



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA**



**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département des Mathématiques**

**MEMOIRE DE MASTER**

**Domaine : Mathématiques et Informatique**

**Filière : Mathématiques**

**Option : Analyse Mathématiques et Numérique**

**Thème**

**Modélisation numérique des ondes  
gravitationnelles**

**Présenté par :**

**Latrach Chaima**

**Devant le jury :**

**Nadir Mostefa** Prof Université de M'sila **Président**

**Gasmi Abdelkader** Prof Université de M'sila **Encadreur**

**Bounif May Manal** M.A.B ESGEN **Co-encadreur**

**Gagui Bachir** M.C.A Université de m'sila **Examineur**

**Année Universitaire**

**2022 / 2023**

## ملخص:

في هذا العمل، قمنا بتقديم عدة تعاريف لتدفق السطح الحر وميكانيكا السوائل. قمنا بدراسة مشكلة التدفق ثنائي الأبعاد على السطح الحر، حيث لاحظنا ظهور أمواج سطحية تحت تأثير الجاذبية. بالإضافة إلى ذلك، قمنا بتقديم حل معادلة Korteweg-de Vries.

## كلمات مفتاحية:

تدفق السطح الحر، ميكانيك الموائع، ثنائي الأبعاد، معادلة Korteweg-de Vries.

## Résumé :

Dans ce travail, nous avons introduit plusieurs définitions concernant l'écoulement à surface libre et la mécanique des fluides. Nous avons étudié le problème de l'écoulement bidimensionnel sur la surface libre, ou nous avons observé l'apparition d'ondes surface sous l'effet de la gravité. De plus, nous avons fourni la solution de l'équation Korteweg-de Vries.

## Mots clés :

Écoulement à surface libre, Mécanique des fluides, Bidimensionnel, Ondes des surface, L'équation de Korteweg- de vries.

## Abstract :

In this work, we have introduced several definitions regarding free surface flow and fluid mechanics. We have studied the problem of two-dimensional flow on the free surface, where we observed the emergence of surface waves under the influence of gravity. Additionally, we have provided the solution to the Korteweg- de Vries equation.

## Key words :

Free surface flow, Fluid mechanics, Two-dimensional, Surface waves, Korteweg- de Vries equation.

# Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier *Allah*, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie :

Monsieur Pr. **Gasmi A.** et M<sup>elle</sup> Dr. **Bounif M. M.** qui m'ont fourni le sujet de ce mémoire et m'ont guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Monsieur Pr. **Mostefa Nadir** qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Monsieur l'examineur Dr. **Bachir Gagui** qu'il veuille trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

Je remercie tout ma famille et mes amis.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

# Dédicaces

## A mes pères

Mohamed, Mabkhout

## A mes mères

Oum Elkhair, Afaf

## A mes frères et mes sœurs

Noureddine, Abd Elhamid, Issa, Belkacem, Mohamed,  
Othman, Khadra, Afaf, Fatima, et Naima

## A mes amis

Aicha, Amel, Chaima, Maryame, Khadidja, et Nour

et

A tout ma famille et mes amis

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les écoulements à surface libre</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Quelques définitions . . . . .	2
1.2.1 Définition de l'écoulement à surface libre . . . . .	2
1.2.2 Définition de l'écoulement stationnaire . . . . .	2
1.2.3 Définition de l'écoulement non stationnaire . . . . .	3
1.2.4 Définition de l'écoulement uniforme . . . . .	3
1.2.5 Définition de l'écoulement non uniforme . . . . .	3
1.3 Les canaux . . . . .	3
1.3.1 Définition d'un canal . . . . .	3
1.3.2 Les différents types de canaux . . . . .	3
1.4 Un fluide . . . . .	4
1.4.1 Différents types de fluides . . . . .	4
1.4.2 Les propriétés physiques des fluides . . . . .	5
1.4.3 La viscosité . . . . .	6
<b>2 ondes surface</b>	<b>8</b>
2.1 Introduction . . . . .	8
2.2 Linéarisation . . . . .	8
2.2.1 Conditions aux limites . . . . .	8
2.2.2 Approximation linéaire . . . . .	10
2.2.3 Relation de dispersion . . . . .	11
2.2.4 Etude la propagation . . . . .	12

2.2.5	La fonction d'airy . . . . .	14
2.3	Théorie non-linéaire . . . . .	15
2.3.1	Théorie en eaux profondes . . . . .	15
2.3.2	Eau peu profondes avec dispersion . . . . .	17
2.4	Etudier les modèles de vague . . . . .	17
2.4.1	Ondes gravitationnelles . . . . .	17
2.4.2	Modèle de vague bidimensionnel . . . . .	18
2.4.3	Modèle des cercles . . . . .	19
2.4.4	Plus détails sur le modèle . . . . .	19
2.4.5	Ondes dans un fluide en rotation . . . . .	23
2.4.6	Ondes dans les fluides stratifiés . . . . .	24
<b>3</b>	<b>L'équation de Kortweg-de Vries</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.1.1	Historique de l'équation . . . . .	27
3.2	Justification de l'équation . . . . .	27
3.3	Le soliton . . . . .	28
	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

# Introduction

les ondes gravitationnelles sont des "ondulations" de l'espace-temps causées par certains des processus les plus violents et les plus énergétiques de l'univers. Albert Einstein a prédit l'existence des ondes gravitationnelles en 1916 dans sa théorie générale de la relativité. les mathématiques d'Einstein ont montré que les objets massifs en accélération (comme les étoiles à neutrons ou les trous noirs en orbite les uns autour des autres) perturberaient l'espace-temps de telle sorte que des "ondes" d'espace-temps ondulantes se propageraient dans toutes les directions en s'éloignant de la source. Ces ondulations cosmiques voyageraient à la vitesse de la lumière, transportant avec elles des informations sur leurs origines, ainsi que des indices sur la nature de la gravité elle-même. Les ondes gravitationnelles les plus fortes sont produites par des événements cataclysmiques tels que la collision de deux noirs, de supernovas (étoiles massives explosant à la fin de de leur vie) et toue noirs la collision des étoiles à neutrons. D'autres ondes gravitationnelles seraient provoquées par la rotation d'étoiles à neutrons qui ne sont pas des sphères parfaites, et peut-etre meme par les reste du rayonnement gravitationnel créé par le Big Bang.

Le travail dans ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier chapitre présente des généralités sur les écoulements et les fluides. Le deuxième chapitre aborde les équations gouvernant les écoulements à surface libre. Dans le troisième chapitre, nous présentons les équations de Korteweg-de Vries ainsi qu'une solution pour un soliton. Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats de notre travail.

# Chapitre 1

## Les écoulements à surface libre

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder quelques définitions que nous avons jugée utiles pour la bonne compréhension des l'écoulements à surface libre. Avant de nous étendre sur les différents types d'écoulement à surface libre dans les canaux, nous devons donner un aperçu des différents types de canaux, puis nous mettrons en exergue les différents types de fluide, et les propriétés physiques.

### 1.2 Quelques définitions

#### 1.2.1 Définition de l'écoulement à surface libre

Un écoulement à surface libre, est un écoulement dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

#### 1.2.2 Définition de l'écoulement stationnaire

L'écoulement est dit permanent si les caractéristiques d'écoulement en tout point, sont invariantes dans le temps ( $\partial v / \partial t = 0$ ;  $\partial h / \partial t = 0$ ;  $\dots etc$ ).

### 1.2.3 Définition de l'écoulement non stationnaire

L'écoulement est dit non stationnaire si, les caractéristiques de l'écoulement varient en fonction du temps en tout point ( $\partial v/\partial t \neq 0$ ;  $\partial h/\partial t \neq 0$ ).

### 1.2.4 Définition de l'écoulement uniforme

L'écoulement uniforme implique deux conditions : la permanence, et la continuité. L'écoulement est uniforme si la profondeur, la pente, la vitesse, et la section droite demeurent constantes sur une longueur donnée du canal ( $\partial h/\partial L = 0$ ,  $\partial v/\partial L = 0$ ,  $\dots etc$ ).

### 1.2.5 Définition de l'écoulement non uniforme

L'écoulement est non uniforme lorsque la profondeur de l'écoulement varie le long du canal ouvert, c'est à dire lorsque  $\partial h/\partial L \neq 0$ . L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non. On peut également le qualifier de calme, rapide, ou critique.

