UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Algèbre et mathématiques discrètes

Par

Ourda ZIANE

Sujet

Sur les nombres flous et ses opérations

Date de soutenance : 20/06/2018.

Devant le jury :

Mr. Soheyb MILLES	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr. Kheir SAADAOUI	MAA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Lakhdar HEBOUB	MAA. Univ de M'sila	Examinateur
Mr. Ali OUMHANI	MCB. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

Tout d'abord Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Je tiens en tout deuxième lieu à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Mr. K.SAADAOUI pour son orientation, ses conseils ainsi que ses précieuses directions.

Je remercie les membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu, ainsi que tous mes amis.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont encourage et soutenu moralement et matériellement pendant les moments les plus difficiles et durant toute ma vie, et qui me sont les plus chères sur cette planète :

mon père et mon mère.

A tous mes amies

A tous ceux que j'aime

A tous les étudiants de ma promotion

Avec l'expression de tous mes sentiments de respect, je dédie ce mémoire

Table des matières

Introduction

La théorie des sous-ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite. Elle a été développée par Lotfi Zadeh en 1965.

Le concept de nombres flous et d'opérations arithmétiques floues a été introduit par Zadeh[12] et Dubois et Prade[4]. Depuis lors, plusieurs auteurs ont étudié les propriétés et les applications proposées des nombres flous[10].

L'une des principales applications de l'arithmétique des nombres flous est le traitement de systèmes linéaires flous et de systèmes linéaires complètement flous[1][2], et plusieurs problèmes dans divers domaines tels que l'économie, l'ingénierie et la physique se résument à la résolution d'un système linéaire d'équations.

Les nombres flous sont utilisés dans les statistiques, la programmation informatique, l'ingénierie (en particulier les communications) et la science expérimentale. Le concept prend en compte le fait que tous les phénomènes dans l'univers physique ont un degré d'incertitude inhérente. En général, les opérations arithmétiques sur les nombres flous peuvent être approchées soit par l'utilisation directe de la fonction d'appartenance (par le principe d'extension de Zadeh), soit par l'utilisation équivalente de la représentation α-coupe.

Le but de ce mémoire est d'étudier les nombres flous et leurs arithmétiques.

Le mémoire est subdivisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre nous allons étudier les concepts fondamentaux de la théorie des sous-ensembles flous, les propriétés fondamentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques, les α-coupes, produit cartésien et projection, et aussi l'extension principale d'un sous-ensemble flou.

Dans le deuxième chapitre nous allons étudier les nombres flous, leur concept fondamental, puis le fonctionnement des nombres flous. De plus, nous introduirons un type particulier de nombre flou, et aussi l'intervalle et le nombre flou de type L-R.

Chapitre 1

Généralités sur les sous ensembles flous

Les sous-ensembles flous (en brèf EFs) constituent une généralisation de notion d'ensemble classique et ont été introduits par Lotfi Zadeh en 1965[11] .

Dans ce chapitre, nous donnons un aperçu sur la théorie des sous-ensembles flous en présentant ses concepts de base ainsi que les opérations les plus couramment utilisées.

1.1 Généralités sur les ensembles classiques

Avant d'entamer la définition de sous-ensemble flou on procède à définir l'ensemble classique.

Définition 1.1 [7](Ensemble classique) Un ensemble classique A de lensemble de référence X est défni par une fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments de X n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à A

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Exemple 1.1 Soient $X = \mathbb{R}$ l'ensemble de référence et A l'ensemble des nombres compris entre 4 et 10 est caractérisé par la fonction caractéristique suivante

$$\chi_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

1.1.1 Opérations algébriques sur les ensembles

Soit A, B deux ensemble de référentiel X. Pour plus de détail voir[6].

- **L'inclusion** on dit qu'un ensemble A est inclus dans l'ensemble B, ou encore que A est un sous-ensemble ou une partie de B si

$$\forall x \in X,\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

On écrit alors $A \subseteq B$.

Si les relations suivantes sont satisfaites entre les deux ensembles A et B, $A \subseteq B$ et $A \neq B$, alors B a des éléments qui n'appartiennent pas à A. Dans ce cas, A est appelé un sous-ensemble propre de B, et cette relation est désignée par : $A \subset B$.

- **L'égalité d'ensembles** soit deux ensembles A et B qui contiennent les mêmes éléments sont dits égaux, et on écrit $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Dans le cas contraire on dit qu'ils sont distincts et on note $A \neq B$.

- **L'intersection** l'intersection des ensembles A et B se compose des éléments communs aux deux ensembles A et B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

L'intersection peut être généralisée entre les ensembles dans une famille d'ensembles

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\},$$

où $\{A_i | i \in I\}$est une famille d'ensembles.

- **L'union** L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'union pourrait être définie entre plusieurs ensembles. Par exemple, la réunion des ensembles de la famille suivante peuvent être définis comme suit.

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \text{ pour certains } i \in I\},$$

où la famille d'ensembles est $\{A_i \mid i \in I\}$.

- **La différence** La différence de B et A noté $B - A$ ou $B \setminus A$ est constituée des éléments qui sont en B, mais pas dans A. C'est -à- dire :

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}.$$

- **Le complément** Soit A un sous-ensemble de l'ensemble référentiel X. Alors le complément de A, noté A^c, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X mais qui n'appartiennent pas à A. De façon plus concise nous écrivons

$$A^c = X - A = \{x \in X \;\text{ tel que } x \notin A\}.$$

Exemple 1.2 Soit un référentiel $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. et soient A, B deux sous-ensembles de X donnée par

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 6, 8\}$,
Alors on obtient
$A \cap B = \{4, 6\}$,
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$A^c = \{1, 8, 9, 10\}$,
$B^c = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$,
$B - A = \{8\}$.

Propriétés des opérations sur les ensembles classiques

Involution	$(A^c)^c = A$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativité	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivité	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotence	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (B \cup C) = A$
Absorption avec $\varnothing$ et X	$A \cup X = X$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identité	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap X = A$
Loi de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorption de complément	$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$
Loi de non contradiction	$A \cap A^c = \varnothing$
Tiers exclu	$A \cup A^c = X$

1.2 Sous-ensembles flous

Le concept de sous-ensemble flou constitue un assouplissement de celui de sous-ensemble d'un ensemble donné. Il n'existe pas d'ensembe flou au sens propre, tous les ensembles considérés étant classiques et bien définis. On utilise toutefois souvent le terme d'ensemble flou au lieu de sous-ensemble flou, par abus de langage, conformément à la traduction du terme original de "fuzzy set", que l'on oppose au «crisp set» désignant un sous-ensemble non flou. Pour un langage mathématique acceptable, nous utilisons indifféremment le terme sous-ensemble flou et ensemble flou.

Définition 1.2 [11]Soit X un ensemble de référence(classique), un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance que associe à chaque élément x de X, le degré $\mu_A(x)$, compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A

$$\mu_A : X \to [0, 1].$$

Remarque 1.1 [7]Dans le cas particulier où μ_A ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1, le sous-ensemble flou A est un sous-ensemble classique de X. Un sous-ensemble classique est donc un cas pariculier d'un sous-ensemble flou.

Notation 1.1 [7]*Soit X l'ensemble de référence.*

1. Un sous-ensemble flou $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$ de X, noté par $A = \sum\limits_{x \in A} \mu_A(x)/x$ si X est dénombrable et par $A = \int_x \mu_A(x)/x$, si X et non dénombrable.
2. L'ensemble de tous les sous-ensembles flous de X noté par $F(X)$.

Exemples 1.3 Soit l'univers X des âges de 10 à 70 ans, on écrit $X = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$.

On peut définir les notions de "jeune" et de "vieux" respectivement par les ensembles flous A et B suivants

$A = \{< 10, 1 >, < 20, 0.8 >, < 30, 0.6 >, < 40, 0.2 >, < 50, 0.1 >, < 60, 0 >, < 70, 0 >\}$,

$B = \{< 10, 0, >, < 20, 0.1, >, < 30, 0.3 >< 40, 0.5 >, < 50, 0.7 >, < 60, 0.9 >, < 70, 1 >\}$.

1.2.1 Opérations sur les sous-ensembles flous

Le concept de sous-ensemble flou de l'ensemble X étant une généralisation de la notion de sous-ensemble classique de X, ces opérations sont choisies de façon à être équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsque les fonctions d'appartenance ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

Etant donné deux sous-ensembles flous A et B de X. Pour plus de détail voir[7]

- **L'égalité** on dit que les deux sous-ensembles flous A et B sont égaux si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément de X.

$$A = B \text{ si et seulement si } \mu_A(x) = \mu_B(x)\ \forall x \in X.$$

- **L'inclusion** on dit que A est inclus dans B et on note $A \subseteq B$, si leurs fonctions d'appartenance sont telles que

$$A \subseteq B \text{ si et seulement si } \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

- **L'intersection** l'intesection de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou C, que l'on note $A \cap B$, tel que

$$\forall x \in X,\ \mu_C(x) = \mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\},$$

"min"désignant l'opérateur de minimisation.

- **L'union** l'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou D, que l'on note $A \cup B$, tel que

$$\forall x \in X\ ,\mu_D(x) = \mu_{A\cup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\},$$

"max"désignant l'opérateur de maximisation.

- **Le complément** le complément A^c d'un sous-ensemble flou A de X est défini comme le sous ensemble flou de X de fonction d'appartenance

$$\forall x \in X,\ \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

- **L'addition** $A + B$

$$A + B = \left\{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\rangle \ \mid x \in X\right\}.$$

- **La multiplication** $A \cdot B$

$$A \cdot B = \left\{\langle x, \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\rangle \ \mid x \in X\right\}.$$

- **La différence** la différence de deux ensembles flous A et B dans X, est l'ensemble flou $A - B = A \cap B^c$ dont la fonction d'appartenance est

$$\mu_{A-B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right\}.$$

Remarque 1.2 [7]Contrairement aux ensembles classiques, il vérifie généralement $A^c \cap A \neq \varnothing$ et $A^c \cup A \neq X$, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas les propriétés classiques de la non-contradiction et du tiers exclu. Les autres propriétés de la théorie des ensembles classiques sont cependant satisfaites.

Exemple 1.4 Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles flous de X donnée par

$A = \{< x, 0.3 >, < y, 1.0 >, < z, 0.6 >\}$,
$B = \{< x, 0.1 >, < y, 0.7 >, < z, 1.0 >\}$,
Alors on obtient
$A^c = \{< x, 0.7 >, < y, 0 >, < z, 0.4 >\}$,
$B^c = \{< x, 0.9 >, < y, 0.3 >, < z, 0 >\}$,
$A \cup B = \{< x, 0.3 >, < y, 1.0 >, < z, 1.0 >\}$,
$A \cap B = \{< x, 0.1 >, < y, 0.7 >, < z, 0.6 >\}$,
$A + B = \{< x, 0.37 >, < y, 1.0 >, < z, 1.0 >\}$
$A \cdot B = \{< x, 0.03 >, < y, 0.7 >, < z, 0.6 >\}$,
$A - B = \{< x, 0.3 >, < y, 0.3 >, < z, 0 >\}$.

