UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département De Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par

Ahmed GUECHI

Sujet

Propriétés des opérateurs faiblement compacts

Soutenu le : / /2012 **Devant le jury composé de**

Mr. Mostefa NADIR	**Prof**	**Université de M'Sila**	**Rapporteur**
Mr. Lemnoure ZADAM	**M.C**	**Université de M'Sila**	**Examinateurs**
Mr. Abed El-Kader GASMI	**M.C**	**Université de M'Sila**	**Examinateurs**

Promotion: 2011/2012


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Je tiens à remercier vivement le professeur Mostefa NADIR , pour avoir accepter de diriger ce travail, ainsi que pour sa gentillesse , son dévouement et ses conseils précieux .

Je remercie aussi le Maître Bachir GAGUI d'avoir accepter de diriger et aidant ce travail, je le remercie beaucoup pour ces remarques .

Ainsi qu'aux Maîtres des conférences Lemnoure ZADAM, et Abed El-Kader KASMI, pour avoir accepter de juger ce travail et faire partie du jury.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire, on étudiera les opérateurs compacts qui permettent la résolution des équations intégrales, et après cela on triatera les opérateurs faiblement compacts dans les espaces de Hilberte, au même temps étudiera dans les espaces réflexifs.

Le bût de ce travail est de trouver une relation entre les espaces réflexifs et la compacté faible, ainsi notre mémoire se compose en 3 chapitres :

Le premier chapitre Nous avons étudié les opérateurs compactes et de donner quelques définitions et propriétés relatives à ces opérateurs.

Le deuxième chapitre identifier la compacité faible et que par donner à la notion de convergence faible et certaines de ses propriétés dans l'espace de Hilbertien et la relation entre la convergence faible et les opérateurs compacts.

Le troisième chapitre en définir des espaces réflexifs et de donner quelques théories et les propriétés qui pointent entre ce dernier et la compacité faible.

Et donc de conclure notre travail en donnant quelques applications.

Résumé

Résumé

Dans ce mémoire, on traitera les structures des opérateurs faiblement compacts et les opérateurs compacts et cherche la relation qui lie les espaces réflexifs avec la compacité faible.

Mots clés :

Opérateur compact, Operateur faiblement compact, espace réflexif.

Abstract

In this Memoir, we discuss the structure of weakly compact operators and compact operators and Search relations that link the reflexive spaces with the weak compactness.

الملخص بالعربية

في هذه المذكرة عالجنا مفهوم المؤثرات ضعيفة التراص و المؤثرات المتراصـة و البحـث عـن العلاقـة بـين الفضـاءات الانعكاسـية و التـراص الضعيف.

Notations générales

E'	Espace dual de E
$\langle\ ,\ \rangle$	Produit scalaire dans la dualité E', E
$B_E = \{x \in E;\ \ \|x\| \leq 1\}$	La boule unite ouverte
$e.v$	Espace vectoriel
$\Bbbk$	Corps des scalaires ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires continus de$E$ dans F
$\mathcal{K}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires compacts de$E$ dans F
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert
$\mathcal{A}^*$	L'adjoint de l'opérateur $\mathcal{A}$
$\sigma(E, E')$	Topologie faible définie sur E
$\sigma(E', E)$	Topologie faible $*$ définie sur E'
$\mathcal{I}$	L'opérateur identité
$\mathcal{J}$	Injection canonique de E dans E''
L^p	Espace de Lebesgue
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues sur l'espace compact K
$W^{1,p}, W^{1,1}, W^{1,\infty}$	Espace de Sobolev

Rappel

Définition(espace de Hilbert)

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel. On appelle produit scalaire, on note $\langle .,. \rangle$ une forme bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive :

$$\forall u \in \mathcal{H} \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \ \text{ et } \ \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0.$$

On dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert s'il est muni un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et s'il est complet pour la norme associée au produit scalaire : $\forall u \in \mathcal{H} \ \ |u| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Définition(espace de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé (e.v+norm) et complet pour la distance déduite de la norme.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de E admet une sous-suite convergente.

Théorème (de Banach-Steinhaus)

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E, F)$. On supose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T_i(x) \mid i \in I\}$ est borné dans F.

Alors il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall i \in I \ ; \ \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M.$$

Théorème (de Hahn-Banach)

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{N}$ *une semi-norme définie sur* E. *Soit* f_0 *une fonctionnelle linéaire définie sur un sous espace vectoriel* F *de* E, *telle que*

$$f_0(x) \leq \mathcal{N}(x), \qquad \forall x \in F.$$

alors, il existe une fonctionnelle linéaire f, *défini sur* E *tout entier prolongeant la fonctionnelle* f_0 *et vérifiant sur l'espace* E *la condition*

$$f(x) \leq \mathcal{N}(x), \qquad \forall x \in E.$$

Chapitre 1

Opérateurs Compacts

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus.

1.1 Définitions et Propriétés

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des ensembles compacts.

Définition 1.1 ([9])

Soit E un espace topologique séparé. Un sous-ensemble F est dit compact si de tout recouvrement ouvert de F on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, toute famille $\{V_j, j \in J\}$, d'ensembles ouverts dont la réunion contient F admet une sous-famille finie :

$\{V_{j(k)}, j(k) \in J, k = 1, 2..., n\}$, *dont la réunion contient F.*

La définition suivante est plus commode lorsque E est un espace métrique, cas dans lequel nous nous plaçons dans la suite.

Définition 1.2

Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble G de E est compact si toute suite d'éléments de G, contient une sous-suite convergente vers un élément de G.

Définition 1.3

Soit (E, d) un espace métrique et G une partie de E.

*(a) On dit que E est **séquentiellement compact** si chaque suite de E a une sous-suite convergente vers un point de E.*

*(b) On dit que G est **précompacte** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et des points $x_1, ..., x_N \in E$ tels que G soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon)$, $i = 1, ..., N$.*

Théorème 1.4

Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est compact.

(ii) E est séquentiellement compact.

(iii) E est complet et précompact.

Proposition 1.5

Soit E un espace métrique et F un sous-ensemble de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(a) Le sous-ensemble F est compact.

(b) Le sous-ensemble F est complet et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments de $F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, tels que

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(v_j, \varepsilon)$$

où $B(v_j, \varepsilon)$ est la boule ouverte du centre v_j et du rayon ε.

La propriété (b) exprime le fait que tout élément v de F est à une distance inférieure à ε d'au moins un élément parmi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

De ce qui précède, on peut voir que tout ensemble compact est fermé, borné et complet. D'autre part, si E est de dimension finie, les sous-ensembles compacts de E sont exactement ceux qui sont fermés et bornés (théorème de Bolzano-Weierstrass), alors que dans un espace de dimension infinie, un sous-ensemble fermé et borné n'est pas nécessairement compact.

Définition 1.6 ([6])

Un sous-ensemble G de E est relativement compact si son adhérence $\overline{G}$ est compacte. Le sous-ensemble G est dit précompact si son complété est compact.

Evidemment, lorsque E est lui-même complet, les deux notions sont équivalentes.

1.2 Théorème (Arzelà-Ascoli)

Définition 1.7 ([12])

Etant donné un espace topologique (E, T) et un ensemble K de fonctions de E dans un espace métrique (F, d) on dit que :

i) K est équicontinu en un point $a \in E$ si, pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que, pour chaque $x \in V$ et chaque $f \in K$, on a $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$.

ii) K est équicontinu lorsque K est équicontinu en chaque point de E.

Exemple 1.8 ([12])

Tout ensemble fini de fonctions continues de E dans F est équicontinu.

Définition 1.9 ([6])

Un sous-ensemble G de l'espace normé E est relativement compact si la ferme $\overline{G}$ est compact.

