



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse mathématique et numérique

## Thème

---

*Méthodes de collocation spectrale pour une équation de diffusion fractionnaire*

---

Présentée par :  
*M<sup>elle</sup> BENAMRA Meriem*

Soutenu publiquement le : Juin 2021.

Devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	<i>M<sup>r</sup> GASSMI Abdelkader</i>	Prof.,	Université de M'sila
<b>Encadreur :</b>	<i>M<sup>r</sup> NOURI Brahim</i>	M.C.A,	Université de M'sila
<b>Examineur :</b>	<i>M<sup>r</sup> ABDELKEBIR Saad</i>	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2020/2021

---

## Remerciements

---

En premier lieu, j'aimerais remercier Dieu *ALLAH* qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur de mémoire Monsieur le professeur *MOURI* Brahim .

Je remercie aussi les membres de jury Mr *ABD-ELKEBIR* Saad et Mr *GASMI* Abd-elkader .

En dernier lieu, j'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants de la faculté des mathématiques et de l'informatique.

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

---

## Dédicaces

---

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents , Mes frères et ma très chère sœur pour leurs soutiens leurs encouragements et leur amour qui sont la raison de ma réussite .

à mon chère père qui n'a pas cessé de m'aider à progresser pour arriver à ce niveau .

à tous ceux que j'aime et à ceux qui m'aiment.

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons proposé deux méthodes de collocation de Legendre et de Tchebychev pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire conformable avec conditions aux limites de Dirichlet. En utilisant les séries polynomiales de Legendre et Tchebychev décalées et leurs propriétés d'orthogonalités, le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler. Les exemples numériques montrent que les deux méthodes sont fiables et efficaces pour construire la solution numérique de l'équation de diffusion fractionnaire.

**Mots-Clés :** Calcul fractionnaire conformable, Méthode de collocation de Legendre, Méthode de collocation de Tchebychev, Méthode d'Euler.

In this memoir, we have proposed two collocation methods of Legendre and Chebyshev to solve the conformable fractional diffusion equation with Dirichlet boundary conditions. By using the shifted Legendre and Chebyshev polynomial series and their orthogonality properties, the problem is reduced to the linear system of ordinary differential equations of one order which can be solved by Euler's method. The numerical examples show that both methods are reliable and efficient in constructing the numerical solution of the fractional diffusion equation.

**Keywords :** Conformable fractional calculus, Legendre collocation method, Chebyshev collocation method, Euler method.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>10</b>
1.1 Dérivée fractionnaire conformable . . . . .	11
1.1.1 Dérivée fractionnaire conformable des fonctions usuelles . . . . .	14
1.1.2 Dérivée fractionnaire conformable a gauche ( a droite) . . . . .	15
1.2 l'intégral fractionnaire . . . . .	15
1.3 Fonction Gamma . . . . .	16
1.4 polynôme de Legendre . . . . .	17
1.4.1 Formule de Rodrigues . . . . .	18
1.4.2 L'orthogonalité . . . . .	20
1.5 Polynôme de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ . . . . .	20
<b>2 Méthode de collocation de Legendre</b>	<b>26</b>
2.1 Position du problème . . . . .	27
2.2 Évaluation du dérivée fractionnaire conformable en utilisant polynôme de Legendre . . . . .	27

2.2.1	Analyse de convergence . . . . .	30
2.3	Méthode collocation de Legendre . . . . .	36
2.3.1	Méthode d'Euler . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Méthode de collocation de Tchebychev</b>	<b>45</b>
3.1	Polynômes de Tchebychev décalés $W_i^*(x)$ . . . . .	46
3.2	Évaluation du dérivée fractionnaire conformable en utilisant polynôme de Tchebychev . . . . .	47
3.2.1	Analyse des erreurs . . . . .	49
3.3	Méthode collocation de Tchebychev . . . . .	51
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>

