

$$\left\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, on définit ℓ_∞ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

avec

$$\left\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \,.$$

On a

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$$

avec p^* est le conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Remarque 1.3. (*L'espace* ℓ_2). L'espace ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$

Théorème 1.4. (*Représentation de Riesz*). *Soient H un espace de Hilbert et u une forme linéaire sur H. Alors, il existe un élément unique $a \in H$ tel que*

$$\forall x \in H : u\left(x\right) = \left\langle a, x \right\rangle .$$

Définition d'un espace de Banach réflexif. Soit X un espace de Banach. Le bidual de X , noté X^{**}, est l'espace dual de X^*. Pour tout $x \in X$ on note

$$K_X(x) : X^* \to \mathbb{K}$$

la forme linéaire sur X^* définie par

$$\forall x^* \in X^* : \left\langle K_X\left(x\right), x^* \right\rangle = x^*(x)$$

Pour tout $x^* \in X^*$, on a

$$\left|\left\langle K_X\left(x\right), x^* \right\rangle\right| = \left|x^*(x)\right| \leq \left\|x^*\right\| \left\|x\right\|$$

ce qui montre que $K_X(x)$ est bien dans X^{**}.

Remarque 1.5. L'application $K_X : X \to X^{**}$ est isométrique. Elle s'appelle *l'isométrie canonique.*

Definition 1.6. (*Espace réflexif*). Un espace de Banach X est dit réflexif si l'application

$$K_X : X \to X^{**}$$

est bijective. Autrement dit, X s'identifie isométriquement à X^{**} via son isométrie canonique.

Exemple 1.7. Pour tout $1 < p < \infty$, l'espace L_p est réflexif. Il en est de même pour les petit ℓ_p avec $1 < p < \infty$. Par contre, les espaces $L_1, L_\infty, c_0, \ell_1, \ell_\infty$ ne sont pas réflexifs.

Proposition 1.8. *Tout espace de dimension fini est réflexif.*

Proposition 1.9. *La représentation de Riesz nous permet de montrer que tout espace de Hilbert est réflexif.*

1.3 Opérateurs linéaires faiblement compacts

Définition 1.10. Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $u \in \mathcal{B}(X;Y)$ est *faiblement compact* si le sous ensemble $u(B_X)$ est relativement faiblement compact (i.e., $\overline{u(B_X)}$ est faiblement compact) dans Y. L'espace de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de X dans Y sera noté $\mathcal{W}(X;Y)$, qui est un Banach pour norme des opérateurs.

Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. On définit l'adjoint de u par $u^* : Y^* \to X^*$ tel que

$$u^*(y^*) : X \to \mathbb{R}, x \mapsto u^*(y^*)(x) = y^*(u(x)).$$

On note que si u est borné alors son opérateur adjoint est borné et $\|u\| = \|u^*\|$.

Théorème 1.11. (*Grantmacher*). *Soit $u \in \mathcal{B}(X;Y)$ Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) L'opérateur u est dans $\mathcal{W}(X;Y)$.

b) L'opérateur adjoint u^* est dans $\mathcal{W}(Y^*;X^*)$.

1.4 Factorisation des opérateurs linéaires faiblement compacts

Définition 1.12. On dit qu'un opérateur $u \in \mathcal{B}(X;Y)$ se factorise par un espace de Banach G s'il existe un opérateur $v \in \mathcal{B}(X;G)$ et $w \in \mathcal{B}(G;Y)$ tels que $u = wv$, i.e.,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & v \searrow & \uparrow w \\ & & G \end{array}$$

Proposition 1.13. *Soit X un espace de Banach. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur identité $id_X : X \to X$ est faiblement compact*

(2) *L'espace X est réflexif.*

(3) *Pour tout espace de Banach Y et tout opérateur borné $u : X \to Y$, alors u est faiblement compact.*

Remarque 1.11. Dans (3), on peut mettre X dans l'arrivée et on obtient le même résultat.

Théorème 1.12. *Un opérateur linéaire borné $u : X \to Y$ est faiblement compact si, et seulement s'il se factorise par un espace réflexif, i.e., s'il existe un espace réflexif G et deux opérateurs bornés*

$$v : X \to G \text{ et } w : G \to Y$$

tels que $u = wv$.

1.5 Applications multilinéaires bornées

Définition 1.13. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. L'opérateur $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est dit *multilinéaire* ou *m-linéaire* s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\|T(x_1, ..., x_m)\| \leq C \|x_1\| ... \|x_m\| . \tag{1.1}$$

On note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires bornée qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante vérifiant (1.1). Elle peut s'exprimer par

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1; 1 \leq j \leq m} \|T(x_1, ..., x_m)\| .$$

Opérateur adjoint. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ on associe l'opérateur *adjoint* suivant

$$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$$

qui est définie par

$$y^* \to T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \to \mathbb{K},$$

où $T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m))$.

Produit tensoriel projectif. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$. On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_j^i\| \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_1^i \otimes ... \otimes x_m^i.$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ i.e.; le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = ... = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.

Opérateur linéairisé. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé *linéarisation de* T, $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ défini par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right).$$

Il est bien défini, car il ne dépend pas de repésentation choisie (voir [Rya01]). De plus, $\widetilde{T}$ est unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

Factorisation canonique d'un opérateurs multilinéaire. Tout opérateur m-linéaire admet la factorisation suivante

$$T = \widetilde{T} \circ i, \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{array}{rcccl} i & : & X_1 \times ... \times X_m & \to & X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \\ & & (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & i\left(x_1, ..., x_m\right) = x_1 \otimes ... \otimes x_m \end{array}$$

c'est à dire le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \widetilde{T} & \\ X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m & & \end{array}$$

On a aussi

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right),$$

car l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y) & \rightarrow & \mathcal{B}\left(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m;Y\right) \\ T & \rightarrow & \Phi(T)=\widetilde{T} \end{array}$$

est une isométrie surjective.

