



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

En Génie Mécanique

Option : Energétique

Présenté par :

BOUREZG OUSSAMA

Thème

Etude numérique de l'effet de la température sur le
comportement statique et dynamique d'une structure

Devant le jury composé de :

NOM et Prénom	Grade	Qualité
IHADDADENE RAZIKA	PROF	Président
LATRACHE MOHAMED	MCB	Encadrant
BENKHERBACHE SOUAD	MCA	Examineur

Année Universitaire : 2024 / 2025

N° d'ordre : GM/...../2025

Remerciements

Tout d'abord, je rends grâce à Dieu, le Tout-Puissant, qui m'a accordé la volonté, le courage et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, **Monsieur LATRACHE Mohamed**, pour avoir assuré la direction de ce mémoire. Sa rigueur scientifique, ses compétences et ses conseils avisés ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail. Je le remercie également pour sa disponibilité, son écoute et les exigences constructives qu'il a su maintenir tout au long de la rédaction.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à **Madame IHADDADENE Razika**, présidente du jury, ainsi qu'à **Madame BENKHERBACHE Souad**, examinatrice, pour l'honneur qu'elles me font en acceptant d'évaluer ce mémoire.

Ma reconnaissance va également à l'ensemble des enseignants de la **Faculté de Technologie de M'sila**, et plus particulièrement à ceux du **Département de Génie Mécanique**, pour la qualité de leur enseignement et leur accompagnement tout au long de mon parcours universitaire.

Enfin, j'exprime mes vifs remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation ou à la réalisation de ce travail.

Résumé

Cette étude se concentre sur l'analyse de l'impact des variations thermiques sur le comportement dynamique et statistique d'une structure mécanique à l'aide de simulations numériques. Les résultats montrent qu'une augmentation de la température entraîne une réduction de la rigidité du matériau, affectant ainsi les fréquences naturelles et les déplacements sous charges. Des seuils thermiques critiques ont été identifiés, au-delà desquels le comportement devient non linéaire ou instable. L'étude met en évidence l'importance d'intégrer une approche statistique pour évaluer l'impact des incertitudes sur les propriétés thermomécaniques des matériaux.

Abstract

This study focuses on analyzing the effect of thermal variations on the dynamic and statistical behavior of a mechanical structure through numerical simulations. The results show that an increase in temperature leads to a reduction in the material's stiffness, which affects natural frequencies and displacements under applied loads. Critical thermal thresholds were identified, beyond which the behavior becomes nonlinear or unstable. The study emphasizes the importance of integrating a statistical approach to assess the impact of uncertainties in the thermomechanical properties of materials.

ملخص

تُرکز هذه الدراسة على تحليل تأثير التغيرات الحرارية على السلوك الديناميكي والإحصائي لهيكل ميكانيكي باستخدام المحاكاة العددية. أظهرت النتائج أن زيادة درجة الحرارة تؤدي إلى تقليل صلابة المادة، مما يؤثر على الترددات الطبيعية والإزاحات تحت الأحمال. كما تم تحديد عتبات حرارية حرجة، حيث يصبح السلوك غير خطي أو غير مستقر. تشير الدراسة إلى أهمية تضمين التحليل الإحصائي لتقييم تأثيرات الشكوك في الخصائص الحرارية والميكانيكية للمواد على الاستجابة الهيكلية.

Introduction Générale

La durabilité et la fiabilité des structures exposées à des variations thermiques constituent un enjeu crucial dans de nombreux domaines d'ingénierie, tels que l'aéronautique, le génie civil ou encore l'industrie automobile. En effet, les variations de température influencent fortement les propriétés mécaniques des matériaux (module d'élasticité, résistance, dilatation thermique, etc.) ainsi que leur comportement dynamique (fréquences propres, modes de vibration, amortissement).

Dans des environnements réels, ces structures sont régulièrement soumises à des écarts thermiques importants, générant des effets thermomécaniques non négligeables. Il devient ainsi indispensable d'analyser ces phénomènes avec précision en s'appuyant sur des méthodes numériques robustes, notamment la méthode des éléments finis. De plus, une approche statistique permet de mieux appréhender la variabilité des réponses structurelles face aux incertitudes thermiques ou matérielles.

L'objectif principal de cette étude est d'évaluer, par simulations numériques, l'impact de la température sur le comportement dynamique et statistique d'une structure donnée. Plus précisément, il s'agit de :

- Modéliser une structure soumise à des variations de température à l'aide de logiciels de simulation adaptés.
- Analyser l'influence thermique sur le comportement dynamique de la structure, notamment en ce qui concerne les fréquences propres, les modes de vibration et l'amortissement.
- Étudier les effets de la température sur les propriétés mécaniques du matériau, telles que la rigidité, la résistance, et les éventuels comportements non linéaires.
- Intégrer une approche statistique afin d'évaluer la sensibilité des réponses dynamiques aux variations thermiques et aux incertitudes liées aux paramètres (géométrie, propriétés matériaux, conditions aux limites, etc.).

- Comparer les résultats obtenus à différentes températures pour identifier d'éventuels régimes critiques ou seuils thermiques affectant significativement la structure.

La simulation numérique est réalisée à l'aide du logiciel **ANSYS Workbench**, suivant un processus en plusieurs étapes :

1. Préparation du projet

- Création d'un nouveau projet.
- Ajout des systèmes nécessaires : **Static Structural**, **Modal Analysis**, etc.

2. Géométrie

- Importation de la géométrie depuis un logiciel de CAO (SolidWorks, CATIA, etc.) ou modélisation directe dans **Design Modeler** ou **SpaceClaim**.

3. Maillage

- Génération du maillage (automatique ou manuel).
- Ajustement des tailles d'éléments, zones de raffinement, contrôle de la qualité (skewness, aspect ratio...).

4. Conditions aux limites (Setup)

- Définition des matériaux (propriétés mécaniques et thermiques).
- Application des conditions aux limites :
 - Appuis, fixations, contacts.
 - Charges : mécaniques, thermiques (température, flux...).
- Paramétrage du type d'analyse (statique, modale, non linéaire...).

5. Résolution

- Lancement du solveur.
- Suivi de la convergence si nécessaire.
- Temps de calcul variable selon la complexité.

6. Post-traitement des résultats

- Visualisation des résultats : déplacements, contraintes (Von Mises), températures, modes propres...
- Génération de graphiques, courbes, rapports.
- Exportation des résultats si besoin.

Sommaire

Remerciements	2
Résumé	3
Introduction Générale.....	4
Liste Figure	8
CHAPITRE I Matériaux composites	
I.1. INTRODUCTION :	10
I.2. DEFINITION :	11
I.3. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES :	13
I. 3. 1. Classement suivant la nature des constituants.....	13
I. 3. 2. Classement suivant la morphologie (Fig. I. 3) :.....	13
I.4. CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES :	14
I. 4. 1. Matrice.....	14
CHAPITRE II Le comportement mécanique et thermique des poutres stratifiées	
II.1. Introduction :	18
II . 2 .Loi de comportement des stratifiées :	18
II.2.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice:.....	18
II .2.1.a Modules de Young longitudinale $E1$:	20
II.2.1.b Modules de Young transversal $E2$:	21
II.2.1.c Coefficient de Poisson longitudinal $\nu12$:	22
II.2.1.d Module de cisaillement longitudinal $G12$:	22
II.2.2 Loi de Hooke généralisée [10] :	23
II.2.3 Différents Types des matériaux :	24
II.2.3.a Matériaux anisotropes:.....	24
II.2.3.b Matériaux orthotropes :	25
II.2.3.c Matériaux transversalement isotropes:.....	27
II.2.3.d Matériaux isotropes:.....	28
II.2.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :.....	29
II. 3 .Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites :	31
II.4. Théorie classique des stratifiées (CLT) :	31

II.4.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :	33
II.4.2. Expression des résultantes et des moments :	34
II.4.2.a Résultantes en membrane :	34
II.4.2.b Moment de flexion et de torsion :	34
CHAPITRE III Transfert de chaleur par	
éléments finis	
Introduction	40
IV. 1 Diffusion unidimensionnelle, dépendant du temps :	40
IV. 2 Programmation :	47
Chapitre IV Simulation avec ANSYS de l'effet de la température sur les propriétés	
mécaniques d'une plaque en matériaux composite	
IV.1 Introduction	50
IV.2 Modélisation de la plaque composite	50
a- Propriétés principales :	51
b- Domaines d'application :	51
Conclusion générale	62
Reference bibliographique	63

Liste des Figures

Figure I. 1 Matériau composite	11
Figure I. 2 Types de composites et leurs compositions	11
Figure I. 3 Types de composites	12
Figure I. 4 Les différents types des matrices [6]	14
Figure II 1 Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [11].	19
Figure II 2 Schéma simplifié d'une traction longitudinale [20].	20
Figure II 3 Schéma simplifié d'une traction transversal [20].....	21
Figure II 4 Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [20].	23
Figure II 5 Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1,2,3).....	24
Figure II 6 Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.	25
Figure II 7 Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.	27
Figure II 8 Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [10].	29
Figure II 9 Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiées (Figure adaptée de Berthelot (2010)).	32
Figure II 10 Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion (Figure adaptée de François-Xavier [25]).	35
Figure IV 1 Géométrie de la plaque simulée.....	50
Figure IV 2 Propriétés mécanique de la plaque en époxy-carbone	51
Figure IV 3 Fenêtres des analyse ACP, statique et modale sur ANSYS Workbench.....	52
Figure IV 4 Construction des de stratification monoplies [0] de la plaque en matériaux composite.....	53
Figure IV 5 Maillage de la plaque composite.	53
Figure IV 6 Fixation de la plaque	54
Figure IV 7 Application de force	54
Figure IV 8 Application de température de 150° C	55
Figure IV 9 Effet de la température sur la flèche, déformation et contrainte.....	58
Figure IV 10 Modes des vibrations amorties dans les températures (22°, 100° et 150° C).	60

CHAPITRE I

Matériaux composites

I.1. INTRODUCTION :

Au cours des dernières décennies, les matériaux composites ont connu un développement considérable, devenant ainsi un élément incontournable dans divers secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatiale, le maritime, le transport ferroviaire, la construction, et même dans les domaines du sport et des loisirs. Cette expansion est due à leurs propriétés uniques qui combinent légèreté et haute résistance, en plus d'une excellente résistance à la fatigue et à la corrosion. Ces matériaux se distinguent par leur capacité à alléger les structures tout en maintenant leur robustesse, ainsi que par leur flexibilité de conception, permettant de réaliser des formes complexes. De plus, ils résistent aux conditions extrêmes grâce à leurs caractéristiques mécaniques améliorées en termes de solidité et de rigidité. Cependant, les matériaux composites ne sont pas à l'abri des dommages. Ils sont exposés à divers facteurs qui peuvent altérer leur qualité, tels que l'humidité, pouvant entraîner une dégradation de la matrice polymérique, les variations thermiques qui provoquent des fissures internes, la fatigue mécanique qui affaiblit la structure au fil du temps, et les impacts qui peuvent laisser des traces invisibles. Pour détecter et évaluer ces dommages sans détériorer le matériau, l'industrie s'appuie sur les techniques de contrôle non destructif (CND), qui incluent la radiographie pour identifier les fissures internes, l'inspection par ultrasons pour détecter les défauts internes, la thermographie pour repérer les variations thermiques révélatrices de dommages, ainsi que les courants de Foucault pour détecter les défauts de surface dans les matériaux conducteurs. Ces techniques représentent des solutions efficaces pour garantir la sécurité et la performance des matériaux composites, renforçant leur fiabilité dans diverses applications. Le choix précis de la technique appropriée dépend de la nature du matériau et des conditions d'utilisation, afin d'assurer des performances optimales et une sécurité tout au long de leur cycle de vie.

I.2. DEFINITION :

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les *renforts* qui sont noyés dans une *matrice* (Figure I. 1) dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très *hétérogènes* et *anisotropes*. [2,3]

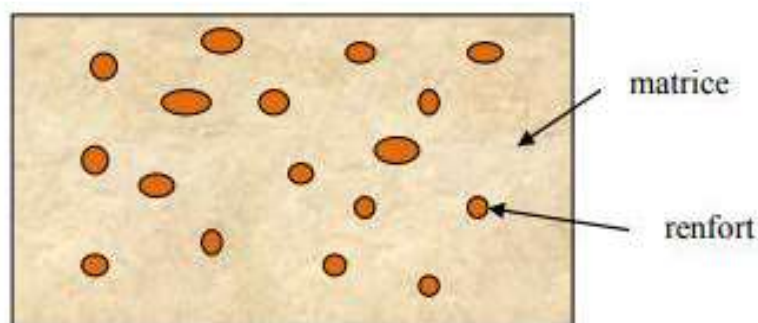


Figure I . 1 Matériau composite

Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

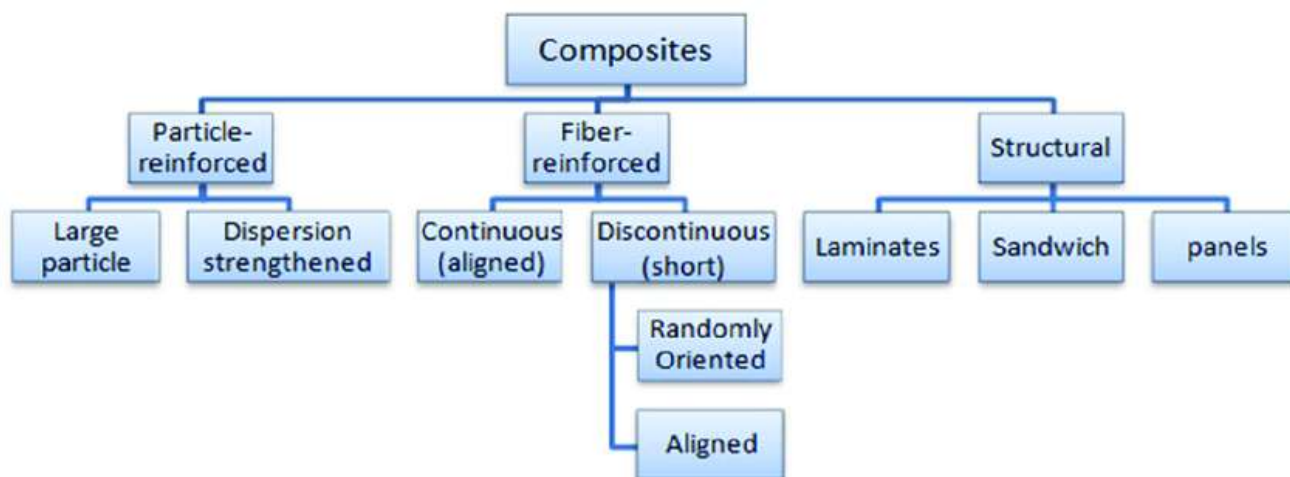


Figure I . 2 Types de composites et leurs compositions

Types de composites

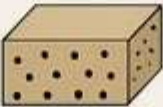





Composites à matrice polymère	Composites à matrice métallique	Composites à matrice céramique
Matrice Fibres  Renfort	Matrice Métal  Renfort Particules ou fibres	Matrice  Fibres céramiques Renfort Fibres ceramiques
Composites bois-polymère	Composites naturels	Composites à matrice hybride
Matrice Poudre de bois  Renfort	Matrice  Matériaux organiques Renfort Fibres naturelles	Polymère métal ou céramique  Renfort Combinaison de renforts

Figure I . 3 Types de composites

I.3. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES :

La classification des composites peut être effectuée selon la forme des composants ou suivant leurs natures [4, 5].