## 1.3 Les canaux

### 1.3.1 Définition d'un canal

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

### 1.3.2 Les différents types de canaux

On distingue deux catégories de canaux :

1. les canaux naturels.
2. les canaux artificiels.

#### Les canaux naturels

Ce sont les cours d'eau qui existent naturellement sur (ou sous) terre, tels que les ruisselets, torrents, rivières, fleuves, et estuaires.

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières.

## Les canaux artificiels

Il s'agit de cours d'eau créés par l'homme à la surface (ou sous terre), tels que les canaux découverts construits au ras du sol, ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section.

## 1.4 Un fluide

**Définition 1.1** *On appelle fluide, un corps qui n'a pas de forme propre, et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Il se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gaz eux et l'état liquide.*

### 1.4.1 Différents types de fluides

#### Fluide visqueux

Les diverses couches d'un fluide en mouvement ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres. Tout se passe comme si des frottement au sein du fluide s'opposaient aux mouvement relatifs des lignes de courant voisines. Cette résistance au glissement ou à la déformation caractérise la viscosité d'un fluide. Elle est la propriété inverse de la fluidité.

#### Fluides parfaits

Un fluide parfait est un fluide dépourvu de contrainte tangentielle, que ce soit au repos ou en mouvement. De ce fait, les différentes couches de fluide peuvent glisser librement les unes sur les autres, et ne présentent aucune résistance au cisaillement, que ce soit au repos ou en mouvement. La force de viscosité est donc nulle dans ce cas. Il est à noter que la notion de fluide parfait n'a aucune relation avec celle de gaz parfait, elle signifie simplement que le fluide n'est le siège d'aucun frottement.

#### Fluide compressible

Un fluide est dit compressible, lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

## Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure : les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile,...etc).

## Fluide réel

Contrairement, à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

### 1.4.2 Les propriétés physiques des fluides

#### La masse volumique

La masse volumique  $\rho$ , d'une substance est définie comme étant le rapport

$$\rho = \frac{m}{V},$$

où,  $\rho$  est la masse volumique en  $(kg/m^3)$ ,  $m$  est la masse en  $(kg)$ , et  $V$  est le volume en  $(m^3)$ .

#### Le poids volumique (Poids spécifique)

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est à dire le poids de l'unité de volume :

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{G}{V}, \\ &= \frac{Mg}{V}, \\ &= \frac{\rho Vg}{V}, \\ &= \rho \cdot g.\end{aligned}$$

où,  $\bar{\omega}$  : poids volumique en  $(N/m^3)$ ,  $M$  : masse en  $(kg)$ ,  $g$  : accélération de la pesanteur en  $(m/s^2)$ , et  $V$  : volume en  $(m^3)$ .

## La densité

La densité est définie comme étant le rapport de la masse volumique d'un fluide sur la masse volumique d'un fluide de référence. Elle est donnée par la relation suivante

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}.$$

Dans le cas liquide, on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz, on prendra l'air comme fluide de référence.

### 1.4.3 La viscosité

La viscosité est définie comme étant la résistance du fluide au mouvement, c'est une mesure de son frottement interne. C'est une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et proportionnelle à une constante dite viscosité dynamique, c'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement, et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche de particules fluides en mouvement sur les autres couches adjacentes.

#### Viscosité cinématique

Est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique, son unité est ( $m^2/s$ ). Elle est exprimée comme suit

$$v = \frac{\mu}{\rho}.$$

#### Viscosité dynamique

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant, et la variation de vitesse des veines de fluide entre les deux faces de la plaque. Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière

$$F = \mu s \frac{\Delta V}{\Delta Z},$$

où,  $F$  : force de glissement entre les couches en ( $N$ ),  $\mu$  : viscosité dynamique en ( $kg/m \cdot s$ ),  $s$  : surface de contact entre deux couches en ( $m^2$ ),  $\Delta V$  : écart de vitesse entre deux couches en ( $m/s$ ), et  $\Delta Z$  : distance entre deux couches en ( $m$ ).

**Remarque 1.2** Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le pascal seconde ( $Pa \cdot s$ ), ou poiseuille (PI)

$$1Pa \cdot s = 1PI = 1kg/m \cdot s.$$

**Remarque 1.3** (Influence de la température) Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité.

**Remarque 1.4** (Différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique) La viscosité dynamique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité cinématique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation. En d'autre terme, cette dernière, exprime la "rigidité" d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement.

# Chapitre 2

## ondes surface

### 2.1 Introduction

Le but de ce travail sera d'étudier la théorie des ondes de gravité à la surface d'un fluide, supposé non visqueux et incompressible. Par simplicité, on n'étudiera pas les ondes "capillaires" qui dépendent des effets de tension superficielle et permettent de comprendre des effets intéressants tels que la fague d'étrave d'un navire. On obtiendra les équations qui décrivent l'évolution de la surface libre, et qui forment un système complètement non linéaire très compliqué. Nous commencerons par linéariser ces équations en utilisant deux méthodes : l'une utilisant la méthode de la phase stationnaire, l'autre utilisant la fonction d'airy.

Ensuite, nous aborderons l'étude des aspects non linéaires par une théorie simplifiée, la "théorie en eaux peu profondes".

### 2.2 Linéarisation

#### 2.2.1 Conditions aux limites

Soit  $f(x_1, x_2, y, t) = 0$  l'équation de la surface libre, sous forme résolue  $y = \eta(x_1, x_2, t)$ . Les coordonnées du vecteur normal en un point de la surface d'équation  $f = 0$  à  $t$  fixé. Un déplacement  $(dx_1, dx_2, dy)$  dans le plan tangent est tel que l'on reste sur la surface  $f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, y + dy) = 0$ , ce qui donne au premier ordre (on écrira  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}$ )

$$dx_1 f_{x_1} + dx_2 f_{x_2} + dy f_y = 0,$$

l'équation du plan tangent est

$$x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + y f_y = 0,$$

on en déduit l'expression du vecteur normal à la surface

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}} (f_{x_1}, f_{x_2}, f_y),$$

la projection normale de la vitesse du fluide, est

$$v_n = (u, n) = \frac{f_{x_1} u_1 + f_{x_2} u_2 + f_y v}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}},$$

on suppose que  $v_n$  est la vitesse si, le point  $p = (x_1, x_2, y)$  est sur la surface  $f = 0$  au temps  $t$  alors, le point  $p + (v_n dt) n$  est sur la surface  $f = 0$  au temps  $t + dt$ , c'est à dire

$$f(x_1 + v_n dt n_1, x_2 + v_n dt n_2, y + v_n dt n_3, t + dt) = 0,$$

au premier ordre ceci donne

$$f_{x_1} v_n n_1 + f_{x_2} v_n n_2 + f_y v_n n_3 + f_t = 0.$$

Soit

$$v_n = \frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}.$$

La vitesse normale du fluide à celle de la surface

$$\frac{Df}{Dt} = f_t + u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y = f_t + (u \cdot \nabla) f = 0. \quad (2.1)$$

Si l'on utilise la forme résolue  $y = \eta(x_1, x_2, t)$  de l'équation de la surface, cela revient à prendre  $f = \eta - y$  donc,

$$f_{x_1} = \eta_{x_1}, f_{x_2} = \eta_{x_2}, f_t = \eta_t \text{ et } f_y = -1,$$

la condition aux limites à la surface libre s'écrit

$$\eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} - v = 0,$$

valable pour  $y = \eta(x_1, x_2, t)$ , et dans laquelle on peut remplacer  $u = \nabla p$ . De même l'équation de la dynamique se simplifie sur la surface libre puisque  $p = p_0$ , la pression atmosphérique, et  $y = \eta$ , donc

$$\phi_t + 1/2 (\nabla \phi)^2 + g\eta = 0,$$

on a donc sur la surface libre deux conditions

$$\begin{cases} \eta_t + \varphi_{x_1} \eta_{x_1} + \varphi_{x_2} \eta_{x_2} = \varphi_y, \\ \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0, \end{cases} \quad \text{pour } y = \eta(x_1, x_2, t). \quad (2.2)$$