Cas particulier. Le dual de $X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$\left(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m\right)^* = \mathcal{L}(X_1,...,X_m).$$

1.6 Opérateurs m-linéaires faiblement compacts

Définition 1.14. Soient $X_1,...,X_m,Y$ des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$. L'opérateur T est faiblememt compact si $T(B_{X_1}\times...\times B_{X_m})$ est relativement faiblement compact dans Y (i.e., $\overline{T(B_{X_1}\times...\times B_{X_m})}$ est faiblement compact dans Y).

Notation. On notera $\mathcal{W}(X_1,...,X_m;Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme des opérateurs.

Proposition 1.15. (*Propriété idéal*). *Soit $T \in \mathcal{W}(X_1,...,X_m;Y)$. Soient $u \in \mathcal{B}(Y;Z)$ et $v_j \in \mathcal{B}(G_j;X_j)\,(1\leq j\leq m)$. Alors,*
(1) *L'opérateur $u\circ T \in \mathcal{W}(X_1,...,X_m;Z)$*
(2) *L'opérateur $T(v_1,...,v_m)$ est un élément de $\mathcal{W}(G_1,...,G_m;Y)$.*

Théorème 1.16. (*Grantmacher m-linéaire*). *Soient $T: X_1\times...\times \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire et $T^*: Y^* \rightarrow \mathcal{L}(X_1,...,X_m)$ son opérateur adjoint. Alors, T est faiblement compact si, et seulement si, T^* est faiblement compact.*

Lemme 1.17. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ et $\widetilde{T} \in \mathcal{B}\left(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m;Y\right)$ son linéairisatin. Alors, les deux propriété suivante sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(2) *L'opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{W}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right)$.*

Grâce à ce Lemme, on peut démontrer facilement l'énoncé suivant.

Théorème 1.18. *Un opérateur multilinéaire est faiblement compact si, et seulement s'il existe un un espace de Banach G, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{W}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que*

$$T = u \circ A.$$

Enfin, nous avons besoin de résultat suivant qui assure que les opérateurs multilinéaires faiblement compacts se caractérisent par la factorisation autour d'un espace réflexif. Nous allons étudier dans le chapitre suivant les opérateurs qui admettent une factorisation autour d'un espace de Hilbert.

Théorème 1.19 [BPR07]**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(2) *L'opérateur T se factorise par un espace réflexif, i.e. il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T = u \circ A$. En d'autres termes le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & \stackrel{T}{\rightarrow} & Y \\ & A \searrow & \uparrow u \\ & & G \end{array}$$

Chapitre 2

Opérateurs m-linéaires qui se factorisent par un espace de Hilbert

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera un cas particulier des opérateurs multilinéaires faiblement compacts, ce sont les opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un espace de Hilbert. On verra que cette classe d'opérateurs possède certaines propriétés importantes et qu'elle coïncide avec la classe des opérateurs multilinéaires 2-factorables introduite par Martin Cerna Maguina dans [BMCM05] comme généralisation naturelle du cas linéaire étudie par Diestel dans [DJT95] .

2.2 La classe des opérateurs multilinéaires $\mathcal{L}_{fact}$

Commençons par la définition des opérateurs linéaires qui se factorisent par un Hilbert.

Définition 2.1. Soient X, Y deux espaces de Banach. L'opérateur $u : X \to Y$ se factorise par d'un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H, $v \in \mathcal{B}(H; Y)$ et $w \in$

$\mathcal{B}(X;H)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "w"'] & Y \\ & H \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

On note $\mathcal{B}_{fact}(X;Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires qui se factorisent par un Hilbert. C'est un espace de Banach avec la norme suivante

$$\|u\|_{fact} = \inf \|v\| \|w\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles du digramme précédent.

Proposition 2.2. Soient X_0, X, Y, Y_0 des espaces de Banach. Soient $q \in \mathcal{B}(X_0, X)$ un opérateur quotient et $j \in \mathcal{B}(Y, Y_0)$ un plongement isométrique. Les deux propriétés sont équivalentes.

(1) L'opérateur $u : X \to Y$ est dans $\mathcal{B}_{fact}(X;Y)$

(2) L'opérateur $j \circ u \circ q : X_0 \to Y_0$ est dans l'espace $\mathcal{B}_{fact}(X_0;Y_0)$.

Dans ce cas, on a

$$\|u\|_{fact} = \|j \circ u \circ q\|_{fact}.$$

Preuve.(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que u se factorise par espace de Hilbert, c'est à dire il existe deux opérateurs bornés w, v tels que

$$u = v \circ w : X \xrightarrow{w} H \xrightarrow{v} Y,$$

Alors,

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "q"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "w"'] & Y \arrow[r, "j"] & Y_0 \\ & & H \arrow[u, "v"'] & \end{tikzcd}$$

i.e.,

$$X_0 \xrightarrow{q} X \xrightarrow{w} H \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{j} Y_0$$

ce qui donne la foctorisation souhaitée.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Commençons par la factorisation de $j \circ u \circ q$ autour d'un espace de Hilbert

$$X_0 \xrightarrow{b} H \xrightarrow{a} Y_0.$$

i.e., $j \circ u \circ q = a \circ b$. Considérons le sous espace fermé suivant

$$H_0 := Ker\,(a)^{\perp} \cap \{h \in H : a\,(h) \in j\,(Y)\}\,.$$

Soit $a_0 : H_0 \to Y$ un opérateur tel que $j \circ a_0$ est la restriction de a sur H_0, c'est à dire

$$j \circ a_0\,(h) = a\,(h)\,, \forall h \in H_0.$$

On note que a_0 est injective avec

$$\|a_0\| \leq \|a\|\,.$$

Soit p la projection orthogonale de H sur H_0. Posons $b_1 := p \circ b$. Alors, $\|b_0\| \leq \|b\|$ et $u \circ q$ admet la factorisation suivante

$$uq : X_0 \xrightarrow{b_1} H_0 \xrightarrow{a_0} Y.$$

L'injectivité de a_0 implique l'existence de $b_0 \in \mathcal{B}\,(X, H_0)$ tel que $b_0 \circ q = b_1$; puisque q est un opérateur quotient, nous avons $\|b_0\| = \|b_1\|$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{q} & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{j} & Y_0 \\ & b \searrow & & & & \nearrow a & \\ & & & H & \xrightarrow{p} & H_0 & \end{array}$$