---

---

## Table des figures

---

2.1	comparaison entre solution approche et exacte avec $m = 3, \beta = 2$ . . . . .	41
2.2	comparaison entre solution approche et exacte avec $m = 3, \alpha = 1$ . . . . .	42
2.3	comparaison entre solution approche et exacte avec $m = 3, \beta = 1 + \alpha$ . . . . .	44
3.1	comparaison entre solution approche et exacte pour $m = 3, \beta = 2$ . . . . .	55
3.2	comparaison entre solution approche et exacte avec $\alpha = 1$ . . . . .	56
3.3	comparaison entre solution approche et exacte avec $m = 3, \beta = 1 + \alpha$ . . . . .	58

---

## Introduction générale

---

Dans les deux dernières décennies, le calcul fractionnaire suscite l'intérêt croissant de nombreux chercheurs puisqu'il s'agit d'un outil important pour modéliser divers phénomènes en sciences et en ingénierie. L'utilisation de dérivées fractionnaires conduit à un plus grand degré de liberté, ce qui rend les modèles mathématiques comprenant des dérivées fractionnaires plus réalistes que ceux comprenant des dérivées d'ordre entier. Par conséquent, il a de nombreuses applications dans de nombreux domaines scientifiques tels que le traitement d'images, le génie sismique et biomédical, la viscoélasticité, la finance, l'hydrologie, le traitement du signal, la biologie et système de contrôle.

Cependant, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une solu-

tion exacte ou analytique des équations de diffusion fractionnaire (EDF). En conséquence, pour les solutions de nombreux EDF, les techniques numériques telles que la méthode de décomposition adomienne [7], la méthode d'itération variationnelle [4], la méthode de collocation de Taylor [5, 17], la méthode d'analyse d'homotopie [6, 18, 16], la méthode de collecte [8, 9], méthode des ondelettes de Gegenbauer [19] et une méthode de collocation de Tchebychev avec méthode de Newmark [15] sont utilisées.

Dans ce mémoire, nous avons considéré le problème de diffusion fractionnaire suivant :

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, t) = \mathcal{D}_x^{(\beta)} u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad u(1, t) = h(t), \quad (3)$$

où  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $1 < \beta \leq 2$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $f(x, t)$  est le terme source,  $\varphi(x)$  est la condition initiale,  $g(t)$  et  $h(t)$  sont les conditions aux limites de Dirichlet.  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$  et  $\mathcal{D}_x^{(\beta)}$  désignent les dérivées fractionnaires conformables d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  par rapport  $t$  et  $x$  respectivement. Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ , le problème (1)-(3) a été étudié

par de nombreux chercheurs, voir [20, 3].

L'objectif de ce mémoire est de construire la solution approchée du problème (1)-(3) en utilisant les méthodes de collocation de Legendre et de Tchebychev. Les propriétés de l'orthogonalité des polynômes de Legendre et de Tchebychev décalés nous permet avoir un système d'équations différentielles linéaires d'ordre un. Par la méthode d'Euler, nous avons résoudre ce système.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant le calcul fractionnaire conformable, polynômes de Legendre et de Tchebychev.

Dans le deuxième chapitre, nous avons appliqué la méthode de collocation de Legendre avec un schéma d'Euler pour résoudre numériquement le problème (1)-(3).

Dans le dernier chapitre, nous avons résoudre le problème (1)-(3) par la méthode de collocation de Tchébychev de quatrième espèce avec un schéma numérique d'Euler.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques pers-

pectives.

## PRÉLIMINAIRES

---

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant le calcul fractionnaire conformable, polynômes de Legendre et de Tchebychev.

## 1.1 Dérivée fractionnaire conforme

**Définition 1.1** ([10]). Soit la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la dérivée conforme de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$D^\alpha (f) (x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hx^{1-\alpha}) - f(x)}{h}, \quad \forall x > 0; \alpha \in ]0, 1[ \quad (1.1)$$

**Théorème 1.1** ([1]). Soit la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  La dérivée fractionnaire conforme d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  existe ssi la fonction  $f$  est différentiable alors :

$$D^\alpha (f) (x) = x^{1-\alpha} f' (x) \quad (1.2)$$

**Théorème 1.2** ([10]). si la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\alpha$ -différentiable au point  $x_0$  et  $0 < \alpha < 1$  alors la fonction  $f$  est continue au point  $x_0$

comme :

$$f(x_0 + hx_0^{1-\alpha}) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + hx_0^{1-\alpha}) - f(x_0) \times h}{h}$$

alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + hx_0^{1-\alpha}) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hx_0^{1-\alpha}) - f(x_0)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} h$$

On pose :  $k = hx_0^{1-\alpha}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + k) - f(x_0) = f^{(\alpha)}(x_0) \times 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + k) = f(x_0)$$

donc  $f$  est continue a  $x_0$ .