## 2.2.2 Approximation linéaire

Le système (2.2) non linéaire, regardant seulement les termes du premier ordre, on abandonne le terme  $\varphi_{x_1}\eta_{x_1} + \varphi_{x_2}\eta_{x_2}$  dans la première équation, et le terme  $1/2(\nabla\varphi)^2$  dans la deuxième équation, c'est à dire qu'on néglige l'énergie cinétique du fluide dans le bilan d'énergie. Les équations ainsi obtenues ne sont linéaires qu'en apparence, car on doit les appliquer en  $y = \eta$ , si l'on développe ces équations autour de  $y = 0$ , en puissance de  $\eta$  en engendre des termes d'ordre supérieur, on obtient alors le système linéaire

$$\left. \begin{array}{l} \eta_t = \varphi_y \\ \varphi_t = g\eta = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } y = 0. \quad (2.3)$$

En dérivant la deuxième équation, on peut éliminer  $\eta$ , soit

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \text{ sur } y = 0,$$

supposant le fond plat, on a donc le système complet d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{tt} + g\varphi_y = 0, & \text{sur } y = 0, \\ \Delta\varphi_y = 0, & \text{dans le fluide,} \\ \varphi_y = 0, & \text{au fond.} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Recherchons des solutions (2.2) ayant un comportement ondulatoire en  $x_1, x_2$  pour  $\eta$ , et donc pour  $\varphi$  qui lui est couplé. On pose donc

$$\begin{aligned} \eta &= Ae^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi &= Y(y)e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où

$$(k \cdot x) = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Comme  $\varphi$  est harmonique, et que

$$\Delta\varphi = -k^2\varphi + Y''e^{i(kx - \omega t)},$$

nous trouvons pour  $Y$  l'équation

$$Y'' - k^2Y = 0, \text{ où } k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

et donc  $Y(y)$  est une combinaison linéaire de  $\exp(ky)$  et de  $\exp(-ky)$ . Ceci est une propriété générale de l'équation de Laplace.

Etudions plus précisément la solution quand le fond est plat  $Y'(y = -h_0) = 0$ . La combinaison linéaire appropriée d'exponentielles est

$$Y \propto \cosh [k (h_0 + y)],$$

car

$$Y' \propto \sinh [k (h_0 + y)],$$

s'annule bien en  $y = -h_0$ . On obtient ainsi l'expression de  $\varphi$

$$\varphi = C^{te} \cosh [k (h_0 + y)] e^{i(kx - \omega t)},$$

comme  $\varphi_t = -g\eta$ , on peut exprimer cette constante à l'aide de  $A$

$$C^{te} = \frac{-igA}{\omega \cosh (kh_0)},$$

ce qui nous donne l'expression finale du potentiel des vitesses

$$\varphi = \frac{-igA}{\omega \cosh (kh_0)} \cosh [k (h_0 + y)] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Relation de dispersion

Soit

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0,$$

on a

$$\varphi_{tt} = -\omega^2 \varphi,$$

tandis que

$$\varphi_y = k \tan (kh_0) \varphi, \quad (\text{pour } y = 0),$$

dans le cas d'une profondeur finie, et

$$\varphi_y = k\varphi, \quad \text{quand } h_0 \rightarrow \infty,$$

ainsi, la condition à la surface libre est toujours satisfaite pourvu que  $\omega$  et  $k$  soient liés par la "relation de dispersion"

$$\omega^2 = (gk) \tanh (kh_0). \quad (2.7)$$

Dans la figure 2.1 à gauche, on peut voir la loi de dispersion correspondant à  $h_0$  fini, qui est linéaire sans dispersion pour  $k$  petit, et à droite la loi pour  $h_0$  infini qui est toujours dispersive, les deux lois se confondent lorsque  $k$  devient grand.

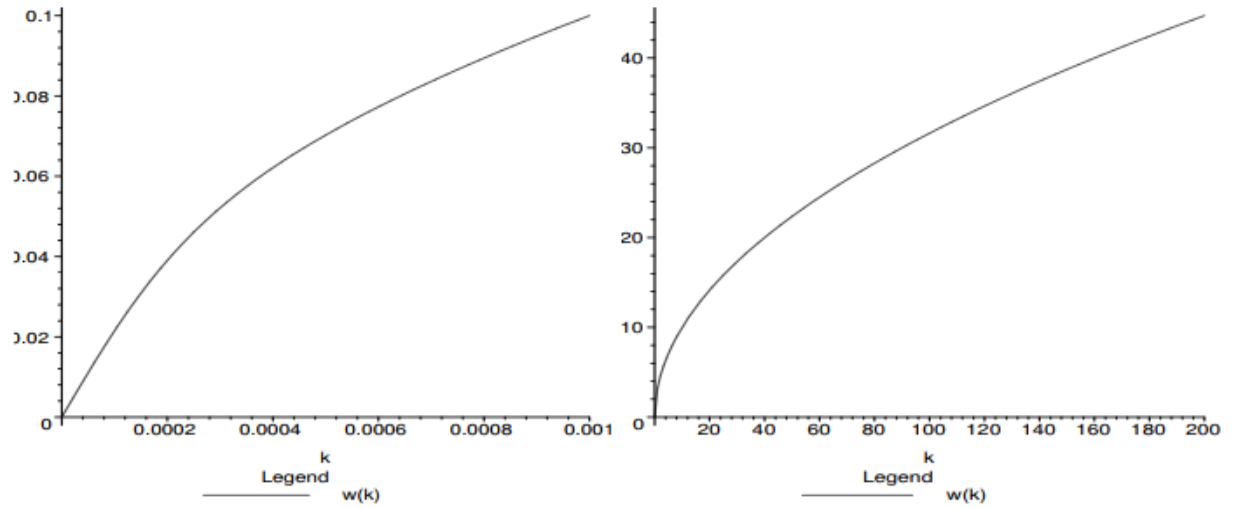


FIG. 2.1 – Relation de la dispersion pour  $h_0$  fini et infini

## La relation de dispersion pour les vagues d'eau

En eau calme, les solutions élémentaires pour la perturbation  $\eta$  dans la hauteur de la surface permettent de déterminer la forme de base

$$\eta = Ae^{ikx - i\omega t},$$

$$\omega^2 = (gk \tanh kh) \left( 1 + \frac{T}{\rho g} k^2 \right), \quad k = |k|, \quad (2.8)$$

où,  $g$  est l'accélération gravitationnelle,  $h$  est la profondeur nonperturbée,  $\rho$  est la densité, et  $T$  est la tension superficielle. En eau calme, les vagues sont anisotropes, et la dispersion n'implique que la magnitude  $k$  du vecteur d'onde.

### 2.2.4 Etude la propagation

#### Transformation de Fourier

Le système 2-4 est linéaire, et la solution générale est une combinaison linéaire des solutions ondulatoires. Par simplicité, on se limitera au cas unidimensionnel,  $k = (k, 0)$ , et  $x = (x, 0)$ . On a donc la solution générale pour la surface libre

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(kx - \omega t)} F + e^{i(kx + \omega t)} F - (k)] dk,$$

les conditions initiales sont

$$\begin{aligned}\eta(x, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} [F_+(k) + F_-(k)] dk, \\ \eta_t(x, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-iW(k)) e^{ikx} [F_+(k) - F_-(k)] dk.\end{aligned}$$

Par exemple, choisant les conditions initiales

$$\eta_t(x, 0) = 0, \text{ et } \eta(x, 0) = \eta_0(x).$$

On a

$$F_+ = F_- = F,$$

donc

$$\eta_0(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(k) dk.$$

Soit, par transformée de Fourier inverse

$$F(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x) e^{-ikx} dx.$$

Pour tout  $t$ , on a

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cos[W(k)t] e^{ikx} F(k) dk, \quad (2.9)$$

en prenant

$$\eta_0(x) = \delta(x),$$

et on a

$$F(k) = \frac{1}{4\pi},$$

donc

$$\eta(x, t) = \int_0^{+\infty} \cos(kx) \cos(W(k)t) dk. \quad (2.10)$$

### Méthode de la phase stationnaire

Il s'agit d'une méthode générale, due à lord Kelvin, l'idée est qu'une intégrale de Fourier telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix\phi(k)) F(k) dk$

On a

$$F(k_0) e^{ix\phi(k_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\alpha(k-k_0)^2} dk = F(k_0) e^{ix\phi(k_0) + i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x\alpha}}. \quad (2.11)$$