Maintenant, comme $u : X \overset{b_0}{\to} H_0 \overset{a_0}{\to} Y$, nous concluons que

$$u \in \mathcal{B}_{fact}(X;Y),$$

et

$$\|u\|_{fact} \leq \|a_0\| \|b_0\| \leq \|a\| \|b\|$$

ce qui achève la preuve. $\blacksquare$

Le théorème suivant montre la relation entre l'inégalité de Grothendieck et les opérateurs linéaires qui se factorisent autour d'un espace de Hilbert. Le théorème est dû à [DJT95, Théorème 7.5] .

Théorème 2.3. *Soient X, Y des espaces de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*
(a) L'opérateur u est dans $\mathcal{B}_{fact}(X;Y)$.
(b) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle y_i^*, u(x_j)\rangle\right| \leq C \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ une matrice de scalaire, $x_1, ..., x_m \in B_X$, $y_j^* \in B_{Y^*}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Pour la démonstration nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme 2.4. (*L'inégalité de Grothendieck*). Il existe une constante universelle $\mathcal{K}_G$ pour laquelle, pour tout espace de Hilbert H et $n \in \mathbb{N}$, toute $n \times n$ matrice des scalaires $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et tous $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in B_H$, nous avons

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j\rangle\right| \leq \mathcal{K}_G \max\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\}.$$

Preuve de Théorème 2.3 : $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons qu'il existe un espace de Hilbert H et deux opérateurs v, w tels que

$$u = v \circ w : X \to H \to Y.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et prenons une matrice de scalaire $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soient $x_1, ..., x_n \in B_X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in B_{Y^*}$. En utilisant l'inégalité de Grothendieck

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left\langle y_i^*, u\left(x_j\right) \right\rangle \right| &= \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left\langle y_i^*, v \circ w\left(x_j\right) \right\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left\langle v^*\left(y_i^*\right), w\left(x_j\right) \right\rangle \right| \\
&\leq \mathcal{K}_G \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| v^*\left(y_i^*\right) \right\| \sup_{1 \leq j \leq n} \left\| w\left(x_j\right) \right\| \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : \left(s_i\right), \left(t_j\right) \in B_{\ell_\infty^n} \right\} \\
&\leq \mathcal{K}_G \left\| v^* \right\| \left\| w \right\| \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : \left(s_i\right), \left(t_j\right) \in B_{\ell_\infty^n} \right\}
\end{aligned}$$

Alors nous avons (b) et $C = \mathcal{K}_G \left\| v^* \right\| \left\| w \right\|$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Comme tout espace de Banach est un espace quotient de l_1^J, par la Proposition 2.2 on va montrer la propriété lorsque $X = l_1^J$. Notre stratégie est de voir que l'opérateur

$$u : l_1^J \to Y,$$

est 1-sommant. Corollaire 2.16 dans [DJT95] va terminer la démonstration. On fixe $x_1, ..., x_n \in l_1^J$ avec $\left\| x_i \right\|_1^{faible} = 1$. Nous allons montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| u\left(x_i\right) \right\| \leq C.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $y_1, ..., y_n \in l_1^N$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon \left(\|u\| + 1\right)^{-1}.$$

On peut donc supposer que $N \geq n$, et à travers le dispositif de réglage $x_{n+1} = ... = x_N = 0$ et $y_{n+1} = ... = y_N = 0$, on peut aussi supposer que $N = n$. En écrivant pour tout $1 \leq i \leq n$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j.$$

Alors, pour tout $s, t \in B_{l_\infty^n}$, notre hypothèse sur $x_1, ..., x_n$ donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \langle y_i, t \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \langle x_i, t \rangle \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| \langle x_i - y_i, t \rangle \right| \leq 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mais, maintenant nous pouvons choisir $y_1^*, ..., y_n^* \in B_{Y^*}$ ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(y_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, u(y_i) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle y_i^*, u(e_j) \rangle,$$

par la condition (b) on arrive à

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{n} \|u(y_j)\| + \varepsilon \\ &\leq (1 + \varepsilon) C + \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous somme maintenant sur le point de définir l'espace des opérateurs multilinéaire qui se factorisent par un espace de Hilbert.

Définition 2.5. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. L'opérateur $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ se factorise par un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H,

$u \in \mathcal{B}(H;Y)$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; H)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & \overset{T}{\to} & Y \\ & A \searrow & \uparrow u \\ & & H \end{array} \tag{2.1}$$

On note $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un Hilbert. C'est un espace de Banach avec la norme suivante

$$\|T\|_{fact} = \inf \|u\| \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles comme dans le diagramme précédent.

Proposition 2.6.