**Théorème 1.3** ([10]). soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $f, g$   $\alpha$  –différentiable au point  $x > 0$  alors :

1.

$$D^\alpha (af + bg) = aD^\alpha (f) + bD^\alpha (g), \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

2.

$$D^\alpha (x^p) = px^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

3.

$$D^\alpha f = 0, \text{ pour } f(x) = cte \quad (1.5)$$

4.

$$D^\alpha (f \times g) = fD_\alpha (g) + gD^\alpha (f) \quad (1.6)$$

5.

$$D^\alpha \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{fD^\alpha (g) + gD^\alpha (f)}{g^2}, g \neq 0 \quad (1.7)$$

6. en plus si  $f$  est différentiable alors :

$$D^\alpha (f)(x) = x^{1-\alpha} f'(x) \quad (1.8)$$

– si  $f, g$  sont  $\alpha$  différentiable alors  $f, g$  sont différentiable et on a :

- $D^\alpha (f) (x) = x^{1-\alpha} f' (x)$
- $D^\alpha (g) (x) = x^{1-\alpha} g' (x)$

*Démonstration.*

On commence par (1) :

puisque  $f, g$  sont différentiable alors  $af + bg$  est aussi différentiable.

d'après la définition (1.2) , $af + bg$  est  $\alpha$  différentiable :

$$\begin{aligned} D^\alpha (af + bg) (x) &= x^{1-\alpha} (af + bg)' (x) \\ &= ax^{1-\alpha} f' + bx^{1-\alpha} g' \\ &= aD^\alpha (f) + bD^\alpha (g) \end{aligned}$$

– (1.6)

$$\begin{aligned} D^\alpha (f \times g) (x) &= x^{1-\alpha} (f \times g)' (x) \\ &= x^{1-\alpha} (fg' + gf') (x) \\ &= x^{1-\alpha} fg' (x) + x^{1-\alpha} gf' (x) \\ &= fD^\alpha (g) (x) + gD^\alpha (f) (x) \end{aligned}$$

– (??)

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \left( \frac{f}{g} \right) (x) &= x^{1-\alpha} \left( \frac{f}{g} \right)' (x) \\
 &= x^{1-\alpha} \left( \frac{f'g - g'f}{g^2} \right) (x) \\
 &= \frac{gx^{1-\alpha}f' - fx^{1-\alpha}g'}{g^2} (x) \\
 &= \frac{gD^\alpha(f)(x) - fD^\alpha(g)(x)}{g^2}
 \end{aligned}$$

□

### 1.1.1 Dérivée fractionnaire conformable des fonctions usuelles

[[10]]

1.  $D^\alpha(x^p) = px^{p-\alpha}$
2.  $D^\alpha(k) = 0$ , pour  $k = cste$
3.  $D^\alpha(\exp(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)) = \exp(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)$
4.  $D^\alpha(\sin \frac{1}{\alpha}x^\alpha) = \cos \frac{1}{\alpha}x^\alpha$
5.  $D^\alpha(\cos \frac{1}{\alpha}x^\alpha) = -\sin \frac{1}{\alpha}x^\alpha$

– si on pose  $\alpha = 1$  dans ces dérivées, nous obtenus les dérivées ordinaires.

### 1.1.2 Dérivée fractionnaire conforme a gauche ( a droite)

**Définition 1.2** ([1]). la dérivée fractionnaire conforme a gauche (adroite) de  $f$  tel que  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f : ] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ),  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$D_{\alpha}^a (f) (x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left( x + h (x - a)^{1-\alpha} \right) - f (x)}{h}, x > a \quad (1.9)$$

$$\left( D_{\alpha}^b (f) (x) = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left( x + h (b - x)^{1-\alpha} \right) - f (x)}{h} \right), x < b \quad (1.10)$$

et on a aussi si  $f$  différentiable alors :

$$D_{\alpha}^a (f) (x) = (x - a)^{1-\alpha} f' (x), \left( D_{\alpha}^b (f) (x) = - (b - x)^{1-\alpha} f' (x) \right)$$

## 1.2 l'intégral fractionnaire

**Définition 1.3** ([10]). L'intégral de la fonction  $f$  est

$$I_{\alpha}^a (f) (t) = \int_a^t \frac{f (x)}{x^{1-\alpha}} dx \quad (1.11)$$

$I_{\alpha}$  est la primitive de  $D^{\alpha}$ .