Théorème 1.10 (Arzelà-Ascoli) *([6])*

Soit K un espace topologique compact. Un sous-ensemble G de $\mathcal{C}(K)$ est relativement compact si et seulement si, G est un borné et équicontinues.On dit que, s'il existe un constant M tel que

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in K \quad et \quad \forall f \in G.$$

De plus, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que ; $\forall f \in G$, on a

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x; y \in K \qquad avec\ \ |x - y| < \delta.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(K)$ désigner l'espace des fonctions définies et continues dans l'ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$, et muni de la norme maximum

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|\,.$$

Preuve. [12] Supposons tout d'abord que G soit un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{C}(K)$. Il est évident que G est borné.

Etablissons que G est équi-continu en un point $a \in K$. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un sous-ensemble fini $F = \{f_1, ..., f_n\}$ de G tel que, pour chaque $f \in G$, on a $d(f, F) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Les fonctions $f_1, ..., f_n$ étant continues au point a il existe un voisinage V de a tel que, pour chaque $x \in V$ et chaque entier $i = 1, ..., n$, on a $|f_i(a) - f_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $f \in G$. Notons $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\|f - f_i\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On a alors, pour chaque $x \in V$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a)| + |f_i(a) - f(a)| \leq 2\,\|f - f_i\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Réciproquement, nous supposons que G est un sous-ensemble borné et équi-continu de $\mathcal{C}(K)$. Nous allons établir que G est précompact, cela entraînera la conclusion voulue car tout sous-ensemble précompact d'un espace complet est relativement compact. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in K$ il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que, pour chaque $y \in V(x)$ et chaque $f \in G$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque K est compact il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, ..., x_N\}$ de K tel que $K = \bigcup_{i=1}^{N} V(x_i)$. Le sous-ensemble

$$X = \left\{ (y_1, ..., y_N) \in \Bbbk^N \, ; \, \exists f \in G \text{ tel que } (f(x_1), ..., f(x_N)) = (y_1, ..., y_N) \right\}$$

de $\Bbbk^N$ est borné donc précompact. Il existe donc $f_1, ..., f_M \in G$ tel que, pour chaque $f \in G$, on a

$$\min_{1 \leq m \leq M} \max_{1 \leq n \leq N} |f(x_n) - f_m(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nous allons montrer que, pour chaque $f \in G$, on a $d(f, \{f_1, ..., f_M\}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $f \in G$, fixons $1 \leq m \leq M$ tel que $\max_{1 \leq n \leq N} |f(x_n) - f_m(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x \in K$, il existe un entier n compris entre 1 et N tel que $x \in V(x_n)$. Nous pouvons alors écrire

$$|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_m(x_n)| + |f_m(x_n) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

d'où $\qquad \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$ ■

Application :

Soient m et M deux réels positifs. Le sous-ensemble G des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, dérivables sur $]0,1[$ qui vérifient $\|f\|_\infty \leq M$ et $\sup_{t \in]0,1[} |f'(t)| \leq m$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Remarque 1.11

La suite de fonctions sur $[0,1]$, $f_n(x) = n$ est bien "équi-uniformément continue", mais pas bornée. Il est bien clair qu'elle n'est pas relativement compacte.

Définition 1.12 (Opérateurs linéaires)

Soient E et F deux espace vectoriels sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'application $\mathcal{A}$ défini sur E dans F est une application linéaire ou un opérateur linéaire si

$\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk$, *on a* $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y)$.

Définition 1.13 (Opérateurs bornés) *([6])*

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ défini sur E dans F est dit borné s'il exsiste une canstante positive $C > 0$, telle que

$\|\mathcal{A}(x)\|_F \leq C \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Définition 1.14

Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite ***compacte,*** *ou* ***complément continu*** *si pour tout le sous-ensemble borné G de E, l'image $\mathcal{A}(G)$ est une partie relativement compacte de F.*

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite $(\mathcal{A}x_n)$ contient une sous-suite convergente.

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$

Théorème 1.15

Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E)$.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur compact dans E. L'image de la boule unité de E est un ensemble relativement compact, donc borné. Il existe, alors une constante $M > 0$, telle que

$$\|\mathcal{A}y\| \leq M, \forall y \in E, \|y\| \leq 1$$

On en déduit que

$$\|\mathcal{A}x\| \leq M \|x\|, \forall x \in E$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc continu et sa norme est majorée par M est parfois un moyen bien pratique pour calcule les applications tangentes. ■

Théorème 1.16 ([6])

La combinaison linéaire $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}_1 + \beta\mathcal{A}_2$ des deux opérateurs compacts $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est un opérateur compact, pour tout α et β scalaires.

Preuve. Soit φ_n est une suite borné dans E et soit $\mathcal{A}\varphi_n$ est une suite dans F, alors

$$\mathcal{A}\varphi_n(x) = \alpha\mathcal{A}_1\varphi_n(x) + \beta\mathcal{A}_2\varphi_n(x) \quad \text{, avec } \varphi_n \in E,\, n \in \mathbb{N}.$$

Les opérateurs $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont compacts, on peut extraire de $\mathcal{A}_1\varphi_n$ et $\mathcal{A}_2\varphi_n$ deux sous suites convergences Donnant par leur somme une sous suite de $\mathcal{A}\varphi_n$ convergente. donc $\mathcal{A}$ est compacte. ■

Théorème 1.17

Le produit $\mathcal{AB}$ des deux opérateurs bornés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est compact si l'un des deux opérateurs $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est compact.

Preuve. Soit φ_n est une suite borné de E, alors si $\mathcal{B}$ est un opérateur borné, la suite $\mathcal{B}\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et la compacité de l'opérateur $\mathcal{A}$ donné une sous suite $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_{n_{(k)}}(x))$ de $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_n(x))$ converge dans E. Donc la compacité de $\mathcal{AB}$.

D'autre part, si $\mathcal{B}$ est un opérateur compact, on peut extraire de $\mathcal{B}\varphi_n(x)$ une sous suite $\mathcal{B}\varphi_{n_{(k)}}(x)$ converge dans E, et l'opérateur borné $\mathcal{A}$ donne la suite $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_{n_{(k)}}(x))$ est converge. Donc la compacité de $\mathcal{AB}$. ■

Théorème 1.18

Un suite $\mathcal{A}_n$ d'opérateur compact défini de l'espace normé E dans un espace Banach F et qui converge uniformément à un opérateur $\mathcal{A}$, dites

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| = 0.$$

alors l'opérateur de la limite $\mathcal{A}$ est compact.

Preuve. Soit φ_n est une sous suite bornée dans E, l'opérateur $\mathcal{A}_1$ est compact, alors on peut extraire de la suite $\mathcal{A}_1\varphi_n$ une sous suite convergente, on dit que φ_n^1 une sous suite de φ_n tel que $\mathcal{A}_1\varphi_n^1$ converge.

De la même façon, on dit que φ_n^2 une sous suite de φ_n^1 tel que $\mathcal{A}_2\varphi_n^2$ converge.

Noter que, nous obtenons de la suite bornée φ_n une sous suite φ_n^2 telle que $\mathcal{A}_1\varphi_n^2$ et $\mathcal{A}_2\varphi_n^2$ les deux convergent.

Continuons dans ce chemin, pour les opérateurs compacts $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_p, ...$, il existe une sous suites

$$... \subset \varphi_n^p \subset ...\varphi_n^2 \subset \varphi_n^1 \subset \varphi_n,$$

tel que la suite $\mathcal{A}_k \varphi_n^p$ converge pour tout $k = 1, 2, ...p$.