Appliquons la méthode de la phase stationnaire à l'évaluation de la surface libre  $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - W(k)t)} F(k) dk,$$

on suppose que  $x$  et  $t$  sont simultanément grands, par exemple  $x/t$  fixé, et  $x$  grand, seuls comptent les points où la phase est stationnaire

$$\frac{d}{dk} (k(x) - W(k)t) = 0 \implies \frac{x}{t} = \frac{dW}{dk} = \frac{dW(k)}{dt} = v_g(k),$$

appliquant la formule (2.11), avec

$$\alpha = W''(k_0)/2,$$

on obtient l'expression de la surface libre  $\eta(x, t)$  à l'approximation de la phase stationnaire

$$\eta(x, t) = F(k_0) e^{(k_0 x - \omega t + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2\pi}{E(W''(k_0))'}} \quad \frac{x}{t} = W'(k_0).$$

### 2.2.5 La fonction d'airy

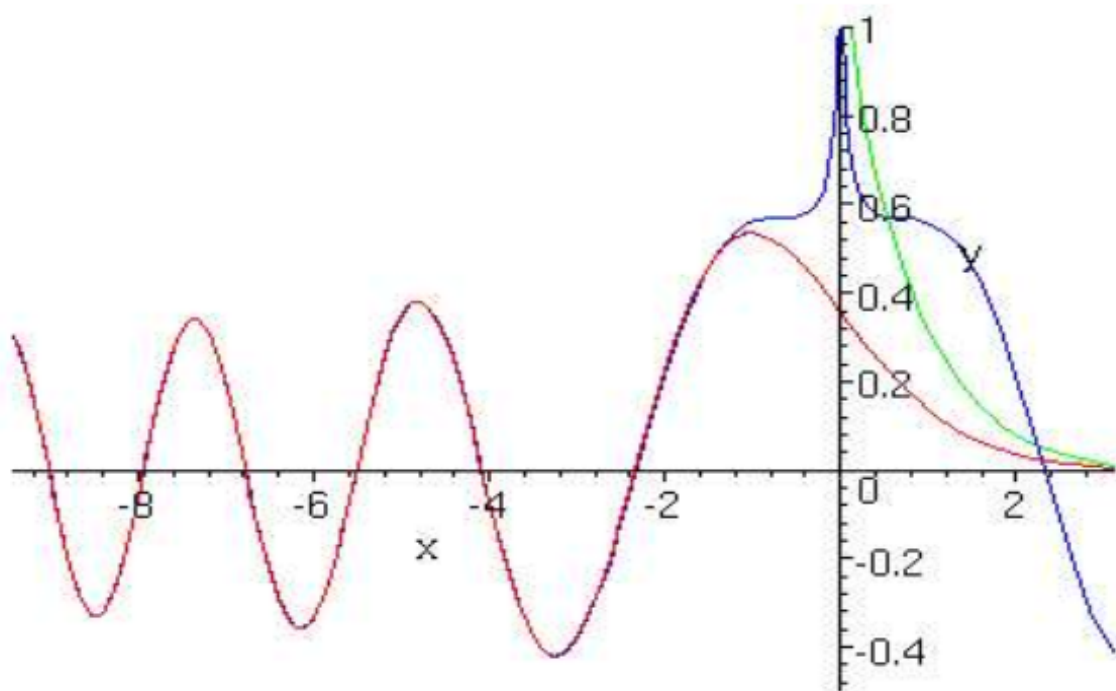


FIG. 2.2 – Fonction d'airy et approximations en  $+\infty$  et  $-\infty$  : allure du front d'onde

La fonction d'airy possède des développements asymptotiques pour  $|z|$  grand, prenant deux formes différentes selon que  $z > 0$  ou  $z < 0$  :

$$\begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad z > 0, \\ Ai(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad z < 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En réalité, la figure (2.2) montre à quel point ces approximations sont excellentes immédiatement dès que  $|z| > 1.5$ . Le point remarquable de ces approximations est que le développement asymptotique pour  $z > 0$  n'est pas le prolongement analytique du développement pour  $z < 0$ . En effet, le sinus est la demi-différence de deux exponentielles. Seule, l'une d'entre elles figure, analytiquement prolongée dans l'expression pour  $z > 0$ . Ceci s'appelle le phénomène de Stokes et est caractéristique des développements asymptotiques autour de points singuliers irréguliers. Ici il est immédiat que  $Ai(z)$  est une solution de l'équation différentielle

$$f''(z) - zf'(z) = 0,$$

qui a un point singulier irrégulier à l'infini.

Pour obtenir ces développements, on applique encore la méthode de la phase stationnaire, mais cette fois-ci à la phase  $i(sz + s^3/3)$ . Le point critique est obtenu quand  $s^2 + z = 0$  c'est-à-dire, pour  $z < 0$  aux deux points  $s = \pm\sqrt{-z}$ . En appliquant la formule (2.11) avec

$$W' = s^2 + z, W'' = 2s, \text{ et } sz + s^3/3 = -\pm|z|^{3/2},$$

et ajoutant la contribution des deux points critiques, on obtient

$$1/\sqrt{\pi}|z|^{1/4} \cos\left(|z|^{3/2} - \pi/4\right),$$

ce qui est l'expression (2.12) pour  $z < 0$ .

Pour  $z > 0$  il n'y a pas de point critique dans le domaine d'intégration, ce qui laisse présager que l'intégrale est petite. Utilisant l'expression asymptotique de la fonction d'Airy pour  $z < 0$ , on obtient l'approximation de la surface libre  $\eta(x, t)$ , en arrière du front d'onde

$$\eta(x, t) \sim 2\sqrt{\pi}F(0) [3Yt(c_0t - x)]^{-1/4} \sin\left[\frac{2(c_0t - x)}{3(3Yt)^{1/2}} + \frac{\pi}{4}\right].$$

## 2.3 Théorie non-linéaire

### 2.3.1 Théorie en eaux profondes

Rappelons les équations formulées dans la première partie de cette étude

$$\nabla u = 0,$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla\rho - gj,$$

on considère la composante verticale de l'accélération faible

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - g = 0 \text{ d'où } \rho - \rho_0 = \rho g (\eta - y),$$

ce qui est l'équation usuelle pour la pression. En projetant sur l'horizontale, avec

$$u = (u_1, u_2, v) \text{ et } x = (x_1, x_2, y),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0,$$

si nous supposons que les  $u_i$  ne dépendent pas de  $y$ , car l'échelle de variation significative est la longueur d'onde, qui est bien plus grand que la profondeur. En intégrant sur un volume, l'équation de conservation locale  $\nabla \cdot u = 0$ . On obtient la conservation du flux sortant à travers n'importe quelle surface fermée

$$\oint u \cdot ds = 0,$$

prenant un volume "cylindrique" de la forme

$$[x_1, x_1 + dx_1] \times [x_2, x_2 + dx_2] \times [-h_0, \eta],$$

le flux sortant de la face

$$[x_1, x_1 + dx_1] \text{ et } (u_1 h) (x_1 + dx_1) dx_2,$$

car on suppose que  $u_1$  ne dépend pas de  $y$ , tandis que le flux sortant de la face opposée est

$$-(u_1 h) (x_1) dx_2,$$

laissant une contribution nette

$$\partial x_1 (h u_1) dx_1 dx_2.$$

Idem pour les deux faces verticales perpendiculaires, le flux sortant par la face haute du cylindre est

$$v dx_1 dx_2,$$

où  $v$  est la vitesse verticale au niveau de la surface, qui vaut  $\partial_t h$  dans notre approximation, on obtient ainsi

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (hu_i), \quad \text{avec } h = h_0 + \eta \text{ la profondeur totale.}$$

Par simplicité dans la suite on étudie exclusivement le problème unidimensionnel

$$\begin{aligned} u &= u_i \text{ et } x = x_j, i = 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} h_t + hu_x + uh_x = 0 \\ u_t + uu_x + gh_x = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Eau peu profondes avec dispersion

Dans la limite  $kh \rightarrow 0$ , (2.8) peut être développé comme

$$\omega^2 \sim ghk^2 \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} \right) k^2 h^2 + \dots \right\},$$

et, on a

$$c \sim (gh)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} \right) k^2 h^2 + \dots \right\}.$$