I. 3. 1. Classement suivant la nature des constituants

Ψ Composites à matrice organique : (résine, charges) avec :

- _ Fibres minérales : verre, carbone, etc. ;
- _ Fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc. ;
- _ Fibres métalliques : bore, aluminium, etc. ;

Ψ Composites à matrice métallique : (alliages légers et ultra-légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- _ Fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) ;
- _ Fibres métalliques : bore ;
- _ Fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BSiC).

Ψ Composites à matrice minérale : (céramique), avec :

- _ Fibres métalliques : bore ;
- _ Particules métalliques : cermets ;
- _ Particules minérales : carbures, nitrures, oxydes réfractaires.

I. 3. 2. Classement suivant la morphologie (Fig. I. 3) :

Ψ Composites à particules : Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

Ψ Composites à de paillettes : Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces "particules minces" est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'une à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

Ψ Composites à fibres : Une fibre a une longueur bien supérieure aux dimensions de la section transversale. Ce type de composites peut être divisé selon les renforts : en fibres discontinues (courtes) ou en fibres continues (longues).

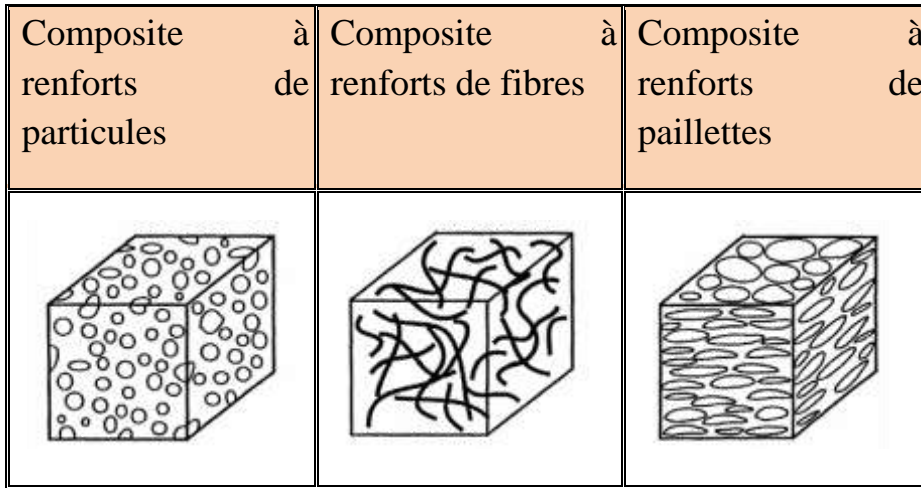


Figure I. 3. Classification des matériaux composites.

I.4. CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES :

I. 4. 1. Matrice

La matrice est la phase continue dont les fonctions sont [6] :

- ✓ De réaliser la liaison entre les renforts de manière à répartir les sollicitations et ainsi de prévenir les ruptures catastrophiques.
- ✓ D'assurer la protection de ces renforts vis-à-vis des agents agressifs.

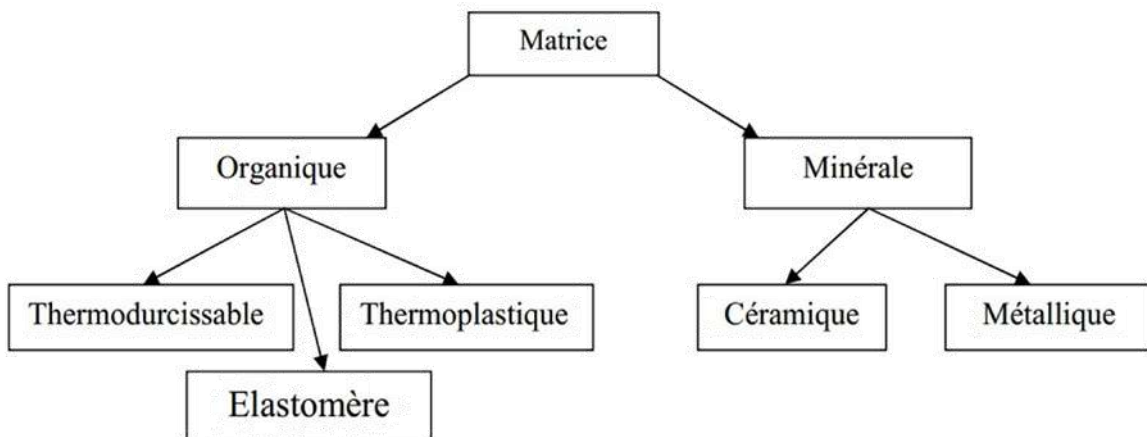


Figure I . 4 Les différents types des matrices [6]

- ✓ De donner la forme à la pièce et garantir ses caractéristiques géométriques.

Les matrices utilisées dans les matériaux composites se divisent en deux grandes familles : les matrices organiques et les matrices inorganiques (minérales). **La figure. I. 4** présente les types des matrices.

Les matrices les plus employées sont les matrices thermodurcissables et thermoplastiques.

a) Matrices thermoplastiques :

Les matrices ou les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux [7].

Avantages	inconvénients
-Mise en œuvre rapide -Possibilité de retansformation -Meilleure ténacité	-Une faible tenue en température -Peu de résistance aux solvants

b) Matrices thermodurcissables :

Ces résines possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à l'état solide [8] ; elles durcissent après un cycle de chauffage appelé "cycle de polymérisation" ou "cycle de réticulation".

Les résines thermodurcissables principalement utilisées dans la fabrication des matériaux composites sont :

- **Résine polyester** : présente un bon accrochage sur les fibres, un prix bas, mais un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide.
- **Résine phénolique** : ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes, elle n'est utilisée que lorsqu'il y a des exigences vis-à-vis de tenu au feu.
- **Résine polyamide** : d'un emploi relativement difficile et cher, elle a l'avantage de garder des bonnes caractéristiques sur une large plage de température (de -100 à +260°C).

- **Résine époxyde** : les résines époxydes se présentent sous la forme de plusieurs ingrédients à mélanger.

Le **Tableau.1.1** donne une comparaison entre les différentes résines.

	Polyesters	Phénoliques	Epoxydes	Polyamides
<i>Caractéristiques Mécanique</i>	Moyennes	Faibles	Très bonnes	Excellentes
<i>Tenue aux chocs</i>	Très bonne	Très faible	Bonne	Très bonne
<i>Tenue en fatigue</i>	Faible	Faible	Moyenne	Bonne
<i>Pouvoir adhésif</i>	Moyen	Moyen	Très bon	Très bon
<i>Température Maxi d'utilisation</i>	140°C	130°C	190°C	260°C
<i>Tenue au feu</i>	Mauvaise	Bonne	Moyenne	Très bonne
<i>Retrait</i>	Important	Faible	Très faible	Très faible
<i>Durée de polymérisation</i>	Courte	Courte	longue	Moyenne
<i>Mise en œuvre</i>	Très facile	Difficile	Facile	Difficile

TAB. 1. 1 : Tableau comparatif entre les résines thermodurcissables [9]

CHAPITRE II

*Le comportement
mécanique et thermique
des
poutres stratifiées*

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

II.1. Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique et une grande légèreté. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées. Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres. [11]

Les propriétés d'une poutre dépendent, en grande partie, de son épaisseur en fonction de ses autres dimensions.

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant la théorie classique des stratifiés pour exprimer les résultantes N_{ij} et les moments M_{ij} en fonction des déplacements de la poutre, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

Premièrement, nous allons écrire dans le repère global la loi de comportement d'un pli composite afin de relier le champ des contraintes au champ des déformations. Ensuite, les résultantes et les moments seront exprimés en tenant compte du comportement mécanique des différents plis composites.

II . 2 .Loi de comportement des stratifiés :

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu homogène équivalent anisotrope. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases:

- ✓ l'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- ✓ l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par le comportement du stratifiés [15].

Historiquement, L'étude du comportement des plaques stratifiées composites est basée sur la théorie des plaque stratifiés. Cette théorie utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques qui sont, dans un schéma de premiers degrés, associées aux noms de Reissner/Mindlin et de Kirchoff-Love. La théorie de Kirchoff-Love est historiquement l'une des premières approches bidimensionnelles de la flexion des poutre élastiques. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse [11].

II.2.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice:

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée renfort, insérée dans une phase solide, appelée matrice. La distribution et l'interaction, physique et chimique, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

En général, les composites structuraux sont présentés sous la forme d'un empilage de plusieurs plis, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle.

L'ensemble matrice-fibres forme le pli, l'ensemble de plis orientées forme le stratifié [16].

Les propriétés mécaniques moyennes de chaque pli sont obtenues par la règle de mélange [17]. Selon celle-ci, certaines propriétés du pli, telles que ses modules d'élasticité et sa densité, sont obtenus grâce à l'utilisation de la fraction volumique de fibres et de la matrice [10] [18].

Pour cela, La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du module d'Young. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

D'après Paolo [19], Soit un matériau composite de repère d'orthotrope (1, 2, 3), l'axe 1 ou l'axe longitudinal étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, Les directions normales aux fibres dans le plan de la couche sont appelées directions transversales, Le composite est considéré comme étant isotrope transverse c'est-à-dire qu'il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse est repéré par les deux directions équivalentes 2 et 3 .

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des fibres unidirectionnelles uniformément distribuées dans le corps de la couche (Voir figure II.1).

Soit une cellule élémentaire de fraction volumique $V = 1$ constituée de fibres et de matrice avec :

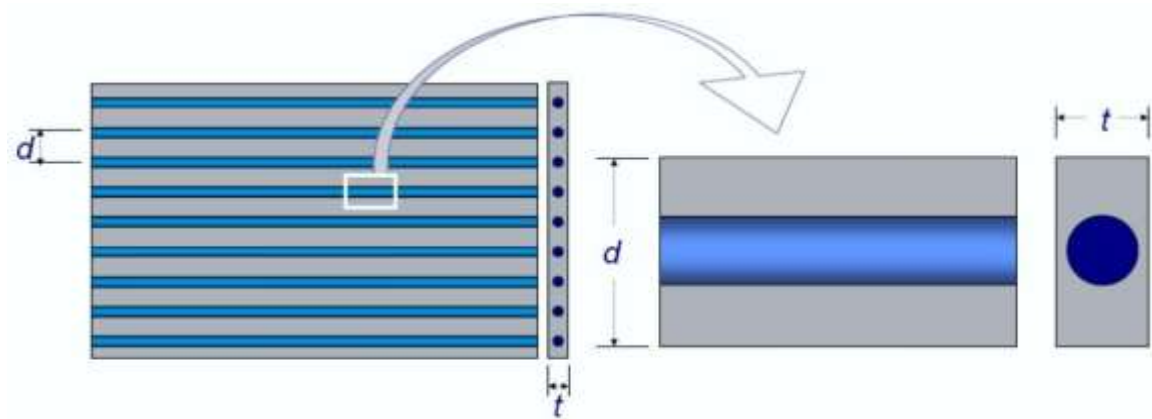


Figure II 1 Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [11].

$V_m = \frac{v_m}{v_c}$: Fraction volumique de matrice

$V_f = \frac{v_f}{v_c}$: Fraction volumique de fibre

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (2.1)$$

Nous nous proposons, par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, de trouver les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément reparti.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Les hypothèses de calcul sont:

- matrice isotrope, de module d'Young E_m et coefficient de Poisson ν_m ;
- fibres isotropes, de module d'Young E_f et coefficient de Poisson ν_f ;
- la fraction volumique des fibres est connue V_f ;
- le comportement est élastique linéaire ;
- il y a une adhésion parfaite entre les fibres et la matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche (E_1, E_2, G_{12} et ν_{12}); à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un comportement macroscopique orthotrope.

II .2.1.a Modules de Young longitudinale E_1 :

Le volume élémentaire représentatif est soumis à un état de sollicitation dans lequel seulement σ_1 n'est pas nulle, voir la (figure II.2).

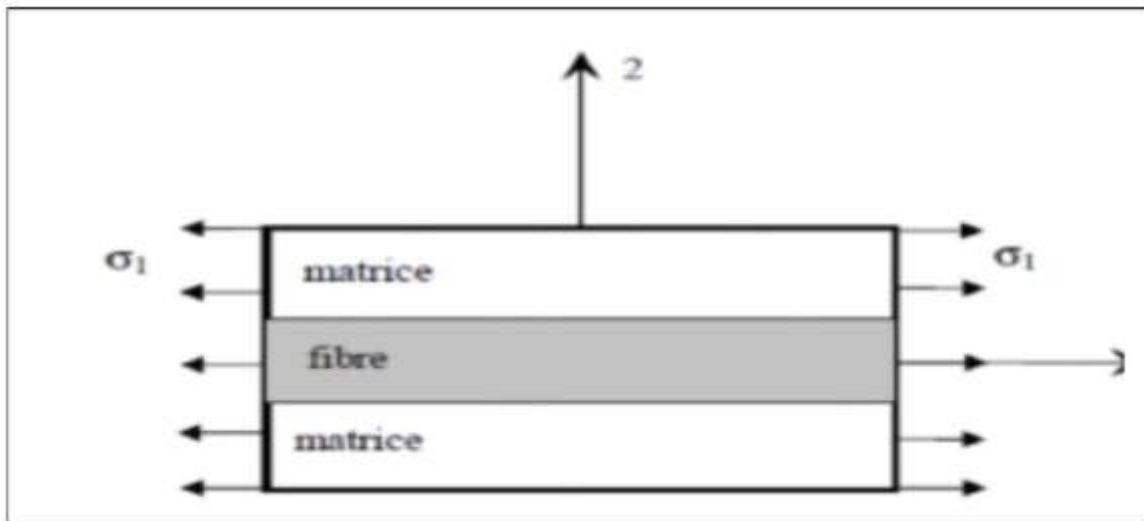


Figure II 2 Schéma simplifié d'une traction longitudinale [20].

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l \quad (2.2)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même partout (en particulier, les sections droites restent planes): $\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l$

Où l'indice (m) indique une quantité relative à la matrice, (f) à la fibre et (l) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\sigma_1^l A_l = \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m$$

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \quad (2.4)$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A_l = E_1 \varepsilon_1^l A_l$$

Donc
$$E_1 \varepsilon_1^l A_l = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_l}$$

avec
$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{A_f}{A_l} \text{ et } V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_l}$$

On obtient

$$E_1 = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (2.5)$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre loi des mélanges, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres). E_1 dépend linéairement de V_f , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver E_1 est un modèle de type parallèle: matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué.

II.2.1.b Modules de Young transversal E_2 :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seulement σ_2 n'est pas nulle, voir (la figure II.3).