1.2.2 Caractéristiques d'un sous ensemble flou

Les caracteristiques d'un sous ensemble flou A de X les plus utiles pour le décrire sont celle qui montre à quel point il différe d'un sous-ensemble classique de X. Pour plus de détail voir[7]

Définition 1.3 Le noyau de A, noté $noy(A)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A vaut 1

$$noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Définition 1.4 Le support de A, noté $supp(A)$, est la partie de X sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle

$$supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.5 La hauteur, notée $h(A)$, d'un sous-ensemble flou A de X est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Définition 1.6 Le sous-ensemble flou A de X est normalisé si sa hauteur $h(A)$ est égale à 1.

Définition 1.7 La cardinalité du sous-ensemble A de X est définie par

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Exemples 1.5

1) Soit $X = \{A, B, E, F, G, I\}$ un ensemble fini.

Soit le sous ensemble flou A donnée par

$A = \{< A,\ 0.6 >, < B,\ 0.7 >, < E, 0.4 >, < F, 0.3 >, < G, 0.8 >, < I, 0.5 >\}$. Alors $h(A) = 0.8$, $Supp(A) = X$, $Noy(A) = \phi$, $|A| = 3.3$

et $B = \{< A,\ 0 >, < B,\ 0 >, < E, 1 >, < F, 0.8 >, < G, 0 >, < I, 1 >\}$. Alors B est un sous-ensemble flou normalisé,car $h(B) = 1$, $Supp(B) = \{E, F, I\}$, $Noy(B) = \{E, I\}$, $|B| = 2.8$.

2) Soit $X = [0, 35]$ (l'ensemble des âges) tel que $\alpha \in [0, 1]$, et soit A sous-ensemble de X des âges jeunes défini par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [20, 30] \\ 0 & si \quad x \geq 35 \ et \ x \leq 15 \\ \alpha \ si \ x \in \,]15, 20[\ \ et \ x \in \,]30, 35[& \end{cases}$$

le noyau de A est $noy(A) = [20, 30]$, et le support de A est $supp(A) = \,]15, 35[$, et la hauteur de A est $h(A) = 1$.

Voir la figure 1.1.

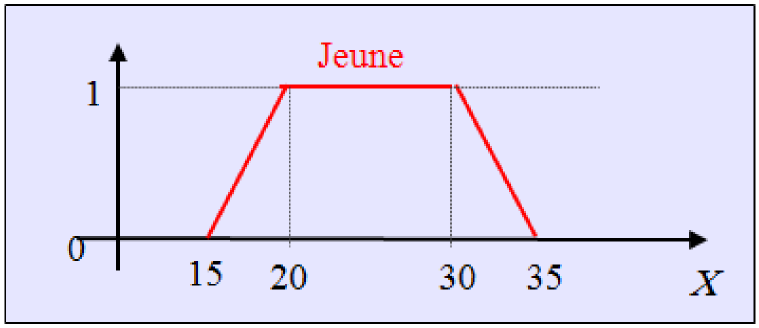

Fig. 1.1 Sous-ensembles flous "jeune"

1.3 Les α-coupes d'un sous-ensemble flou

Etant donné le sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X, on choisit un seuil α entre 0 et 1. On construit le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé à A pour ce seuil, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à α.

Définition 1.8 [7]Pour un seuil donné α de $[0, 1]$, on définit la α-coupe du sous-ensemble flou A de X (ou sous-ensemble de niveau α associé à A) comme le sous-ensemble

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Dont la fonction caractéristique χ_{A_α} est telle que

$$\chi_{A_\alpha}(x) = 1 \textit{ si et seulement si } \mu_A(x) \geq \alpha.$$

Définition 1.9 [7]Pour tout niveau α de $[0, 1]$, on définit la α-coupe stricte de A comme le sous-ensemble

$$A^\alpha = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Exemple 1.6 Soit A un ensemble flou donnée par

$$\begin{aligned}
&A = \{< x, 0.3 >, < y, 1.0 >, < z, 0.6 >\}, \\
&A_{0.6} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.6\} = \{y, z\}, \\
&A_{0.7} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.7\} = \{y\}, \\
&A^{0.6} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0.6\} = \{y\}
\end{aligned}$$

Proposition 1.1 [7]*Soient A, B deux sous-ensembles flous alors*

1. Si $A \subset B$ alors $A_\alpha \subset B_\alpha$,
2. $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$,
3. $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

Théorème 1.1 [7]*(Théorème de décomposition) Tout sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α-coupes par*

$$\forall x \in X \mid \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)).$$

où "sup" indique la borne supérieure des valeures possibles et χ_{A_α} est la fonction caractéristique de A_α.

Preuve. [7]Soit $x \in X$, supposons $\mu_A(x) = \beta$ ($\beta \in [0,1]$,$x \in A$. Donc $\mu_A(x) = \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x)$ et $\mu_A(x) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$.

Réciproquement, soit $x \in X$ pour tout niveau β on a

$$\begin{cases} \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si} \quad \mu_\alpha(x) < \beta, \\ \chi_{A_\beta}(x) = 1 & \text{si} \quad \mu_\alpha(x) \geq \beta. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = \beta & \text{si} \quad \mu_\alpha(x) \geq \beta, \\ \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si} \quad \mu_\alpha(x) < \beta. \end{cases}$$

Donc dans les deux cas, $\beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) \leq \mu_A(x)$. D'où, $\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) \leq \mu_A(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in X$, $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$. ■

Exemple 1.7 Soit X l'ensemble des pays

$X = \{Allemagne,\ Belgique,\ Espagne,\ France,\ G - Bretagne,\ Italie\}$.

On prendre le sous-ensemble flou associé à la propriété "méridional"

$M = \{< A, 0 >, < B, 0 >, < E, 1 >, < F, 0.8 >, < G, 0 >, < I, 1 >\}$,

et construire sa $1-$coupe, $M_1 = \{E, I\}$ identique à sa $0.9-$coup, ainsi que sa $0.8-$coupe $M_{0.8} = \{E, F, I\}$, qui est identique à toutes les α-coupes, pour $0 < \alpha < 0.8$ et sa 0-coupe $M_0 = X$.

On peut alors écrire les différents α -coupes de M comme

$M_1 = \{< A, 0 >, < B, 0 >, < E, 1 >, < F, 0 >, < G, 0 >, < I, 1 >\}$,

$M_{0.8} = \{< A, 0 >, < B, 0 >, < E, 1 >, < F, 1 >, < G, 0 >, < I, 1 >\}$,

$M_0 = \{< A, 1 >, < B, 1 >, < E, 1 >, < F, 1 >, < G, 1 >, < I, 1 >\}$.

On retrouve alors

$\mu_M(A) = \max(1 \times 0, ...0.1 \times 0, 0 \times 1) = 0,$

$\mu_M(B) = \max(1 \times 0, ...0, 1 \times 0, 0 \times 1) = 0,$

$\mu_M(E) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 1,$

$\mu_M(F) = \max(1 \times 0, 0.9 \times 0, 0.8 \times 1, ...0, 1 \times 1, 0 \times 1) = 0.8,$

$\mu_M(G) = \max(1 \times 0, ...0, 1 \times 0, 0 \times 1) = 0,$

$\mu_M(I) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 1,$

ce qui fourni bien l'ensemble M.

1.4 Produit cartésien de sous-ensembles flous

La description de tout système, fait généralement intervenir plusieurs univers de référence. Lorsqu'on considère plusieurs ensembles de référence simultanément, on construit un univers globale dont les diverses composontes sont les ensembles de référence initiaux. Les caractérisations représentées par des sous-ensembles flous que l'on définit sur cet univers global sont construites à partir des classes floues des ensembles de référence initiaux.

Définition 1.10 [7]Soient les sous-ensembles flous $A_1, A_2, ..., A_r$ réspéctivement définis sur $X_1, X_2, .., X_r$, on définit leur produit cartésien $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_r$ comme un sous-ensemble flou de X de fonction d'appartenance

$$\forall x=(x_1,...,x_r)\in X, \mu_A(x)=\min\left(\mu_{A_1}(x_1),...,\mu_{A_r}(x_r)\right).$$

Exemple 1.8 Soient $X_1=\{x,y,z\}$, $X_2=\{\alpha,\beta\}$ et soient A,B deux sous-ensembles flous réspèctivement définis sur X_1,X_2 donnée par

$A=\{<x,0.7>,<y,0.5>,<z,1.0>\}$,

$B=\{<\alpha,0.7>,<\beta,0.4>\}$,

Alors on obtient

$$A\times B=\left\{\begin{array}{c}<(x,\alpha),0.7>,<(x,\beta),0.4>,<(y,\alpha),0.5>,\\ <(y,\beta),0.4>,<(z,\alpha),0.7>,<(z,\beta),0.4>\end{array}\right\}.$$

1.5 Sous-ensembles flous convexes

Les sous-ensembles flous les plus répandus sont ceux qui ont une fonction d'appartenance ‹régulière›. Lorsqu'on demande à un interlocuteur de tracer la courbe qu'il juge la plus adéquate pour définir la fonction d'appartenance d'un sous- ensemble flou représentant une valeur approximative ou une caractérisation vague, il dessine généralement un triangle ou un trapèze selon le cas. Lorsque X est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, les sous-ensembles flous possédant une telle allure sont dits convexes [Zadeh 65].

Définition 1.11 [7]Un sous-ensemble flou A de l'ensemble X des nombre réels est convexe si, pour tout couple d'élément a et b de X, et pour tout nombre λ de $[0,1]$, la fonction d'appartenance de A vérifie

$$\mu_A(\lambda a+(1-\lambda)b)\geq\min(\mu_A(a),\mu_A(b)).$$

Exemple 1.9 Soit le sous-ensemble flou A de $\mathbb{R}$ tel que

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 10\\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & \text{si } x>10\end{cases}$$

Alors, A est un sous-ensemble flou convexes de $\mathbb{R}$.