Pour le caractère compact de la limite de l'opérateur $\mathcal{A}$, nous utilisons le complétée de l'espace F et montrer que la suite $\mathcal{A}\varphi_n^p$ est suite du Cauchy.

la suite φ_n est bornée, donc $\|\varphi_n\| \leq M$ pour tout n. D'où $\|\varphi_n^p\| \leq M$ pour tout n, p. Choisissez $n = p$ afin que

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Depuis la suite $\mathcal{A}\varphi_n^p$ est de Cauchy, parce qu'il converge il y a N tel que pour tout $p > N$ et $q > N$, nous obtenons

$$\|\mathcal{A}_n \varphi_n^p - \mathcal{A}_n \varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

d'où nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\varphi_n^p - \mathcal{A}\varphi_n^q\| &\leq \|\mathcal{A}\varphi_n^p - \mathcal{A}_n\varphi_n^p\| + \|\mathcal{A}_n\varphi_n^p - \mathcal{A}\varphi_n^q\| + \|\mathcal{A}_n\varphi_n^q - \mathcal{A}\varphi_n^q\| \\
&\leq \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \, \|\varphi_n^p\| + \|\mathcal{A}_n\varphi_n^p - \mathcal{A}\varphi_n^q\| + \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \, \|\varphi_n^q\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Se souvenir que, dû à l'état complet de l'espace F, les suites Cauchy $\mathcal{A}\varphi_n^p$ converge comme une sous suite de $\mathcal{A}\varphi_n$ où φ_n^p est une sous suite d'une suite bornée arbitraire φ_n. D'où le caractère compact de l'opérateur $\mathcal{A}$. ■

Définition 1.19

On dit que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ *est un opérateur de* ***rang fini*** *si* $\dim \mathcal{A}(E) < \infty$.

Exemple 1.20 *Prenons pour* $\mathcal{H}$ *l'espace* L^2*, avec la mesure de Lebesgue sur* $[0, \pi]$ *. L'opérateur* $\mathcal{A}$ *défini par :*

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \int_0^\pi \cos(t - s)\varphi(s) ds$$

est de rang fini. En effet, $\mathcal{A}$ est manifestement linéaire et continu. En suite

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \cos(t)\int_0^\pi \cos(s)\varphi(s)ds + \sin(t)\int_0^\pi \sin(s)\varphi(s)ds$$

Donc $(\mathcal{A}\varphi)$ est la forme $\lambda\cos t + \mu\sin t$, où λ et μ sont deux éléments linéairement de L^2. Car la condition

$$\|a\cos t + b\sin t\| = 0 \qquad ou \qquad \int_0^\pi |a\cos t + b\sin t|\, dt = 0$$

S'écrit $|a|^2 + |b|^2 = 0$, On entraine bien $a = 0$, $b = 0$. Donc l'image par $\mathcal{A}$ de L^2 est un espace vectoriel E de dimension 2, rapporté à une base contituée par les deux fonction $\cos t$, $\sin t$.

Proposition 1.21 ([6])

Un opérateur de rang fini est compact.

Preuve. En effet, pour tout ensemble borné G dans E, le rang $\mathcal{A}(G)$ est un ensemble borné dans l'espace **rang de dimension finie** $\mathcal{A}(E)$. Donc $\mathcal{A}(G)$ est relativement compact, alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est compact. ■

Proposition 1.22 ([6])

Soit $\mathcal{A}$ est un opérateur borné défini de E dans F avec le domaine E admetant une dimension finie $\dim E < \infty$, alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est compact.

Preuve. En effet, on a l'espace E de dimension finie $\dim E < \infty$ implique que la dimension du rang $\mathcal{A}(E)$ est fini, on dit

$$\dim \mathcal{A}(E) < \dim E < \infty,$$

Donc cet opérateur $\mathcal{A}$ est un compact. ■

Lemme 1.23 ([6])

Soit G un sous espace dans l'espace normé E tel que $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi_1 \in E$ avec $\|\varphi_1\| = 1$, tel que pour tout $\psi \in G$ on a

$$\|\varphi - \psi\| \geq \alpha \quad \textit{avec} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Preuve. Soit f un élément de E tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{h \in E} \|f - h\| = \beta > 0$$

choisissons un élément $g \in G$ tel que,

$$\beta \leq \|f - g\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

Soit φ l'élément donné par

$$\varphi = \frac{f - g}{\|f - g\|}$$

alors l'élément φ est de norme égale à un ($\|\varphi\| = 1$) ; de plus, pour tout $\psi \in G$ on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \psi\| &= \left\| \frac{f - g}{\|f - g\|} - \psi \right\| \\
&= \frac{1}{\|f - g\|} \|f - [g + (\|f - g\| \psi)]\| \qquad (g + (\|f - g\| \psi) \in G) \\
&\geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \\
&\geq \alpha \qquad\qquad 0 < \alpha < 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 1.24 ([6])

L'opérateur identité $\mathcal{I}$ défini d'un espace normé E dans E est compact si et seulement si la dimension d'espace E est fini.

Preuve. Soit $\varphi_1 \in E$ tel que, $\|\varphi_1\| = 1$ alors $G_1 = span\{\varphi_1\}$. (l'espace engendré par φ_1) est un sous espace fermé car G_1 est de dimention finie, d'après le lemme précédent, il existe un élément $\varphi_2 \in E$ tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \geq \frac{2}{3}$, on reprand la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| \geq \frac{2}{3}$, pour tout $n \neq m$.

Cette suite est bornée mais ne contient une sous suite convergente, et $\{\varphi_n\}$ est l'image propre de φ_n par l'identique $\mathcal{I}_E$ ce qui implique que $\mathcal{I}_E$ n'est pas compact.

Et on a déjà démontré que si E est de dimension finie tout opérateur linéaire borné de E dans lui même est compact, alors l'identique est compact. ■

Corollaire 1.25 ([6])

La boule unité fermée $B(0,1)$ dans l'espace normé E n'est pas compact si E est de dimension infinie.

En effet, $B(0,1)$ est bornée mais n'est pas compacte, ainsi

$$\mathcal{I}(B(0,1)) = B(0,1) = \overline{B(0,1)}.$$

n'est pas relativement compact. Donc $B(0,1)$ n'est pas compact.

Corollaire 1.26 ([6])

Un opérateur borné $\mathcal{A}$ d'un espace normé E n'est pas généralement un opérateur compact.

En effet, vois l'opérateur identité $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ dans l'espace normé de dimension infinie. Donc $\mathcal{A}$ n'est pas compact.

Chapitre 2

Opérateurs Faiblement Compacts

2.1 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

L'un des problèmes de base que l'on rencontre dans les espaces de Hilbert de dimension infinie comme l'espace L^2 des fonctions de carré sommable est que les ensembles bornés sont très loin d'être d'adhérence compacte. À titre d'exemple, considérons la boule unité d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie $\mathcal{H}$, et une base hilbertienne $(e_j)_{j\in N}$ de $\mathcal{H}$. D'après la formule de Parseval, pour tout élément x de $\mathcal{H}$, la suite $\langle x, e_j\rangle_{j\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable.

Donc son terme général tend vers 0. Donc si la suite $(e_j)_{j\in N}$ admet une valeur d'adhérence, ce ne peut-être que 0. Or $\|e_j\| = 1$ pour tout j. Donc 0 ne saurait être valeur d'adhérence d'une telle suite. Cette constatation motive la définition suivante$\rightharpoonup$

Définition 2.1 ([3])

Soient $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x un élément de $\mathcal{H}$. On dit que la $(x_n)_{n\in N}$ converge faiblement vers x si :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \lim_{n\to\infty} \langle h, x_n\rangle = \langle h, x\rangle .$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 2.2

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'unicité de la limite faible.

Dans le théorème suivant, on donné quelques conséquences de la propriété de convergence faible.