Lorsque la dispersion est complètement négligeable, les équations de la théorie non linéaire des eaux peu profondes sont hyperboliques et similaires à celles de la dynamique des gaz. La dispersion doit être au minimum afin que  $h$  soit choisi tel que

$$\frac{T_1}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} = 0, \text{ c'est } h = \left( \frac{3T}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.48.$$

## 2.4 Etudier les modèles de vague

### 2.4.1 Ondes gravitationnelles

La formule habituelle des ondes gravitationnelles

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad \lambda \gg \lambda_m.$$

Les vitesses de phase et de groupe

$$\begin{aligned} c(k) &= \left( \frac{g}{k} \tanh kh \right)^{\frac{1}{2}}, \\ C(k) &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} c(k) \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right), \end{aligned}$$

dans cette approximation, on a les cas limites

$$\omega \sim (gk)^{\frac{1}{2}}, \quad c \sim \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C \sim \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad kh \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

$$\omega \sim (gh)^{\frac{1}{2}}, \quad c \sim (gh)^{\frac{1}{2}}, \quad C \sim (gh)^{\frac{1}{2}}, \quad kh \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

### L'effet combiné de la gravité et de la tension superficielle

Lorsquae les deux effets sont importants, il suffit généralement de considérer des ondes relativement courtes,  $kh \gg 1$ , et de prendre

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3.$$

Les vitesses de phase et de groupe sont

$$c = \left(\frac{g}{k} + \frac{T}{\rho}k\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C = \frac{1}{2}c \frac{1 + (3T/\rho g)k^2}{1 + (T/\rho g)k^2},$$

la vitesse de phase a un minimum à  $k = k_m$ , où

$$k_m = \left(\frac{\rho g}{T}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_m = 1 + \frac{2\pi}{k_m} = 1.73cm,$$

les valeurs correspondantes de  $c$  et  $C$  sont égales à

$$c_m = 23.2cm/se.$$

### 2.4.2 Modèle de vague bidimensionnel

Nous étudions que le problème de l'onde de gravité en eau profonde, et nous utiliserons la relation de dispersion (2.14). Cette relation couvre le modèle produite par un objet de dimension  $l \gg \lambda_m$  se déplaçant sur une eau de profondeur  $h \gg l$ , c'est la solution habituelle pour les ondes de navire. Le résultat le plus frappant, dû à l'origine à Kelvin, est qu'en eau profonde les vagues sont confinées dans une région en forme de coin dont le demi-angle est  $\sin^{-1} \frac{1}{3} = 19.5^\circ$ . Ce résultat est indépendant de la vitesse, à condition que celle-ci soit constante, il est indépendant de la forme d'objet, et il ne dépend que du fait que  $C/c = \frac{1}{2}$  pour les eaux profondes.

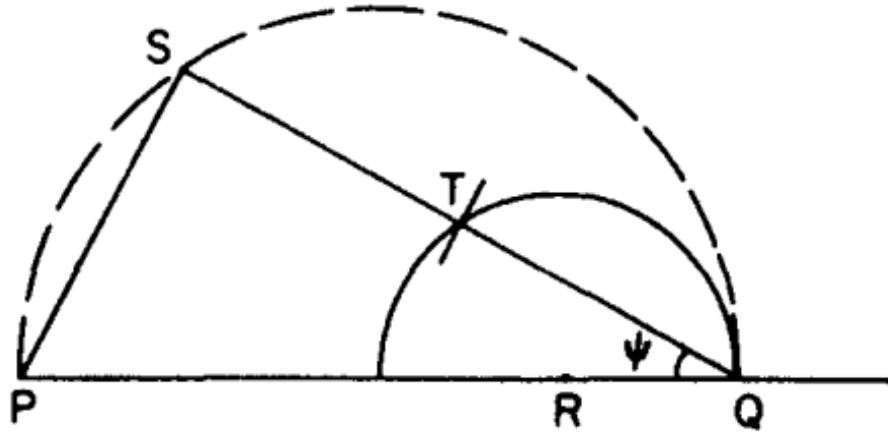


FIG. 2.3 – Construction d'éléments d'onde dans le problème d'onde de navire

Considérons le navire se déplaçant de  $Q$  à  $P$  sur la figure (2.3), en un temps  $t$ , et que sa vitesse soit de  $u$ . Pour qu'une crête de vague conserve une position stationnaire par rapport au navire.

$$U \cos \psi = c(k),$$

où  $\psi$  est l'inclinaison de la normale (direction de  $k$ ) à la ligne de mouvement  $QP$ .

### 2.4.3 Modèle des cercles

En faisant varier "t" pour un point fixe  $P$ , nous obtenons la configuration des cercles de la figure(2.4), d'après la construction de la figure (2.3), chaque cercle a un rayon égal à un tiers de la distance de son centre à  $P$ . Ils remplissent donc une région en forme de coin avec un demi-angle  $\sin^{-1} \frac{1}{3} = 19.5^\circ$ . Il est amusant de noter que la construction de la figure (2.4), est la même que celle de la figure (2.4) pour un écoulement supersonique avec un nombre de Mach de 3, tous les objets qui nagent ont un nombre de Mach effectif de 3.

### 2.4.4 Plus détails sur le modèle

La relation de dispersion entre  $\omega$  et  $k$  pour les ondes superposées à un flux  $u$  :

$$\omega = U \cdot k + \omega_0(k), \quad (2.16)$$

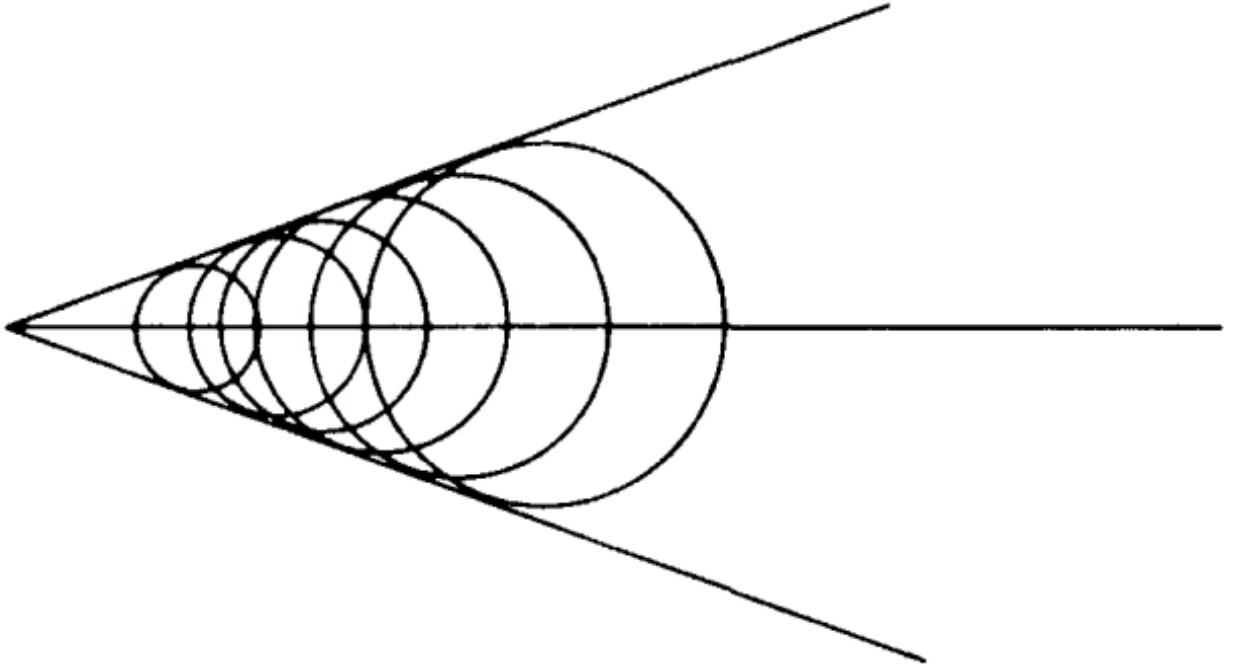


FIG. 2.4 – Enveloppe de la perturbation émise à des instants successifs

nombre vecteur  $k$ , avec  $\omega_0(k) = \sqrt{g/k}$  on a

$$G(k_1, k_2) = Uk_1 + \sqrt{gk} = 0. \quad (2.17)$$

On peut l'écrire en coordonnées polaires ( $k \cdot \psi$ )

$$\mathcal{G}(k, \psi) = Uk \cos \psi - \sqrt{gk} = 0, \quad (2.18)$$

comme la fréquence  $\omega$  est nulle, et  $k$  est indépendant de  $t$ , la description cinématique se réduit à la relation de cohérence

$$\frac{\partial k_2}{\partial x_1} - \frac{\partial k_1}{\partial x_2} = 0, \quad (2.19)$$

d'après (2.17),  $k_1 = f(k_2)$ , et (2.19) donné

$$\frac{\partial k_2}{\partial x_1} - f'(k_2) \frac{\partial k_2}{\partial x_2} = 0,$$