Propriété 1.1 [7] *Un sous-ensemble flou A de $\mathbb{R}$ est convexe si toutes ses α-coupes A_α sont convexes, c'est-à-dire si, pour tout couple d'éléments a et b de A_α et pour tout nombre λ de $[0,1]$, $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ appartient aussi à A_α.*

Théorème 1.2 [11] *Si A et B sont deux sous-ensembles flous convexes de $\mathbb{R}$, leur intersection et convexe.*

Preuve. [11]Soit $C = A \cap B$, alors

$$\mu_C(\lambda a + (1-\lambda)b) = \min(\mu_A(\lambda a + (1-\lambda)b), \mu_B(\lambda a + (1-\lambda)b)).$$

Maintenant, puisque A et B sont convexes

$$\begin{aligned} \mu_A(\lambda a + (1-\lambda)b) &\geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b)), \\ \mu_B(\lambda a + (1-\lambda)b) &\geq \min(\mu_B(a), \mu_B(b)), \end{aligned}$$

et donc

$$\mu_C(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \min(\min(\mu_A(a), \mu_A(b), \min(\mu_B(a), \mu_B(b)),$$

ou équivalent

$$\mu_C(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \min(\min(\mu_A(a), \mu_B(a), \min(\mu_A(b), \mu_B(b)),$$

et ainsi

$$\mu_C(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \min(\mu_C(a), \mu_C(b)).$$

■

1.6 Normes et conormes triangulaires

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs différents du minimum, du maximum et de la complémentation.

Ces opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métriques aléatoires et on fait appel à eux lorsque les opérations habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes.

Définition 1.12 [7]Une norme triangulaire (t-norme) est une fonction $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ vérifiant

1. $\forall x, y \in [0,1], T(x,y) = T(y,x)$ (Commutativité),
2. $\forall x, y, z \in [0,1], T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ (Associativité),
3. $\forall x, y, z, t \in [0,1], T(x,y) \leq T(z,t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$ (Monotonie),
4. $\forall x \in [0,1], T(x,1) = x$ (Élément neutre 1).

Cas particulier L'opérateur $T = \min$ est une norme triangulaire.

Tout t-norme peut servir à définir l'intersection de sous-ensemble flous, on définit une opération $\cap_T$ qui, étant donné deux sous-ensembles flous A et B de X, leur fait corresponder un troisième sous-ensemble flou $C = A \cap_T B$ de fonction d'appartenance défnie par

$$\forall x \in X, \mu_C(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Définition 1.13 [7]Une conorme triangulaire (t-conorme) est une fonction $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ qui vérifiant

1. $S(x,y) = S(y,x)$, $\forall x, y \in [0,1]$ (Commutativité),
2. $S(x, S(y,z) = S(S(x,y), z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$ (Associativité),
3. $S(x,y) \leq S(z,t)$, si $x \leq z$ et $y \leq t$,$\forall x, y, z, t \in [0,1]$ (Monotonie),
4. $S(x,0) = x$, $\forall x \in [0,1]$ (Élément neutre 0).

Cas particulier L'opérateur $S = \max$ est une norme triangulaire.

Tout t-conorme peut servir à définir l'union de sous-ensemble flous, on définit une opération $\cup_S$ qui, étant donné deux sous-ensembles flous A et B de X, leur fait corresponder un troisième sous-ensemble flou $D = A \cup_S B$ de fonction d'appartenance défnie par

$$\forall x \in X, \mu_D(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Différentes normes et conormes triangulaires

t-norme	t-conorme	nom
$\min(x,y)$	$\max(x,y)$	Zadeh
$\max(x+y-1,0)$	$\min(x+y,1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	$Hamacher$ $(\gamma>0)$
xy	$x+y-xy$	Probabiliste
$\max\left(1-((1-x)^p+(1-y)^p)^{\frac{1}{p}},0\right)$	$\min\left((x^p+y^p)^{\frac{1}{p}},1\right)$	$Yager$ $(p>0)$
$\max((x+y-1+\lambda xy)/(1+\lambda),0)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$	$Weber$ $(\lambda>-1)$
$x\ si\ y=1$ $y\ si\ x=1$ $0\quad sinon$	x si $y=0$ y si $x=0$ 1 sinon	Drastique

1.7 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension est un des plus importants de la théorie des ensemble flous parce qu'il permet d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas de données floues. On suppose qu'on dispose d'un application f d'un premier ensemble de référence X vers un second ensemble de référence Y. A tout élément x de X, l'application f fait correspondre un élément y de Y. Soit A un sous-ensemble flou de X auquel x appartient fortement, on se propose de lui associer un sous-ensemble B de Y auquel y appartient fortement. On définit ainsi l'image d'un sous-ensemble flou par une application.

Définition 1.14 [7]Étant donné un sous-ensemble flou A de X et une application f de X vers Y, le principe d'extension permet de définir un sous-ensemble flou B de Y associé à A par l'intermédiaire de f

$$\forall y \in Y, \mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{\{x\in X/y=f(x)\}} \mu_A(x) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \end{cases}$$

Cas particuliers considérons le cas où X est lui-même le produit cartésien de plusieurs ensemble de référence $X_1, X_2, ..., X_r$. Le produit d'extension et la définition du produit cartésien de sous-ensembles flous permettent d'associer, à leurs sous-ensembles flous respectifs $A_1, A_2, ..., A_r$, un sous-ensemble flou B de Y défini par la fonction d'appartenance suivante

$$\forall y \in Y, \mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{\{x=(x_1,...,x_r)\in X/y=f(x)\}} \min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{Ar}(x_r)) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \end{cases}$$

Exemples 1.10

1) Considérons l'ensemble X des couleurs de cheveux et l'ensemble Y des types humains {nordique, méridional, autre}. On suppose que l'on sache associer un ou plusieurs types humains à chaque couleur de cheveux, par l'application multivoque f définie sur X et prenant ses valeurs dans Y, telle que

$f(brun) = méridional$, $f(auburn) = autre$, $f(roux) = f(blond) = nordique$, $f(blanc) = \{nordique, méridional, autre\}$.

Une caractérisation floue de la couleur des cheveux telle que A_1, "*plutôt brun mais un peu auburn*", réprésentée par le sous-ensemble flou suivant de X

$A_1 = \{< 0.9, brun >, < 0.2, auburn >, < 0, roux >, < 0, blond >, < 0, blanc >\}$,

conduit à une caractérisation floue B du type humain,de fonction d'appartenance sur Y

$\mu_B(nordique) = \max(\mu_{A_1}(roux), \mu_{A_1}(blond), \mu_{A_1}(blanc)) = 0,$

$\mu_B(méridional) = \max(\mu_{A_1}(brun), \mu_{A_1}(blanc)) = 0.9,$

$\mu_B(autre) = \max(\mu_{A_1}(auburn), \mu_{A_1}(blanc)) = 0.2.$

2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait $f(x) = x_1 + x_2$.

Considérer les ensembles flous finis de $\mathbb{R}$

$A_1 = \{< 3, 0.4 >, < 4, 0.5 >, < 5, 1 >, < 6, 0.5, >, < 7, 0.2 >\}$,

$A_2 = \{< 6, 0.2 >, < 7, 0.5 >, < 8, 1 >, < 9, 0.5 >, < 10, 0.2 >\}$.

Alors, le degré d'appartenance de $y = 10$ dans B donnée par

$$\begin{aligned} \mu_B(10) &= \sup_{\{x_1+x_2=10\}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)) \\ &= \max\{\min(\mu_{A_1}(3), \mu_{A_2}(7)), \min(\mu_{A_1}(4), \mu_{A_2}(6)\} \\ &= \max\{0.4, 0.2\} = 0.4. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Généralités sur les nombres flous

Ce chapitre décrit les nombres flous. Tout d'abord, nous allons regarder dans l'intervalle, le concept fondamental du nombre flou, puis le fonctionnement des nombres flous. De plus, nous introduirons un type particulier de nombre flou, tel que le nombre flou triangulaire et le nombre flou trapézoïdal, et aussi l'intervalle et le nombre flou de type L-R.

2.1 Concept de nombre flou

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques, et en général les nombres flous soit des sous ensembles flous des réels qui à quelques propriétés additionnels.

2.1.1 Quantités et intervalles flous

Avant d'entamer la définition de nombre flou on procède à définir l'intervalle et la qantité floue.

Définition 2.1 [7](Quantité flou)Une quantité floue est un sous-ensemble flou normalisé Q de $\mathbb{R}$. Une valeur modale de Q est un élément m de $\mathbb{R}$ tel que $\mu_Q(m) = 1$.

Si m est une valeur modale de Q, tout nombre réel que appartient tout à fait à Q en est une valeur modale et, lorsque la quantité floue est associée à une propriété de la form $Prop(Q) =$ "environ u "ou "approximativement entre v et w", les valeurs modales sont respectivement u et les nombres de l'intervalle $[v, w]$.

Définition 2.2 [7]Un intervalle flou I est une quantité floue convexe.

Il correspond à un intervalle de l'ensemble des réels dont les limites sont imprécises. Si sa fonction d'appartenance μ_I est semi-continue supérieurement (c'est-à-dire que, pour tout niveau ε, l'ensemble des x de X tels que $\mu_I(x) \geq \varepsilon$ est fermé), ses α-coupes sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$. Voir la figure 2.1

2.1.2 Quelques définitions des nombres flous

Définition 2.3 [8]Un ensemble flou $\tilde{A}$ défini sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est dit un nombre flou, si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ a les caractéristiques suivantes

1. $\mu_{\tilde{A}}$ est convexe, c'est-à-dire, $\mu_{\tilde{A}}(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b))$, $\lambda \in [0, 1]$, $\forall a,\, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mu_{\tilde{A}}$ est normal, c'est-à-dire, qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.
3. $\tilde{A}$ est supérieur semi-continu.
4. $Supp(\tilde{A})$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.4 [7]Un nombres flou $\tilde{A}$ est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support borné, admettant une unique valeur modale m.

Remarque 2.1 [7]Un nombre flou $\tilde{A}$ correspond à une valeur réelle m connue imprécisément. Dans le cas où elle est connue précisément, on a affaire à un singleton $\{m\}$ de $\mathbb{R}$ et tout nombre réel est une cas particulier de nombre flou, de fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}(m) = 1$ pour $x = m$ et $\mu_{\tilde{A}}(m) = 0$ pour tout $x \neq m$.