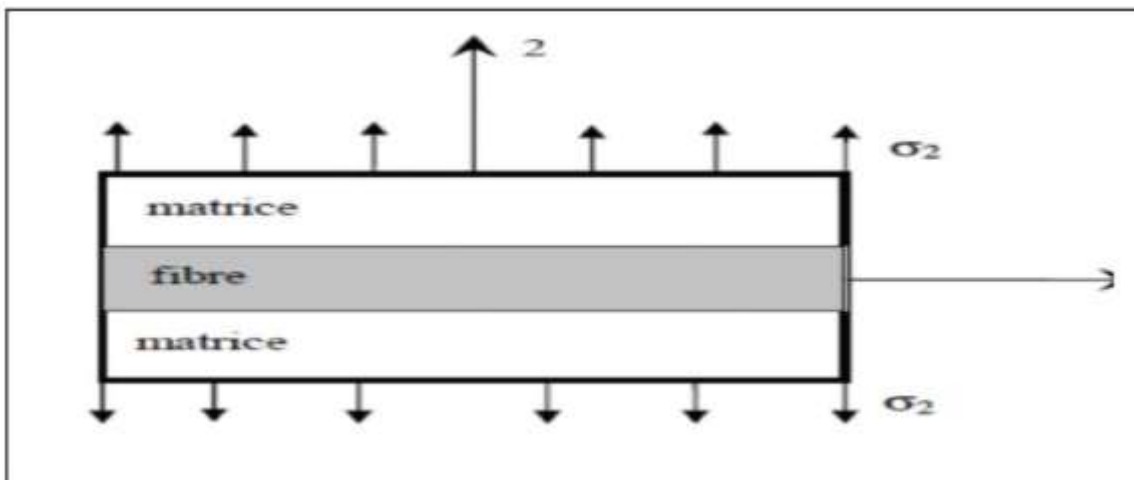


Figure II 3 Schéma simplifié d'une traction transversal [20].

Figure II. 3 : Schéma simplifié d'une traction transversal [20].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite.

$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (2.6)$$

La compatibilité de la déformation implique :

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$V\varepsilon_2^l = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_2^m$$
$$\Rightarrow V \frac{\sigma_2^l}{E_2} = V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1 - V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1-V_f)}{E_2^m}$$

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1 - V_f) E_2^f} \quad (2.7)$$

La dépendance du module E_2 de V_f n'est plus linéaire; en outre, la présence des fibres donne une faible à E_2 : les fibres ne sont pas un renfort efficace pour la rigidité transversale.

Le modèle utilisé est un modèle de type série.

II.2.1.c Coefficient de Poisson longitudinal ν_{12} :

Comme pour E_1 , on applique un état de contrainte où seulement σ_1 n'est pas nulle.

$$\text{Par définition : } \nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l} \quad (2.8)$$

$$\text{D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que: } \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.9)$$

Comme E_2 pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$V\varepsilon_2^l = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_2^m$$
$$\Rightarrow \varepsilon_2^l = \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)\nu_m \varepsilon_1^m$$
$$\Rightarrow \nu_{12} \varepsilon_1^l = \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)\nu_m \varepsilon_1^m$$

$$\text{finalement: } \nu_{12} = \nu_f V_f + (1 - V_f)\nu_m \quad (2.10)$$

II.2.1.d Module de cisaillement longitudinal G_{12} :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule τ n'est pas nulle, voir la figure II.4, où on a mis en évidence même la déformation correspondante

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

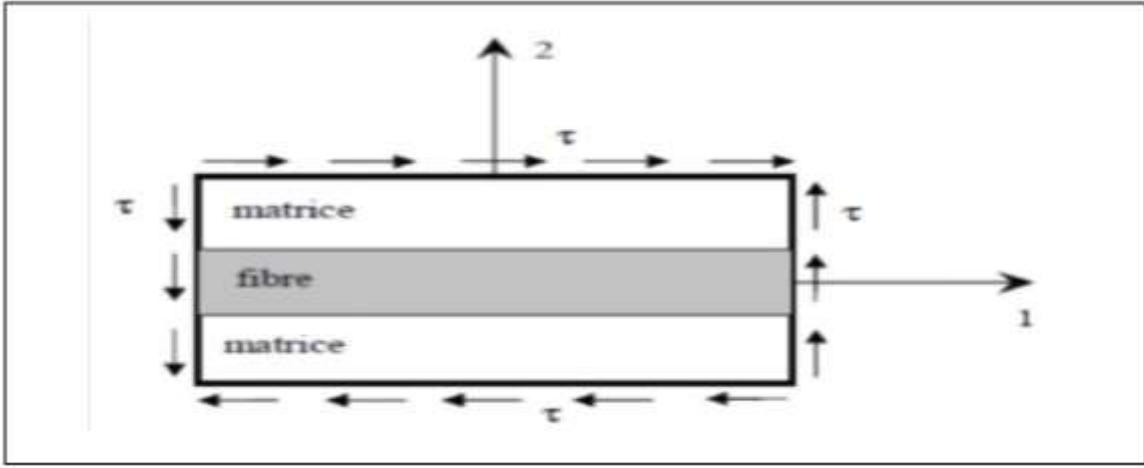


Figure II 4 Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [20].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^l = \tau^m = \tau^f \quad (2.11)$$

Tandis que par le lien élastique on a:

$$\tau^m = G_m \varepsilon_6^m, \tau^f = G_f \varepsilon_6^f, \tau^l = G_{12} \varepsilon_6^l \quad (2.12)$$

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$V \varepsilon_6^l = \varepsilon_6^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_6^m \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau^l}{G_{12}} = \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1 - V_f)$$

$$\Rightarrow G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f} \quad (2.13)$$

II.2.2 Loi de Hooke généralisée [10] :

Les contraintes (σ_{ij}) et les déformations (ε_{kl}) sont associées au tenseur de rigidité C_{ijkl} en utilisant la loi de Hooke dans le domaine de l'élasticité linéaire, et sont exprimées, en notation indicielle, sous la forme:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.14)$$

Où i, j, k, l prennent les valeurs 1,2,3. ε_{kl} est le tenseur de déformations, σ_{ij} est le tenseur de contraintes et C_{ijkl} est le tenseur d'élasticité (ou de rigidité).

Les composantes du tenseur des contraintes et des déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de sa symétrie. Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\text{Le tenseur des contraintes : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{Le tenseur des déformations : } \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

La loi de Hooke est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l'équation:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

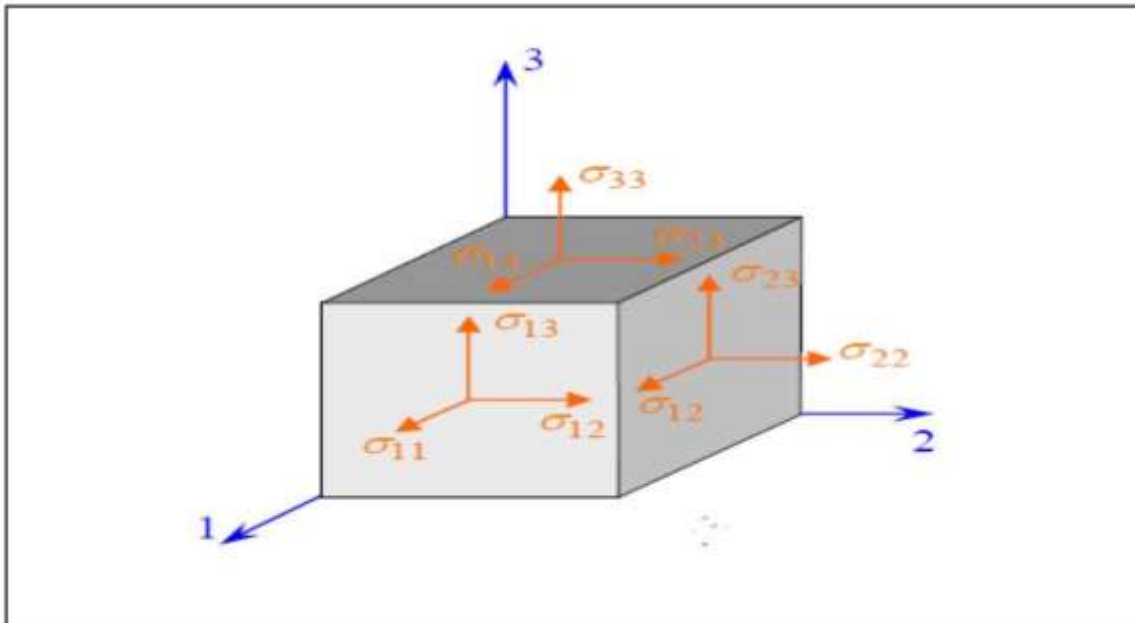


Figure II 5 Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1,2,3)

II.2.3 Différents Types des matériaux :

II.2.3.a Matériaux anisotropes:

Selon Nye [21], les matériaux anisotropes sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie. La loi de Hooke peut être exprimée par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad (2.18)$$

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Où S_{ijkl} est le tenseur de souplesse. Le tenseur de rigidité en a **81** coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes σ_{ij} et de déformation ε_{kl} , il y a une réduction des coefficients a **36** parmi ces derniers, **21** sont indépendants.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} & \text{et} & \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} & \text{et} & \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

Application du théorème des travaux virtuels : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sym & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & sym & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

II.2.3.b Matériaux orthotropes :

Selon Kollar et Springer [23], un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels.

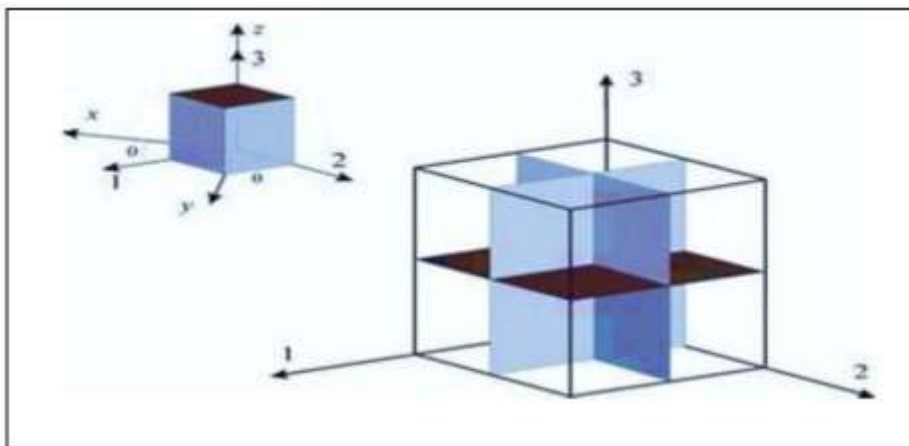


Figure II 6 Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9 .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

- 3 modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2, E_3 dans les directions de l'orthotrope.
- 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23}, G_{31} .
- ν_{ij} : (ν_{12}, ν_{23} et ν_{31}) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i .

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse S_{ij} :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & & & C_{23} &= \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned}$$

II.2.3.c Matériaux transversalement isotropes:

De la même façon que dans le matériau orthotrope, le matériau transversalement isotrope a trois plans de symétrie (Figure II.5). Toutefois, un de ces plans est isotrope.

Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope.

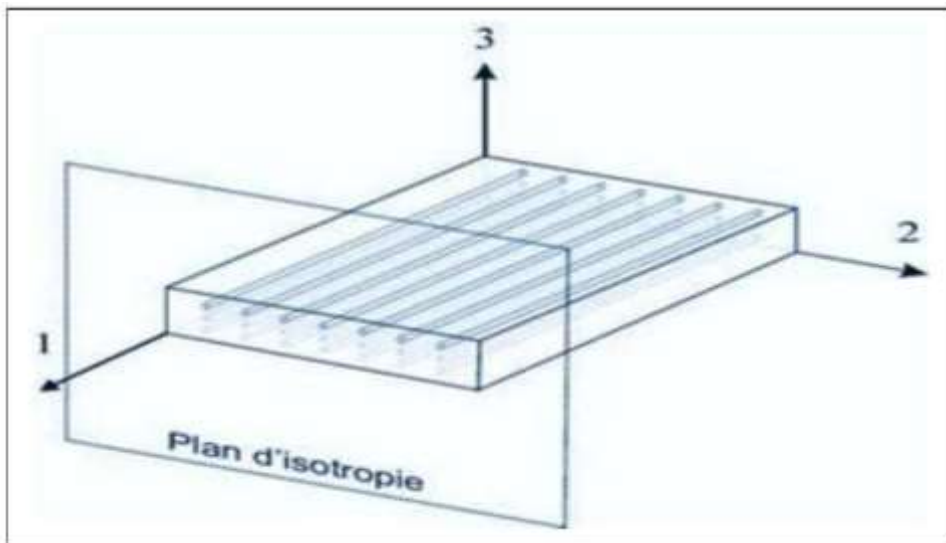


Figure II 7 Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (Figure II.6). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (2,3), est dit isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc:

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ($E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$ et G_{12}).

II.2.3.d Matériaux isotropes:

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base.

Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions : $E_1 = E_2 = E_3 = E; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu$ et $G_{12} = G_{31} = G_{23} = G$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

II.2.4 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de contrainte plane, La relation contrainte déformation peut être donnée par [10] :

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sym} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.27)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité (E_1, E_2, ν_{12} et G_{12}), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

II.2.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Selon Berthelot [10], les stratifiés sont élaborés par l'empilement de couche successive dont la direction des fibres est variable d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axe de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$.

En règle générale, l'axe (x_1) est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe (x_2) est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe (x_3) est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II.7). Il est question de caractériser les propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence (x, y, z) du stratifié, la direction des fibres fait un angle (θ) avec la direction x .

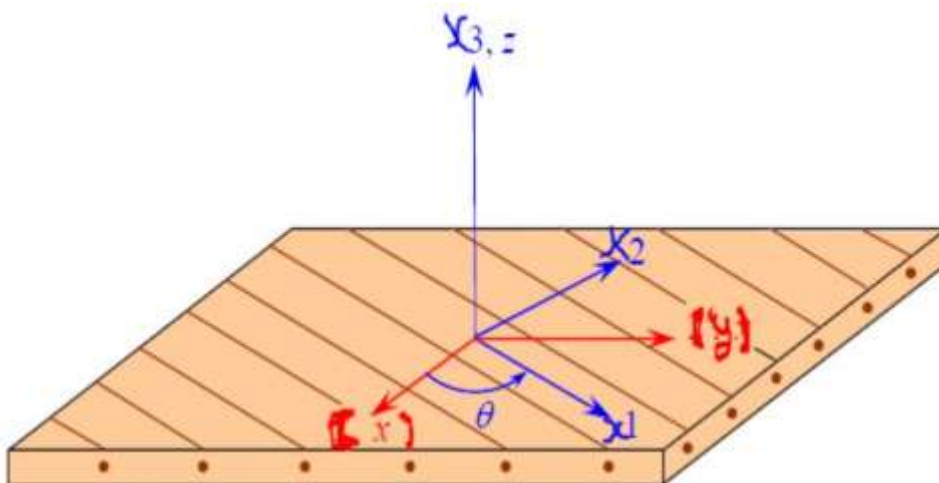


Figure II 8 Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [10].

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Les matrices d'élasticité \bar{C} et de souplesse \bar{S} dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse C et S les relations de changement de base suivantes:

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.28)$$

$$Et [\bar{S}] = [T]^{-1}[S][T] \quad (2.29)$$

Avec T est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$

$$Et \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère (x, y, z) sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

Avec

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3\end{aligned}\tag{2.34}$$

Il faut toutefois noter que \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales.