Théorème 2.3

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x, y deux éléments de $\mathcal{H}$. On a alors :

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et } \|x\| \leq \liminf \|x_n\| . \tag{0.1}$$

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x. \tag{0.2}$$

$$x_n \rightharpoonup x \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{0.3}$$

$$(x_n \longrightarrow x \quad et \quad y_n \rightharpoonup y\ ) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \tag{0.4}$$

Preuve. La preuve du premier point du théorème découle du théorème de Banach-Steinhaus.

En effet, notons T_n l'application définie sur $\mathcal{H}$ par $T_n(h) = \langle h, x_n\rangle$. Il s'agit clairement d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. Par ailleurs, pour h fixé, la suite de terme général $(T_n)(h)$ est convergente. En conséquence, le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que l'application linéaire limite $T : h \mapsto \langle h, x\rangle$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{\mathcal{H}'} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{H}'} .$$

Mais, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, on a $\|T\|_{\mathcal{H}'} = \|x\|_{\mathcal{H}}$ et $\|T_n\|_{\mathcal{H}'} = \|x_n\|_{\mathcal{H}}$, ce qui achève la démonstration de la première propriété.

Le deuxième point résulte simplement du fait que

$$|\langle h, x_n\rangle - \langle h, x\rangle| \leq \|h\| \, \|x_n - x\|$$

Pour le troisième point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, x_n\rangle + \|x\|^2$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2 \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,\langle x, x_n\rangle = -2\,\|x\|^2$$

Cela assure (0.3).

La démonstration de la dernière propriété est très simple. Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\,\|y_n\| + |\langle x, y_n - y\rangle| \end{aligned}$$

Le théorème précédent affirme que la $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq C\,\|x_n - x\| + |\langle x, y_n - y\rangle|\,,$$

d'où la proposition. ■

Proposition 2.4

En dimension finie, la convergence faible est équivalente a la convergence forte.

Preuve. D'après le théorème précédent, la convergence forte entraîne toujours la convergence faible. Réciproquement, supposons que l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ soit de dimension finie et donnons nous une base orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ de $\mathcal{H}$, et une suite faiblement convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit x sa limite faible. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i, x_n - x\rangle|^2$$

Par convergence faible, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_i, x_n - x\rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., p\}$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Donnons un autre cas où les notions de convergence forte et faible se rejoignent. ■

Théorème 2.5 (Eberlein-Šmulian) *([2])*

*Soient l'espace normé E, et G sous ensemble de E, on dit que G est **relativement faiblement compact** (resp. **faiblement compact**) si et seulement si toute suite de G contient une sous-suite converge vers un élément de E (resp. vers un élément de G)*

2.2 Adjoint d'un opérateur

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire de $\mathbb{C}^d$ dans lui même, qu'on étudie généralement en L^2.

Théorème 2.6 ([11])

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Alors il existe un unique opérateur $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \forall y \in \mathcal{H}',\ < \mathcal{A}x, y >_{\mathcal{H}'} = < x, \mathcal{A}^* y >_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}^*$ s'appelle l'adjoint de $\mathcal{A}$.

Définition 2.7

*Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ est tel que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, on dit que l'opérateur $\mathcal{A}$ est **autoadjoint** (ou **hermitien**).*

Théorème 2.8 (Propriétés de l'adjoint)

***1)** Pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, on a*

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A} \quad et \quad |||\mathcal{A}^*||| = |||\mathcal{A}|||^{1}.$$

[1] *La norme de $\mathcal{A}$: $|||\mathcal{A}||| = \sup_{||x||_{\mathcal{H} \leq 1}} ||\mathcal{A}x||_{\mathcal{H}'}$*

2) Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, alors

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{B}^*.$$

3) Pour tout $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et tout, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda \mathcal{A}_1 + \mu \mathcal{A}_2)^* = \overline{\lambda} \mathcal{A}_1^* + \overline{\mu} \mathcal{A}_2^*.$$

Définition 2.9

On appelle topologie faible sur E (notée $\sigma(E, E')$) la topologie la moins ne rendant continues toutes les formes linéaires de E'.

Bases de voisinages pour la topologie faible : Tout voisinage de $x_0 \in E$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ contient un ouvert du type

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{x \in E \ / \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \alpha_i\}$$

avec $\alpha_i > 0$ et $f_i \in E$.

Définition 2.10

Nous sommes maintenant prêts à prouver qu'un ensemble est ***relativement faiblement compact*** *si et seulement si pour tout suite de l'ensemble contient une sous-suite faiblement convergent.*

Définition 2.11 ([3])

On dit qu'une application linéaire $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est ***faiblement continue*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$, on a $x_n \rightharpoonup x$ implique $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.*

La définition de l'adjoint va nous permettre de montrer que pour les applications linéaires, la continuité faible est équivalente à la continuité forte.

Proposition 2.12

Une application linéaire est continue si et seulement si elle est faiblement continue.

Preuve. Soit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$ telle que $x_n \rightharpoonup x$. On a donc pour tout $y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle T(x_n), y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x_n, T^*(y)\rangle_{\mathcal{H}_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, T^*(y)\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle T(x), y\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Donc T est faiblement continue.

Réciproquement, supposons T faiblement continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}_1$ telle que $\langle x_n, T(x_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\langle x, y\rangle$ dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Alors on a aussi $x_n \rightharpoonup x$ et donc $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Mais par hypothèse $T(x_n) \to y$, et donc a fortiori $T(x_n) \rightharpoonup y$: Par unicité de la limite faible, on en déduit que $y = T(x)$. En conséquence, le graphe de T est fermé. Comme $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont complets, le théorème du graphe fermé permet de conclure que l'opérateur T est continu. ■

Examinons maintenant l'effet d'un opérateur compact sur la convergence faible.

Proposition 2.13

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur continu de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) L'opérateur $\mathcal{A}$ est compact.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$, on a

$$(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (\mathcal{A}(x_n) \to \mathcal{A}(x)).$$

Preuve. Supposons d'abord que $\mathcal{A}$ soit compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$ une suite faiblement convergente vers $x \in \mathcal{H}_1$. Un opérateur compact étant continu, on a $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ d'après la proposition précédente. Mais toute suite faiblement convergente est bornée. Donc $(\mathcal{A}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite fortement convergente. La limite de cette sous-suite ne peut être que $\mathcal{A}(x)$. Finalement $(\mathcal{A}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est a valeurs dans le compact $\overline{\mathcal{A}(\overline{B}_{\mathcal{H}_1})}$ et a pour unique valeur d'adhérence $\mathcal{A}(x)$. Donc la suite toute entière converge fortement vers $\mathcal{A}(x)$.

Réciproquement supposons que la propriété (ii) soit vérifiée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une quelconque suite bornée de $\mathcal{H}_1$. Alors il existe $x \in \mathcal{H}_1$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$. D'après l'hypothèse, on a donc $\mathcal{A}(x_{\varphi(n)}) \to \mathcal{A}(x)$. En conséquence, l'opérateur $\mathcal{A}$ est compact. ■

Théorème 2.14

Si $T_n \rightharpoonup T$, alors $T_n^* \rightharpoonup T^*$.

Preuve. On suppose que l'opérateur T_n est faiblement converge vers T donc :

$$\begin{aligned}\langle (T_n - T)x, y\rangle \to 0 \Longrightarrow \langle (T_n^* - T^*)x, y\rangle &= \langle x, y(T_n - T)\rangle \\ &= \overline{\langle (T_n - T)y, x\rangle} \to 0.\end{aligned}$$

Donc l'opérateur T_n^* est faiblement converge vers T^*. ∎

Proposition 2.15

Soit T une application linéaire continue de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.