Exemple 2.1 Un nombre flou (environ m) et l'intervalle flou (approximativement entre a et b) donné par la figure 2.1

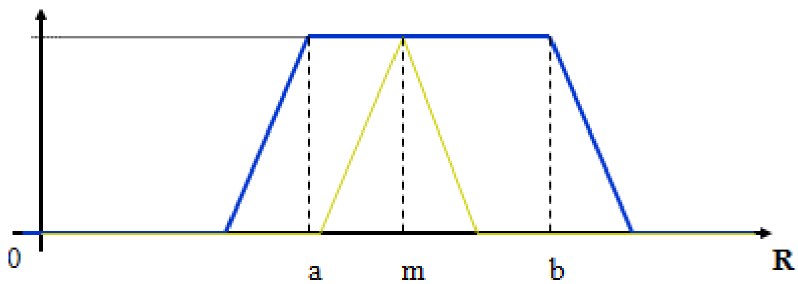

Fig. 2.1 Nombre flou (environ m)

Définition 2.5 [3]Un sous-ensemble flou $\tilde{A}$ appelé un nombre flou lorsque l'ensemble universel sur lequel $\mu_{\tilde{A}}$ est défini l'ensemble de tout les nombers réels $\mathbb{R}$ et satisfait les conditions suivantes

1. tout les $\alpha - coupes$ de $\tilde{A}$ ne sont pas vide pour $0 \leq \alpha \leq 1$,
2. tout les $\alpha - coupes$ de $\tilde{A}$ sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}$,
3. $Supp\ \tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ est borné.

Représentons les α-coupes du nombre flou $\tilde{A}$ par

$$\left[\tilde{A}\right]^{\alpha} = [\tilde{a}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}] .$$

Nous observons que tout nombre réel r est un nombre flou dont la fonction d'appartenance est la fonction caractéristique

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = r, \\ 0 \text{ si } x \neq r. \end{cases}$$

L'ensemble de tout les nombres flous sera noté $F(\mathbb{R})$.

Définition 2.6 [13]Un nombre flou est appelé positif (négatif) si sa fonction d'appartenance est tel que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x < 0 (\forall x > 0)$.

Exemples 2.2

1) Les ensemble flous suivants sont des nombres flous

approximativement $5 = \{< 3, 0.2 >, < 4, 0.6 >, < 5, 1 >, < 6, 0.7 >, (7, 0.1 >\}$,
$10 = \{< 8, 0.3 >, < 9, 0.7 >, < 10, 1 >, < 11, 0.7 >, < 12, 0.3 >\}$.

2) L'ensemble flou $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x^3 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3 & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

est un nombre flou. Voir la figure 2.2

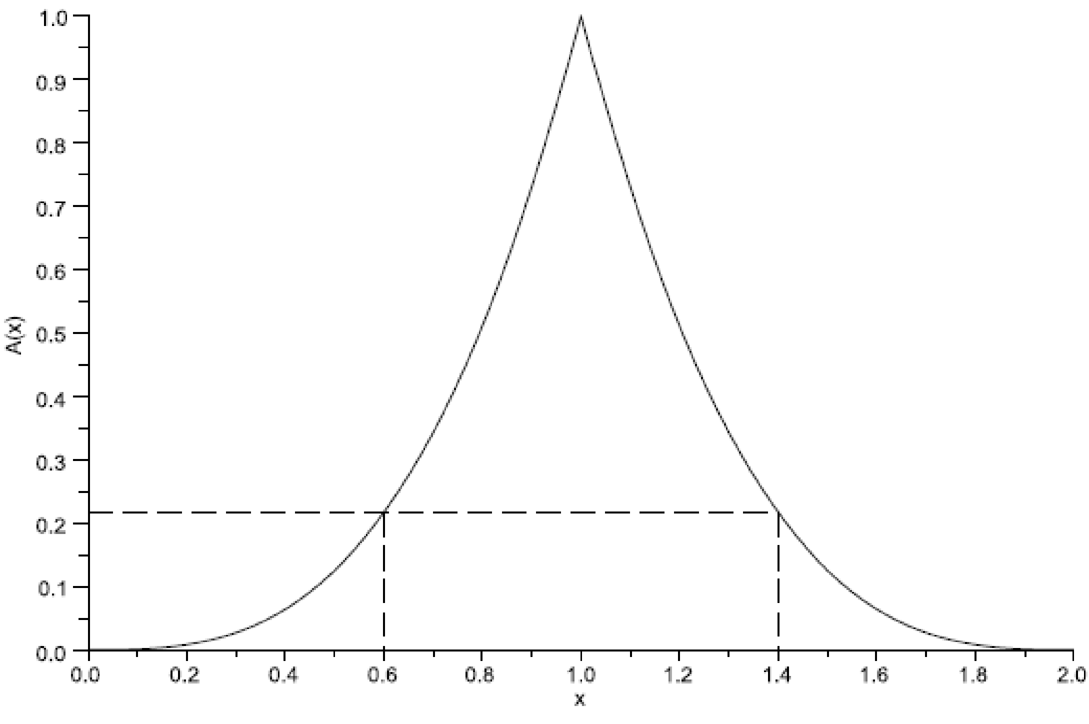

Fig. 2.2 Exemple d'un nombre flou et leur $\alpha-$coupe

2.2 Types de nombres flous

Dans ce section, nous allons présentér quelque types de définitions pour les nombres flous.

2.2.1 Nombre flou triangulaire

Parmi les différentes formes de nombre flou, le nombre flou triangulaire est le plus populaire.

Définition 2.7 [3]Un nombre flou $\tilde{A}$ est dit triangulaire si sa fonction d'appartenance est donné par

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x < a \\ \frac{x\ -a}{u-a}\ si\ a \leq x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}\ si\ u \leq x \leq b \\ 0 \quad si \quad x \geq b \end{cases}$$

où a, u, b sont des nombres donnés. La fonction d'appartenance du nombre flou triangulaire a une représentation graphique d'un triangle avec $[a, b]$ étant la base de la triangle et le point $(u, 1)$ comme seul sommet. Par conséquent, le nombre réel a, u et b définit le nombre flou triangulaire $\tilde{A}$ que sera noté $(a,\ u,\ b)$. Les $\alpha-$coupes du nombre flou triangulaire ont la forme simplifiée suivante

$$[\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]\,,$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]\,.$

Notez qu'un nombre flou triangulaire n'est pas nécessairement symétrique, puisque $b-u$ peut être différent de $u-a$, cependant, $\mu_{\tilde{A}}(u) = 1$. On peut dire qu'un nombre flou $\tilde{A}$ est un modèle mathématique raisonnable pour l'expression linguistique "near u". Pour l'expression " autour de toi "nous attendons de la symétrie. Imposer une symétrie entraine une simplification de la définition d'un nombre flou triangulaire. En effet, soyons une relation symétriques avec a et b, c'est-à-dire $u - a = b - u = \delta$. Dans ce cas,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta} \text{ si } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

Exemples 2.3

1) Dans le cas du nombre flou triangulaire $\tilde{A} = (-5; -1; 1)$, la valeur de la fonction d'appartenance sera,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -5 \\ \frac{x+5}{4} & \text{si} \quad -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Voir la figure 2.3

2) L'expression vers quatre heures peut être modélisée mathématiquement par le nombre flou triangulaire symétrique $\tilde{A}$, dont la fonction d'appartenance est donnée par $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-4|}{0.2} & si \ 3.8 \leq x \leq 4.2 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Les $\alpha-$coupes d'un ensemble flou triangulaire sont les intervalles $[\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha]$, où $\tilde{a}_1^\alpha = 0.2\alpha + 3.8$ et $\tilde{a}_2^\alpha = -0.2\alpha + 4.2$.

Voir la figure 2.4.

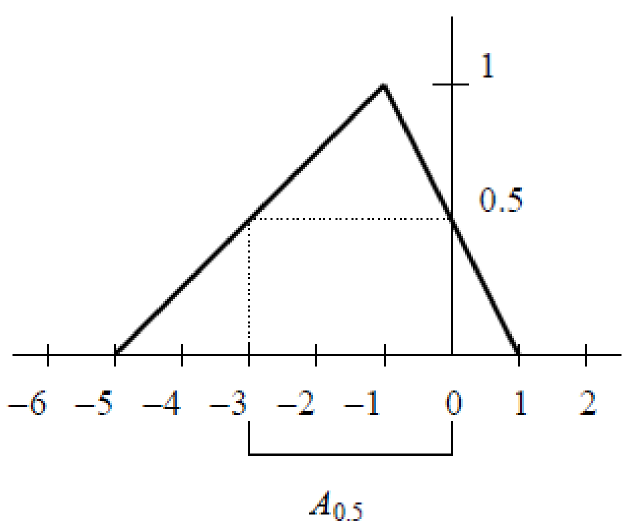

Fig. 2.3 $\alpha = 0.5$ coupe de nombre flou triangulaire

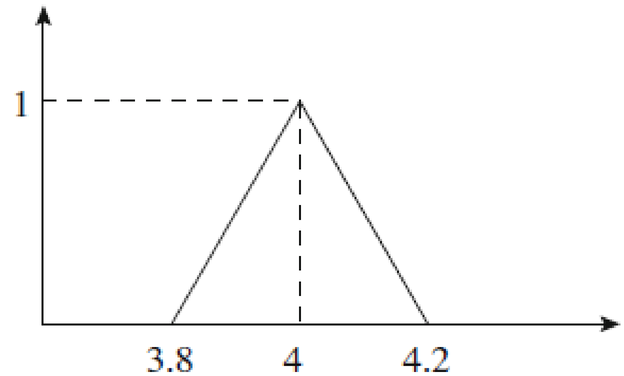

Fig. 2.4 Reprsentations du nombre flou
"environ 4"

2.2.2 Nombre flou trapézoïdal

Une autre forme de nombre flou est un nombre flou trapézoïdal. Cette forme est issue du fait qu'il y a plusieurs points dont le degré d'appartenance est maximum (α = 1).

Définition 2.8 [3]Un nombre flou $\tilde{A}$ est dit trapézoidal si sa fonction d'apartenance a la forme d'un trapéze elle donné par

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x\ -a}{b-a} \ si \ a \leq x < b \\ 1 \quad si \ \ b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} \ si \ \ c < x \leq d \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres donnés.

Les $\alpha-$coupes d'un ensemble flou trapézoidal sont les intervalles

$$[\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]\,,$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$.

Exemple 2.4 L'ensemble flou des adolescents peut être représenté par le nombre flou trapézoïdal avec la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & si\ 11 \leq x < 14 \\ 1 & si\ 14 \leq x \leq 17 \\ \frac{20-x}{3} & si\ 17 < x \leq 20 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Les $\alpha-$coupes d'un ensemble flou trapézoidal sont les intervalles $[3\alpha + 11, -3\alpha + 20]$, avec $\alpha \in [0, 1]$.

Voir la figure 2.5.