### Théorème 1.4.

$$D^{\alpha} I_{\alpha}^a (f) (t) = f (t)$$

pour  $t > a$  ou  $f$  est continue .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 D^\alpha (I_\alpha^a f(t))(t) &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_\alpha^a (f)(t) \\
 &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \\
 &= t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \\
 &= f(t)
 \end{aligned}$$

□

**Exemple 1.1.** On a :  $f(t) = \sin t$

$$D^{1/2}(\sin t) = \sqrt{t} \cos t$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 I_{1/2}^0(\sqrt{t} \cos t) &= \int_0^t \cos x dx \\
 &= \sin t
 \end{aligned}$$

### 1.3 Fonction Gamma

**Définition 1.4** ([12]). La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels.

Elle est définie par une intégrale impropre.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{\alpha-t} dt \quad (1.12)$$

**Propriétés 1.1.** 1.  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2.  $\Gamma(1) = 1.$

3.  $\Gamma(0) = \infty.$

4. Si  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{n}}{4^n n!}$$

## 1.4 polynôme de Legendre

**Définition 1.5** ([2]). le polynôme de Legendre est défini sur  $[-1, 1]$  et donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} L_0(z) = 1 \\ L_1(z) = z \\ L_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{i+1}z \ln(z) - \frac{i}{i+1}L_{i-1}(z), \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

Si le polynôme de Legendre est défini sur  $[0, 1]$  alors on prend  $Z = 2x - 1$

$$\begin{cases} L_0^*(x) = 1, \\ L_1^*(x) = 2x - 1, \\ L_{i+1}^*(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{i+1} L_i^*(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}^*(x), \quad i = 1.2.3 \dots \end{cases} \quad (1.14)$$

Le polynôme Legendre  $L_i^*(x)$  est donné par

$$L_i^* = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1) (\Gamma(k+1))^2} x^k \quad (1.15)$$

L'approximation de la fonction continue  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par le polynôme de Legendre est :

$$g(x) = \sum_{i=0}^N c_i L_i^*(x)$$

avec le coefficient  $c_i$  :

$$c_i(x) = (2i+1) \int_0^1 g(x) L_i^*(x) dx, \quad i = 1.2.3 \dots$$

### 1.4.1 Formule de Rodrigues

**Définition 1.6** ([14]). le polynôme de Legendre défini par la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n \quad (1.16)$$

Avec  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  et  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  On a :

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} (-1)^k$$

Avec :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Donc :

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k (x^2)^{n-k}$$

Avec la dérivée n-ieme :

$$\frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n = \begin{cases} 0, & \text{Si } n > 2n - 2k \\ \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, & \text{Si } n \leq 2n - 2k \end{cases}$$

$$n \leq 2n - 2k \Rightarrow n \leq 2k \Rightarrow k \leq \frac{n}{2}$$

- Si n paire  $k = 0.1.2.....\frac{n}{2}$
- Si n impaire  $k = 0.1.2.....\frac{n-1}{2}$

$$\Rightarrow k = 0.1.2..... \left[ \frac{n}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n &= \frac{d^n}{d^n x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (x^2)^{n-k}}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!k!} \frac{d^n}{d^n x} (x^{2n-2k}) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2n-2k)!}{(n-k)!k! (n-2k)!} x^{n-2k}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n (n-k)!k! (n-2k)!} x^{n-2k}
\end{aligned}$$

### 1.4.2 L'orthogonalité

**Proposition 1.1.** *Les polynômes de Legendre sont orthogonaux dans l'intervalle  $[0, 1]$  si on a :*

$$\int_0^1 L_i^*(x) L_j^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+1}}, & \text{Si } i = j \\ 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases} \quad (1.17)$$