Preuve. Supposons que $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ soit compact. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente d'éléments de $\mathcal{H}_2$. Notons y sa limite faible. Comme T^* est faiblement continu car linéaire continu, on a $T^*(y_n) \rightharpoonup T^*(y)$. Donc, par compacité de T, on a aussi $T(T^*(y_n)) \to T(T^*(y))$. Par ailleurs,

$$\|T^*(y_n)\|^2_{\mathcal{H}_1} = \langle T^*(y_n), T^*(y_n)\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y_n, T(T^*(y_n))\rangle_{\mathcal{H}_2} \to \langle y, T(T^*(y))\rangle_{\mathcal{H}_2} = \|T(y)\|^2_{\mathcal{H}_1}$$

car $y_n \rightharpoonup y$ et $T(T^*(y_n)) \to T(T^*(y))$.

On a donc à la fois $\|T(y_n)\|_{\mathcal{H}_1} \to \|T(y)\|_{\mathcal{H}_1}$ et $T^*(y_n) \rightharpoonup T^*(y)$, ce qui entraîne $T^*(y_n) \to T^*(y)$. Donc T est compact.

La réciproque, se démontre en appliquant le raisonnement précédent à T et en utilisant le fait que $(T^*)^* = T$. ∎

Théorème 2.16 ([2])

Pour un opérateur $T : E \to F$ entre deux vecteur du espace norme les déclarations suivantes sont équivalentes :

(1) T est norme continue, i.e., $\|x_n\| \to 0$ impliquent $\|Tx_n\| \to 0$.

(2) T est continu faiblement, i.e.,$x_\alpha \rightharpoonup 0$ implique $Tx_\alpha \rightharpoonup 0$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x_\alpha \rightharpoonup 0$ dans E, et soit $y' \in Y'$. Depuis que T est norme continu, $T'y' \in E'$, et donc la relation

$\langle Tx_\alpha, y' \rangle = \langle x_\alpha, T'y' \rangle \to 0$

spectacles qui $Tx_\alpha \rightharpoonup 0$ vérifie dans F.

(2) $\Rightarrow$ (1) suppose que T n'est pas norme continue. Alors, il existe une suite $\{x_n\} \subseteq E$ de vecteurs de l'unité tel que $\|Tx_n\| \geq n^2$ pour tout n. De $\left\|\frac{1}{n}x_n\right\| = \frac{1}{n} \to 0$ et notre hypothèse, elle suite que $\frac{1}{n}Tx_n \rightharpoonup 0$ dans F. En particulier, la suite $\left\{\frac{1}{n}Tx_n\right\}$ est borné faiblement dans F, et d'où norme a borné la suite. Cependant, le dernier contredit l'inégalité $\left\|\frac{1}{n}Tx_n\right\| \geq n$, et donc T est norme continue.

Soit $T : E \to F$ est opérateur entre deux espaces Banach. Alors, T est dit pour être compact faiblement toutes les fois que T porte la balle de l'unité fermée de E à un sous-ensemble relative faiblement compac**t** de F. Donc, d'après le Théorème Eberlein-Smulian, T est compact faiblement si et seulement si pour chaque norme a borné la suite $\{x_n\}$ de E la suite $\{Tx_n\}$ a une sous-suite faiblement convergent dans F. ■

Clairement, chaque opérateur compact est faiblement compact. Aussi, ce devrait être clair que chaque l'opérateur faiblement compact est continu.

Proposition 2.17

Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(E, F)$ alors si (x_n) est une suite de E convergeant faiblement vers x, Tx_n converge fortement dans F vers Tx.

Preuve. Comme (x_n) est bornée et T est compact, Tx_n prend ses valeurs dans un compact (fort) de F. Comme par ailleurs Tx_n converge faiblement vers Tx on en déduit que Tx est l'unique valeur d'adhérence forte de la suite (Tx_n) et donc que toute la suite converge fortement vers Tx. ■

Les opérateurs de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) sont évidemment compacts et donc les limites dans $\mathcal{L}(E, F)$ d'opérateurs de rang fini sont des opérateurs compacts. Réciproquement, il n'est pas vrai en général qu'un opérateur compact soit limite d'opérateurs de rang fini (mais cette propriété est vraie dans les espaces de Hilbert)

Théorème 2.18 (Gantmacher)

Si $T : E \to F$ est un opérateur continu entre les espaces de Banach, alors les déclarations suivantes sont équivalentes :

(1) L'opérateur T est faiblement compact.

(2) Le rang du double adjoint opérateur $T'' : E'' \to F''$ est inclus dans F, i.e.,

$$T''(E'') \subseteq F.$$

(3) L'opérateur $T' : (F', w^*) \to (E', w)$ est continu.

(4) L'opérateur T' est faiblement compact.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit U et U'' dénoter les boules unités fermées de E et E'', respectivement. Si $\overline{U}$ dénote la w^*-fermeture de U dans E'', alors nous avons $\overline{U} = U''$. Prendre en considération qui $T'' : (E'', w^*) \to (F'', w^*)$ est continu et que (par hypothèse) la w^*-fermeture de $T(U)$ dans F'' se trouve dans F, on dit que

$$T''(U'') = T''(\overline{U}) \subseteq \overline{T''(U)} = \overline{T(U)} \subseteq F.$$

Par conséquent, $T''(U'') \subseteq F$ détient.

(2) $\Rightarrow$ (3) supposons que $y'_\alpha \overset{w^*}{\to} 0$ dans F', et soit $x'' \in E''$. Par notre hypothèse nous avons $T''x'' \in F$, et donc

$\langle T'y'_\alpha, x''\rangle = \langle y'_\alpha, T''x''\rangle \to 0.$

Par conséquent, $T'y'_\alpha \rightharpoonup 0$ est dans le E'.

(3) $\Rightarrow$ (4) Soit V dénoter la boule unité fermée de Y'. Nous savons que V est w^*-compact. Par conséquent, $T(V)$ est un faiblement sous-ensemble compact de X', et donc T' est un opérateur faiblement compact.

(4) $\Rightarrow$ (1) des implications établies précitées, il suit immédiatement que

$T'' : (E'', w^*) \to (F'', w)$ est continue. Ainsi, $T''(U'')$ est un sous-ensemble faiblement compact de F''. D'autre part, puisque F est la norme fermée dans F'', nous voyons que F est aussi faiblement fermé dans F'', et d'où $T''(U'') \cap F$ est une partie faiblement compacte de F. compte tenu de $\sigma(F'', F') \subseteq \sigma(F'', F''')$, elle suite que $T''(U'') \cap F$

est aussi $\sigma(F'', F')$-compacte. Maintenant à partir $T(U) = T''(U) \subseteq T''(U'') \cap F$ et le fait que $\sigma(F'', F')$ et $\sigma(F, F')$ d'accord sur F, elle suite que $T(U)$ est un sous-ensemble relativement faiblement compact de F. C'est, T est un opérateur faiblement compact, et la preuve du théorème est terminé. ■

Corollaire 2.19

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathcal{H}$. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.

Proposition 2.20

Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) L'opérateur T est compact.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$, on a $(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (T(x_n) \to T(x))$.

Preuve. Supposons d'abord que T soit compact. Soit $(x_n) \in \mathcal{H}_1$ une suite faiblement convergente vers $x \in \mathcal{H}_1$. Un opérateur compact étant continu, on a $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ d'après la proposition précédente. Mais toute suite faiblement convergente est bornée. Donc $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite fortement convergente. La limite de cette sous-suite ne peut être que $T(x)$. Finalement $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est a valeurs dans le compact $\overline{T(B_{\mathcal{H}_1})}$ et a pour unique valeur d'adhérence $T(x)$. Donc la suite toute entière converge fortement vers $T(x)$.