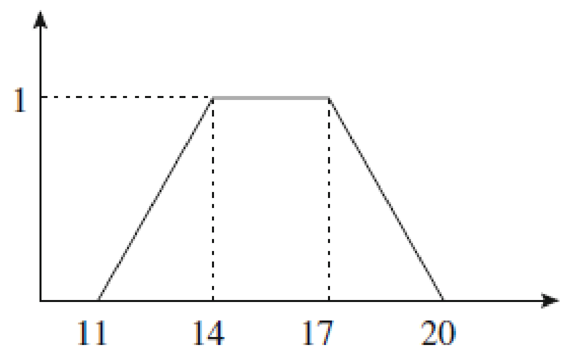

Fig. 2.5 Nombre flou trapzoidal

2.2.3 Nombre flou en forme de cloche

Un nombre flou en forme de cloche est souvent utilisé dans des applications pratiques.

Définition 2.9 [3]Un nombre flou a la forme d'un cloche si la fonction d'appartenance est lisse et symétrique par rapport à un nombre réel donné. La fonction d'appartenance suivante a ces propriétés pour fixe u, a et δ (voir la figure 2.6)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \exp(-(\frac{x-u}{a})^2) & si\ u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Les $\alpha-$coupes de nombres flous en forme de cloche sont les intervalles

$$[\tilde{a}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}] = \begin{cases} \left[u - \sqrt[1]{\ln(\frac{1}{\alpha^{a^2}})}, u + \sqrt[1]{\ln(\frac{1}{\alpha^{a^2}})}\right] & \text{si } \alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-(\frac{\delta}{a})^2} \\ [u - \delta, u + \delta] & \text{si } \alpha < \bar{\alpha} = e^{-(\frac{\delta}{a})^2} \end{cases}$$

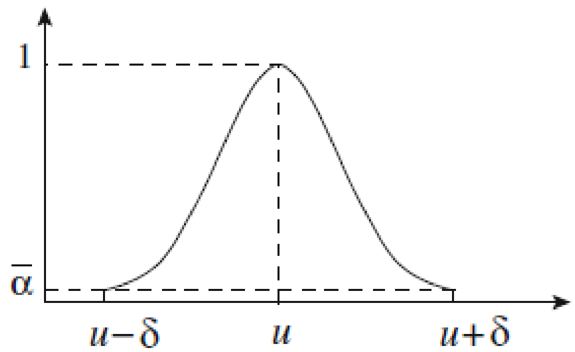

Fig. 2.6 Nombre flou de forme cloche

2.2.4 Nombre flou pentagonal

Définition 2.10 [9]Un nombre flou pentagonal $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ doit satisfaire aux conditions suivantes

1. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est strictement croissante et continue sur $[a_1, a_2]$ et $[a_2, a_3]$.
3. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est strictement décroissante et continue sur $[a_3, a_4]$ et $[a_4, a_5]$.

Définition 2.11 [9]Un nombre flou pentagonal linéaire avec asymétrie s'écrit $\tilde{A}_{LAS}$ $= (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; r, s)$ dont la fonction d'appartenance est écrite comme

$$\mu_{\tilde{A}_{LAS}}(x) = \begin{cases} r\frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 + (1-r)\frac{x-a_2}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 1 & \text{si } x = a_3 \\ 1 - (1-s)\frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ s\frac{a_5-x}{a5-a_4} & \text{si } a_4 \leq x \leq a_5 \\ 0 & \text{si } x > a_5 \end{cases}$$

Voir la figure 2.7.

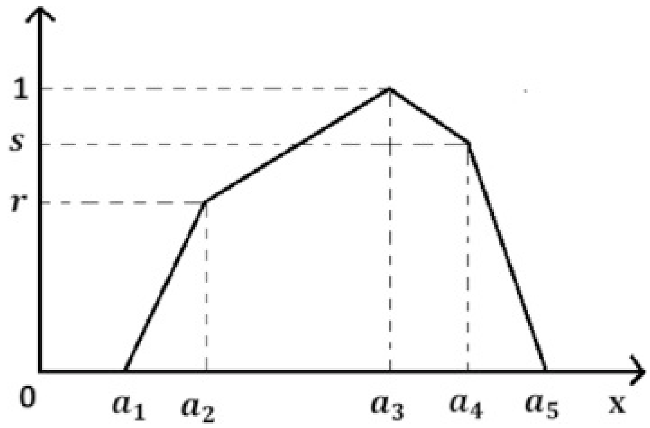

Fig. 2.7 Nombre flou pentagonal asymtrique

Remarque 2.2 [9]

1. Si $r = s$, le nombre flou pentagonal asymétrique devient un nombre flou pentagonal de symétrie.
2. Pour l'asymétrie, le nombre flou pentagonal peut être $r < s$ ou $r > s$.

2.3 Opérations arithmétiques des nombres flous

Présenter les opérations arithmétiques pour les nombres flous, c'est-à-dire les opérations qui nous permettent de "calculer" avec des ensembles flous.

2.3.1 Opérations arithmétiques d'intervalles

Les opérations arithmétiques impliquant des nombres flous sont étroitement liées à l'intervalle opérations arithmétiques. Laissez-nous énumérer certaines de ces opérations pour les intervalles fermés sur $\mathbb{R}$.

Soit λ un nombre, A et B deux intervalles fermés sur la ligne reélle donnée par $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$.

Définition 2.12 [3](Opération d'intervalle)Les opérations aritmétiques entre les intervalles peut être défini comme

a) La somme entre A et B est l'intervalle

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \,.$$

b) La différence entre A et B est l'intervalle

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \,.$$

c) La multiplication de A par un scalaire λ est l'intervalle

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & si \ \lambda \geq 0, \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & si \ \lambda < 0. \end{cases}$$

d) La multiplication de A et B est l'intervalle

$$A \cdot B = [\min P, \max P] \,,$$

où $P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$.

e) Le quotient de A et B, si $0 \notin B$, est l'intervalle

$$\begin{aligned} A/B &= [a_1, a_2] \,/\, [b_1, b_2] \\ &= [\min(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2), \max(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2)] \,. \end{aligned}$$

Exemple 2.5 Soit $\lambda = 2$ un nombre, A et B deux intervalles fermés donnée par $A = [2, 5]$ et $B = [1, 3]$,

la somme entre A et B est $A + B = [2, 5] + [1, 3] = [3, 8]$,
la différence entre A et B est $A - B = [2, 5] - [1, 3] = [-1, 4]$,
la multiplication de A par un scalaire λ est $\lambda A = 2A = [4, 10]$,
et aussi $A_1 = [-1, 1]$ et $B_1 = [-2, 0.5]$,
la multiplication de A_1 et B_1 est $A_1 \cdot B_1 = [-1, 1] \cdot [-2, 0.5] = [-2, 2]$,
le quotient de A_1 et B_1 est $A_1/B_1 = [-1, 1] \,/\, [-2, 0.5] = [-2, 2]$.

2.3.2 Opérations des α-coupes intervalles

Les α-coupes des nombres flous sont toujours fermées et bornée des intervalles.

Définition 2.13 [3]Les $\alpha-$coupes de l'ensemble flou $A \circledast B$ sont donnés par

$$[A \circledast B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \circledast [B]^{\alpha},$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$, où $\circledast$ est une opération arithmétique $\{+,-,\times,/\}$.

Proposition 2.1 *[3]Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des nombres flous avec de $\alpha-$coupe donnés respectivement par $\left[\tilde{A}\right]^{\alpha} = [\tilde{a}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}]$ et $\left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{b}_2^{\alpha}\right]$. Alors les propriétés suivantes sont*

a) La somme de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ est le nombre flou $\tilde{A} + \tilde{B}$ dont les $\alpha-$coupes sont

$$\left[\tilde{A} + \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} + \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{a}_1^{\alpha} + \tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha} + \tilde{b}_2^{\alpha}\right].$$

b) La différence de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ est le nombre flou $\tilde{A} - \tilde{B}$ dont les $\alpha-$coupes sont

$$\left[\tilde{A} - \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} - \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{a}_1^{\alpha} - \tilde{b}_2^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha} - \tilde{b}_1^{\alpha}\right].$$

c) La multiplication de $\tilde{A}$ par un scalaire λ est le nombre flou λA dont les $\alpha-$coupes sont

$$\left[\lambda\tilde{A}\right]^{\alpha} = \lambda\left[\tilde{A}\right]^{\alpha} = \begin{cases} [\lambda\tilde{a}_1^{\alpha}, \lambda\tilde{a}_2^{\alpha}] & si\ \lambda \geq 0, \\ [\lambda\tilde{a}_2^{\alpha}, \lambda\tilde{a}_1^{\alpha}] & si\ \lambda < 0. \end{cases}$$

d) La multiplication de $\tilde{A}$ par $\tilde{B}$ est le nombre flou $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ dont les $\alpha-$coupes sont

$$\left[\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha}\left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [\min P^{\alpha}, \max P^{\alpha}],$$

où $P^{\alpha} = \left\{\tilde{a}_1^{\alpha}\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_1^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha}\right\}$.

e) La division de $\tilde{A}$ par $\tilde{B}$, si $0 \notin Supp\ \tilde{B}$, est le nombre flou dont les $\alpha-$coupes sont

$$\begin{aligned} \left[\tilde{A}/\tilde{B}\right] &= \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} / \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [\tilde{a}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}] / \left[\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{b}_2^{\alpha}\right] \\ &= \left[\min(\tilde{a}_1^{\alpha}/\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_1^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha}), \max(\tilde{a}_1^{\alpha}/\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_1^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_1^{\alpha}, \tilde{a}_2^{\alpha}\tilde{b}_2^{\alpha})\right]. \end{aligned}$$

Exemple 2.6 Supposons que nous avons deux nombres flous définis par des fonctions d'appartenance triangulaire

$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(2, 3, 4)$ et $\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(4, 5, 7)$,

que sont présentés dans la figure 2.8. On calculer l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ en utilisant leurs α-coupes.

Basé sur des équations de lignes droites incluant des côtés de triangles nous obtenons des intervalles décrivant les α-coupes de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ (pour tout $\alpha \in [0, 1]$)

$\left[\tilde{A}\right]^{\alpha} = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$ et $\left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [\alpha + 4, -2\alpha + 7]$.

Alors on obtient

$\left[\tilde{A} + \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} + \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [2\alpha + 6, -3\alpha + 11]$, où les limites sont des fonctions décrivant les lieux du début et de la fin de l'intervalle décrivant une α-coupe de la somme. Parce que les fonctions sont linéaires, remplaçant α avec 0 et 1 fournit des paramètres de la fonction d'appartenance triangulaire de la somme

$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(6, 8, 11)$, que sont présentés dans figure 2.78c.

D'une manière similaire, en utilisant (b) les résultats de la soustraction sont obtenus l'intervalle

$\left[\tilde{A} - \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} - \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [3\alpha - 5, -2\alpha]$, et la fonction d'appartenance

$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}\ (-5, -2, 0)$,que sont présentés dans figure 2.8d.