II. 3 .Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites :

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation, ont été initialement utilisées pour la modélisation de structures métalliques (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude de structures composites (en matériau anisotrope, orthotrope ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories:

- ✓ celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente, appelées **Théorie en Couche Équivalente Unique (Equivalent Single Layer Theory)**;
- ✓ celles formulées sur le concept de couches distinctes (discrètes), appelées **Théorie en Couches Equivalentes Discrètes (Discrete Layer Theory), ou simplement Théorie Layerwise (Layerwise Theory)**.

La première catégorie inclue la Théorie Classique des Stratifiés (CLT) et d'autres. D'autre part, la deuxième catégorie inclue la Théorie en Couches Indépendantes (TCI) et la Théorie de Couches Dépendantes (TCD). On peut citer par exemple les publications de Berthelot (2010) [10], de Reddy (1997) [23] et de Kollar et Springer (2003) [22] qui présentent ces différentes théories.

Dans la section subséquente, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant *la* théorie classique des stratifiés.

II.4. Théorie classique des stratifiés (CLT) :

La Théorie Classique des Stratifiés est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme surface de référence ou surface neutre), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction, tel que représenté sur la Fig. II.8.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

Selon Reddy [23], dans la théorie **CLT** les effets des déformations de cisaillements transversaux (γ_{xz}, γ_{yz}) et la déformation normale transversale (ϵ_z), ne sont pas considérés. Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie **CLT**, sont:

- Le stratifié est considéré comme une superposition de couches parfaitement liées, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter le délaminage,
- La déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre,
- Le stratifié se comporte comme une seule couche mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.
- La déformation transversale est nulle, (pas de variation de l'épaisseur).
- Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.
- Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- Le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

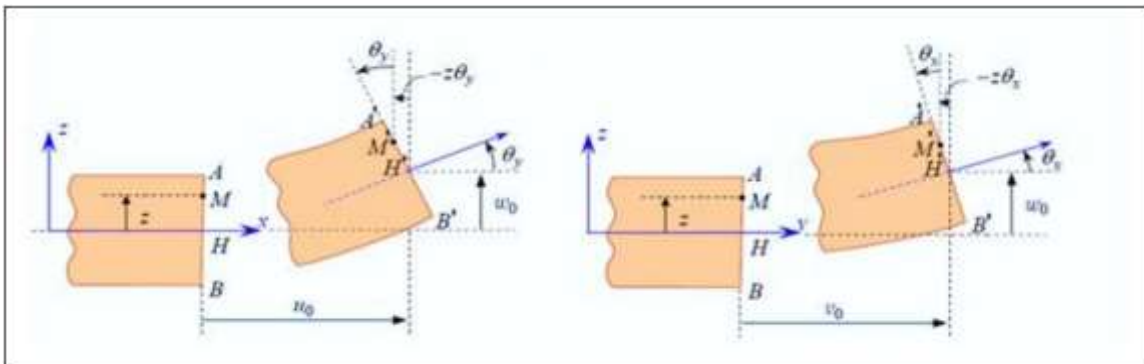


Figure II 9 Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiées (Figure adaptée de Berthelot (2010)).

Selon Reddy [23], le champ de déplacements de la théorie **CLT** est donné par l'expression suivante:

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie **CLT** n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon CEN et al. [24], l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de l'épaisseur-largeur des structures composite.

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

II.4.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des déformations nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de l'élasticité linéaire. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements (u, v, w) par rapport aux coordonnées (x, y, z).

Donc, selon Reddy [23], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \left\{ \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \right. & \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\{\varepsilon_y = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- des déformations de membrane:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

S'exprimant en fonction des déplacements (u_0, v_0) des points situés dans le plan ($o y z$).

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f = z\kappa(x, y) = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

κ_x, κ_y et κ_{xy} sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement le champ des déformations s'écrit : $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f$

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

A partir de l'équation (2.33) les contraintes dans une couche k , s'expriment par:

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

où

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y) \quad (2.40)$$

$\sigma_k(M)$ Représente la matrices de contrainte dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$, la matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes dans les couches successives.

II.4.2. Expression des résultantes et des moments :

II.4.2.a Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [10], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Soit, en définitive:

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.42)$$

$$\text{avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.43)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.44)$$

N_x, N_y et N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et de contrainte de cisaillement dans le plan (xy). Elles sont schématisées sur la figure II.9.

II.4.2.b Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned}$$

Soit, en définitive:

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.46)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.47)$$

avec

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.48)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la figure II.9.

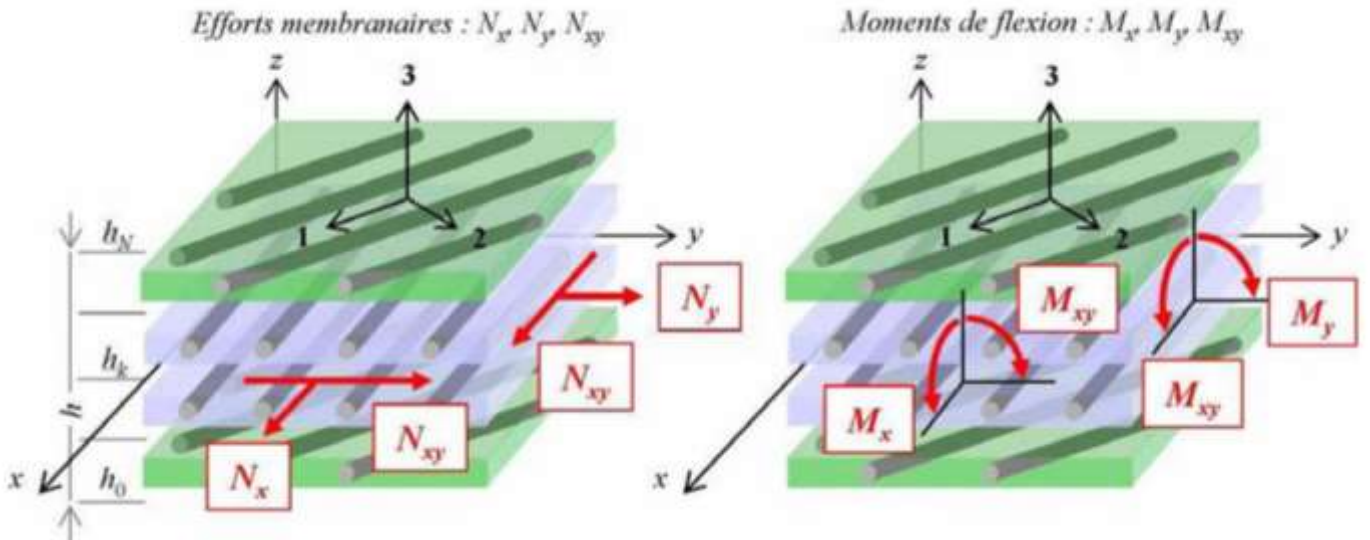


Figure II 10 Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion (Figure adaptée de François-Xavier [25]).

Connaissant que $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$ et κ_{xy} sont indépendants de z , les vecteurs forces et moments résultant peuvent être assemblés sous la forme :

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}] (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}] (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}] (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **A**, **B**, **D**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés:

- ✓ la matrice **A** correspond au comportement de membrane,
- ✓ la matrice **D** correspond au comportement de flexion,
- ✓ la matrice **B** correspond aux termes de couplage entre les phénomènes de membrane et de flexion.

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ($B=0$).

Les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locale des fibres d'un stratifié soumis à une variation de température, sont données par (Kaw)

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Où 1 et 2 désigne respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la poutre ε_1^T et ε_2^T sont les déformations d'origine thermique et qui sont données par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Avec α_1 et α_2 sont respectivement le coefficient de dilatation thermique longitudinal et transversal et ΔT la variation de température. Les composantes de la rigidité Q_{ij} sont données par:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.52)$$

Où E_1, E_2, ν_{12} , et G_{12} sont les caractéristiques mécaniques d'une couche. Les relations contraintes-déformations de la couche " k " dans le repère global du stratifié, sont données par:

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_K - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_K \right] \quad (2.53)$$

Les efforts à mi-plan d'une poutre et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Lx}^0 \\ \varepsilon_{Ly}^0 \\ \gamma_{Lxy}^0 \\ \kappa_{Lx} \\ \kappa_{Ly} \\ \kappa_{Lxy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Où

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L^0 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Avec [A], [B] et [D] sont les rigidités extensionnelle, flexionnelle et de couplage respectivement, celles-ci peuvent être définies par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k dz \\ B_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k z dz \\ D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k z^2 dz \end{aligned} \quad (2.56)$$

En notant par σ_{ij} les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz \\ M_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz \end{aligned} \quad (2.57)$$

Les résultantes de force et de moment thermique sont définies par:

Chapitre II: comportement mécanique des poutres stratifiées

$$\begin{aligned} N^T_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_K [\Delta T \{\alpha\}^T] dz \\ M^T_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_K [\Delta T \{\alpha\}^T] z dz \end{aligned} \tag{2.58}$$

CHAPITRE III

Transfert de chaleur par éléments finis

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

Introduction

Nous avons présenté au chapitre précédent la méthode des éléments finis et sa utilisation pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est appliquée dans la majorité des domaines de la Physique. Cela va de la mécanique à l'électronique, en passant par le transfert de chaleur. Dans ce chapitre on applique cette méthode pour résoudre l'équation différentielle partielle de transfert de chaleur 1D étape par étape afin de pouvoir développer un programme permettant de résoudre l'équation, avec peu de modifications.

IV. 1 Diffusion unidimensionnelle, dépendant du temps :

Les différentes étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis sont illustrées par un exemple simple. Considérons l'équation différentielle partielle suivante

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + s(x), \quad (3.1)$$

qui régit la conduction thermique transitoire dans une dimension avec un terme source $s(x)$. La variable dépendante dans cette équation est la température $T(x, t)$, les variables indépendantes sont le temps t , la distance x , $\kappa(x)$ la diffusivité thermique et $s(x)$ la source. Nous nous intéressons au calcul de la fonction de température $T(x, t)$ qui satisfait à l'équation (IV.1) (c'est-à-dire la solution) sur le domaine $\Omega = [x_A, x_B]$ sous réserve soit (i) des conditions limites de Dirichlet de la forme

$$\begin{aligned} T(x_A, t) &= T_A \\ T(x_B, t) &= T_B \end{aligned} \quad (3.2)$$

où T_A, T_B sont des températures prescrites, ou (ii) les conditions limites Neumann de la forme

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_A, t} &= q_A \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_B, t} &= q_B \end{aligned} \quad (3.3)$$

où q_A, q_B sont des flux prescrits, ou (iii) un mélange des conditions de Dirichlet et Neumann. Nous exigeons également une condition initiale

$$T(x, t = 0) = T_0(x) \quad (3.4)$$

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à choisir un type d'élément qui définit où et comment la discrétisation est effectuée. L'élément le plus simple pour les problèmes unidimensionnels est un élément à deux nœuds (figure IV.1a). Comme nous le verrons, on peut utiliser plus de nœuds par élément, ce qui aura pour effet d'augmenter la précision, mais aussi le nombre d'équations et donc le coût d'obtention de la solution numérique. [62]

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

La deuxième étape de la méthode des éléments finis consiste à approximer la variable continue T en termes de variables nodales T_i en utilisant des fonctions simples $N_i(x)$ appelées fonctions de forme. Si l'on se concentre sur un élément (qui contient 2 nœuds), et que l'on suppose que la température varie de façon linéaire entre deux nœuds, on peut écrire

$$T(x) \approx N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 \quad (3.5)$$

ou, en utilisant la notation matricielle

$$T(x) \approx [N_1(x) \ N_2(x)] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = NT \quad (3.6)$$

Dans ces équations, T est la variable continue que nous approximations dans un élément donné en termes de températures aux deux nœuds T_1 et T_2 . Comme nous avons choisi que la température varie linéairement entre deux nœuds, nous devons utiliser les fonctions de forme suivantes,

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3.7)$$

où L est la longueur de l'élément et x est la variable spatiale qui varie de 0 au nœud 1 à L au nœud 2 (figure IV.2b). Notez les propriétés importantes suivantes des fonctions de forme

- $N_1 = 1$ au nœud 1 tandis que $N_1 = 0$ au nœud 2 .
- $N_2 = 0$ au nœud 1 tandis que $N_2 = 1$ au nœud 2 .
- $N_1(x) + N_2(x) = 1$ (Sur l'ensemble de l'élément).
- Les fonctions sont uniquement locales (c'est-à-dire qu'elles ne relient que des nœuds adjacents).

Notez que les fonctions de forme sont simplement des fonctions d'interpolation (c'est-à-dire qu'elles sont utilisées pour interpoler la solution sur un élément fini). De plus, comme il apparaîtra clairement dans les exposés suivants, le choix des fonctions de forme est directement lié au choix d'un type d'élément. Par exemple, en une dimension, la variation d'un élément à 2 nœuds ne peut pas être décrite de manière unique par une fonction d'ordre supérieur à linéaire (modèle à deux paramètres), la variation d'un élément à 3 nœuds ne peut pas être décrite de manière unique par une fonction d'ordre supérieur à quadratique (modèle à trois paramètres), etc.

L'étape suivante de la méthode des éléments finis consiste à substituer notre approximation à la variable continue dans l'équation différentielle gouvernementale. Ainsi, la substitution de l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.1) conduit à

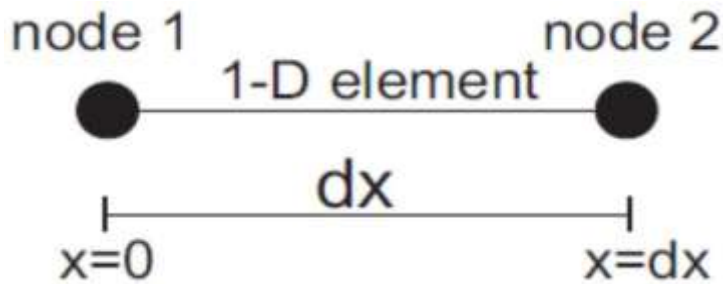
$$\frac{\partial}{\partial t} \left([N_1(x)N_2(x)] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial}{\partial x} \left([N_1(x)N_2(x)] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) \right) - s(x) = R \quad (3.8)$$

Où R (le résidu) est une mesure de l'erreur introduite lors de la discrétisation. Notez que l'équation différentielle partielle originale a maintenant été remplacée par une équation en les

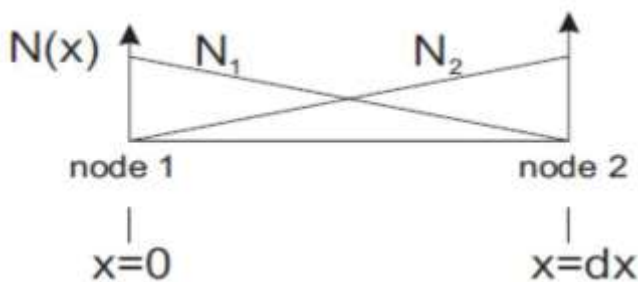
Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

variables discrétisées (nodales) T_1 et T_2 . Ainsi, nous avons maintenant une équation pour deux inconnues, qui ne peuvent évidemment pas être résolues. Le problème se réduit maintenant à trouver des valeurs pour T_1 et T_2 telles que le résidu soit minimisé (idéalement, R est égal à zéro comme dans l'équation originale). Toutefois, pour ce faire, nous devons générer un système d'équations où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues. [62]

a)



b)



c)