Réciproquement supposons que la propriété (ii) soit vérifiée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une quelconque suite bornée de $\mathcal{H}_1$. Alors il existe $x \in \mathcal{H}_1$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$. D'après l'hypothèse, on a donc $T(x_{\varphi(n)}) \to T(x)$. En conséquence, l'opérateur T est compact. ■

Chapitre 3

Espaces réflexifs

3.1 Espaces duals

Définition 3.1 *[4]*

Si E est un espace vectoriel réel ou complexe, on appelle dual algébrique de E et l'on note E^* l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires (continues ou discontinues) sur E.

On appelle dual topologique et l'on note E' le sous-espace de E^* constitué des formes linéaires continues sur E. c'est-à-dire $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Il est muni de la norme

$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} f(x) = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} f(x) = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_E}$.

Noter que E' est normé (espace d'applications linéaires) et complet, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Noter aussi qu'une forme linéaire f appartient à E' si et seulement si sa norme $\|f\|$ est finie.

Corollaire 3.2 (I) *([3])*

Soit E un e.v.n. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|_E = \sup_{L \in E',\ \|L\|_{E'} = 1} |L(x)|,$$

et le sup *est atteint.*

Proposition 3.3 (II)

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ au sens de la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si chaque suite $(\varphi_i(x_n))$converge vers $\varphi_i(x)$.

Proposition 3.4

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :

(i) $x_n \rightharpoonup x$ ssi $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$.

(ii) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) $\varphi_n \to \varphi$ dans E' et $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

Preuve. La première propriété résulte de la proposition(II).

Le deuxième point est également immédiat : si $x_n \to x$ alors pour toute fonction f continue, on a $f(x_n) \to f(x)$. On a donc a fortiori $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$.

Démontrons (iii). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_n : \begin{cases} E' \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \varphi(x_n) \end{cases}$$

Toutes les applications T_n sont linéaires et continues sur E'. De plus, par hypothèse, pour tout $\varphi \in E'$, la suite $(T_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(T_n)_{n\in N}$ est donc bornée : il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in E'; |T_n(\varphi)| = |\varphi(x_n)| \leq M \|\varphi\|_{E'}.$$

Mais d'après le corollaire (I) du théorème de Hahn-Banach, on a

$$\|x_n\|_E = \sup_{\varphi\in E', \|\varphi\|_{E'}=1} |\varphi(x_n)|$$

Donc on peut conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E \leq M.$$

En passant a la limite inférieure dans l'inégalité

$$|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\|_{E'} \|x_n\|_E$$

puis en appliquant à nouveau le corollaire(I) du théorème de Hahn-Banach, on obtient l'inégalité souhaitée.

Démontrons le dernier point. Pour cela, écrivons

$$\varphi_n(x_n) - \varphi(x) = (\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n)) + (\varphi(x_n) - \varphi(x))$$

Par hypothèse, le dernier terme tend vers 0. De plus,

$$|\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n)| \leq \|x_n\|_E \|\varphi_n - \varphi\|_{E'}$$

D'après (iii), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc on a aussi

$$\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n) \to 0,$$

ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Théorème 3.5

Soit $x \in E$. Alors

$\|x\| = \sup\{|f(x)| / f \in E', \ \|f\| \leq 1\}$

Le *bidual topologique* E'' de E est le dual topologique de E'. On a alors

Corollaire 3.6 ([8])

L'application $\mathcal{J} : E \to E''$ définie par :

$\mathcal{J}(x)(f) = f(x) \ \forall x \in E, \forall f \in E'.$

est une isométrie de E dans E''. Cette application est dite "l'injection canonique" de E dans E''.

3.2 Espaces réflexifs

3.2.1 Définitions et exemples

En **dimension finie**, on a clairement $\dim E = \dim E' = \dim E''$. Du fait de l'injectivité de $\mathcal{J}$, on en déduit que $\mathcal{J}(E) = E''$. L'application J est alors une isométrie bijective de E sur E'' ce qui fait qu'en pratique on identifie toujours E avec son bidual E''.

En dimension infinie, l'inclusion $\mathcal{J}(E) \subset E''$ est, en général, stricte, comme on va le voir dans l'exemple suivant.

Proposition 3.7 ([3])

L'ensemble c_0 des suites réelles tendant vers 0 a l'infini muni de la norme

$\|x\|_\infty = \sup_{n \in N} |x_n|$ *est un espace de Banach non réflexif.*

Définition 3.8

On dit que E est réflexif si l'injection canonique de E dans E'' est surjective.

Remarque 3.9

Si E est réflexif, on identifie E'' a E en confondant chaque $\varphi \in E''$ avec l'unique $x \in E$ tel que $\varphi = \mathcal{J}(x)$.

Exemple 3.10 ([8])

- *Il est clair que tout espace de dimension finie est réflexif.*
- *Autrement dit, dire que E est réflexif revient à dire qu'on peut identifier E'' à E. Evidemment tout espace de Hilbert est réflexif (ceci découle du théorème de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual topologique).*
- *Pour tout $p \in]1, \infty[$ les espaces ℓ^p, L^p et $W^{1,p}(\Omega)$ sont réflexifs.*
- *Par contre ℓ^1, L^1, $W^{1,1}$, ℓ^∞, L^∞, $W^{1,\infty}$, $\mathcal{C}^0$, les espaces de mesures ne sont pas réflexifs.*
- *$\mathcal{C}^N([0,1])$ n'est pas réflexif.*

L'importance fondamentale de la réflexivité provient du résultat de compacité énoncé dans le théorème de Kakutani plus bas. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat important nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires :

Lemme 3.11 (Helly) *([5])*

Soient E un espace de Banach, $f_1, ..., f_n$ dans E' et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ on a équivalence entre les assertions suivantes :

1) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que :

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon \ \forall i = 1, ..., n.$$

2) pour tout $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'}$$

Preuve. Supposons d'abord 1., et soit $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon)\right| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$$

$$\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'} \|x_\varepsilon\|_E + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$$

Mais, $\|x_\varepsilon\|_E \leq 1$. d'où l'on déduit 2. en faisant tendre ε vers 0.

(1) $\Leftarrow$ (2) : Ne supposez pas. Alors, soit $\overrightarrow{\varphi}(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Alors,

$(\alpha_1, ..., \alpha_n) \notin \overrightarrow{\varphi}(B_x)$. Depuis $\{(\alpha_1, ..., \alpha_n)\} = \{\alpha\}$ est un ensemble compact et $\overrightarrow{\varphi}(B_x)$ est fermé et convexe, nous pouvons appliquer le Théorème Hahn-Banach et dite que $\exists \gamma$ et

$\overrightarrow{\beta} . \overrightarrow{\varphi}(x) < \gamma < \overrightarrow{\beta} . \overrightarrow{\alpha} \ \forall x \in B_E$. Donc,

$$\forall x \in B_E, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i.$$

En changeant x par $-x$, donc

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x)\right\| < \gamma < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right|.$$

Prendre le soupez sur $x \in B_E$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'} \leq \gamma < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right|,$$

contredisant ainsi la seconde assertion. ■

Lemme 3.12 (Goldstine) *([5])*

Soit E un espace de Banach, alors $\mathcal{J}(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$. Ici,

$$\mathcal{J} : E \to E'',\ \mathcal{J}(x) = < x, \cdot >.$$

Preuve. Soit $\eta \in B_{E'}$ et V un voisinage de η pour $\sigma(E'', E')$, il s'agit de montrer que $V \cap \mathcal{J}(B_E) \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $n, \varepsilon > 0$ et $f_1, ..., f_n \in E'$ tels que

$$V = \{\zeta \in E'' : \ |(\zeta - \eta)(f_i)| < \varepsilon,\ f_i \in E',\ \forall i = 1, ..., n\}$$

Posons $\alpha_i := \eta(f_i)$ pour $i = 1, ..., n$ et soit $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors puisque $B_{E''}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| = \left|\eta(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f i)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

On déduit alors du *lemme* **Helly** qu'il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que $|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$ pour $i = 1, ..., n$ ce qui signifie exactement que $J(x_\varepsilon) \in V$ et donc on a bien $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. ∎

Théorème 3.13 (Kakutani) *([5])*

Soit E un espace de Banach alors E est réflexif si et seulement si B_E est compacte pour $\sigma(E, E')$.