En utilisant (d), le minimum et le maximum sont recherchés parmi les fonctions : $\alpha^2 + 6\alpha + 8$, $2\alpha^2 + 3\alpha + 14$, $-\alpha^2 + 16$.et $2\alpha^2 - 15\alpha + 28$. A partir de l'analyse des valeurs de ces fonctions pour α dans l'intervalle $[0, 1]$ l'intervalle suivant est obtenu

$\left[\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right]^{\alpha} = \left[\tilde{A}\right]^{\alpha} \left[\tilde{B}\right]^{\alpha} = [\alpha^2 + 6\alpha + 8, 2\alpha^2 - 15\alpha + 28]$.

Les limites de l'intervalle ci-dessus ne sont pas des fonctions linéaires, remplaçant ainsi α avec 0 et 1 fournit uniquement les valeurs de x, pour les quelles la fonction d'appartenance prend des valeurs 0 et 1, c'est-à-dire $\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(8) = 0$, $\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(15) = 1$ et $\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(28) = 0$. Pour déterminer le fonction d'appartenance de la multiplication $\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x)$, les équations suivantes devraient être résolue (par rapport à α) :

$\alpha^2 + 6\alpha + 8 = x$, $2\alpha^2 - 15\alpha + 28 = x$.

Les solutions sont les suivantes : $\alpha_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{1 + x})$ pour la première équation, et $\alpha_{1,2} = (15 \pm \sqrt{1 + 8x})/4$ pour la seconde. Dans le cas de la première équation, la fonction $(-3+\sqrt{1+x})$ est choisi comme fonction d'appartenance car il fournit des valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ pour $x \in [8,15]$. Considérant la deuxième équation, pour $x \in [15,28]$ les valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ sont fournies par la fonction $(15-\sqrt{1+8x})/4$, Finalement le produit est décrit par la fonction d'appartenance suivante $\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \begin{cases} -3+\sqrt[1]{1+x} & \text{, si } 8 \leq x \leq 15 \\ (15-\sqrt[1]{1+8x})/4, & \text{si } 15 \leq x \leq 28 \\ 0 & \text{si } x < 8 \text{ ou } x > 28 \end{cases}$, que sont présentés dans figure 2.8e.

$\left[4\tilde{A}\right]^\alpha = 4\left[\tilde{A}\right]^\alpha = [4\alpha+8, -4\alpha+16]$, $\mu_{4\tilde{A}}(x) = \mu_{4\tilde{A}}(8,12,16)$,

le résultat de la division est calculé de manière similaire en appliquant (e), cependant, n'est pas nécessaire de sélectionner des solutions d'équations puisque chacune d'entre elles a une seule solution.

Enfin, nous obtenons la fonction d'appartenance suivante

$\left[\tilde{A}/\tilde{B}\right] = \left[\tilde{A}\right]^\alpha / \left[\tilde{B}\right]^\alpha = [\alpha+2, -\alpha+4]/[\alpha+4, -2\alpha+7]$,

$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{7x-2}{2x+1}, \text{si } \frac{2}{7} \leq x \leq 0.6 \\ \frac{4(1-x)}{x+1}, \text{ si } 0.6 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si } x < \frac{2}{7} \text{ ou } x > 1 \end{cases}$,que sont présentés dans figure 2.8f.

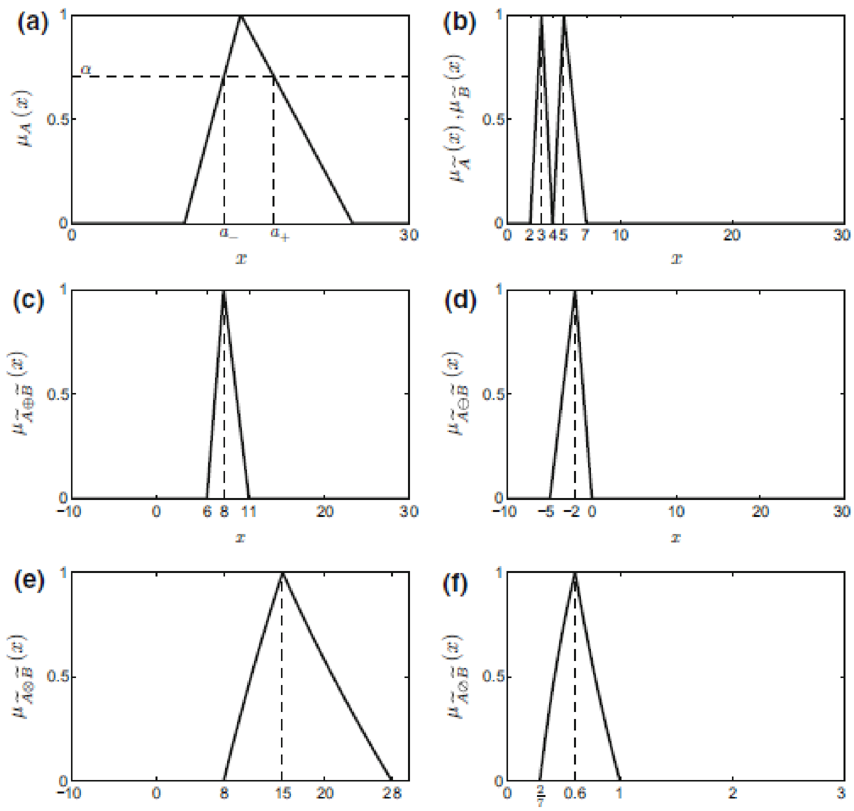

Fig.2.8 Opration arithmtique sur un nombre flou utlisant $\alpha-$coupe

2.3.3 Opérations algébriques des nombres flous

Les opérations arithmétiques pour les nombres flous peuvent être défini à partir du principe d'extension pour les ensembles flous de manière analogue. En fait, ils sont des cas particuliers du principe d'extension où les fonctions qui doivent être étendu sont des opérations traditionnelles pour les nombres réels.

Nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires : soit $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des réel nombres flous et $X = X_1 \times X_2$. Nous pouvons défini les propriété suivantes des opérations binaires.

Définition 2.14 [13]Une opération binaire $*$ dans $\mathbb{R}$ est appelée croissante(décroissante) si pour $x_1 > y_1$ et $x_2 > y_2$. Alors $x_1 * x_2 > y_1 * y_2$ $(x_1 * x_2 < y_1 * y_2)$

Exemple 2.7

$f(x, y) = x + y$ est une opération croissante,

$f(x, y) = x \cdot y$ est une opération croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$f(x, y) = -(x + y)$ est une opération décroissante.

Si les opérations algébriques normales $+, -, \cdot, /$, sont étendues aux opérations sur les nombres flous, elles doivent être notée par $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\oslash$.

Théorème 2.1 *[5]Si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance sont continues et surjectif de $\mathbb{R}$ à $[0, 1]$, et $*$ est une opération binaire continue croissant (décroissant), alors $\tilde{A} \circledast \tilde{B}$ est un nombre flou dont la fonction d'appartenance est continue et surjectif de $\mathbb{R}$ à $[0, 1]$.*

Preuve. Voir[5]. $\blacksquare$

Définition 2.15 [13]Si $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ avec $\mu_{\tilde{A}}(x)$ et $\mu_{\tilde{B}}(y)$ fonction d'appartenance continue, alors par application du principe d'extension pour l'opération binaire $* : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction d'appartenance du nombre flou $\tilde{A} \circledast \tilde{B}$ est donnée par

$$\mu_{\tilde{A} \circledast \tilde{B}}(x) = \sup_{z = x * y} \min \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.3 [13]

1. Pour toute opération commutative $*$, l'opération étendu $\circledast$ est également comutatif,
2. Pour toute opération associative $*$, l'opération étendu $\circledast$ est également associative.

Définition 2.16 [13]Pour les opérations unaires $f : X \to Y$, $X = X_1$, l'extension principe réduit pour tout $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ à

$$\mu_{f(\tilde{A})}(z) = \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_{\tilde{A}}(x), \forall z \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.8

1. Pour $f(x) = -x$, le contraire d'un nombre flou $\tilde{A}$ est donné par $-\tilde{A} = \left\{(x, \mu_{-\tilde{A}}(x)) | x \in X\right\}$, où $\mu_{-\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(-x)$.

2. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors l'inverse d'un nombre flou $\tilde{A}$ est donné par $\tilde{A}^{-1} = \left\{(x, \mu_{\tilde{A}}^{-1}(x))|x \in X\right\}$, où $\mu_{\tilde{A}}^{-1}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $f(x) = \lambda \cdot x$, puis la multiplication scalaire d'un nombre flou est donné par $\lambda\tilde{A} = \{(x, \mu_{\lambda\tilde{A}}(x) \mid x \in X\}$, où $\mu_{\lambda\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(\lambda \cdot x)$.

Dans ce qui suit, nous appliquerons le principe d'extension aux opérations binaires.

La somme de deux nombres flous

Définition 2.17 [13]Puisque l'addition est une opération croissante selon le Théorème 2-1, on obtient pour l'addition étendue $\oplus$ de nombres flous que $f(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$, $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ est un nombre flou, c'est-à-dire $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \in F(\mathbb{R})$. L'application du principe d'extension donne

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(z) = \sup_{z=x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)).$$

Propriété 2.1 *[13]*

1. $\ominus(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = (\ominus\tilde{A}) \oplus (\ominus\tilde{B})$,
2. $\oplus$ est commutatif,
3. $\oplus$ est associatif,
4. $0 \in \mathbb{R} \subseteq F(\mathbb{R})$ est l'élément neutre pour $\oplus$, si $\tilde{A} \oplus 0 = \tilde{A}$, $\forall\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$,
5. pour $\oplus$ il n'existe pas d'élément inverse, c'est $\forall\tilde{A} \in F(\mathbb{R})\backslash\mathbb{R} : \tilde{A} \oplus (\ominus\tilde{A}) \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Le produit de deux nombres flous

Définition 2.18 [13]Le produit est une opération croissante sur $\mathbb{R}^+$ et opération décroissante sur $\mathbb{R}^-$. D'où, selon le Théorème 2.1, le produit de nombres flous positifs ou des nombres flous négatifs donne un nombre flou positif. Soit $\tilde{A}$ un nombre flou positif et $\tilde{B}$ un nombre flou négatif. Alors $\ominus\tilde{A}$ est aussi négatif et $\tilde{A} \odot \tilde{B} = \ominus(\ominus\tilde{A} \odot \tilde{B})$ donnent un nombre flou négatif. L'application du principe d'extension donne

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(z) = \sup_{z=x\cdot y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)).$$

Propriété 2.2 [*13*]

1. $(\ominus\tilde{A}) \odot \tilde{B} = \ominus(\tilde{A} \odot \tilde{B})$
2. $\odot$ est commutatif,
3. $\odot$ est associatif,
4. $\tilde{A} \odot 1 = \tilde{A}$, $1 \in \mathbb{R} \subseteq F(\mathbb{R})$ est l'élément neutre pour $\odot$, c'est $\tilde{A} \odot 1 = \tilde{A}$, $\forall \tilde{A} \in F(\mathbb{R})$,
5. pour $\odot$ n'est pas d'élément inverse, $\forall \tilde{A} \in F(\mathbb{R}) \backslash \mathbb{R} : \tilde{A} \odot \tilde{A}^{-1} \neq 1$.