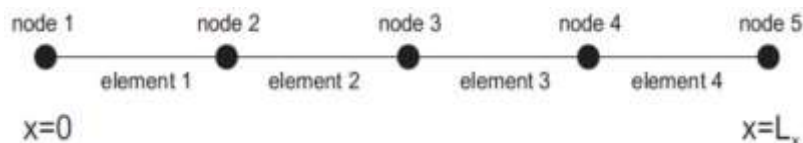


Figure 3.1 : a) un élément fini unidimensionnel à deux noeuds avec. b) des fonctions de forme linéaire, et c) un petit maillage unidimensionnel composé de quatre éléments et d'un total de cinq nœuds. Voir le texte pour la discussion. [62]

Dans la méthode des éléments finis, les coefficients inconnus T_i sont déterminés en exigeant que l'intégrale du résidu pondéré soit égale à zéro sur une base élémentaire. Pour réaliser cette étape de manière pratique, il faut multiplier (ou "pondérer") le résidu dans l'équation (3.8) par un ensemble de fonctions de pondération (chacune à son tour), l'intégrer sur le volume de l'élément et l'égaliser à zéro. De nombreuses méthodes (par exemple, la collocation, les moindres carrés et Galerkin) peuvent être utilisées pour réaliser ce processus, dont la différence dépend du choix des fonctions de pondération. Dans ce cours, nous n'examinerons que la méthode

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

Galerkin. Dans la méthode Galerkin, les fonctions de pondération sont choisies de manière à être identiques à la fonction de forme N . En effectuant les étapes décrites ci-dessus, on obtient

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) dx - \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) - \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} s(x) dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Notez que dans cet exemple où les fonctions de forme sont linéaires, une double différence de ces fonctions les ferait disparaître (ce qui n'est évidemment pas très souhaitable). Cette difficulté est résolue par l'application du théorème de Green (intégration par parties). Dans une dimension, appliquée sur le volume $\Omega = [x_A, x_B]$, cela donne

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx = - \int_{\Omega} \kappa(x) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx + \kappa(x) \frac{N_j}{\partial x} \Big|_{x_A}^{x_B} \quad (3.10)$$

On note que le terme final dans l'expression ci-dessus qui est évalué aux points extrêmes du domaine correspond à un flux discret. En invoquant le théorème de Green, nous avons implicitement introduit la condition limite de Neumann (voir l'équation (3.3)) dans notre discrétisation. Nous supposons que $\kappa(x)$ et $s(x)$ sont constants sur chaque volume d'élément $[x_A, x_B]$ et les valeurs constantes sont désignées par $\bar{\kappa}$ et \bar{s} respectivement.

Notez que ces choix n'excluent pas l'utilisation d'une valeur spatialement dépendante pour κ ou s sur l'ensemble du domaine du modèle, cela ne fait que restreindre la manière dont ces coefficients peuvent varier au sein d'un élément. Sous ces hypothèses et en utilisant l'équation (IV.10), nous pouvons écrire l'équation (3.9) comme

$$\begin{bmatrix} \int_0^L N_1 N_1 dx & \int_0^L N_1 N_2 dx \\ \int_0^L N_2 N_1 dx & \int_0^L N_2 N_2 dx \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \bar{\kappa} \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \\ \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \end{bmatrix} - \bar{s} \begin{bmatrix} \int_0^L N_1 dx \\ \int_0^L N_2 dx \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1 q_A |_{x_A} \\ N_2 q_B |_{x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

Notez que l'on a maintenant deux équations pour les deux inconnues T_1 et T_2 comme on le souhaite. En évaluant les intégrales (en utilisant N défini dans l'équation (IV.7)), l'équation (IV.11) devient

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \bar{\kappa} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} - \bar{s} \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1 q_A |_{x_A} \\ N_2 q_B |_{x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

qui peut être simplifiée en utilisant la notation matricielle suivante

$$\mathbf{MM} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right) + \mathbf{KMT} = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

Où

$$\mathbf{MM} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{KM} = \bar{\kappa} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = \bar{s} \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 q_A |_{x_A} \\ N_2 q_B |_{x_B} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

et

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

L'étape suivante consiste à discrétiser la dérivée temporelle. Pour ce faire, nous utilisons une approximation par différence finie. En supposant une discrétisation temporelle implicite, on obtient l'équation (IV.13) par approximation

$$\mathbf{MM} \left(\frac{\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{KMT}^{n+1} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

où T^{n+1} est la température future aux nœuds (c'est-à-dire les inconnues) et T^n est le vecteur des anciennes températures (c'est-à-dire les connues). En réorganisant, on peut écrire ceci comme

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{MM} + \mathbf{KM} \right) \mathbf{T}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{MMT}^n + \mathbf{F} \quad (3.19)$$

ou de manière plus compacte comme

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

$$\mathbf{KL}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{KR}\mathbf{T}^n + \mathbf{F} \quad (3.20)$$

où

$$\mathbf{KL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\Delta t} + \frac{\bar{\kappa}}{L} & \frac{1}{6\Delta t} - \frac{\bar{\kappa}}{L} \\ \frac{1}{6\Delta t} - \frac{\bar{\kappa}}{L} & \frac{1}{3\Delta t} + \frac{\bar{\kappa}}{L} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

et

$$\mathbf{KR} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\Delta t} & \frac{1}{6\Delta t} \\ \frac{1}{6\Delta t} & \frac{1}{3\Delta t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

et le vecteur \mathbf{F} est

$$\mathbf{F} = \bar{s}L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Dans l'équation (IV.20), tout ce qui apparaît sur le côté droit est connu (et se combine pour former un vecteur). La matrice \mathbf{KL} est appelée matrice de rigidité des éléments, tandis que \mathbf{T} est le vecteur d'éléments inconnus (et l'indice $n + 1$ a été supprimé pour plus de clarté). Pour les besoins de la discussion qui suit, nous introduisons la notation suivante :

$$\mathbf{KL} = \begin{bmatrix} KL_{11} & KL_{12} \\ KL_{21} & KL_{22} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Ainsi, par exemple, le terme KL_{11} a la valeur $\frac{1}{3\Delta t} + \frac{\bar{\kappa}}{L}$. On suppose que la notation est similaire pour \mathbf{KR} .

N'oubliez pas que jusqu'à présent, nous n'avons procédé à la discrétisation que pour un seul élément, alors que nous voulons généralement diviser le domaine de la solution en plusieurs éléments afin d'obtenir une solution précise. En conséquence, considérons un petit maillage unidimensionnel, composé de quatre éléments (une fois que vous avez l'idée, vous pouvez facilement considérer plus d'éléments). Cette situation est illustrée dans la figure 3.2c. Maintenant, au lieu d'avoir seulement deux inconnues, nous en avons cinq, liées aux cinq nœuds du maillage. On génère maintenant une équation matricielle globale en additionnant nœud par nœud l'équation matricielle dérivée pour un seul élément (c'est-à-dire l'équation (3.12)). Ainsi, par exemple, notez que si le nœud 1 contient une contribution de l'élément 1 uniquement, le nœud 2 a des contributions des éléments 1 et 2 (figure 3.2c). L'exécution de ce processus (en utilisant la notation introduite ci-dessus et en supposant que chaque matrice d'éléments est la même) conduit à

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} KL_{11} & KL_{12} & 0 & 0 & 0 \\ KL_{21} & KL_{22} + KL_{11} & KL_{12} & 0 & 0 \\ 0 & KL_{21} & KL_{22} + KL_{11} & KL_{12} & 0 \\ 0 & 0 & KL_{21} & KL_{22} + KL_{11} & KL_{12} \\ 0 & 0 & 0 & KL_{21} & KL_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}^{n+1} \\
 & = \begin{bmatrix} KR_{11} & KR_{12} & 0 & 0 & 0 \\ KR_{21} & KR_{22} + KR_{11} & KR_{12} & 0 & 0 \\ 0 & KR_{21} & KR_{22} + KR_{11} & KR_{12} & 0 \\ 0 & 0 & KR_{21} & KR_{22} + KR_{11} & KR_{12} \\ 0 & 0 & 0 & KR_{21} & KR_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}^n \\
 & + \bar{s}L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_B \end{bmatrix} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

qui, en utilisant la notation matricielle, devient

$$\mathbf{KL}_G \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{KR}_G \mathbf{T}^n + \mathbf{F}_G, \quad (3.26)$$

où l'indice G indique que les matrices et les vecteurs se réfèrent à l'ensemble du problème "global" ou assemblé et non à un seul élément. Notez que les matrices \mathbf{KL}_G et \mathbf{KR}_G sont symétriques, ce qui est une propriété importante (bien que non nécessaire) lorsqu'il s'agit de résoudre le système d'équations. Notez que la plupart des termes non nuls sont regroupés près de la diagonale principale - une propriété qui peut être exploitée lors de la résolution du système d'équations linéaires. Notez également que les deux flux aux limites imposées, q_A et q_B , n'apparaissent que dans les lignes 1 et 5. La raison en est que la rangée 1 correspond au nœud 1, qui est situé à gauche de la frontière ($x_A = 0$) et la rangée 5 est liée au nœud 5, qui est situé le plus à droite de la frontière ($x_B = L_x$).

L'équation (IV.24) peut également être écrite sous la forme

$$\mathbf{KL}_G \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{b}, \quad (3.27)$$

qui est la forme classique pour un système d'équations linéaires. Dans cette dernière expression, \mathbf{KL}_G est appelée matrice de rigidité (ou coefficient) (et est connue), \mathbf{b} est appelée "vecteur de droite" ou "vecteur de charge" et \mathbf{T}^{n+1} est le "vecteur de solution" ou "vecteur de réaction" inconnu.

La dernière étape avant de pouvoir résoudre le système linéaire d'équations représenté par l'équation (3.25) consiste à imposer des conditions limites. Plusieurs choix sont possibles : température fixe, gradient de température fixe, ou une combinaison des deux. Les limites de température fixe peuvent être mises en œuvre en effectuant les étapes suivantes : (1) mise à zéro des entrées dans l'équation concernée (2) placement d'un 1 sur l'entrée diagonale de la matrice de rigidité et (3) réglage de la valeur à la position correcte du vecteur de droite égale à

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

la valeur souhaitée. Par ailleurs, si l'on souhaite mettre en œuvre des conditions limites à flux nul, il n'est pas nécessaire de faire quoi que ce soit de manière explicite (c'est-à-dire qu'il s'agit de la condition limite par défaut créée lorsque l'on a ignoré les termes limites dans l'équation (IV.10)). Les conditions aux limites de flux non nul sont légèrement plus complexes à évaluer. Dans cette classe, si des flux limites sont imposés, ils seront toujours égaux à zéro. On les appellera les conditions aux limites naturelles.[62]

Nous sommes maintenant prêts à calculer la solution de l'équation (3.25). Les étapes de base qui doivent être intégrées dans un programme informatique peuvent être résumées comme suit:

1. Définir tous les paramètres physiques (par exemple, la diffusivité, le terme source, la longueur de l'espace principal) et les paramètres numériques (par exemple, le nombre d'éléments et de nœuds).
2. Définissez les coordonnées spatiales x_i de notre nœud, et spécifiez le domaine temporel où nous souhaitons obtenir la solution discrète.
3. Dans une boucle d'éléments, définissez les matrices d'éléments \mathbf{MM} et \mathbf{KM} et le vecteur de charge d'élément \mathbf{F} (voir les équations (3.14) à (3.16)). Utilisez-les pour calculer \mathbf{KL} et \mathbf{KR} (voir les équations (3.21) & (3.22)). Additionnez ces matrices nœud par nœud pour former les matrices globales \mathbf{KL}_G et \mathbf{KR}_G et le vecteur global \mathbf{F}_G (voir les équations (3.23)). Si les propriétés des éléments ne dépendent pas du temps, ces matrices globales ne doivent être calculées qu'une seule fois et peuvent être sauvegardées pour une utilisation ultérieure.
4. Dans une boucle temporelle, effectuez les opérations du côté droit de l'équation (3.25) (c'est-à-dire, tout d'abord, multipliez \mathbf{KR}_G par l'ancien vecteur de température \mathbf{T}^n et ajoutez ensuite le vecteur résultant à \mathbf{F}_G) pour former le vecteur de droite \mathbf{b} . Notez que le vecteur \mathbf{T}_0 doit contenir la forme discrète de notre condition initiale, $\mathbf{T}(x, 0)$.
5. Appliquer les conditions limites.
6. Résoudre l'équation (3.25) pour la nouvelle température, puis passer à l'étape suivante.
[62]

IV. 2 Programmation :

L'objectif de cette session est de programmer la méthode des éléments finis (M.E.F) en une dimension à l'aide de MATLAB. Pour illustrer cela, nous utilisons l'équation de diffusion thermique qui est régie par les équations d'éléments suivantes :

$$\left(\frac{\mathbf{MM}}{\Delta t} + \mathbf{KM}\right) \mathbf{T}^{n+1} = \frac{\mathbf{MM}}{\Delta t} \mathbf{T}^n + \mathbf{F}, \quad (3.28)$$

Ou

$$\mathbf{MM} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{3} & \frac{\Delta x}{6} \\ \frac{\Delta x}{6} & \frac{\Delta x}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

Chapitre III : transfert de chaleur par éléments finis

$$\mathbf{KM} = \bar{k} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F} = \bar{s} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{2} \\ \frac{\Delta x}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 q_A |_{x_A} \\ N_2 q_B |_{x_B} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

et

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

Les exposants n et $n + 1$ se réfèrent respectivement à l'ancienne (connue) et à la future (inconnue) température. Ces équations peuvent être écrites de façon plus compacte comme

$$\mathbf{KLT}^{n+1} = \mathbf{KRT}^n + \mathbf{F}, \quad (3.33)$$

où la matrice de rigidité des éléments \mathbf{KL} est

$$\mathbf{KL} = \frac{\mathbf{MM}}{\Delta t} + \mathbf{KM}, \quad (3.34)$$

et l'élément de droite de la matrice \mathbf{KR} est

$$\mathbf{KR} = \frac{\mathbf{MM}}{\Delta t}, \quad (3.35)$$

N'oubliez pas que pour un élément à deux nœuds, ces relations forment un système de deux équations pour les deux températures de nœud inconnues T_1 et T_2 . Il est important de distinguer ces équations d'éléments à partir des équations globales formées en additionnant les équations d'éléments nœud par nœud dans un maillage d'éléments finis, désigné par

$$\mathbf{KL}_G \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{KR}_G \mathbf{T}^n + \mathbf{F}_G = \mathbf{b};, \quad (3.36)$$

Où l'indice G indique que les matrices et les vecteurs sont des matrices globales. Les dimensions des matrices \mathbf{KL}_G et \mathbf{KR}_G sont $nn \times nn$ (où nn est le nombre de nœuds dans le maillage des éléments finis) alors que les matrices \mathbf{MM} et \mathbf{KM} ont des dimensions 2×2 .

Chapitre IV

**Simulation avec ANSYS de
l'effet de la température
sur les propriétés
mécaniques d'une plaque
en matériaux composites**

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

IV.1 Introduction

Les matériaux composites stratifiés, constitués d'une matrice polymère renforcée par des fibres (naturelles ou synthétiques), sont largement employés dans des environnements où la résistance mécanique et la stabilité dimensionnelle sont essentielles. Cependant, la température affecte significativement leurs propriétés. En effet, l'élévation thermique provoque un ramollissement de la matrice, une dilatation anisotrope des fibres et parfois une dégradation de l'interface fibre/matrice. La simulation numérique constitue un outil efficace pour évaluer ces effets sans recourir systématiquement à des essais expérimentaux coûteux. Le logiciel ANSYS Workbench offre des modules performants (ACP – ANSYS Composite PrePost et Mechanical) permettant la définition du stratifié, l'introduction de paramètres thermo-mécaniques et l'étude du comportement sous charges combinées.