(1) *Soit* $T \in \mathcal{L}_{fact}(Z_1, ..., Z_m; G)$, $u \in \mathcal{B}(G;Y)$ *et* $v_j \in \mathcal{B}(X_j; Z_j)$, *alors*

$$u \circ T(v_1, ..., v_m) \in \mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y).$$

(2) *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$, $u \in \mathcal{B}_{fact}(G;Y)$, *alors*

$$u \circ T \in \mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y).$$

(3) *Pour tout espace de Hilbert* H, *on a*

$$\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; H) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; H)$$

Preuve. (1) : La démonstration se déduit de diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \times \ldots \times & X_m & \overset{u\circ T(v_1,\ldots,v_m)}{\rightarrow} & Y \\
v_1 \downarrow & & v_m \downarrow & & u \uparrow \\
Z_1 & \times \ldots \times & Z_m & \overset{T}{\rightarrow} & G \\
 & & & A \searrow & \uparrow w \\
 & & & & H
\end{array}$$

En d'autre termes,

$$u \circ w \circ A\,(v_1, ..., v_m) = q \circ B.$$

(2) Soit $u \in \mathcal{B}_{fact}\,(G; Y)$, alors il existe un espace de Hilbert H tel que : $u = w \circ v$ avec $v \in \mathcal{B}\,(G; H)$ et $w \in \mathcal{B}\,(H; Y)$, alors

$$u \circ T = u \circ w \circ v \circ T.$$

(3) Dans la factorisation (2.1) on prend $u = id_H$ et $A = T$. ■

Théorème 2.7. *Soit $T \in \mathcal{L}\,(X_1, ..., X_m; G)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L'opéarteur T est dans $\mathcal{L}_{fact}\,(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(2) *L'opérateur linéarisé $\widetilde{T} \in \mathcal{B}_{fact}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right)$*

(3) *Il existe $u \in \mathcal{B}_{fact}\,(G; Y)$ et $A \in \mathcal{L}\,(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T = u \circ A$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $T \in \mathcal{L}_{fact}\,(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors, il existe un espace de Hilbert H et $u \in \mathcal{B}\,(H; Y)$ et $A \in \mathcal{L}\,(X_1, ..., X_m; H)$ tesl que

$$T = u \circ A.$$

Nous avons

$$\widetilde{T} = u \circ \widetilde{A},$$

avec

$$\widetilde{A} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \to H,$$

i.e., $\widetilde{T} \in \mathcal{B}_{fact}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m ; Y\right)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Par la factorisation (1.2), on a

$$T = \widetilde{T} \circ i_m,$$

comme $\widetilde{T}$ est factorisable par un espace de Hilbert et i_m est un opérateur multilinéaire, on trouve la factorisation souhaitée.

$(2) \Rightarrow (3)$: Immédiate d'après la Proposition 2.6. ■

Théorème 2.8. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L'opéarteur* T *est dans* $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y)$.

(2) *L'opérateur adjoint* $T^* \in \mathcal{B}_{fact}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$.

(3) *L'opérateur* $T^{**} \in \mathcal{B}_{fact}(\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*; Y^{**})$.

(4) *L'opéarteur* $K_Y \circ T$ *est dans* $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y^{**})$.

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$: Soit $T \in \mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y)$, c'est à dire $T = u \circ A$ où $u \in \mathcal{B}(H; Y)$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; H)$. Alors,

$$T^* = A^* \circ u^* : Y^* \overset{u^*}{\to} H \overset{A^*}{\to} \mathcal{L}(X_1, ..., X_m).$$

$(2) \Rightarrow (3)$: Supposons que $T^* \in \mathcal{B}_{fact}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$. Par dualité on trouve facilement la factorisation souhaitée.

$(3) \Rightarrow (4)$: Supposons que $T^{**} \in \mathcal{B}_{fact}(\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*; Y^{**})$, i.e., T^{**} se factorise comme suit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^* & \overset{T^{**}}{\to} & Y^{**} \\ & A \searrow & \uparrow u \\ & & H \end{array}$$

On définit l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} K: & X_1 \times ... \times X_m & \rightarrow & \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^* \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & K_{(x_1,...,x_n)} \end{array}$$

où

$$K_{(x_1,...,x_n)}(\Phi) = \Phi(x_1, ..., x_n).$$

Cette application est un multilinéaire de norme 1. Il est facile aussi de voir que

$$K_Y \circ T = T^{**} \circ K$$

En effet, soit $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$, d'une part,

$$K_Y \circ T(x_1, ..., x_m)(y^*) = y^*(T(x_1, ..., x_m))$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(T^{**} \circ K)(x_1, ..., x_m)(y^*) &= K(x_1, ..., x_m)T^*(y^*) \\ &= K_{(x_1,...,x_m)}(T^*(y^*)) \\ &= T^*(y^*)(x_1, ..., x_m) \\ &= y^*(T(x_1, ..., x_m))\end{aligned}$$

Finalement, nous avons la factorisation suivante

$$K_Y \circ T = T^{**} \circ K : X_1 \times ... \times X_m \xrightarrow{K} \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^* \xrightarrow{A} H \xrightarrow{u} Y^{**}.$$

Ce qui montre que $K_Y \circ T$ est dans $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y^{**})$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : supposons que $K_Y \circ T$ *est dans* $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y^{**})$. Alors,

$$K_Y \circ T = u \circ A,$$

où $u \in \mathcal{B}(H; Y^{**})$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; H)$. Comme $(K_Y)^* \circ K_Y = id_Y$, on obtient

$$T = (K_Y)^* \circ u \circ A,$$

ce qui donne le résultat. ■

2.3 Caractérisation des opérateurs m-linéaires factorisables par un Hilbert

Tout d'abord, on introduit la classe des opérateurs multilinéaires p-factorables introduite par Martin Cerna Maguina dans [BMCM05].

Définition 2.9. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. L'opérateur $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est dit p-factorable s'il existe un espace $L_p(\mu)$, $u \in \mathcal{B}(L_p(\mu); Y^{**})$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; L_p(\mu))$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times ... \times X_m & \xrightarrow{T} & Y & \overset{K_Y}{\hookrightarrow} & Y^{**} \\ & A \searrow & & \nearrow u & \\ & & L_p(\mu) & & \end{array} \tag{2.2}$$

C'est à dire

$$K_Y \circ T = u \circ A.$$

On note $\Gamma_p(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires p-factorable. C'est un espace de Banach avec la norme suivante

$$\|T\| = \inf \|u\| \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles du diagramme (2.2).