Théorème 2.2 [*5*]*Soit $\tilde{A}$ est un nombre flou positif ou négatif et $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ sont tous deux nombres flous positifs ou négatifs, alors*

$$\tilde{A} \odot (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) = (\tilde{A} \odot \tilde{B}) \oplus (\tilde{A} \odot \tilde{C}).$$

Preuve. [5]Les fonctions d'appartenance de chaque partie sont, par définition et par une réduction évidente,

$$\mu_{\tilde{A}\odot(\tilde{B}\oplus\tilde{C})}(z) = \sup_{z=x(y+t)} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y), \mu_{\tilde{C}}(t)) \text{............(1)}$$

$$\mu_{(\tilde{A}\odot\tilde{B})\oplus(\tilde{A}\odot\tilde{C})}(z) = \sup_{z=xy+tu} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y), \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{C}}(t)) \text{...........(2)}$$

Soit $f(x, y, t, u) = xy + tu$. Lorsque $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ sont positifs, f croissantes, et quand ils sont tous négatifs, décroissants. Dans les deux cas, en utilisant le Théorème2.1, la limite supérieure du membre de droite (2) est atteinte pour $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(u) = \mu_{\tilde{C}}(t\ )$ soit dans l'augmentation soit dans la diminution parties des fonctions d'appartenance. Par conséquent, $x = u$ et les côtés droits de (1) et (2) sont égaux. Lorsque $\tilde{A}$ et la paire $(\tilde{B}, \tilde{C})$ ont des signes opposés, nous appliquons la même méthode

$$-[(-\tilde{A}) \odot (\tilde{B} \oplus \tilde{C})] = \tilde{A} \odot (\tilde{B} \oplus \tilde{C}).$$

∎

Exemple 2.9 Soient $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ des nombres flous donné par

$$\tilde{A} = \{< 4, 1 >, < 5, 0.5 >\}, \tilde{B} = \{< 2, 1 >, < 3, 0.5 >\}, \tilde{C} = \{< 3, 1 >, < 4, 0.8 >\}.$$

Alors on obtient

$\tilde{B} \oplus \tilde{C} = \{< 5, 1 >, < 6, 0.8 >, < 7, 0.5 >\}$,

$\tilde{A} \odot (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) = \{< 20, 1 >, < 24, 0.8 >, < 25, 0.5 >, < 28, 0.5 >, < 30, 0.5 >, < 35, 0.5 >\}$,

$\tilde{A} \odot \tilde{B} = \{< 8, 1 >, < 12, 0.5 >, < 10, 0.5 >, < 15, 0.5 >\}$,

$\tilde{A} \odot \tilde{C} = \{< 12, 1 >, < 16, 0.8 >, < 15, 0.5 >, < 20, 0.5 >\}$,

$(\tilde{A} \odot \tilde{B}) \oplus (\tilde{A} \odot \tilde{C}) = \{< 20, 1 >, < 24, 0.8 >, < 25, 0.5 >, < 28, 0.5 >, < 30, 0.5 >, < 35, 0.5 >\}$,

donc $\tilde{A} \odot (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) = (\tilde{A} \odot \tilde{B}) \oplus (\tilde{A} \odot \tilde{C})$.

La différence des nombres flous

Définition 2.19 [13]La différence n'est pas une opération croissante (respectivement décroissante). Par conséquent le Théorème 2.1 n'est pas imédiatement applicable. L'opération $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ peut, cependant, toujours être écrit comme $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \tilde{A} \oplus (\ominus \tilde{B})$. L'application du principe d'extension donne

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(z) &= \sup_{z=x-y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(-y)) \\ &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{-\tilde{B}}(y)), \end{aligned}$$

ainsi, $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ est un nombre flou chaque fois que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des nombres flous.

La division des nombres flous

Définition 2.20 [13]La division n'est également ni une opération croissante ni une opération décroissante. Si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des nombres flous strictement positifs, tout fois (c'est, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ et $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0$, $\forall x \leq 0$). L'application du principe d'extension donne

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \oslash \tilde{B}}(z) &= \sup_{z=x/y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \sup_{z=xy} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(\frac{1}{y})) \\ &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}^{-1}}(y)), \end{aligned}$$

$\tilde{B}^{-1}$est un nombre flou positif. Donc le Théorème 2.1 peut maintenant être appliqué. La même chose est vraie si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont tous les deux nombres flous strictement négatifs.

Exemple 2.10 Nous calculons l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres flous suivants

$\tilde{A} = \{< -2, 0.5 >, < -1, 1.0 >, < 0, 0.5 >\}$,

$\tilde{B} = \{< 4, 0.8 >, < 5, 1.0 >, < 6, 0.8 >\}$.

On peut remarquer que le premier nombre représente une valeur " environ -1 " et le en second lieu " environ 5 ", car les degrés d'appartenance pour -1 et 5 sont égaux à 1. Les calculs utiles sont présentés dans le tableau suivants

x	y	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	$\mu_{\tilde{B}}(y)$	$x+y$	$y-x$	xy	y/x
-2	4	0.5	0.8	2	6	-8	-2
-2	5	0.5	1.0	3	7	-10	-2.5
-2	6	0.5	0.8	4	8	-12	-3
-1	4	1.0	0.8	3	5	-4	-4
-1	5	1.0	1.0	4	6	-5	-5
-1	6	1.0	0.8	5	7	-6	-6
0	4	0.5	0.8	4	4	0	$-$
0	5	0.5	1.0	5	5	0	$-$
0	6	0.5	0.8	6	6	0	$-$

les valeurs de la fonction d'appartenance de la somme sont calculés comme suit

$\sup_{x+y=2}[\min(0.5, 0.8)], \sup_{x+y=3}[\min(0.5, 1.0), \min(1.0, 0.8)]$,

$\sup_{x+y=4}[\min(0.5, 0.8), \min(1.0, 1.0), \min(0.5, 0.8)]$,

$\sup_{x+y=5}[\min(1.0, 0.8), \min(0.5, 1.0)], \sup_{x+y=6}[\min(0.5, 0.8)]$,

finalement nous obtenons

$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(z) = \{< 2, 0.5 >, < 3, 0.8 >, < 4, 1.0 >, < 5, 0.8 >, < 6, 0.5 >\}$.

Valeurs de la fonction d'appartenance de la soustraction, de la multiplication et de la division sont calculées de manière similaire, les résultats finaux sont donnés ci-dessous

$\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{B}}(z) = \{< 4, 0.5 >, < 5, 0.8 >, < 6, 1.0 >, < 7, 0.8 >, < 8, 0.5 >\}$,

$$\mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(z) = \left\{ \begin{array}{c} <-12, 0.5>, <-10, 0.5>, <-8, 0.5>, <-6, 0.8>, <-5, 1.0>, \\ <-4, 0.8>, <0, 0.5> \end{array} \right\},$$

$$\mu_{\tilde{A}\oslash\tilde{B}}(z) = \{<-6, 0.8>, <-5, 1.0, >, <-4, 0.8>, <-3, 0.5>, <-2.5, 0.5>, <-2, 0.5>\}.$$

On peut noter que les résultats obtenus représentent des valeurs : "environ 4" (pour la somme), "environ 6" (soustraction), "environ-5" (multiplication et division).

2.4 Nombres flous de type L-R

Les définitions des opérations floues que nous venons de définir peuvent être relativement difficiles à mettre en oeuver. On s'intéresse à des familles de formes particuliéres de fonctions d'appartenances des quantités floues, que conduisent à des calculs simples pour ces opérations.

Définition 2.21 [7]Soient trois paramètres réels (m, a, b), a et b étant strictement positifs, et deux fonctions, notées L et R, définies sur l'ensemble des réels positifs, à valeurs dans $[0, 1]$, semi-continues supérieurement, telles que $L(0) = R(0) = 1$, $L(1) = 0$ ou $L(x) > 0$ $\forall x$ avec $lim_{x\to\infty}L(x) = 0$, $R(1) = 0$ ou $R(x) > 0$ pour tout x avec $lim_{x\to\infty}R(x) = 0$. Un nomber flou $\tilde{A}$ est de type $L - R$ si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ est définie par

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L((m-x)/a) \ si \ x \leq m \\ R((x-m)/b) \ si \ x > m \end{cases}$$

Notation 2.1 [7]*On note $\tilde{A} = (m, a, b)_{LR}$ un nomber flou de type $L - R$. m est sa valeur modale avec $\mu_{\tilde{A}}(m) = 1$, a est la largeur de son support à gauche de m, encore appelé étalement gauche, b celle de son support à droite de m, encore appelé étalement droit, sur l'axe des réels. L (pour left) et R (pour right) sont les deux fonctions qui déterminent sa fonction d'appartenance respectivement à gauche et à droite de m.*

Exemples 2.11

1) On peut, par exemple, utiliser les fonctions suivantes pour définir L et R

$g(x) = \max(0, 1 - x^2)$,

$g(x) = \max(0, 1 - x)^2$,

$g(x) = \exp(-x)$,

$g(x) = \max(0, 1-x)$,que donne une fonction d'appartenance linéaire par morceaux(nombre flou de forme triangulaire).

2) Soient $L(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$

$a = 2$, $b = 3$, $m = 5$,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{5-x}{2}) = \frac{1}{1+(\frac{5-x}{2})^2} & si\ x \leq 5 \\ R(\frac{x-5}{3}) = \frac{1}{1+\left|\frac{2(x-5)}{3}\right|} & si\ x \geq 5 \end{cases}$$

Propriété 2.3 [7]*Ètant donné deux nombres flous du même type* $L-R$, $\tilde{A} = (m, a, b)_{LR}$ *et* $\tilde{B} = (n, c, d)_{LR}$, *les opérations floues donnent les nombers flous suivant*

- $\ominus\tilde{A} = (-m, b, a)_{RL}$, de type $R - L$,
- $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m+n, a+c, b+d)_{LR}$, de type $L - R$,
- $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (m-n, a+d, b+c)_{LR}$ si $L = R$, de type $L - L$,
- $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ n'est, par contre, généralement pas du type $L - R$, mais on peut en donner une valeur approchée de type $L - R$ lorsque $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ ont un support inclus dans $\mathbb{R}^+$, que a et b sont petits devant m, c et d petits devant n

$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (mn, mc+na, md+nd)_{LR}$.