IV.2 Modélisation de la plaque composite

- **Géométrie** : plaque rectangulaire (dimensions typiques : $200 \times 100 \times 2$ mm).

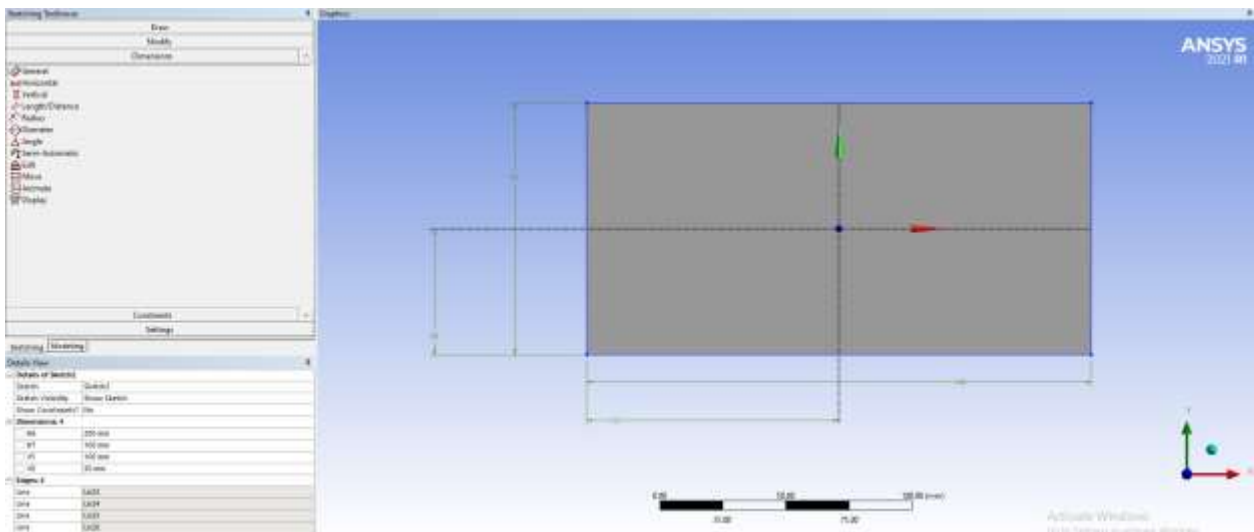


Figure IV 1 Géométrie de la plaque simulée

- **Propriétés mécaniques** : Le choix des propriétés mécaniques d'une plaque en matériaux composites dépend principalement de la nature des constituants (matrice et fibres), de leur proportion volumique ainsi que de l'orientation des couches dans le stratifié. Les paramètres les plus importants sont le module d'élasticité, la résistance à la traction et à la compression, ainsi que le module de cisaillement, qui conditionnent la rigidité et la tenue mécanique de la plaque.

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

Dans le cadre de notre simulation, le composite sélectionné est l'époxy-carbone (Figure III.3), constitué de :

- **Matrice** : résine époxy (thermodurcissable), qui sert de liant et de protection.
- **Renfort** : fibres de carbone, qui apportent la résistance mécanique et la rigidité.

a- Propriétés principales :

- **Très haute résistance spécifique** (rapport résistance/poids).
- **Grande rigidité.**
- **Bonne résistance à la fatigue.**
- **Faible dilatation thermique.**
- **Résistance chimique correcte** (dépend du type d'époxy).

b- Domaines d'application :

- Aéronautique (fuselages, ailes, pièces structurelles).
- Automobile (pièces de performance, carrosserie).
- Sport (raquettes, vélos, bateaux).
- Énergie (pales d'éoliennes, composants).

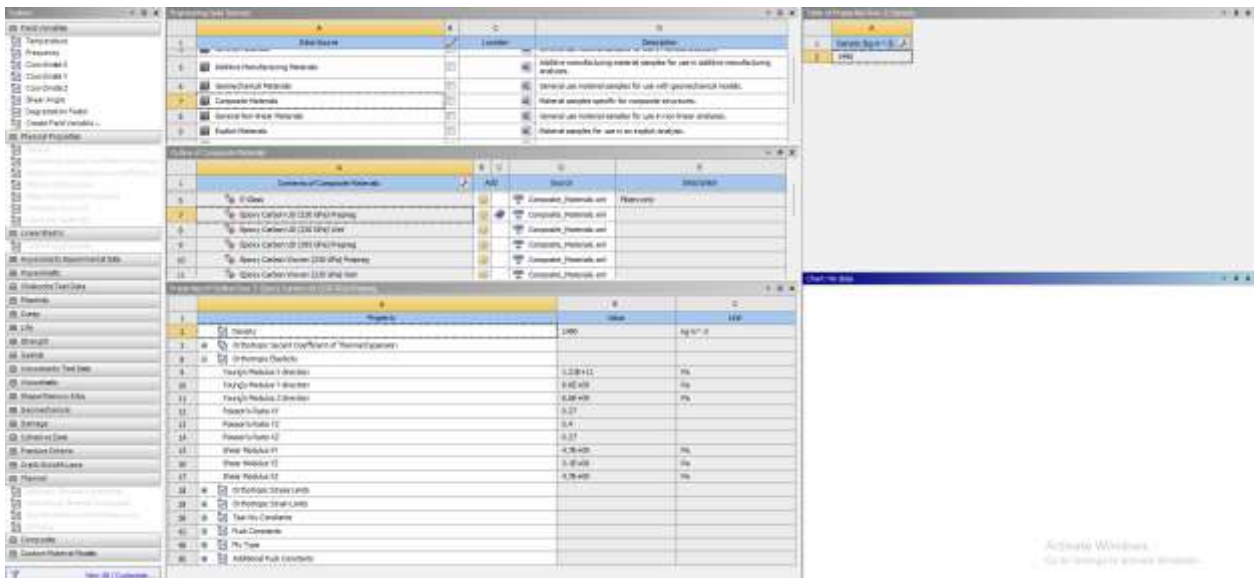


Figure IV 2 Propriétés mécanique de la plaque en époxy-carbone

- **Construction de stratification de la plaque en matériaux composite avec ANSYS Workbench ACP** : La construction de la stratification d'une plaque en matériaux composites dans ANSYS Workbench (module ACP – Ansys Composite PrepPost)

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

constitue l'étape clé pour représenter fidèlement le comportement anisotrope du stratifié. Elle consiste à définir le système de référence matériau, sélectionner les constituants (matrice/résine et renfort), créer les plis avec leurs propriétés (épaisseur unitaire, orientation, séquence d'empilement) et appliquer les règles d'empilage (symétrie, quasi-isotropie, restrictions de $0/\pm 45/90$). ACP permet également de modéliser le drapage sur la géométrie réelle, d'évaluer les angles locaux, le cisaillement intra-plis et les variations d'épaisseur, puis de générer les « rosettes » de coordonnées nécessaires à l'analyse. Une fois la stratification validée, le modèle est transféré vers Mechanical pour le maillage, les conditions aux limites et l'évaluation des réponses (contraintes par pli, déformations, flambement) ainsi que des critères d'endommagement (Hashin, Puck, Tsai-Wu). Cette démarche assure la traçabilité complète du stratifié — de la définition des plis jusqu'à la vérification des performances — et constitue la base d'études paramétriques fiables sur l'influence des orientations, épaisseurs et séquences d'empilement.

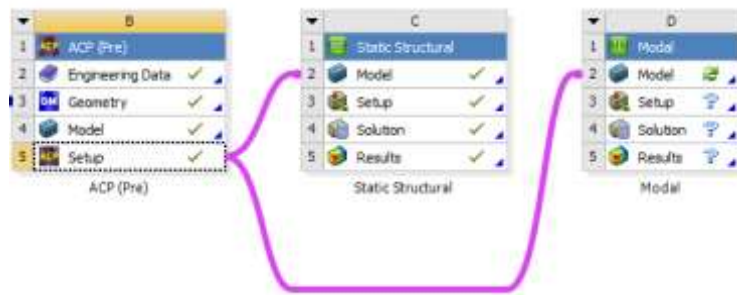


Figure IV 3 Fenêtres des analyse ACP, statique et modale sur ANSYS Workbench.

La plaque composite analysée est constituée d'un stratifié monoplies, dont les fibres sont orientées à 0° .

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

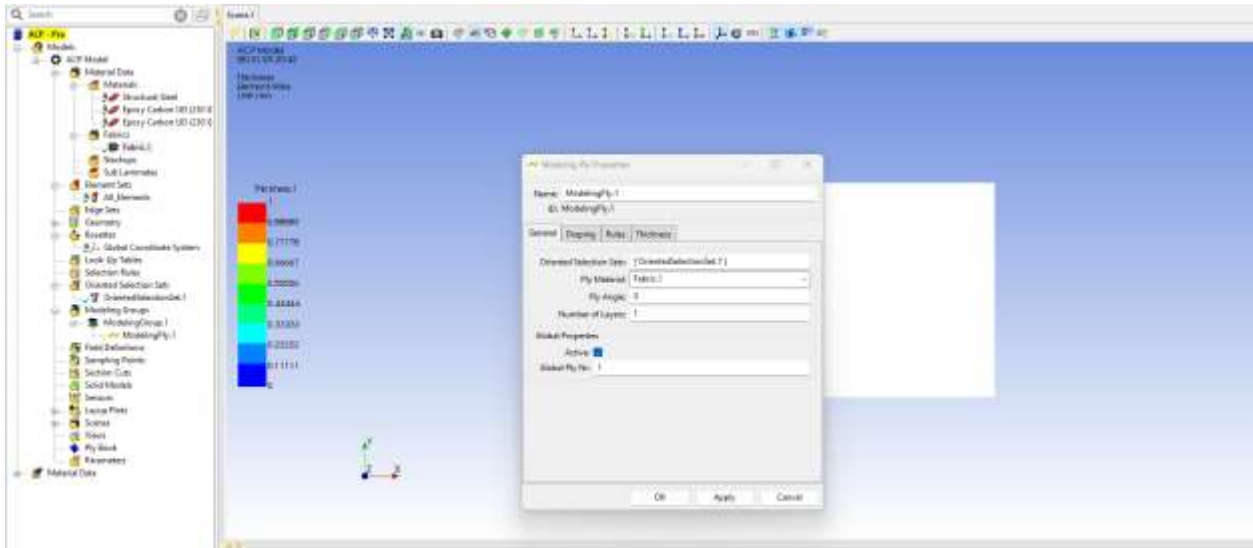


Figure IV 4 Construction des de stratification monoplies [0] de la plaque en matériaux composite.

- **Maillage :** Un maillage de la plaque composite a été réalisé avec des éléments de 5 mm.

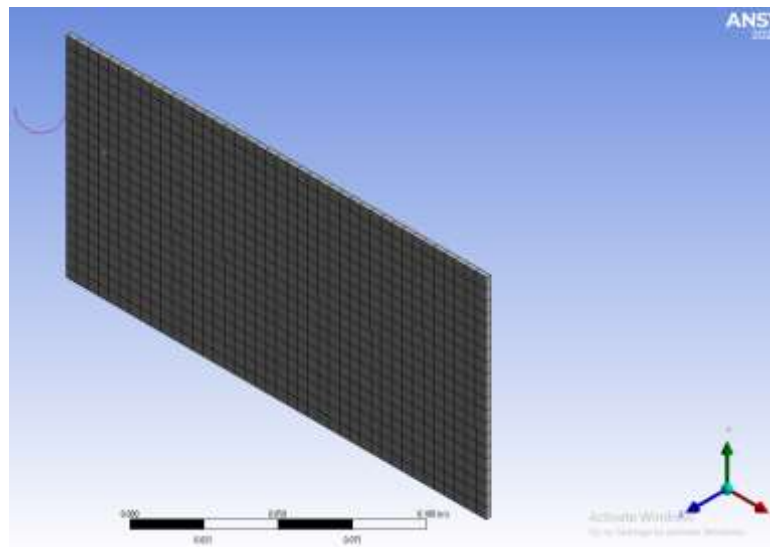


Figure IV 5 Maillage de la plaque composite.

- **Conditions aux limites :** La plaque est encastree d'un seul côté, tandis que les autres côtés restent libres.

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

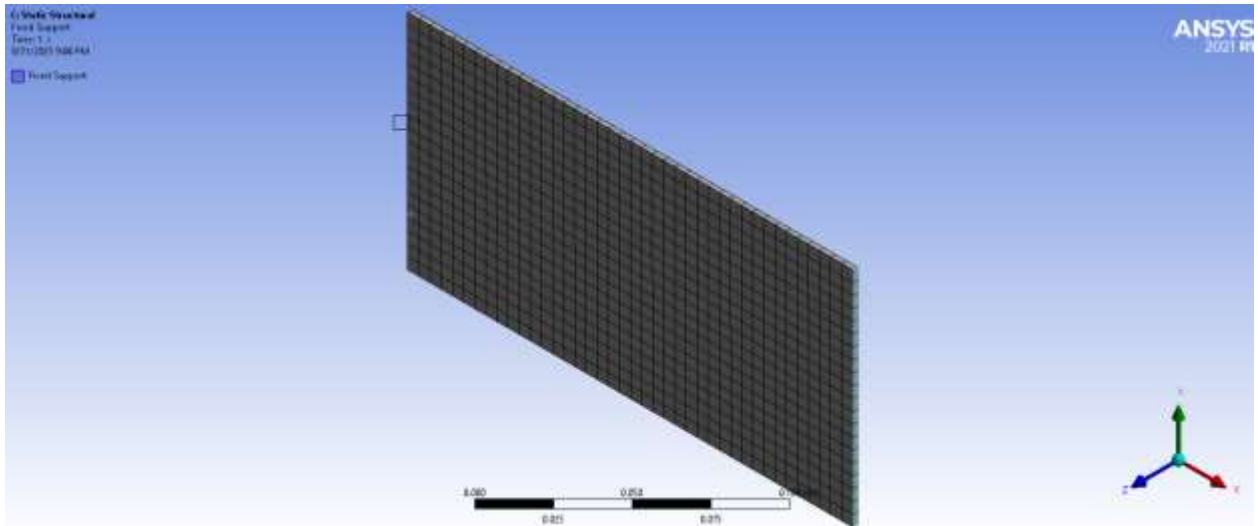


Figure IV 6 Fixation de la plaque

IV.2.1 Analyse statique

L'analyse statique d'une plaque encastree sous ANSYS Workbench constitue une étape essentielle pour étudier le comportement thermomécanique de la structure soumise à une force.

- **Application de force** : Une force de 100 N, appliquée selon l'axe (OZ) dans le sens négatif, est exercée sur la face indiquée dans la figure (Fig. III.7).