$k_1$  et  $k_2$  sont des constants sur les caractéristiques :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -f'(k_2).$$

Pour une source ponctuelle  $P$ , les caractéristiques véhiculant les perturbations passent par  $P$ , et nous avons onde centrée

$$\frac{x_2}{x_1} = -f'(k_2), \quad (2.20)$$

cela donne  $k_2$  en fonction de  $x_2/x_1$ , et  $k_1 = f(k_2)$  complète la solution pour  $k$ . La relation de base (2.20) peut s'écrire symétriquement en  $k_1$  et  $k_2$ . Si  $k_1 = f(x_2)$  vérifie (2.17) à l'identique :

$$f'(k_2) G_{k_1} + G_{k_2} = 0,$$

et (2.20) peut s'écrire

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{G_{k_2}(k_1, k_2)}{G_{k_1}(k_1, k_2)}, \quad G_{k_1}(k_1, k_2) = 0, \quad (2.21)$$

celles-ci doivent être résolues pour donner  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de  $x$ , la distribution de  $k$  est suffisante pour esquisser le modèle, on peut noter que (2.21) est la limite de la solution d'onde centrée non stationnaire lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . Pour la solution d'onde centrée, nous avons

$$\frac{x_i}{t} = C_i = -\frac{G_{k_0}}{G_\omega}, \quad G(k, \omega) = 0,$$

l'angle  $\mu$  de la figure (2.4) est donné par

$$\tan \mu = \frac{1}{k} \frac{\partial \mathcal{G} / \partial \psi}{\partial \mathcal{G} / \partial k}, \quad (2.22)$$

le contenu de (2.21) est alors équivalent à

$$\xi = \pi - \mu - \psi, \quad \mathcal{G}(k, \psi) = 0, \quad (2.23)$$

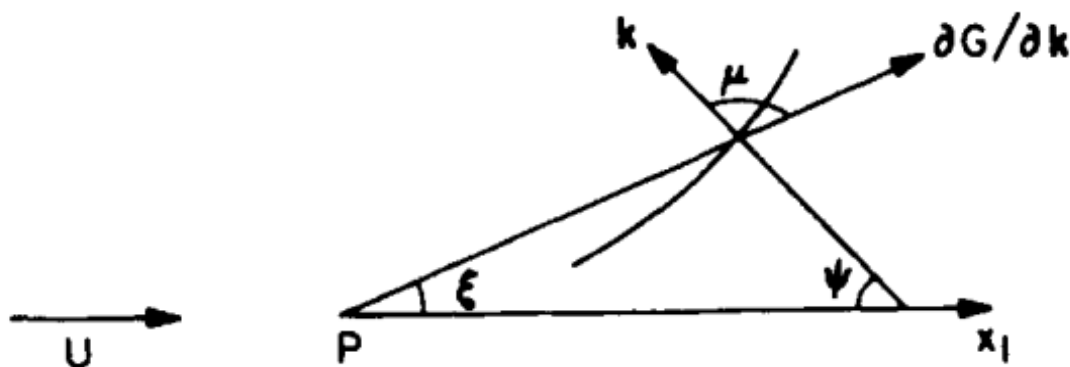


FIG. 2.5 – Géométrie des crêtes des vagues dans le problème des vagues des navires

En utilisant (2.17) dans (2.21), nous avons

$$\tan \xi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{k_2}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}}}{U + \frac{k_1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}}}, \quad U k_1 + \sqrt{gk} = 0.$$

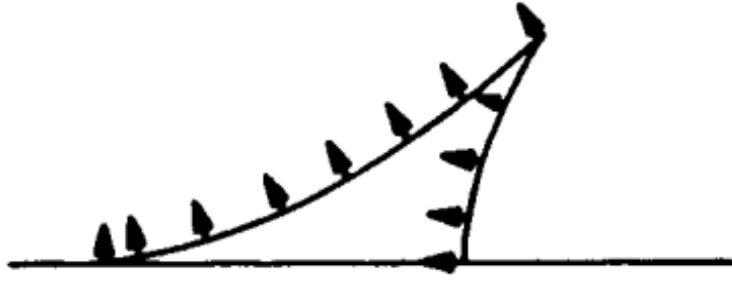


FIG. 2.6 – Une crête de vague complète dans un problème de vague de navire

Il est clairement plus pratique de passer à la description  $(k, \psi)$  de  $k$  et de les réduire à

$$\tan \xi = \frac{\tan \psi}{1 + 2 \tan \psi}, \quad k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \psi}, \quad (2.24)$$

si l'approche par (2.22) et (2.23) est préférée, on a

$$\tan \mu = -2 \tan \psi. \quad (2.25)$$

Nous pouvons maintenant esquisser une crête de vague typique lorsque  $\psi$  varie. D'après (2.17) ou (2.18),  $k_1 < 0$  et  $\cos \psi > 0$ , de sorte que seule la plage  $-\pi/2 < \psi < \pi/2$  est autorisée. Le modèle est clairement symétrique, et il suffit de prendre l'intervalle  $0 < \psi < \pi/2$ . D'après (2.24), on voit que les valeurs  $\psi \rightarrow 0$  et  $\psi \rightarrow \pi/2$ , se trouvent tous les deux sur  $\xi = 0$ , et il doit y avoir une valeur maximale de  $\xi$  dans la plage. On vérifie facilement que la valeur maximale est

$$\xi_m = \tan^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} = 19,5^\circ, \quad \text{à } \psi = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 35,3^\circ,$$

Cela correspond à l'angle du coin trouvé précédemment et montre que la vague est confinée à ce coin. Au maximum  $\psi \neq \pi/2$  la crête de l'onde ne peut donc pas se retourner en douceur, il doit y avoir une cuspide à  $\psi = \psi_m$  à la limite du coin. Nous pouvons alors compléter la forme comme indiqué sur la figure (2.6) et l'ensemble de la figure doit apparaître comme sur la figure (2.7). La formule de la fonction de phase  $\theta(x)$  : peut être trouvée à partir de

$$\theta = \int_0^x k dx,$$

en utilisant n'importe quel chemin convenable puisque  $k$  est irrotationnel, évidemment les rayons  $\xi = \text{constant}$  sont commodes puisque  $k$  reste constant sur eux. Nous avons

$$\theta = (k \cos \mu) r,$$

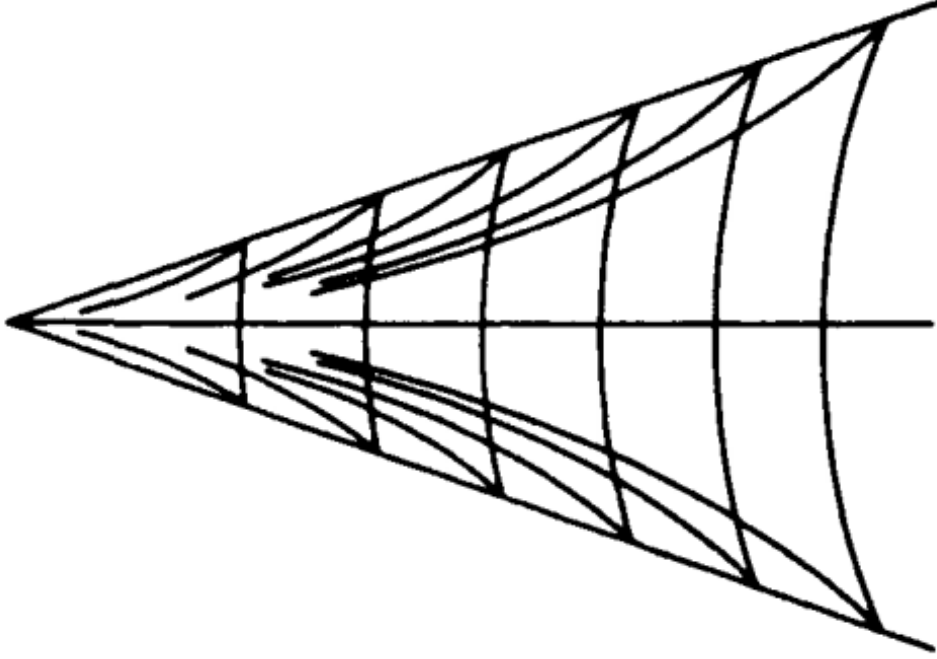


FIG. 2.7 – Forme final des vagues du navire

où  $r = |x|$  est la distance à l'origine,  $k$  et  $\mu$  sont des fonctions de  $\xi$  données par (2.24) et (2.25). Une courbe de phase  $\theta = \text{constant}$  est donné paramétriement en termes de  $\psi$  par