Exemples 2.12

1) Soient $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\tilde{A} = (1, 0.5, 0.8)_{LR}$ et $\tilde{B} = (2, 0.6, 0.2)_{LR}$

$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (3, 1.1, 1)_{LR}$,

$\ominus\tilde{B} = (-2, 0.2, 0.6)_{LR}$,

$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-1, 0.7, 1.4)_{LR}$.

2) Soit $Prop(\tilde{A}) =$ " environ 200 "et $Prop(\tilde{B}) =$ " environ 80 ", $\tilde{A} = (200,\ 10,\ 10)_{LR}$ et $\tilde{B} = (80,\ 4,\ 4)_{LR}$ avec $L(x) = R(x) = \max(0, 1-x)$ donnant des nombers flous de forme triangulaire, alors

$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (280,\ 14,\ 14)_{LR}$ avec $Prop(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) =$ " environ 280 ",

$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (120,\ 14,\ 14)_{LR}$ avec $Prop(\tilde{A} \ominus \tilde{B}) =$ " environ 120 ",

$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (16000,\ 1600,\ 1600)_{LR}$ avec $Prop(\tilde{A} \odot \tilde{B}) =$ " environ 16000 ".

Théorème 2.3 *[13]Soit $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux nombres flous, alors*

$$(m, a, b)_{LR} \odot (n, c, d)_{LR} = (mn, mc + na, md + nd)_{LR},$$

pour $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ positif, on a aussi

$$(m, a, b)_{LR} \odot (n, c, d)_{LR} = (mn, na - md, nb - mc)_{LR},$$

pour $\tilde{B}$ positif, $\tilde{A}$ négatif, et

$$(m, a, b)_{LR} \odot (n, c, d)_{LR} = (mn, -nb - md, na - mc)_{LR},$$

pour $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ négatif.

Exemple 2.13 Soient $\tilde{A} = (2, 0.2, 0.1)_{LR}$ et $\tilde{B} = (3, 0.1, 0.3)_{LR}$ être des nombres flous de type $L - R$ avec des fonctions de référence

$$L(z) = R(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ -1 \leq z \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

On sintéressés ici de prsenté la forme $L - R$ de $\tilde{A} \odot \tilde{B}$, avec

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{2-x}{0.2}) \text{ si } x \leq 2 \\ R(\frac{x-2}{0.1}) \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \ si \ -1 \leq \frac{2-x}{0.2} \leq 1 \ et \ -1 \leq \frac{x-2}{0.1} \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \ si \ 1.9 \leq x \leq 2.1 \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

donc que $\tilde{A}$ est positif.

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} L(\frac{3-x}{0.1}) \ si \ x \leq 3 \\ R(\frac{x-3}{0.3}) \ si \ x \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \ si \ 2.9 \leq x \leq 3.1 \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

d'où $\tilde{B}$ est positif.

Suivant le Théorème 2.3 pour le cas où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont positifs, on obtient

$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (2 \cdot 3, 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2, 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1)_{LR} = (6, 0.8, 0.9)_{LR}$.

2.5 Intervalles flous de type L-R

Les formes simples de nombers flous peuvent également être utilisées pour définir des intervalles flous particuliers, auxquels les opérations arithmétiques élémentaires sont étendues.

Définition 2.22 [7]Soient quater paramètres réels $(m, m^{'}, a, b)$, a et b étant strictement positifs, et deux fonctions, notées L et R, définies sur l'ensemble des réels positifs, à valeurs dans $[0, 1]$, semi-continues supérieurement, telles que $\forall x \; L(0) = R(0) = 1$, $L(1) = 0$ ou $L(x) > 0$, avec $lim_{x \to \infty} L(x) = 0$, $R(1) = 0$ ou $R(x) > 0$ pour tout x avec $lim_{x \to \infty} R(x) = 0$. Un intervalle flou I est de type $L - R$ si sa fonction d'appartenance μ_I est définie par

$$\mu_{I'}(x) = \begin{cases} L((m-x)/a) \; si \; x \leq m \\ 1 \qquad\qquad si \; m < x < m^{'} \\ R((x-m)/b) \; si \; x > m^{'} \end{cases}$$

Notation 2.2 [7]*On note* $I = (m, m^{'}, a, b)_{LR}$ *un intervalle flou de typs* $L - R$ *et, dans le cas particulier correspondant à* $m = m^{'}$, I *est identique au nombre flou*

$\tilde{A} = (m, a, b)_{LR}$ de type $L - R$.

Exemple 2.14 On peut utiliser les exemples de fonctions L et R indiqués pour les nombres flous de type $L - R$. En particulier, l'intervalle flou a un fonction d'appartenance de forme trapézoïdale si $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$. Les intervalles flous généralisent les intervalles classiques de $\mathbb{R}$, par exemple

- Si m et a sont infinis, $Prop(I) =$ " au plus égal à environ $m^{'}$ ".
- Si $m^{'}$ et b sont infinis,$Prop(I) =$ " au moins égal à environ m ".
- Si tout les paramètres sont finis, $Prop(I) =$ " environ compris entre m et $m^{'}$".
- Si $m = m^{'}$, I est identique au nombre flou $\tilde{A} = (m, a, b)_{LR}$ de type $L - R$.

Propriété 2.4 [7]*Étant donné deux intervalles flous du même type* $L - R$, $I = (m, m^{'}, a, b)_{LR}$ *et* $J = (n, n^{'}, c, d)_{LR}$, *les opérations floues ont pour résultat les intervalles flous suivants*

- $-I = (-m', -m, b, a)_{RL}$,
- $I \oplus J = (m+n, m'+n', a+c, b+d)_{LR}$,
- $I \ominus J = (m-n', m'-n, a+d, b+c)_{LR}$ si $L = R$,
- $I \odot J$ n'est généralement pas du type $L - R$, mais on peut en donner la valeur approchée suivante, lorsque I et J ont un support inclus dans $\mathbb{R}^+$, que a et b sont petits devant m, c et d petits devant n :

  $I \odot J = (mn, m'n', mc + na, md + nb)_{LR}$.

Remarque 2.4 [7]Ces opération étendent les opérations sur les intervalles ordinaires de $\mathbb{R}$. Par exemple, si deux valeurs réelles x et y sont telles que $m \leq x \leq m'$ et $n \leq y \leq n'$, alors

$-m' \leq x \leq -m$,
$m + n \leq x + y \leq m' + n'$,
$m - n' \leq x - y \leq m' - n$,
ce que correspond aux ensembles de valeurs modales (noyaux) de $-I$, $I \oplus J$, $I \ominus J$.

Exemple 2.15 Soit $Prop(I) =$ " environ compris entre 200 et 250 " et $Prop(J) =$ " environ compris entre 80 et 100 ", $I = (200, 250, 10, 10)_{LR}$ et $J = (80, 100, 4, 4)_{LR}$ avec $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$ donnant des intervalles flous trapézoïdaux. Alors, $I \oplus J = (280, 350, 14, 14)_{LR}$ avec $Prop(I \oplus J) =$ "environ compris entre 280 et 350", $I \ominus J = (100, 170, 14, 14)_{LR}$ avec $Prop(I \ominus J) =$ " environ compris entre 100 *et* 170 ", $I \odot J = (16000, 25000, 1600, 1600)_{LR}$ avec $Prop(I \odot J) =$ " environ compris entre 16000 *et* 25000 ".

Conclusion

Dans ce travail, on a vu plusieures approches de la notion de nombre flou, tel que le nombre flou triangulaire et le nombre flou de type L-R, Nous nous présentons quelques propriétés de base pour chaque approche avec des exemples d'illustrations.

Ensuite, nous avons essayé de donner des opérations arithmétiques sur les nombres flous.

Comme perspectives, on a laisser la voie ouverte pour envisager à développer et renforcer le nombre d'aspects théoriques des nombres flous à l'avenir

Bibliographie

[1] **S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian**, Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations, *Appl. Math. Comput.* 171 (2005), 1184-1191.

[2] **S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian**, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, *Appl. Math. Comput.* 172 (2006), 633-643.

[3] **L. C. Barros, R. C. Bassanezi, W. A. Lodwick,** *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, Theory and Applications(2017), 299.

[4] **D. Dubois and H. Prade**, Operations on Fuzzy Numbers, *International Journal of Systems Science*, 9(6)(1978), 613-626.

[5] **D. Dubois, H. Parde**, *Fuzzy sets and systems : Theory and applications* ,Academic Press, New Yourk, 144(1980).

[6] **G. J. Klir, B. Yuan**, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, theory and applications, (1995).

[7] **B. B. Meunier,** *La logique floue et ses application*, Addison Wesley, France, (1995).

[8] **E. M. Vinoliah, K. Ganesan,** Fuzzy optimal solution for a fuzzy assignement problem with actagonal fuzzy numbers, *IOP Conf. Series. Journal of Physis : Conf. Series* 1000, (2018).

[9] **V. Visalakshi et V. Suvitha**, Performance measure of fuzzy queue using pentagonal fuzzy numbers, IOP Conf. Series. *Journal of Physis : Conf. Series* 1000, (2018).

[10] **R. R. YAGER**, On the lack of inverses in fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980), 73-82.

[11] **L. A. Zadeh**, Fuzzy sets, *Information and Control,* 8(1965), 338-353.

[12] **L. A. Zadeh**, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Inform.Sci.*8 *(*1975*)*, 199.

[13] **H. J. Zemmerman**, *Fuzzy sets theory and its application*, Third Edition, *Kluwer academic publishers*, Boston, Dordrehlt, London (1996).

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الأعداد الضبابية التي هي جزء من المجموعات الضبابية, أين تم التطرق لجانبها النظري وخواصها الأساسية, وبعد ذلك قمنا بدراسة البعض من أنواعها, ثم العمليات الحسابية عليها.

كلمات مفتاحية:

المجموعات الضبابية, الأعداد الضبابية, العمليات

Résumé:

Dans ce mémoire, on d'étudier les nombres flous qui font partie des ensembles flous, on a vu côté théorique et ses propriétés de base, puis nous avons étudié certains de leurs types, et aussi des opérations arithmétique sur eux.

Mots clés :

Ensemble flou, nombre flou, opérations.

Abstract:

In this memory, we study the fuzzy numbers which are a part of the fuzzy sets, we show their theoretical side and its basic properties. Also, we study some of their types, then arithmetic operations on them are given.

Key words:

Fuzzy sets, fuzzy number, operations.