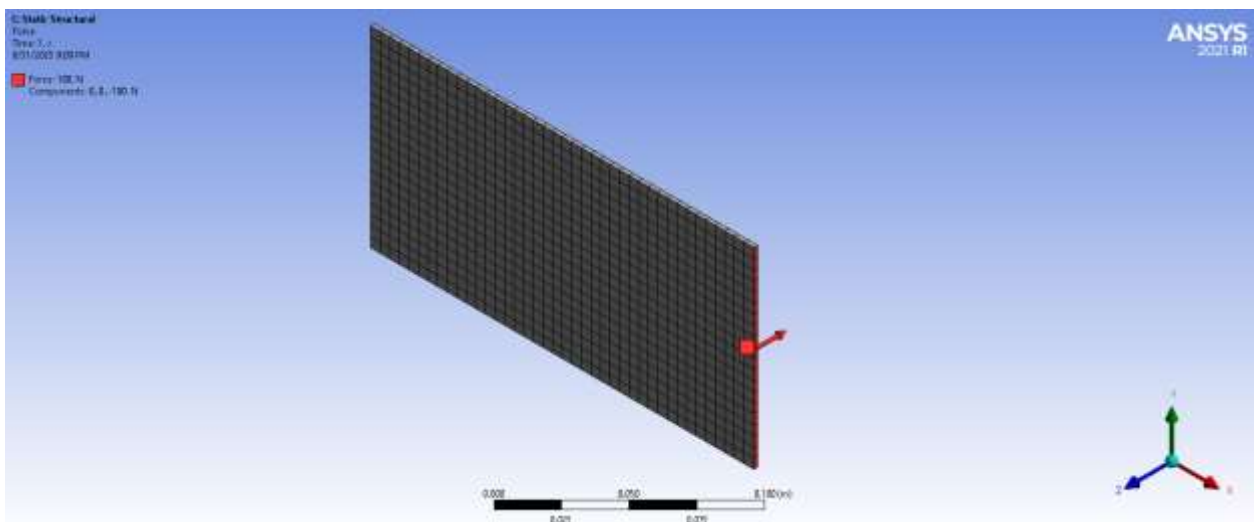


Figure IV 7 Application de force

Dans notre analyse, différentes températures sont appliquées sur le volume de la plaque. La figure III.8 illustre le cas d'une température de 150 °C.

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

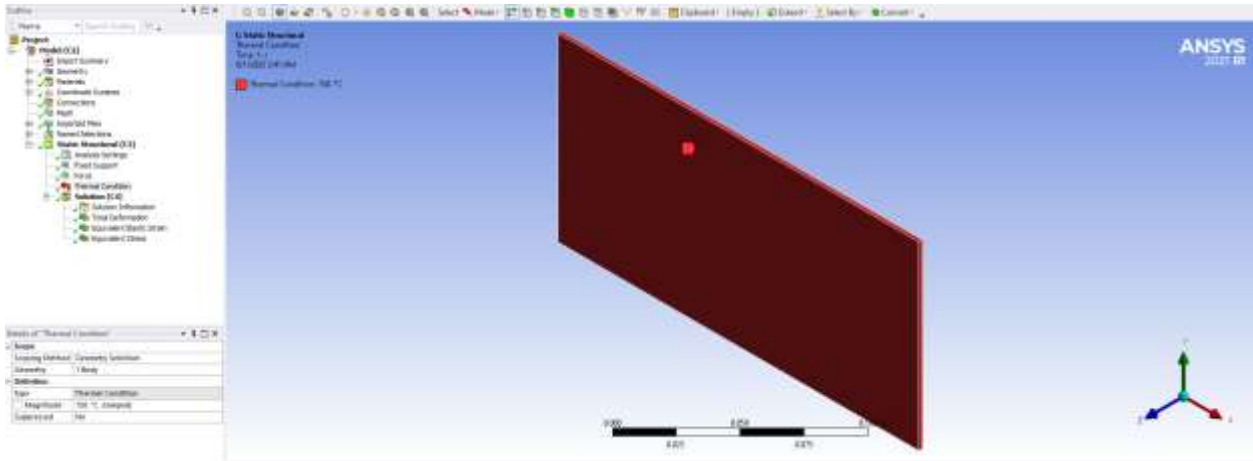
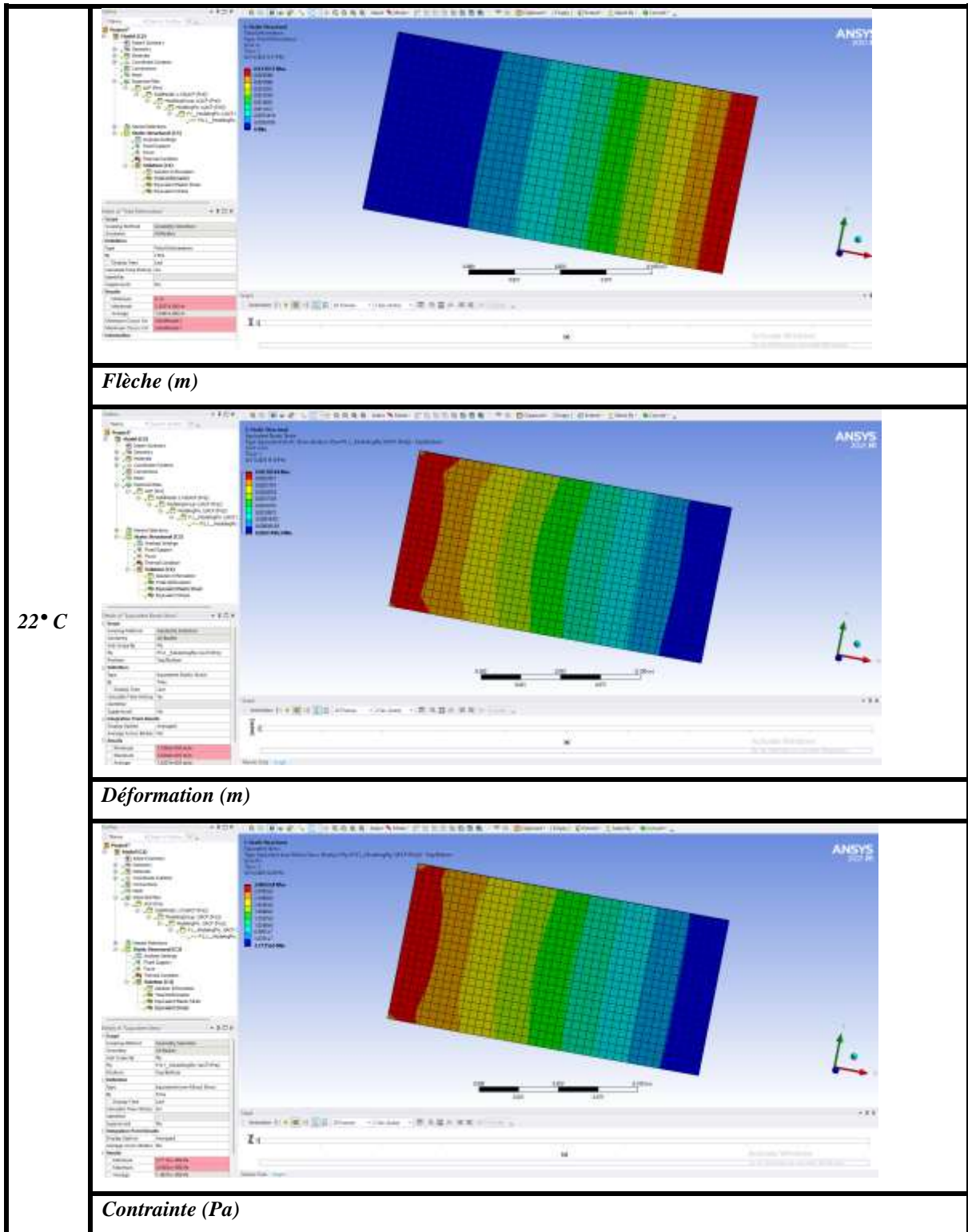


Figure IV 8 Application de température de 150° C

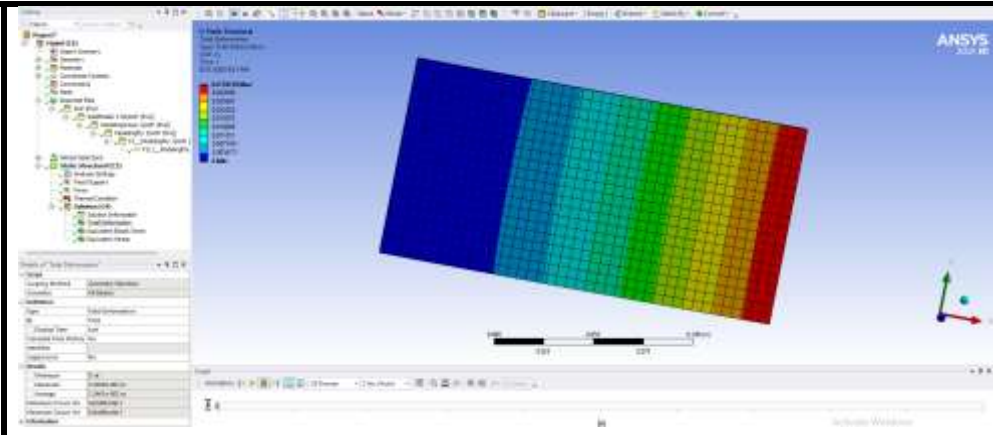
- **Résultats**

L'étude numérique de l'effet de la variation de la température sur les structures en matériaux composites revêt une importance particulière, car ces matériaux sont largement utilisés dans des domaines où les conditions thermiques peuvent fluctuer de manière significative. À travers la simulation réalisée sous ANSYS, nous avons pu analyser l'évolution de la flèche, des contraintes et des déformations sous différentes conditions de température (*Figure III. 8*).

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

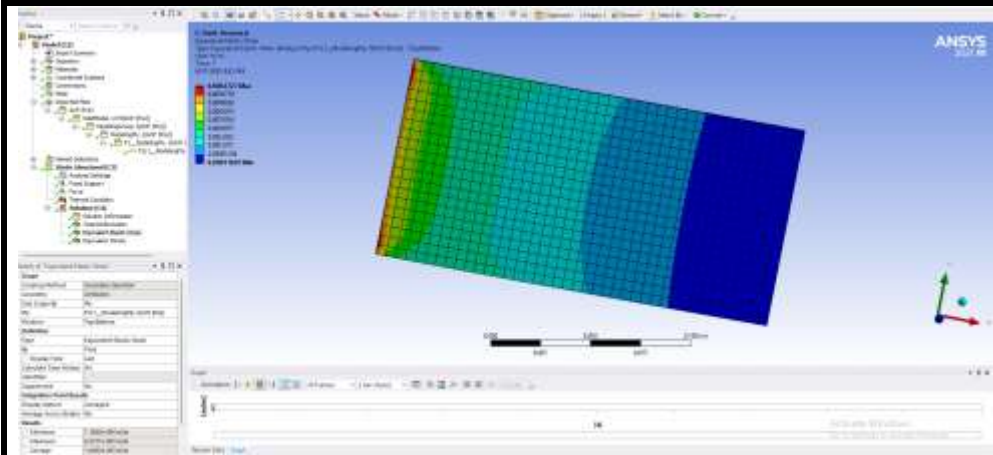


Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

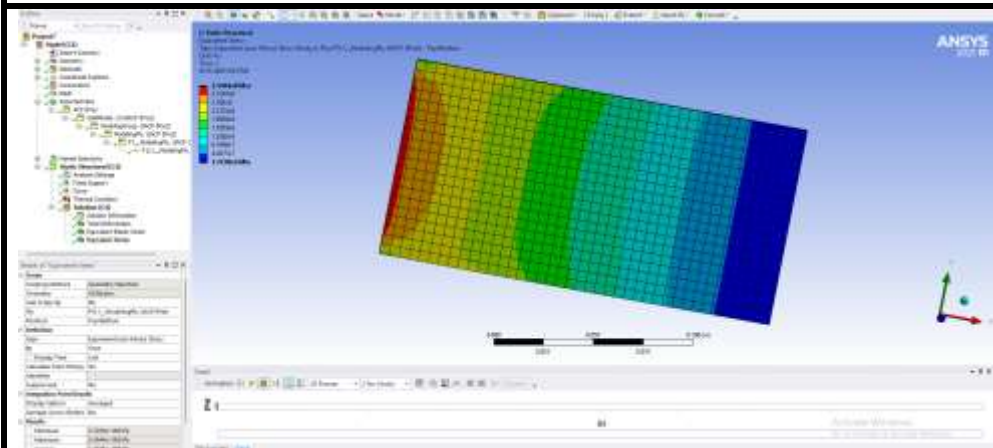


Flèche

100° C



Déformation (m)



Contrainte (Pa)

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

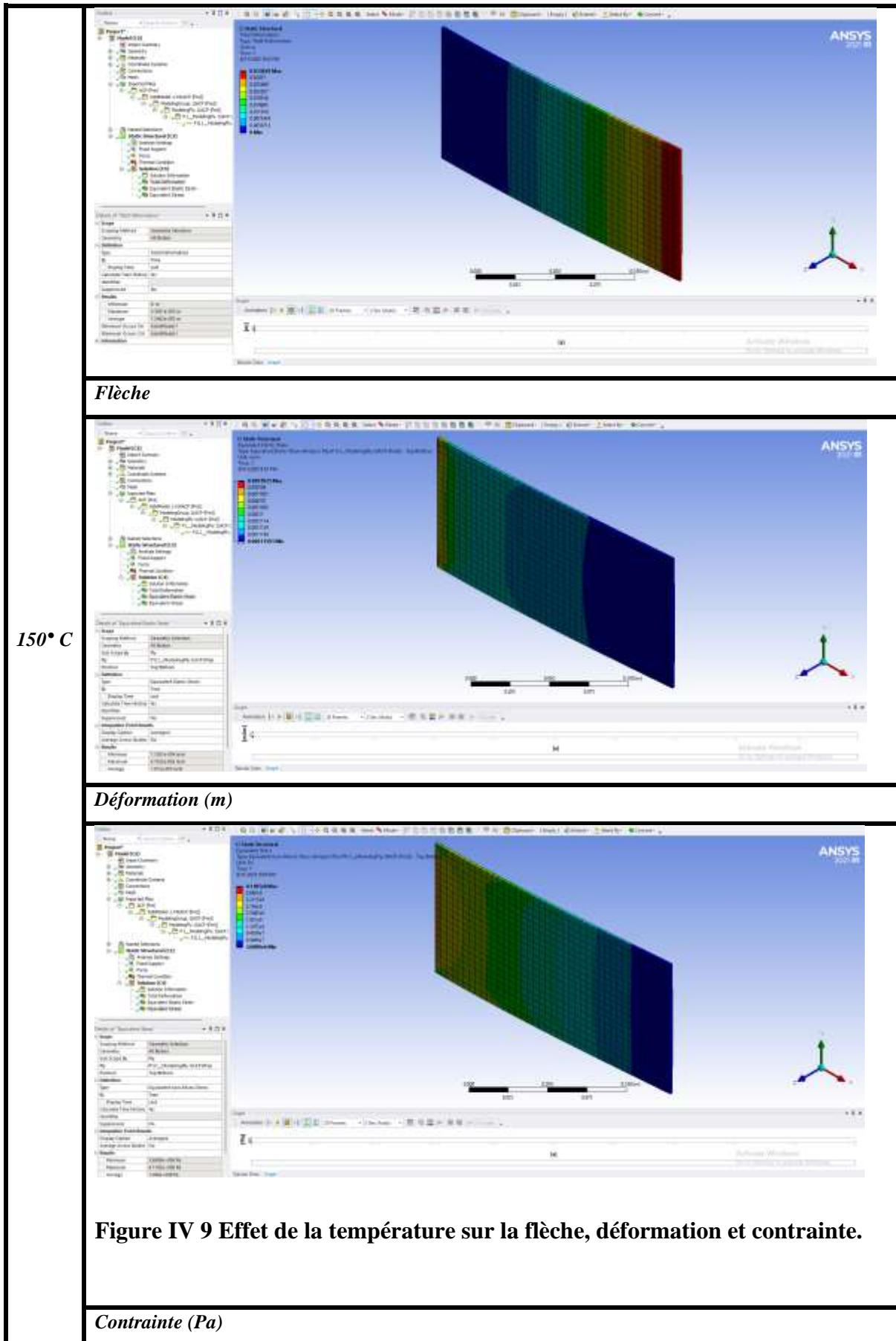


Figure IV 9 Effet de la température sur la flèche, déformation et contrainte.