## 1.5 Polynôme de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$

**Définition 1.7** ([11]). Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce  $W_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degrés  $n$  définis

a l'aide de la relation suivante :

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta}, \quad \text{avec } x = \cos\theta. \quad (1.18)$$

Pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ , alors  $\theta$  appartient à  $[0, \pi]$ , voici quelques polynômes  $W_n(x)$

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1, \quad \dots\dots\dots$$

**Proposition 1.2.** *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce  $W_n(x)$  sont orthogonaux dans l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport la fonction poids*

$$w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

.i.e.

$$\int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \pi \delta_{mn}$$

*Démonstration.* Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m \neq n$  On a :

$$\int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_{-1}^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_n(x) W_m(x) (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Posons  $x = \cos\theta$  on obtient :

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = (1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta \Rightarrow (1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta$$

Car :

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{-1}{2}} dx &= - \int_{-1}^1 \left( \frac{d \arccos x}{dx} \right) W_n(\cos\theta) \sqrt{2} \sin\theta dx \\ &= 2 \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi [\cos(n-m)\theta - \cos(m+n+1)\theta] d\theta \\ &= 0, \text{ pour } m \neq n. \end{aligned}$$

Pour  $m = n$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 W_n^2(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{-1}{2}} dx &= - \int_{-1}^1 \left( \frac{d \arccos x}{dx} \right) W_n^2(x) (1-x) dx \\ &= \int_0^\pi W_n^2(\cos\theta) (1 - \cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\theta} (1 - \cos\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi 1 - \cos(2n+1)\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi 1 d\theta - \int_0^\pi \cos(2n+1)\theta d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

D'ou :

$$\int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi \delta_{mn}$$

□

**Proposition 1.3.** *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce  $W_n(x)$  vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), & \forall n \geq 2 \\ W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

*Démonstration.* soit  $x \in [-1, 1]$  posons  $\theta = \arccos x$  ainsi  $\theta \in [0, \pi]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2 \cos \theta \sin\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

On divise par  $\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta$  on obtient :

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta} + \frac{\sin\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta} = 2 \cos \theta \frac{\sin\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\theta}$$

D'où le résultat i.e.

$$\begin{aligned} W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ W_0(x) &= 1, W_1(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.1.** D'après (1.19) les polynômes de Tchebychev de

quatrième espèce sont des polynômes de degré  $n$  en  $x$

**Proposition 1.4.** *Les polynômes De Tchebychev de quatrième espèce sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2) y''(x) - (2x + 1) y'(x) + n(n + 1) y(x) = 0$$

**Proposition 1.5.** *Les zéros de  $W_n(x)$  sont de la forme :*

$$x = x_k = \cos \frac{k\pi}{x + \frac{1}{2}}, \quad k = 1.2.\dots.n$$

*Démonstration.* De la définition (1.18) les zéros pour  $x$  dans  $[-1, 1]$  de  $W_n(x)$  doivent correspondre a les zéros pour  $\theta$  dans  $[0, \pi]$  de  $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ , i.e.

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = k\pi, \quad k = 1.2.\dots.n$$

Donc les zéros de  $W_n(x)$  sont :

$$y_k = \frac{\cos k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1.2.\dots.n$$

□

**Proposition 1.6.** *Le coefficient dominant des polynômes  $W_n(x)$  est  $2^n$ ,  $\forall n \geq 2$*

*Démonstration.* Soit le polynôme  $W_n(x)$  telque

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Supposons que  $a_n \neq 0$  de la relation (1.19)

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots &= 2x (a_{n-1} x^{n-1} + \dots) - (a_{n-2} x^{n-2} + \dots) \\ \Rightarrow (a_n x^n + \dots) &= 2(a_{n-1} x^n + \dots) \end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1}$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1} a_1 = 2^n a_0$$

Puise que  $W_0(x) = 1$ , alors :

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2$$

□

---

## MÉTHODE DE COLLOCATION DE LEGENDRE

---

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de collocation de Legendre pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire conformable avec conditions aux limites de Dirichlet. En utilisant les séries polynomiales de Legendre décalées et leur propriété d'orthogonalité ainsi que l'évaluation de la dérivée conformable, le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler. Les exemples numériques montrent que la méthode est fiable et efficace.