Théorème 2.10. *Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Les deux propriétés sui-*

vantes sont équivalentes

(a) L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y)$.

(b) L'opérateur T est dans $\Gamma_2(X_1, ..., X_m; Y)$.

Preuve.$(a) \Rightarrow (b)$: Si $T \in \mathcal{L}_{fact}(X_1, ..., X_m; Y)$, alors

$$T = u \circ A,$$

donc

$$K_Y \circ T = (K_Y \circ u) \circ A.$$

comme $H = l_2^I$ avec I est un ensemble convenable, on trouve ce qu'on veut.

$(b) \Rightarrow (a)$: Supposons que T est 2-factorable. C'est à dire $K_Y \circ T = u \circ A$. Il suffit d'après le Théorème 2.7 de montrer que l'opérateur linéairisé $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ est factorisable par un espace de Hilbert. On pose

$$H_0 = \operatorname{Im}\left(\widetilde{A}\right)^\perp \cap \{h \in L_2(\mu) : u(h) \in K_Y(Y)\},$$

où $\widetilde{A}$ est l'opérateur linéarisé de A. Alors, H_0 est bien un sous espace fermé non vide de $L_2(\mu)$, ce qu'il montre qu'il existe une projection $P : L_2(\mu) \to H_0$ telle que $\|P\| = 1$. Soit $u_0 : L_2(\mu) \to Y$ définie par

$$\forall h \in L_2(\mu) : K_Y \circ u_0(h) = u \circ P(h).$$

1) Montrons tout d'abord que u_0 est un **opérateur linéaire bien définie**. En effet, soit $h \in L_2(\mu)$

$$K_Y \circ u_0(h) = u(P(h)),$$

alors, il existe $y \in Y$ tel que $u(P(h)) = K_Y(y)$, donc

$$K_Y \circ u_0(h) = K_Y(y),$$

par l'injectivité de K_Y, on trouve que $u_0(h) = y \in Y$. Soient maitenant $h_1, h_2 \in L_2(\mu)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} K_Y \circ u_0(\lambda h_1 + \mu h_2) &= u(P(\lambda h_1 + \mu h_2)) \\ &= \lambda u(P(h_1)) + \mu u(P(h_2)) \\ &= \lambda K_Y \circ u_0(h_1) + \mu K_Y \circ u_0(h_2) \\ &= K_Y(\lambda u_0(h_1) + \mu u_0(h_2)), \end{aligned}$$

par l'injectivité de K_Y on trouve

$$u_0(\lambda h_1 + \mu h_2) = \lambda u_0(h_1) + \mu u_0(h_2)$$

2) Pour tout v de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$, on a $\widetilde{A}(v) \in H_0$. En effet, on a

$$\begin{cases} \widetilde{A}(v) \in \operatorname{Im}\left(\widetilde{A}\right) \\ u\left(\widetilde{A}(v)\right) = \sum_{i=1}^{n} u\left(A\left(x_1^i, ..., x_m^i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} K_Y T\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) \\ = K_Y\left(\sum_{i=1}^{n} T\left(x_1^i, ..., x_m^i\right)\right) = K_Y(y) \in K_Y(Y). \end{cases}$$

3) Finalement, nous avons

$$K_Y \circ u_0 \circ \widetilde{A} = K_Y \circ \widetilde{T},$$

i.e., le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X_1\widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \arrow[r, "\widetilde{T}"] \arrow[dr, "\widetilde{A}"'] & Y \arrow[r, hook, "K_Y"] & Y^{**} \\ & H_0 \arrow[u, "u_0"'] & \end{tikzcd}$$

en effet, soit $v \in X_1\widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$, alors

$$\begin{aligned} K_Y \circ u_0 \left(\widetilde{A}(v)\right) &= u\left(P \circ \widetilde{A}(v)\right) \\ &= u\left(\widetilde{A}(v)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u\left(A\left(x_1^i, ..., x_m^i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_Y\left(T\left(x_1^i, ..., x_m^i\right)\right) \\ &= K_Y \widetilde{T}(v). \end{aligned}$$

Par l'injectivité de K_Y, on obtient

$$u_0 \circ \widetilde{A} = \widetilde{T},$$

ce qui termine la démonstration. ■

Les deux théorèmes suivants sont dû à Martin Cerna Maguina [BMCM05], dans sa Thèse de Doctorat il a généralisé la caractérisation linéaire des opérateurs admettant une factorisation autour d'un espace de Hilbert. Pour beaucoup de détaille sur le cas linéaire voir [DJT95].

Théorème 2.11. *Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Les deux propriétés sui-*

vantes sont équivalentes

(a) L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{fact}(X_1,...,X_m;Y)$.

(b) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left\langle \Psi_i^*, y_j^* T\right\rangle\right| \leq C \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ une matrice de scalaire, $\Psi_i^* \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m)^*$ $(1 \leq i \leq n)$, $y_j^* \in Y^*$ $(1 \leq j \leq n)$.