Preuve. Supposons d'abord que E est réflexif on a alors $\mathcal{J}(B_E) = B_{E''}$ et il résulte que $B_{E''}$ est compacte pour $\sigma(E'', E')$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{J}^{-1}$ est continue de $(E'', \sigma(E'', E'))$ vers $(E, \sigma(E, E'))$ pour en conclure que B_E est compacte pour $\sigma(E, E')$. Il s'agit donc de montrer que pour tout $f \in E'$, $f \circ \mathcal{J}^{-1}$ est continue pour $\sigma(E'', E')$. Or si $\eta \in E''$ il existe $x \in E$ tel que $\eta = \mathcal{J}(x)$ on a donc $f(\mathcal{J}^{-1}(\eta)) = f(x) = \eta(f)$ et comme $f \in E'$, on en déduit bien que $f \circ \mathcal{J}^{-1}$ est continue pour $\sigma(E'', E')$.

Réciproquement, supposons que B_E soit compacte pour $\sigma(E, E')$. Comme $\mathcal{J}$ est continue de E (fort) dans E'' (fort), Donc $\mathcal{J}$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(E'', \sigma(E'', E'''))$. Comme $\sigma(E'', E')$ est moins fine que $\sigma(E'', E''')$, $\mathcal{J}$ est aussi continue de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(E'', \sigma(E'', E'))$. Cela implique que $\mathcal{J}(B_E)$ est compact pour $\sigma(E'', E')$ mais comme, par le *lemme de* **Goldstine**, $\mathcal{J}(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $\sigma(E'', E')$ on doit avoir $B_{E''} = B_E$ et donc $E'' = \mathcal{J}(E)$. ∎

Proposition 3.14 ([3])

Soit E_l, E_2 deux Banach et $T \in \mathcal{L}(E_l, E_2)$ bijective. Alors E_1 est réflexif si et seulement si E_2 est réflexif.

Corollaire 3.15

Soit E un Banach. Alors E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.

Théorème 3.16 ([3])

Soit E un Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E. Alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la topologie faible $\sigma(E; E')$.

Théorème 3.17 ([2])

Si un du Banach espace E et F est réflexif, alors chaque opérateur continu de E à F est faiblement compact.

Les opérateurs faiblement compacts sur un espace Banach E exposent des propriétés de la bague semblables à ceux d'opérateurs compacts. Ils forment une norme a fermé la bague à deux aspects idéale de $L(E)$.

Théorème 3.18 ([10])

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; notons $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini.

2. L'opérateur T est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

3. L'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$.

4. Pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0.

5. Pour tout système orthonormal $(e_n)_n \geq 0$ dans $\mathcal{H}$ on $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$.

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. : c'est une conséquence immédiate du fait que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est fermé pour la norme opérateur.

2. $\Rightarrow$ 3. : comme $\mathcal{H}$ est un espace **réflexif**, la boule unité fermée de $\mathcal{H}$ est **faiblement compact**. Comme T est compact, pour toute suite $(x_n)_n$ de $\overline{B}_{\mathcal{H}}$, il existe une sous-suite $(T(x_{n_k}))_k$ convergente vers $y \in \mathcal{H}$. Nous allons montrer que $y \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$. Comme $(x_{n_k})_k$ est dans $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ qui est faiblement compact, il existe une sous-suite $(x_{n_{k_l}})_{k_l}$ convergeant faiblement vers $x \in \overline{B}_{\mathcal{H}}$. Alors pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a

$$\left\langle x_{n_{k_l}}, T^*(z) \right\rangle \to \langle x, T^*(z) \rangle = \langle T(x), z \rangle \,,$$

et

$$\left\langle x_{n_{k_l}}, T^*(z) \right\rangle = \langle T(x), z \rangle \to \langle y, z \rangle \,.$$

On a donc $T(x) = y$, prouvant que $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$.

3. $\Rightarrow$ 4. : soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0. Alors $(x_n)_n$ est bornée. En effet, posons $T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $T_n(x) = \langle x, x_n \rangle$. Alors T_n est une application linéaire continue de norme $\|x_n\|$ tel que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |T_n(x)| = 0$. D'après le théorème de Banach–Steinhaus, $\sup\limits_n \|T_n\| = \sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. Quitte à diviser par une constante, on peut supposer que la suite $(x_n)_n$ est dans $\overline{B}_{\mathcal{H}}$. Ainsi il existe une sous-suite $(T(x_{n_k})_k$ convergente en norme vers disons z. Mais comme $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0, on a aussi $\langle x_{n_k}, T^*(z) \rangle \to 0$ et $\langle x_{n_k}, T^*(z) \rangle = \langle T(x_{n_k}), z \rangle \to \|z\|^2$. Ainsi $(T(x_{n_k})_k \to 0$. Ceci prouve que la seule valeur d'adhérence (pour la norme) de la suite $(T(x_n))_n$ est 0, et donc $\|T(x_n)\| \to 0$ dès que $(x_n)_n$ tend faiblement vers 0.

4. $\Rightarrow$ 5. : toute suite orthonormale $(e_n)_n$ est une suite convergeant faiblement vers 0. En effet, pour tout $y \in \mathcal{H}$, $\sum_n |\langle y, e_n \rangle|^2 \leq \|y\|^2$ et donc en particulier $|\langle y, e_n \rangle| \to 0$ pour tout $y \in \mathcal{H}$.

5. $\Rightarrow$ 1. : supposons que 1. ne soit pas vérifié. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application linéaire continue de rang fini R on ait $\|T - R\| > \varepsilon$. Construisons alors par récurrence sur n un système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ tel que $\|T(e_n)\| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$:

comme $\|T\| > \varepsilon$, il existe $e_0 \in E$ tel que $\|e_0\| = 1$ et $\|T(e_0)\| > \varepsilon$; supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par $\{e_k : k < n\}$; alors TP est de rang fini donc $\|T - TP\| > \varepsilon$; il existe donc $y_n \in E$ tel que

$$\|T(Id_E - P)(y_n)\| > \varepsilon \|y_n\| \geq \varepsilon \|(Id_E - P)(yn)\| .$$

On pose alors $z_n = (Id_E - P)(y_n)$, puis $e_n = \|z_n\|^{-1} z_n$. On a alors $T(e_n) = \|z_n\|^{-1} \|T(z_n)\| > \varepsilon$, prouvant que 5. n'est pas vérifié. ■

Proposition 3.19

Soit $\mathcal{A} : E \to F$ est un opérateur linéaire continu. les déclarations suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{A}$ est faiblement compact.

(b) Pour tout suite bornée (x_j) dans E, $(\mathcal{A}(x_j))$ admet une sous suite faiblement converge.

(c) L'opérateur adjoint $\mathcal{A}^* : F' \to E'$ est faiblement compact.

(d) $\mathcal{A}^{**}(E'') \subseteq F$.

(e) Il existe un espace de Banach réflexive G et opérateurs $v : E \to G$ et $t : G \to F$ tel que $\mathcal{A} = tv$

3.3 Applications

Exemple 1

Soit $k : [c,d]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ $(c<d,\ a<b)$ une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'application $K : L^2([a,b]) \to L^2([c,d])$ telle que pour tout $x \in L^2([a,b])$, Kx est la fonction définie par

$$\forall t \in [c,d], \qquad (Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds.$$

K est un opérateur de $L^2([a,b])$ dans $L^2([c,d])$ qu'on appelle opérateur intégral de noyau $k(t,s)$.