## 2.1 Position du problème

On considère l'équation de diffusion fractionnaires définie dans un domaine  $[0, T]$  :

$$D_t^{(\alpha)} u(x, t) = D_x^{(\beta)} u(x, t) + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1)$$

Avec condition initiale :

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Et condition au limite :

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Ou  $D_t^{(\alpha)}$  et  $D_x^{(\beta)}$  sont les dérivées fractionnaire conformable d'ordre  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $1 < \beta < 2$ ,  $f(x, t)$  et  $g(x)$   $\varphi(t)$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions données.

## 2.2 Évaluation du dérivée fractionnaire conformable en utilisant polynôme de Legendre

**Théorème 2.1.** Soit  $g_m(x)$  est l'approximation de fonction par le polynôme de Legendre

$$g_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i L_i^*(x) \quad (2.2)$$

Donc on obtient :

$$\mathcal{D}^\alpha (g_m(x)) = \sum_{i=(n)}^m \sum_{k=(n+1)}^i c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(n)} x^{k-\alpha}, \text{ avec } n < \alpha \leq n + 1$$

et

$$\mathcal{N}_{i,k}^{(n)} = (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1) \Gamma(k+1) \Gamma(k-n)} \quad (2.3)$$

*Démonstration.* Par la linéarité de dérivée conformable et l'équation (2.1) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i \mathcal{D}_x^\alpha L_i^*(x), \quad \alpha > 0 \quad (2.4)$$

on utilisant (1.2) et (1.3) on obtient

$$\mathcal{D}_x^\alpha L_i^*(x) = 0, i = 0.1... [\alpha] - 1, \quad n \in \mathbb{N}, n < \alpha \leq n + 1 \quad (2.5)$$

On a :

$$\mathcal{D}_x^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)} x^{k-\alpha}, n \in \mathbb{N}, n < \alpha \leq n + 1$$

De l'équation (1.15) :

$$\mathcal{D}_x^\alpha L_i^*(x) = \sum_{k=n+1}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1) \Gamma(k+1) \Gamma(k-n)} x^{k-\alpha} \quad (2.6)$$

Par la combinaison des équations (2.4) (2.5) et (2.6) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=n+1}^i c_i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1) \Gamma(k+1) \Gamma(k-n)} x^{k-\alpha} \quad (2.7)$$

Et on peut écrire :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=n+1}^i c_i \mathcal{N}_{i,k}^n x^{k-\alpha}$$

□

**Exemple 2.1.** Considère  $g(x) = x$  et  $m = 1$ ,  $\alpha = 0.5$  et  $n = 0$

$$\mathcal{D}^{(0.5)} g(x) = \sqrt{x}$$

On utilise la théorème 2.1 et on obtient :

$$\mathcal{D}^{(0.5)} g(x) = c_1 \mathcal{N}_{1,1}^0 x^{0.5}$$

$$c_1 = 1/2 \text{ et } \mathcal{N}_{1,1}^0 = 2$$

donc :

$$D^{(0.5)} g(x) = \sqrt{x}$$

**Exemple 2.2.** Considère  $g(x) = x^2$  et  $m = 2$ ,  $\alpha = 1.5$  et  $n = 1$

$$D^{(1.5)} g(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)} x^{0.5} = 2\sqrt{x}$$

On utilise la théorème 2.1 et on obtient :

$$D^{(1.5)}g(x) = c_2 N_{2,2}^1 x^{0.5}$$

$$c_2 = 1/6 \text{ et } N_{2,2}^1 = 12$$

donc :

$$D^{(1.5)}g(x) = 2\sqrt{x}$$

### 2.2.1 Analyse de convergence

Avant de prouver le théorème de convergence on utilise trois lemmes :

**Lemme 2.1.** *On a :*

$$|L_j^*(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{8j(x-x^2)}}, \quad \forall x \in ]0,1[ \text{ et } j \in \mathbb{N}^* \quad (2.8)$$