Contrainte (Pa)

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

Le tableau III.1 synthétise les résultats obtenus pour la flèche, la déformation maximale et la contrainte maximale, en fonction des températures appliquées (22 °C, 100 °C et 150 °C).

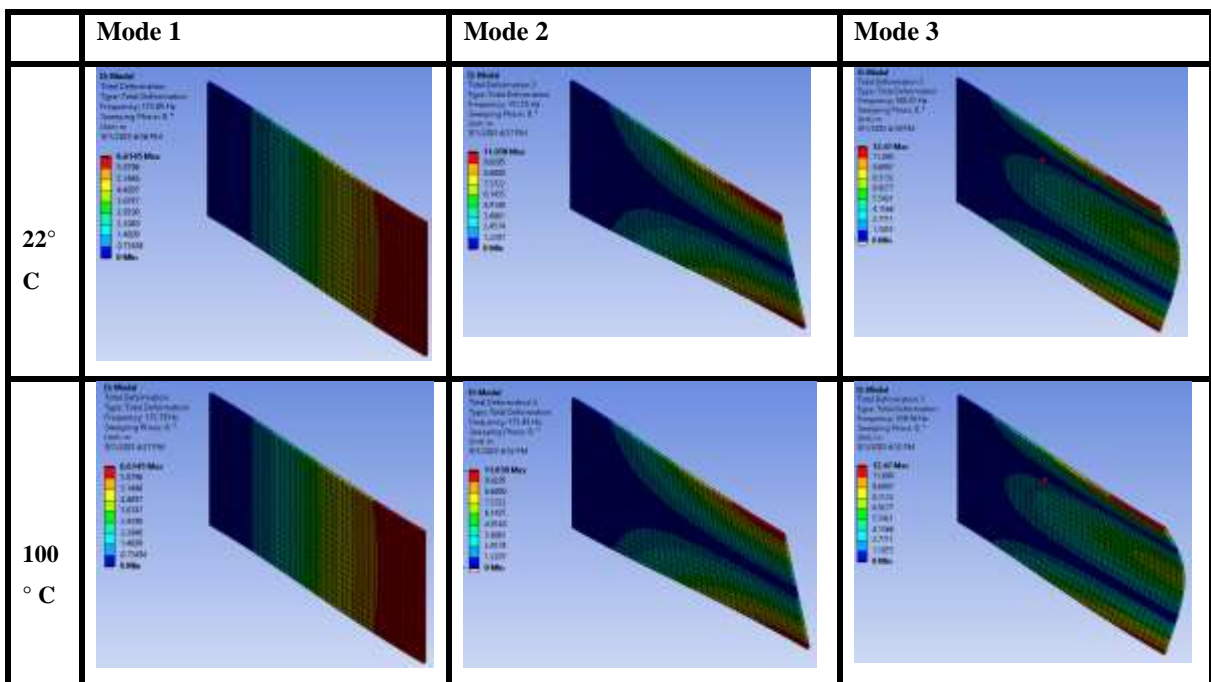
	Flèche (m)	Déformation max (m)	Contrainte max (Pa)
22° C	0.033037	0.0030244	3.006 e 8
100° C	0.033039	0.0063727	3.1547 e 8
150° C	0.033041	0.0091025	4.1185 e 8

Tableau IV.1 : Valeurs des flèche, déformation max et contrainte max dans les températures (22°,100° et 150°).

Ces résultats permettent de mettre en évidence la sensibilité de la plaque composite aux charges thermomécaniques et de mieux comprendre son comportement global. L'interprétation de ces données constitue une étape essentielle pour évaluer la performance et la fiabilité des structures composites en environnement variable.

IV.2.2 Analyse modale

L'effet de la **température sur les fréquences naturelles et les modes de vibration** est un aspect très important dans l'étude des plaques composites, car les propriétés mécaniques et géométriques varient avec la température (*Figure III. 10*).



Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

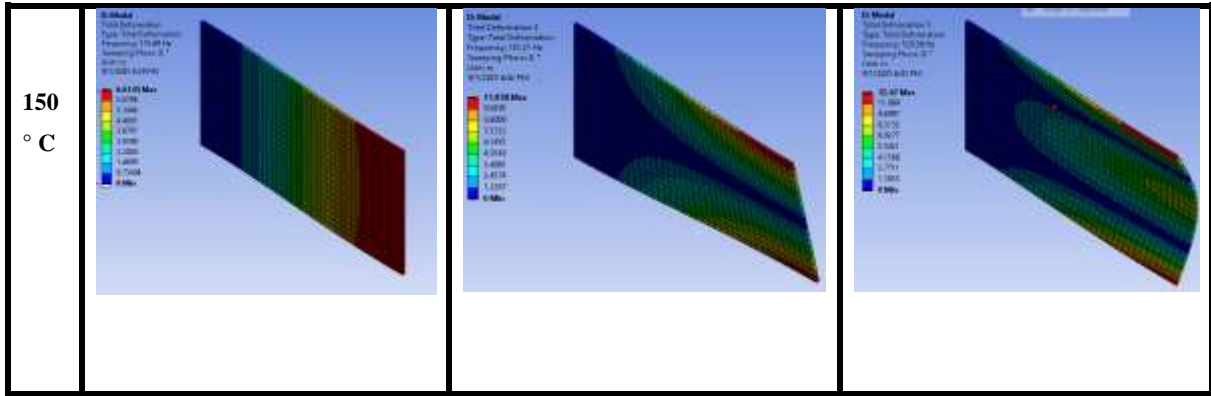


Figure IV 10 Modes des vibrations amorties dans les températures (22°, 100° et 150° C).

Le tableau III.2 présente les valeurs des fréquences ces trois premiers modes en fonction des températures 22°, 100° et 150° C.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
22° C	115.85	151.55	545.91
100° C	115.79	151.43	539.76
150° C	115.69	151.21	529.36

Tableau IV.2 : Valeurs des fréquences dans les températures (22°, 100° et 150° C).

L'étude des vibrations d'une plaque en composite époxy-carbone met en évidence l'influence significative de la température sur ses fréquences naturelles et ses modes propres. Dans le cas considéré, la plaque est constituée d'une seule couche dont les fibres sont orientées à 0°, ce qui lui confère une rigidité maximale dans la direction longitudinale des fibres.

Lorsque la température augmente, les propriétés mécaniques du matériau, notamment le module d'élasticité et le module de cisaillement, subissent une diminution progressive. Cette dégradation de rigidité se traduit par une réduction des valeurs des fréquences naturelles de la plaque. Autrement dit, plus la température est élevée, plus la structure devient souple, et ses vibrations se produisent à des fréquences plus faibles.

De plus, les modes de vibration peuvent également être affectés par cette variation thermique. Bien que la configuration générale des modes reste inchangée pour une plaque à fibres orientées à 0°, une redistribution locale des déformations peut apparaître en raison de l'anisotropie thermique du matériau. Ainsi, l'augmentation de la température engendre non seulement une baisse notable des fréquences, mais aussi une sensibilité accrue de la réponse vibratoire, ce qui

Chapitre IV : Simulation thermo-mécanique des composites sous ANSYS

peut compromettre la stabilité dynamique et la fiabilité de la plaque dans des conditions de service variables.

Conclusion générale

À travers cette étude numérique, il a été démontré que les matériaux composites constituent un choix stratégique dans de nombreux domaines industriels avancés, tels que l'aéronautique, l'automobile et le secteur énergétique, en raison de leurs propriétés mécaniques remarquables combinant légèreté, rigidité spécifique élevée et bonne résistance. Toutefois, ces propriétés demeurent fortement sensibles aux facteurs environnementaux, en particulier la température, qui peut affecter négativement leurs performances à long terme. Les simulations réalisées à l'aide du **logiciel ANSYS Workbench** ont en effet montré qu'une élévation progressive de la température entraîne une diminution du module d'Young effectif ainsi que de la résistance ultime des plaques composites étudiées. Ces résultats soulignent l'importance d'intégrer les effets thermiques dès les phases initiales de conception. Ils mettent également en évidence que la négligence de ce facteur peut conduire à des estimations imprécises de la durée de vie en service ou à des conceptions moins sûres, ce qui impose l'adoption d'une approche globale prenant en considération à la fois les exigences mécaniques et les contraintes environnementales afin de garantir l'efficacité et la fiabilité des structures composites dans des conditions réelles d'exploitation.

Perspectives futures

Au regard de ces constats, les travaux de recherche futurs pourraient s'orienter vers l'étude des effets conjoints de différents facteurs environnementaux, tels que la température et l'humidité, qui interagissent fréquemment dans les conditions réelles d'utilisation des structures composites. Une attention particulière devrait également être accordée aux chargements dynamiques et aux vibrations, qui jouent un rôle déterminant dans les applications mécaniques et aéronautiques. Par ailleurs, le développement de modèles numériques plus précis, capables de représenter les phénomènes non linéaires et les défauts liés à la fabrication, apparaît comme une étape essentielle, tout en étant complété par des essais expérimentaux permettant de valider et d'affiner les prédictions numériques. Enfin, dans une démarche d'innovation technologique, l'exploration de solutions reposant sur l'intégration de fibres hybrides ou de matériaux nanostructurés offrirait de nouvelles perspectives d'amélioration des performances thermo-mécaniques et de la résistance des composites aux conditions extrêmes. Ces pistes futures, si elles sont exploitées de manière appropriée, permettront d'optimiser les stratégies de conception et de fabrication, d'accroître la fiabilité et le rendement, et d'élargir le champ d'application des matériaux composites dans les industries de pointe.

Reference bibliographique

- _ R.G. Loewy, Recent developments in smart structures with aeronautical applications.

- _ REINHART, T.J. & CLEMENTS, L.L. « introduction to composites. » dans (engineered materials handboo - volume 2 international, (1993).

- _ GÜRDAL, Z, HAFTKA, R.T, & HAJELA, P « design and optimization of laminated composite materials » Canada: wiley-interscience publication, (1999).

- _ Prombut. P, «caractérisation de la propagation de délaminage des stratifiés composites multidirectionnels» , thèse Doctorat, Toulouse, 2007.

- _ BARRAU. J.J, «Structures en matériaux composites», Éditions Techniques de l'Ingénieur, bm5080, 2004

- _ RIGAL. J.C, NEGRIER. A, «Présentation des matériaux composites», Éditions Techniques de l'Ingénieur, a7790, 2013

- _ PERROT. Y, «Influence des propriétés de la matrice sur le comportement mécanique de matériaux composites», thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 2006.

- _ CARAMARO. L, «Fibres et fils à usage technique», Éditions Techniques de l'Ingénieur, n2510, 2005.

- _ BOISSE. P, «Mise en forme des renforts fibreux de composites», Éditions Techniques de l'Ingénieur, am3734, 2004

- _ JEAN-MARIE BERTHLOT, ((Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures)) ; 4eme édition, ed tec&doc, Lavoisier, (2005).

- _ KHERBOUCHE, Laaziz. Introduction aux modélisations et aux méthodes de calcul des matériaux composites. 2010. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri

- _ Imen KALLEL-KAMOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement postcritique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), 30 Juin 1999.

Reference bibliographique

_ Vincent MANET, Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux Interfaces dans les structures sandwich. Mémoire de Doctorat Université Blaise Pascal Clermont II, France, 17 juillet 1998.

_ Berthelot J. M. Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures. 4^{ème} édition, 2010.A

_ KHECHAI ABDELHAK, Etude numérique de l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées. Mémoire de Master 2^{ème} année, Juin 2013.

_ Daniel Gay, Matériaux composite, Hermes, 4^{ème} édition, 1997.

_ Achraf Tafla , éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du Cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches, Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.

_ Michel Dupeux, Aide-mémoire science des matériaux, Dunod, Paris, 2004.

_ Imen KALLEL-KAMOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par Flambement post-critique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), 30 Juin 1999.

_ IRISARRI, F.X. Stratégies de Calcul pour l'Optimisation Multi-objectif des Structures Composites .Thèse de doctorat. Université de Toulouse III - Paul Sabatier, Toulouse, France, 2009.

_ I. Krupa, A. B. « Thermophysical properties of polyethylene filled with metal coated polyamide particles, » European Polymer Journal, vol. 43, pp. 2443-2452, 2007.

_ J. T. Mottram and R. Taylor. « Thermal transport properties International encyclopedia of composite », pp. 476-496, 1991.

_ K. BOURAI, « ÉTUDE DU COMPORTEMENT THERMIQUE D'UN COMPOSITE BOISPOLYMÈRE POUR UNE APPLICATION EN ROTOMOULAGE, » in Faculté des études supérieures : Université Laval, 2010.

Reference bibliographique

_ J. Flourey, J. C. « Modeling Thermal Conductivity in Heterogeneous Media with finite Element Method, » Food Bioprocess Technol, pp.161-170, 2007.

_ A. Boudenne, L. I.-C. « Thermophysical Properties of Polypropylene/Aluminum Composites, » Journal of Polymer Sciences, vol. 42, pp. 722-732, 2003.

_ R.Pal. « On the Lewis-Nielson model for thermal/electrical conductivity of composites, » Composites Part A : applied science and manufacturing, vol. 39, pp. 718-726, 2008.

_ B. Agoudjil, L. I. « Correlation between transport properties of Ethylene Vinyl Acetate/glass, silver-coated glass spheres composites, Composites Part A: applied science and manufacturing, » vol.39, pp. 342-351, 2008.

_ Y. S. Song and J. R. Youn. « Evaluation of effective thermal conductivity for carbon nanotube/polymer composites using control volume finite element method, CARBON », vol. 44, pp. 710-717, 2005.

_ Y. Agari, A. U. « Thermal Conductivity of a Polymer Composite,"Journal of Applied Polymer Science », vol. 49, pp. 1625-1634, 1993.

_ Y. Agari, A. U. « Thermal Conductivity of a Polymer Filled with Particles in the Wide Range from Low to Super-High Volume Content,»Journal of Applied Polymer Science, vol. 40, pp. 929-941, 1990.

_ H. He, R. F. « Thermal conductivity of ceramic particle filled polymer composites and theoretical predictions, »J Mater Sci, vol. 42, pp. 6749-6754, 2007.

_ H. Hatta and M. Taya, « Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite,»J. Appl. Phys, vol. 58, pp. 2478-2486, 1985.

_ Bhyrav Mutnuri. « Thermal conductivity characterization of composite materials, »

Morgantown, West Virginia,These .2006