Preuve.$(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que T *est dans* $\mathcal{L}_{fact}(X_1,...,X_m;Y)$. Alors,

$$T^* \in \mathcal{L}_{fact}(Y^*; \mathcal{L}(X_1,...,X_m)),$$

d'après le Théorème 2.3 pour les opérateurs linéaires, nous avons

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left\langle \Psi_i^*, T^*\left(y_j^*\right)\right\rangle\right| \leq K_G \left\|T^*\right\|_{fact} \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\}$$

pour tout $y_1^*,...,y_n^* \in B_{Y^*}$ et $\Psi_1^*,...,\Psi_n^* \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)^*}$. Comme $T^*\left(y_j^*\right) = y_j^* \circ T$ et $\|T\|_{fact} = \|T^*\|_{fact}$ on obtient

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left\langle \Psi_i^*, y_j^* T\right\rangle\right| \leq K_G \|T\|_{fact} \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\}$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Cette inégalité montre que T^* est dans $\mathcal{L}_{fact}(Y^*; \mathcal{L}(X_1,...,X_m))$, alors d'après le Théorème 2.8, on trouve le résultat. ■

On termine ce chapitre par le résutat suivant qui est une conséquence de théorème précédent et de Théorème 7.8 dans [DJT95].

Théorème 2.12. *Soient $X_1,...,X_m,Y$ des espaces de Banach. Les deux propriétés sui-*

vantes sont équivalentes

(a) L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{fact}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$

(b) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left\langle \Psi_i^*, y_j^* T\right\rangle\right| \leq C\,|||a|||\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\Psi_j^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|y_i^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$|||a||| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\},$$

$\Psi_j^* \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m\right)^* \left(1 \leq j \leq n\right),\ y_i^* \in Y^* \left(1 \leq i \leq n\right).$

Chapitre 3

Polynômes homogènes qui se factorisent par un espace de Hilbert

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie les polynômes homogènes de degré m qui admettent une factorisation autour d'un espace de Hilbert. On va faire une étude presque similaire à celui des opérateurs multilinéaires.

3.2 Polynôme homogène de degré m

Avant de donner la définition d'un polynôme homgène de degré m, nous avons besoin de définir les opérateurs multilinéaires symétriques. Prenons deux espaces de Banach X, Y, un opérateur multilinéaire $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$ est dit *symétrique* si il est invariant par rapport à toutes permutations de ses composantes, i.e.,

$$T\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) = T\left(x_1, ..., x_m\right)$$

pour toute permutation σ. On note $\mathcal{L}_S\left({}^m X; Y\right)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs multilinéaires symétriques.

Définition d'un polynôme homogène de degré m. Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y deux espaces de Banach. L'application $P : X \to Y$ est un *polynôme homogène de degré* m s'il existe un opérateur multilinéaire symétrique $T_P \in \mathcal{L}_S\left({}^m X; Y\right)$ tel que

$$P(x) = T_P\left(x, \overset{m}{\ldots}, x\right).$$

On note $\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$, l'espace des polynômes homogènes de degré m de X dans Y. On le muni de norme suivante

$$\|P\| = \sup\left\{\|P(x)\| \,/\, \|x\| \leq 1\right\}$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit simplement $\mathcal{P}\left({}^m X\right)$. On note que $\mathcal{L}_S\left({}^m X; Y\right)$ s'identifier à $\mathcal{P}\left({}^m X\right)$.

Formule de polarisation [Muj86 ; Theorem 1.10]. *Pour tout opérateur multinéaire symétrique $T \in \mathcal{L}\left({}^m X; Y\right)$ nous avons*

$$T_P\left(x^1, ..., x^m\right) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m P\left(\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j\right), \tag{3.1}$$

où T_P est le multilinéaire symétrique associe à P. De plus, P est borné sur la boule unité de X ssi T_P est borné. Les deux normes vérifient l'inégalité suivante (cf. [Muj86 ; Theorem2.2])

$$\|P\| \leq \|T_P\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|.$$

Opérateur linéarisé. Soit $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$, on définie sa *linéarisation* $\widetilde{P} : \widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X \to Y$ par

$$\widetilde{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

où $\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ est le complété pour la norme projective de l'espace

$$\otimes^m_{\pi,s} X = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i, \;\; (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in X \right\}.$$

Opérateur adjoint. Soit $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$, on définie son *opérateur adjoint* $P^* : Y^* \to \mathcal{P}\left({}^m X\right)$ par

$$P^*(y^*)\left(x\right) = y^*\left(P\left(x\right)\right).$$

Factorisation canonique. On introduit les plongements naturels de X dans $\underbrace{X \times ... \times X}_{m}$ et $\widehat{\otimes}^m_{\pi} X$, notés Δ_m et δ_m respectivement. Ils sont définis par

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_m & : & X & \to & X \times ... \times X \\ & & x & \to & (x, ..., x) \end{array}, \quad \begin{array}{ccccc} \delta_m & : & X & \to & \widehat{\otimes}^m_{\pi} X \\ & & x & \to & x \otimes ... \otimes x \end{array}$$

On note que δ_m est un polynôme de degré m dont son multilinéaire symétrique associer est donné par

$$i_m : X \times ... \times X \to X \widehat{\otimes}_{\pi} ... \widehat{\otimes}_{\pi} X$$

défini par

$$i_m\left(x^1, ..., x^m\right) = x^1 \otimes ... \otimes x^m.$$

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \delta_m \downarrow & \overset{P}{\searrow} & \\ \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X & \underset{\widetilde{P}}{\rightarrow} & Y \end{array}$$

i.e.,

$$P = \widetilde{P} \circ \delta_m$$

3.3 Polynômes homogènes faiblements compacts

Définition 3.1. Soient X, Y deux espaces de Banach et $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$. Le polynôme P est *faiblememt compact* si $P\left(B_X\right)$ est relativement faiblement compact dans Y, i.e., $\left(\overline{P\left(B_X\right)}\text{ est faiblement compact dans } Y\right)$.

On notera $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}({}^m X; Y)$ l'espace de tous les polynômes de degré m faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme de polynômes.

On donne les résultats suivants sans démonstration, pour plus de détaille veuillez consulter [ASaa10, Bot05, BPR07, GG95] .