$$r = \frac{\theta}{k \cos \mu} = \frac{U^2 \theta}{g} \cos^2 \psi \{1 + 4 \tan^2 \psi\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tan \xi = \frac{\tan \psi}{1 + 2 \tan^2 \psi},$$

et  $\theta$  est négative. Ceux-ci peuvent également être écrits

$$x_1 = -\frac{U^2 \theta}{g} \cos \psi (1 + \sin^2 \psi),$$

$$x_2 = -\frac{U^2 \theta}{g} \cos^2 \psi \sin \psi.$$

## 2.4.5 Ondes dans un fluide en rotation

Les équations linéarisées sont

$$\begin{aligned} \frac{Du_1}{Dt} - 2\Omega u_2 &= -\frac{\partial P}{\partial x_1}, & \frac{Du_2}{Dt} - 2\Omega u_1 &= -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \\ \frac{Du_3}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_3}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

où

$$P = \frac{p - p_0}{\rho} - \frac{1}{2}\Omega^2 (x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3},$$

les perturbations de vitesse peuvent éliminées au profit de  $P$ , et de la seule équation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \nabla^2 P + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = 0, \quad (2.26)$$

où  $U = 0$ , l'équation réduite des perturbations périodique  $P = \mathcal{P}e^{-i\omega t}$  est

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_2^2} + \left( 1 + \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial x_3^2} = 0, \quad (2.27)$$

lorsque le flux  $U$  est inclus, la relation de dispersion pour (2.26) est

$$(\omega - Uk_3)^2 k^2 - 4\Omega^2 k_3^2 = 0,$$

les ondes ne sont possibles que lorsque  $(\omega - Uk_3)^2 < 4\Omega^2$ , cela vérifie avec la condition pour que (2.27) soit hyperbolique. On a deux modes satisfaisant

$$\omega = Uk_3 \pm \frac{2\Omega k_3}{k},$$

et la vitesse de groupe a des composantes

$$C_1 = \mp 2\Omega \frac{k_1 k_3}{k^3}, \quad C_2 = \mp 2\Omega \frac{k_2 k_3}{k^3}, \quad C_3 = U \pm 2\Omega \frac{k_1^2 + k_2^2}{k^3}.$$

Pour une source ponctuelle de fréquence constant  $\omega$  sur  $x_3$ , la distribution de  $k$  est déterminée à partir de

$$\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{C_3}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

quand  $U = 0$ , cela se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} &= \pm \frac{(k^2 - k_3^2)^{\frac{1}{2}}}{k_3}, \\ &= \pm \left( \frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

## 2.4.6 Ondes dans les fluides stratifiés

L'équation de continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

A ces équations s'ajoutent les équations de quantité de mouvement

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \rho - \rho g,$$

pour un écoulement bidimensionnel dans le plan  $(x \cdot y)$  avec stratification dans la direction  $y$ .

On prends les distributions non perturbées comme étant  $u = v = 0$ ,  $\rho = \rho_0(y)$ ,  $p = p_0(y)$ , avec

$$\frac{dp_0}{dy} + \rho_0 g = 0.$$

Les équations linéarisées sont

$$\begin{aligned} \rho_{1t} + v\rho_0' &= 0, & u_x + v_y &= 0, \\ \rho_0 u_t + p_{1x} &= 0, & \rho_0 v_t + p_{1y} + g\rho_1 &= 0. \end{aligned}$$

Une seule équation peut être déduit, en termes de fonction de flux  $\psi$  définie par :  $u = \psi_y$ ,  $v = -\psi_x$  est

$$\rho_0 \psi_{xxtt} + (\rho_0 \psi_{yt})_{yt} - g\rho_0' \psi_{xx} = 0,$$

Il est pratique pour le mouvement des vagues d'avoir une équation avec des dérivées paires seulement, ce qui peut être réalisé par la substitution  $\psi = \rho_0^{-\frac{1}{2}} \chi$ , pour donner

$$\chi_{xxtt} + \chi_{yytt} + \left( \frac{\rho_0'^2}{4\rho_0^2} - \frac{\rho_0''}{2\rho_0} \right) \chi_{tt} - \frac{g\rho_0'}{\rho_0} \chi_{xx} = 0.$$

Dans le cas particulier d'une distribution exponentielle  $\rho_0 \alpha e^{-\alpha y}$ , la relation de dispersion est la suivante :

$$\omega^2 \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \right) - \alpha g k_1^2 = 0, \quad (2.28)$$

dans beaucoup de cas, les longueurs d'onde intéressantes sont dans la gamme  $k \gg \alpha$ , et (2.28) est approché par

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 k_1^2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad \omega_0^2 = \alpha g = -\frac{g\rho_0'}{\rho_0}. \quad (2.29)$$

Une solution de (2.29) peut être prise

$$k_1 = k \cos \psi, \quad k_2 = -k \sin \psi,$$

où

$$\psi = \cos^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (2.30)$$

quelque soit la grandeur de  $k$ , les ondes ont toutes l'inclinaison fix  $\psi$ , avec l'axe  $x$ . La vitesse de groupe correspondante a des composantes :

$$C_1 = \frac{\omega_0 k_2^2}{k^3}, \quad C_2 = -\frac{\omega_0 k_1 k_2}{k_3},$$

puisque  $k \cdot C = 0$ , la vitesse de phase, et la vitesse de groupe sont orthogonales, la vitesse de groupe forme est à un angle  $\xi = \pi/2 - \psi$  par rapport à l'axe  $x$ . La direction de la vitesse de groupe détermine l'emplacement des ondes. Selon l'équation (2.30), cette direction est la même pour toutes les ondes, et forme un angle

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \psi = \sin^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}.$$

# Chapitre 3

## L'équation de Kortweg-de Vries

### 3.1 Introduction

Nous présentons d'abord un aperçu de l'histoire de l'équation de Kortweg-de Vries, puis une justification de cette équation, suivie de la présentation de la solution à un soliton.

#### 3.1.1 Historique de l'équation

Les premiers travaux sur l'équation de Kortweg-de Vries sont dus à John Scott Russel. Ingénieur naval supervisant des travaux sur l'Union Canal en 1834, il fut témoin de l'émergence d'une onde solitaire sur le canal suite à l'arrêt brusque d'un bateau tiré par des chevaux.