L'opérateur adjoint K est aussi un opérateur à noyau. C'est l'opérateur intégral de $L^2([c,d])$ dans $L^2([a,b])$ dont le noyau est la fonction $(s,t) \mapsto \overline{k(s,t)}$ de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbb{C}$ (attention les intervalles sont maintenant dans l'ordre inverse!) i.e. pour tout $y \in L^2([c,d])$, $K^*y \in L^2([a,b])$ est la fonction définie par

$$\forall s \in [a,b], \qquad (Ky)(s) = \int_c^d \overline{k(s,t)}y(t)dt$$

Dans le cas particulier où $[a,b]=[c,d]$, l'opérateur $K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

est autoadjoint si le noyau k satisfait la condition de symétrie hermitienne

$$\forall (s,t) \in [a,b]^2, \qquad k(s,t) = \overline{k(t,s)}.$$

Exemple 2

Prenons pour $\mathcal{H}$ l'espace L^2, avec la mesure de Lebesgue sur $[0,\pi]$. L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par :

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \int_0^\pi \cos(t-s)\varphi(s)ds$$

est de rang fini ($\dim \mathcal{A}(L^2([0,\pi])) = 2$) (**voir l'exemple 1.18**) donc par la **proposition 1.19** l'opérateur $\mathcal{A}$ est un opérateur compact.

Exemple 3

Soit $k(x,y)$ une fonction réelle de carré intégrable sur $[0,1]^2$, posons

$$\forall f \in L^2([0,1]), \qquad (T_k f)(x) = \int_0^1 k(x;y) f(y) dy.$$

On montrera plus loin que cette formule définit un endomorphisme T_k de $L^2([0,1])$. On va montrer que cet opérateur est compact, en utilisant la convergence faible. Désignons par E l'ensemble des points $x \in [0,1]$ tels que

$$\int_0^1 |k(x;y)|^2 \, dy < +\infty;$$

par Fubini, $[0,1] \backslash E$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in E$, c'est-à-dire pour presque tout x, la fonction k_x définie par $k_x(y) = k(x,y)$ est dans $L^2([0,1])$, et on a pour $x \in E$

$$(T_k f)(x) = \langle f, k_x \rangle ;$$

si (f_n) est une suite dans la boule unité de $L^2([0,1])$, on peut extraire une sous-suite (f_{n_j}) faiblement convergente vers une fonction f de la boule unité de $L^2([0,1])$; on a pour $x \in E$

$$\varphi_j(x) = \left|(T_k f_{n_j})(x) - (T_k f)(x)\right|^2 = \left|\left\langle f_{n_j} - f; k_x \right\rangle\right|^2 \leq 4 \left\| k_x \right\|_2^2 ;$$

cette fonction $x \to \|k_x\|_2^2$ est une fonction intégrable fixe, majorant de la suite (φ_j) qui tend presque partout vers 0 : d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 \varphi_j(x) dx$ tend vers 0, ce qui signifie que la sous-suite $(T_k f_{n_j})$ converge dans $L^2([0,1])$ vers $T_k f$. On a ainsi montré que toute suite dans l'image par T_k de la boule unité admet des sous-suites convergentes, donc T_k est un opérateur compact.

Exemple 4

Soit l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $\mathcal{C}([0,1])$ par

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \int_0^1 e^{(x+y)}\varphi(y)dy.$$

est compact car :

On utilisera le théorème de **Arzelà-Ascoli :**

(1) On démontrer que $\mathcal{A}(\mathcal{C}([0,1]))$ est borné.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}\varphi(x)| &= \left|\int_0^1 e^{(x+y)}\varphi(y)dy\right| \leq \int_0^1 \left|e^{(x+y)}\varphi(y)\right| dy \\
&= e^x \int_0^1 |e^y\varphi(y)|\, dy \\
&\leq e \int_0^1 |e^y\varphi(y)|\, dy \\
&\leq e \sup_{y\in[0,1]} |e^y| \int_0^1 |\varphi(y)|\, dy \\
&\leq e^2 \int_0^1 |\varphi(y)|\, dy
\end{aligned}$$

et on a $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$ donc $\int_0^1 |\varphi(y)|\, dy \leq M$

$|\mathcal{A}\varphi(x)| \leq C$ alors l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{C}([0,1]))$ est borné.

(2) On démontrer que $\mathcal{A}(\mathcal{C}([0,1]))$ est équicontinue.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}([0,1])$ avec $|\varphi - \psi| < \delta$ on a

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}\varphi(x)-\mathcal{A}\psi(x)| &= \left|\int_0^1 e^{(x+y)}\varphi(y)dy-\int_0^1 e^{(x+y)}\psi(y)dy\right| \\
&= \left|e^x(\int_0^1 e^{y}\varphi(y)dy-\int_0^1 e^{y}\psi(y)dy)\right| \\
&= \left|e^x(\int_0^1 e^{y}\varphi(y)dy-\int_0^1 e^{y}\psi(y)dy)\right| \\
&= e^x\left|\int_0^1 e^{y}(\varphi(y)-\psi(y))dy\right| \\
&\leq e^x\int_0^1 \left|e^{y}(\varphi(y)-\psi(y))\right|dy \\
&\leq e\sup_{y\in[0,1]}|e^y|\int_0^1 \left|\varphi(y)-\psi(y)\right|dy \\
&\leq e^2\int_0^1 \left|\varphi(y)-\psi(y)\right|dy \\
&\leq e^2\delta=\varepsilon
\end{aligned}
$$

donc l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{C}([0,1]))$ est équicontinue.

De (1) et (2) l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{C}([0,1]))$ est **relativement compac**t donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est compact.

Bibliographie

[1] **H. Brézis** : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, DUNOD, Belguque 2006.

[2] **CHARALAMBOS D. ALIPRANTIS** & **OWEN BURKINSHAW IUPUI**: Positive Operators, Purdue University, West Lafayette, U.S.A, Indianapolis, U.S.A, Springer 2006.
http://kolho3.tiera.ru/M_Mathematics/MC_Calculus/MCf_Functional%20analysis/Aliprantis%20C.D.,%20Burkinshaw%20O.%20Positive%20Operators%20(Springer,%202006)(376s)_MCf_.pdf

[3] **R. Danchin**: Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle Master première année, Année 2009/2010
http://ufr-math-p12.univ-mlv.fr/Maitrise/telecharger/analyse_fonctionnelle/resume09.pdf

[4] **D. Feyel**: Résumé d'analyse fonctionnelle élémentaire, Université d'Evry-Val d'Essonne, 2006.
http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/feyel/Anaf.pdf

[5] **Guillaume CARLIER**: Notes de cours ANALYSE FONCTIONNELLE, ENS, 2009- 2010.
http://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/poly2010.pdf

[6] **Mostefa NADIR**: cours ANALYSE FONCTIONNELLE, Master deuxième année.

[7] **K. Yosida**: Functional Analysis, Springer Classics in Mathematics.

[8] COURS ANALYSE FONCTIONNELLE, Master première année, Université d'Orléans, 2007.
http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/anker/enseignement/AF1/Dualite.pdf

[9] Chapitre 4 Opérateurs Compacts.
http://www.uvt.rnu.tn/cours_libres/Houcine_Chebli/operateurs-compacts-chap4.pdf

[10] Chapitre 5 Opérateurs compacts.
http://math.univ-lyon1.fr/~chalenda/m2g-chap5.pdf

[11] Chapitre 5: Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint 18 mars 2008.
http://www.lmpt.univ-tours.fr/~gallardo/EspHilbert5.pdf

[12] COMPACITÉ DANS LES ESPAES CLASSIQUES, OPÉRATEURS COMPACTS.
http://samuel.u-3mrs.fr/parties_compactes.pdf

تمت بحمد الله