Proposition 3.2. *Soit $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Le polynôme P est faiblement compact.*
(2) *L'opérateurs adjoint P^* est faiblement compact.*
(3) $P^{**}\left(\mathcal{P}\left({}^m X\right)^*\right) \subset Y$.

Lemme 3.3. *Soit $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$ et $\widetilde{P}$ son linéarisation. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Le polynôme P est faiblement compact.*
(2) *L'opérateur linéarisé $\widetilde{P} : \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X \to Y$ est faiblement compact.*

Théorème 3.4. *Un polynôme homogène de degré m est faiblement compact si, et seulement s'il se factorise par un espace réflexif, i.e. il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}({}^m X; G)$ tels que $P = u \circ Q$.*

Théorème 3.5. *Soit X un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'espace X est réflexif.*
(2) *Pour tout espace de Banach Y il existe un espace de Banach G, un opérateur linéaire*

$u \in \mathcal{B}(X;G)$ *et* $Q \in \mathcal{P}(^m G;Y)$ *tels que*

$$P = Q \circ u. \tag{3.2}$$

Remarque 3.6.
(1) Si Y est reflexif, la factorisation (3.2) n'est vraie.
(2) Si $P : X \to Y$ est faiblement compact, P n'est pas nécessairement vérifie la factorisation (3.2).

3.4 Factorisation des polynômes homogènes par un espace de Hilbert

Soit $P \in \mathcal{P}(^m X;Y)$. On dit que P est factorisable par un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{B}(H;Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X;H)$ tels que

$$P = u \circ Q$$

En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Y \\ & \searrow Q & \uparrow u \\ & & H \end{array}$$

On note $\mathcal{P}_{fact}(^m X;Y)$ l'espace des polynômes homogène de degré m qui se factorisent par un espace de Hilbert. On muni cette classe de norme suivante

$$\|P\|_{fact} = \inf_{P=u\circ Q} \|u\|_{\mathcal{W}} \|Q\|. \tag{3.3}$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles du diagramme (3.3).

Proposition 3.7. *Soit $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$ et T_P son multilinéaire symétrique. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) Le polynôme P est dans $\mathcal{P}_{fact}({}^m X; Y)$

(2) L'opérateur multilinéaire T_P est dans $\mathcal{L}_{fact}(X, ..., X; Y)$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $P \in \mathcal{P}_{fact}({}^m X; Y)$, alors il existe un espace de Hilbert H, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{B}(H; Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(X; H)$ tels que

$$P = u \circ Q,$$

D'après (3.1), l'opérateur u est faiblement compact. Nous avons

$$\begin{aligned} T_P\left(x^1, ..., x^m\right) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m P\left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j\right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m u\left(Q\left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j\right)\right) \\ &= u\left(\frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m Q\left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j\right)\right) \\ &= u \circ T_Q\left(x^1, ..., x^m\right). \end{aligned}$$

Ce qu'il montre que T_P est factorisable par un espace de Hilbert H, i.e., $T_P \in \mathcal{L}_{fact}(X, ..., X; Y)$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que $T_P \in \mathcal{L}_{fact}(X, ..., X; Y)$. Il existe alors un espace de Hilbert H, $u \in \mathcal{B}(H; Y)$ et $A \in \mathcal{L}(X, ..., X; G)$ tels que

$$T_P = u \circ A.$$

On va montrer que

$$P = u \circ Q,$$

où $Q(x) = A_S(x, ..., x)$ avec A_S est le multilinéaire symétrisé de A définie par

$$A_S(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right)$$

En effet,

$$\begin{aligned} P(x) &= u(Q(x)) \\ &= u(A_S(x; ..., x)) \\ &= u\left(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} A \circ \sigma(x; ..., x)\right) \\ &= u(A(x, ..., x)) = T_P(x, ..., x). \end{aligned}$$

Finalement, $P \in \mathcal{P}_{fact}(^m X; Y)$. ■

Théorème 3.8. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *Le polynôme P est dans $\mathcal{P}_{fact}(X; Y)$.*

(2) *L'opérateur adjoint P^* est dans $\mathcal{B}_{fact}(Y^*; \mathcal{P}(^m X))$.*

(3) *L'opérateur biadjoint P^{**} est dans $\mathcal{B}_{fact}(\mathcal{P}(^m X)^*; Y^{**})$.*

(4) *L'opérateur $K_Y \circ P$ est dans $\mathcal{B}_{fact}(X; Y^{**})$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $P \in \mathcal{P}_{fact}(X; Y)$, alors

$$K_Y \circ P = u \circ Q,$$

ce qui implique

$$Q^* \circ u^* = P^* \circ (K_Y)^*,$$

comme $(K_Y)^* \circ K_{Y^*} = id_{Y^*}$, on obtient

$$P^* = Q^* \circ u^* \circ K_{Y^*},$$

finalement on a

$$K_{X^*} \circ P^* = (K_{X^*} \circ Q^*) \circ (u^* \circ K_{Y^*}) = a \circ b$$

où

$$a = K_{X^*} \circ Q^* \in \mathcal{B}(H; X^{***}) \text{ et } b = u^* \circ K_{Y^*} \in \mathcal{B}(Y^*; H)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Immédiate d'après le cas linéaire.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Supposons que $P^{**} \in \mathcal{B}_{fact}(\mathcal{P}(^m X)^*; Y^{**})$, i.e., P^{**} se factorise comme suit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(^m X)^* & \overset{P^{**}}{\rightarrow} & Y^{**} \\ & v \searrow & \uparrow w \\ & & H \end{array}$$