### 3.2 Justification de l'équation

On a la vitesse initiale

$$u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0} \geq 0, \quad h = h_0 + \eta \geq h_0,$$

la première des équations (2.13) s'écrit

$$h_t = \eta_t + u\eta_x + (h_0 + \eta)u_x = 0,$$

utilisant notre expression de la vitesse, et en particulier

$$u_x = \frac{g\eta_x}{\sqrt{g(h_0 + \eta)}},$$

nous pouvons omplètement éliminer  $u$ , et obtenir une équation du premier ordre pour  $\eta$  uniquement, décrivant la propagation de sroite à gauche :

$$\eta_t + \left[ 3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0} \right] \eta_x = 0. \quad (3.1)$$

Notons que celle équation est très similaire à l'équation des ondes de densité  $\rho_t + c\rho_x = 0$ , cette équation est la réduction des équations en eau peu profonde. Il reste à la simplifier en gardant l'effet non linéaire de dépendance de la célérité en fonction de l'implitude au plus bas ordre. Pour celà on développe la racine carrée pour  $\eta$  petit

$$3\sqrt{g(h_0 - \eta)} = 3\sqrt{gh_0} \left( 1 + \frac{\eta}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 3c_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{h_0} \right),$$

on obtient la formule simplifiée de l'équation (3.1) :

$$\eta_t + c_0 \left( 1 - \frac{3\eta}{2h_0} \right) \eta_x = 0. \quad (3.2)$$

Nous voulons maintenant modifier cette équation pour  $y$  introduire les effets de la dispersion à l'ordre le plus bas. La théorie linéaire prédit une célérité  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  très peu dépendante de la longueur d'onde. En fait la relation de dispersion est  $\omega = c_0k - \gamma k^3$ , valable pour  $k$  petit. Une équation linéaire décrivant un mouvement droite à gauche, avec cette loi de dispersion :

$$\eta_t + c_0\eta_x + \gamma\eta_{xxx} = 0, \quad (3.3)$$

où, on a  $\gamma = c_0h_0^2/6$ , ce qui veut dire que pour la vitesse de groupe,  $V_g = d\omega/dk = c_0(1 - (kh_0)^2/3)$ , le terme correcif est une très petite correction dispersive si,  $\lambda \gg h_0$ . Il est donc naturel de modifier l'équation linéaire simple  $\eta_t + c_0\eta_x = 0$ , en y ajoutant, d'une part, la petite correction non linéaire  $-(3c_0\eta\eta_x)/(2h_0)$  (petite si  $\eta/h_0 \ll 1$ ), et d'autre part, la petite correction dispersive  $\gamma\eta_{xxx}$ . On obtient ainsi par combinaison des équations (3.2) et (3.3) l'équation de Kortweg-de Vries :

$$\eta_t + c_0 \left( 1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \eta_x + \gamma\eta_{xxx} = 0. \quad (3.4)$$

### 3.3 Le soliton

On se limitera à trouver la solution de cette équation pour un unique soliton se propageant à une vitesse  $U$ . Nous allons voir que  $U$  peut être choix arbitrairement, mais que la hauteur

du soliton en dépend. On pose  $\eta = h_0 \xi(X)$ , avec  $X = x - Ut$ , on a donc

$$\begin{aligned}\eta_t &= -h_0 U \xi'(X) \\ \eta_x &= h_0 \xi'(X) \\ \eta_{xxx} &= h_0 \xi'''(X)\end{aligned}$$

ce qui nous donne, en reportant dans (3.4), avec  $\gamma = \frac{c_0}{6} h_0^2$  :

$$\frac{1}{6} h_0^2 \xi''' + \frac{3}{2} \xi \xi' - \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right) \xi' = 0,$$

en intégrant :

$$\frac{1}{6} h_0^2 \xi'' + \frac{3}{4} \xi^2 - \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right) \xi + G = 0,$$

où,  $G$  est une constante d'intégration. Puis en multipliant par  $\xi'$ , pour ensuite intégrer, et multiplier par 4 :

$$\frac{1}{3} h_0^2 \xi'^2 + \xi^3 - 2 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right) \xi^2 + 4G\xi + H = 0,$$

où,  $H$  est une deuxième constante d'intégration. On isole  $\xi' \left( = \frac{d\xi}{dX} \right)$  :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} h_0 \frac{d\xi}{dX} = \sqrt{2 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right) \xi^2 - 4G\xi - H - \xi^3},$$

on en déduit :

$$X = \int \frac{\frac{h_0}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right) \xi^2 - 4G\xi - H - \xi^3}} d\xi, \quad (3.5)$$

cette intégrale est une intégrale elliptique, elle définit  $\xi$  comme une fonction elliptique de  $X$ .

Posant  $\alpha = 2(U/c_0 - 1)$ , l'intégrale (3.4) devient :

$$X = \int \frac{h_0}{\xi \sqrt{3} (\alpha - \xi)} d\xi,$$

cette intégrale est élémentaire, et on peut inverser  $\xi = \xi(X)$  :

$$\xi = \alpha \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{3\alpha}{4h_0^2}} X \right) = \frac{\alpha}{\cosh^2 \sqrt{\frac{3\alpha}{4h_0^2}} X},$$

ce qui nous donne en revenant aux notations initiales :

$$\eta(x, t) = \frac{2h_0 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right)}{\cosh^2 \left[ \sqrt{\frac{3 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right)}{2h_0^2}} (x - Ut) \right]},$$

comme nous l'avions annoncé ceci représente une solution localisée, se déplaçant à la vitesse arbitraire  $U$ , mais dont la hauteur maximale  $\eta_0$  (obtenue quand  $x = Ut$ ) dépend de  $U$  selon la formule :

$$\eta_0 = 2h_0 \left( \frac{U}{c_0} - 1 \right).$$

Ci-dessous nous présentons l'image d'une collision de deux solitons, où l'on voit le plus grand rattraper le plus petit, une interaction se produire, et les deux solitons émerger inchangés. Ces propriétés suprenantes sont dues à l'intégrabilité de l'équation de Kortweg-de Vries, c'est à dire le fait qu'il existe une infinité de quantités conservées dans le mouvement, ce qui contraint les solitons à garder leurs propriétés individuelles.

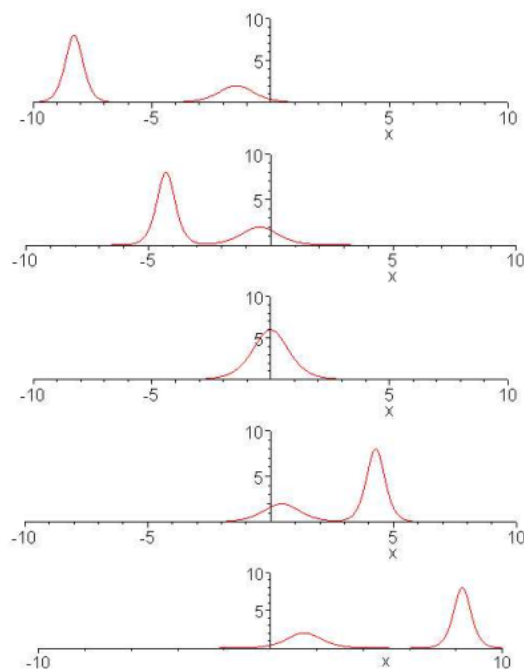


FIG. 3.1 – Propagation de deux solitons.

# Conclusion

Le travail présenté dans cette étude porte sur l'étude de la théorie des ondes des gravité à la surface d'une fluide, supposé non visqueux et incompressible.

On obtiendra les équations qui décrivent l'évolution de la surface libre, et qui forment un système couplé non linéaire tres compliqué.

Obtenant, nous avons mis ces équations linéairement, ce qui nous a permis d'abtenir des solutions ondulatoires. Le fait de cette propagation est dispersive, c'est à dire que la célérité des ondes dépende de leur longueur d'onde. En étudiant le profil d'un train d'onde, nous avons utilisé deux méthodes d'approximation, dont l'une est la méthode à phase stationnaire, et l'autre est une fonction d'Airy, que nous avons étudié est valable près du front d'onde.

Ensuite, nous avons étudié les aspects non linéaires à travers la théorie des eaux peu profondes.

Enfin l'équation de Korteweg-de Varies, contenant à l'ordre le plus bas, à la fois des termes dispersifs et des termes non linéaire, et qui se trouve etre "intégrable", ce qui nous a permis de trouver des solutions en utilisant avec soliton et nous nous sommes arrêtés au début de se sujet.

# Bibliographie

- [1] M. CARLIER, *Hydraulique générale et appliquée*. 3<sup>ème</sup> édition, Eyrolles, Paris, 1986.
- [2] Y. CENGEL, J. CIMBALA, *Fluid mechanics fundamentals and applications*. 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill, 2001.
- [3] E. CERPA, *Control of a Kortweg-de Vries equation : a tutorial*. Math. Control Relat. Fields (Accepted), 2013.
- [4] R. OUSIAUX, J. PERRIER, *Mécanique des fluides appliquée*. DUNOD, Paris, 1998.
- [5] M. TALON, *Ondes de surface*. LPTHE Université Paris VI-CNRS, 2006.
- [6] G. B. WHITHAM, *Linear and non linear waves*. Departement of applied Mathematics, California Institute of technology, Pasadena, California, 1999.
- [7] F. M. WHITE, *Fluid mechanics*. 4<sup>th</sup> edition, McGraw Hill, Inc. New York, 1999.