On définit l'application suivante

$$\begin{array}{cccc} L: & X & \rightarrow & \mathcal{P}(^m X)^* \\ & x & \mapsto & L_x \end{array}$$

où

$$L_x(Q) = Q(x).$$

Cette application est bien un polynôme homogène de dégre m. Son multilinéaire symétrique correspondant est donné par

$$T_L = \digamma^* \circ K : X \times ... \times X \overset{K}{\rightarrow} \mathcal{L}_S(^m X)^* \overset{\digamma^*}{\rightarrow} \mathcal{P}(^m X)^*,$$

où $\digamma$ est l'isomorphisme entre $\mathcal{P}(^m X)$ et $\mathcal{L}_S(^m X)$. Il est facile aussi de voir que

$$K_Y \circ P = P^{**} \circ L$$

En effet, soit $x \in X$, d'une part,

$$K_Y \circ P(x)(y^*) = y^*(P(x))$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(P^{**} \circ L)(x)(y^*) &= L(x) P^*(y^*) \\
&= K_x(P^*(y^*)) \\
&= P^*(y^*)(x) \\
&= y^*(P(x))
\end{aligned}$$

Nous avons donc la factorisation suivante

$$K_Y \circ P = P^{**} \circ L : X \xrightarrow{L} \mathcal{P}(^m X)^* \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} Y^{**}.$$

i.e.,

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{P} & Y & \xrightarrow{K_Y} & Y^{**} \\
& L \searrow & & & w \uparrow \\
& & \mathcal{P}(^m X)^* & \xrightarrow{v} & H
\end{array}$$

Ce qui montre que $K_Y \circ P$ est dans $\mathcal{P}_{fact}(^m X; Y^{**})$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : supposons que $K_Y \circ P$ est dans $\mathcal{P}_{fact}(^m X; Y^{**})$. Alors,

$$K_Y \circ P = u \circ Q,$$

où $u \in \mathcal{B}(H; Y^{**})$ et $Q \in \mathcal{P}(^m X; H)$. Comme $(K_Y)^* \circ K_Y = id_Y$, on obtient

$$P = (K_Y)^* \circ u \circ Q,$$

ce qui donne le résultat. $\blacksquare$

3.5 Relation avec les polynômes homogène 2-factorable

Soient X, Y deux espaces de Banach. Le polynôme $P : X \to Y$ est dit p-factorable s'il existe un espace $L_p(\mu)$, $u \in \mathcal{B}(L_p(\mu); Y^{**})$ et $Q \in \mathcal{P}(X; L_p(\mu))$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{P}{\to} & Y & \hookrightarrow & Y^{**} \\ & Q \searrow & & \nearrow u & \\ & & L_p(\mu) & & \end{array}$$

On note $\Gamma P_p(^m X; Y)$ l'espace de tous les polynômes homgène de degré m p-factorable. C'est un espace de Banach avec la norme suivante

$$\|P\| = \inf \|u\| \|Q\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles du diagramme précédent.

Théorème 3.9. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) Le polynôme P est dans $\Gamma P_p(^m X; Y)$.

(b) Le polynôme T_P est dans $\Gamma_p(X \times ... \times X; Y)$.

Preuve. $(a) \Rightarrow (b)$: supposons que $P \in \Gamma P_p(^m X; Y)$, c'est dire $P = u \circ Q$. Comme dans la démonstration de Proposition 3.7, on peut monter que $T_P = u \circ T_Q$ où T_Q est le multilinéaire associe au polynôme Q

$$T_Q : X \times ... \times X \to L_p(\mu)$$

Alors,

$$T_P : X \times ... \times X \overset{T_Q}{\to} L_p(\mu) \overset{u}{\to} Y^{**}.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Supposons que T_P est dans $\Gamma_p(X \times ... \times X; Y)$, c'est à dire

$$\begin{array}{ccccc} X \times ... \times X & \overset{T_P}{\to} & Y & \hookrightarrow & Y^{**} \\ & A \searrow & & \nearrow u & \\ & & L_p(\mu) & & \end{array}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} P(x) &= T_P(x, ..., x) = u \circ A(x, ..., x) \\ &= u \circ Q_A(x) \end{aligned}$$

où Q_A est le polynôme correspondant à Q. ■

Comme conséquence du Théorème 3.9, Théorème 2.10 et Proposition 3.7.

Théorème 3.10. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*
(a) Le polynôme P est dans $\Gamma P_2(^m X; Y)$.
(b) Le polynôme P est dans $\mathcal{P}_{fact}(^m X; Y)$.

Le Théorème suivant est une conséquence immédiate de Théorème 3.8 et Théorème 2.3.

Corollaire 3.11. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*
(a) L'opérateur P est dans $\mathcal{P}_{fact}(^m X; Y)$.
(b) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left\langle \varphi_i^*, P^* y_j^* \right\rangle \right| \leq C \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n} \right\},$$

(c) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left\langle \varphi_i^*, P^* y_j^* \right\rangle\right| \leq C \left|\left\|a\right\|\right| \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|y_i^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $n \in N$, et

$$\left|\left\|a\right\|\right| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ une matrice de scalaire, $\varphi_i^* \in \mathcal{P}\left({}^m X\right)^*$, $y_j^* \in Y^* \left(1 \leq i, j \leq n\right)$.

Bibliographie

[ASaa10] A. Acour and K. Saadi. *A polynomial caracterization of Hilbert spaces.* Collect. Math. 61, 3 (2010), 291 – 301

[BMCM] B. Martin Cerna Maguina. *Operadores Multilineares p-fatoraveis.* Thèse Doctorat, Brazil, 2005.

[Bot05] G. Botelho. *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. 25 (2005) 69-102.

[BPR07] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda. *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139–1155.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[GG95] M. González and J. Gutiérrez. *Unconditionally converging polynomials on Banach spaces.* Math. Proc.Cambridge. Philos. Soc. **117**, 321–331 (1995).

[Muj86] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* Math. Studies, Vol. **120**, North Holland, Amsterdam, (1986).

[Rya01] Raymound A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics. (2001).