*Démonstration.* Le premier intégral de la place de  $L_i(x)$  avec  $x \in [-1,1]$ , voir [13], est donnée par :

$$L_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos(\theta) \right]^j d\theta \quad (2.9)$$

on pose  $z = 2x - 1$  dans (2.9) on obtient :

$$\begin{aligned} L_j^*(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ 2x - 1 + ((4x^2 - 4x))^{1/2} \cos(\theta) \right]^j d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ 2x - 1 + 2i(x - x^2)^{1/2} \cos(\theta) \right]^j d\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

pour  $x \in ]0,1[$  on a :

$$\begin{aligned} \left| 2x - 1 + 2i (x - x^2)^{1/2} \cos(\theta) \right| &= \sqrt{(2x - 1)^2 + 4(x - x^2) \cos^2(\theta)} \\ &= \sqrt{1 - 4(x - x^2) \sin^2(\theta)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

de (2.10) et (2.11) on obtient

$$|L_j^*(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1 - 4(x - x^2) \sin^2(\theta)]^{j/2} d\theta \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 - 4(x - x^2) \sin^2(\theta)]^{j/2} d\theta$$

pour  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $\sin(\theta) > 2\theta/\pi$ . Donc :

$$1 - 4(x - x^2) \sin^2(\theta) < 1 - \frac{16\theta^2(x - x^2)}{\pi^2} < \exp\left(-\frac{16\theta^2(x - x^2)}{\pi^2}\right)$$

Nous utilisons  $1 - y < \exp^{-y}$  pour  $y > 0$ . on peut écrire :

$$|L_j^*(x)| < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-8j\theta^2(x - x^2)}{\pi^2}\right) d\theta < \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-8j\theta^2(x - x^2)}{\pi^2}\right) d\theta$$

apres on pose  $s = \frac{2\theta}{\pi} (2j(x - x^2))^{1/2}$  on obtient :

$$|L_j^*(x)| < \frac{2}{\pi} \frac{\pi/2}{(2j(x - x^2))^{1/2}} \int_0^{+\infty} \exp^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{8j(x - x^2)}}$$

□

**Lemme 2.2.** Si  $\varphi \in L^2(0, 1)$ , alors :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sqrt{2i + 1} \int_0^1 \varphi(x) L_i^*(x) dx = 0 \tag{2.12}$$

*Démonstration.* La somme m-ieme noté par :

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i L_i^*(x) \quad (2.13)$$

Et

$$\int_0^1 [g(x) - S_m(x)]^2 dx = \int_0^1 g^2(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) S_m(x) dx + \int_0^1 S_m^2(x) dx \geq 0 \quad (2.14)$$

de (2.14) et (1.17) on obtient :

$$\int_0^1 g(x) S_m(x) dx = \sum_{i=0}^m c_i \int_0^1 g(x) L_i^*(x) dx = \sum_{i=0}^m \frac{c_i^2}{2i+1} \quad (2.15)$$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_m^2(x) dx &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m c_i c_j \int_0^1 L_i^*(x) L_j^*(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^m c_i^2 \int_0^1 [L_i^*(x)]^2 dx \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{c_i^2}{2i+1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

On remplace (2.15) et (2.16) dans (2.14), on obtient :

$$\sum_{i=0}^m \frac{c_i^2}{2i+1} \leq \int_0^1 g^2(x) dx$$

Dernier inégalité est pour m ,on passe a la limite on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_i^2}{2i+1} \leq \int_0^1 g^2(x) dx$$

L'intégral de droite est nécessairement bornée ,puisque  $g$  est supposé carré intégrable dans  $[0, 1]$  .donc , la série de gauche est une série convergente , et donc il s'ensuit que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_i^2}{2i+1} = 0 \tag{2.17}$$

On utilisons le coefficient  $c_i$  et (2.18) , on obtient (2.12) □

**Lemme 2.3.** *Le polynôme de Legendre satisfait l'identité*

$$\sum_{i=0}^m (2i+1) L_i^*(x) L_j^*(y) = \frac{m+1}{2(y-x)} [L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)] \tag{2.18}$$

*Démonstration.* On commence par multiplie la relation (1.14) par  $L_i^*(y)$  on a :

$$(2i+1)(2x-1) L_i^*(y) L_i^*(x) = (i+1) L_i^*(y) L_{i+1}^*(x) + i L_i^*(y) L_{i-1}^*(x)$$

Si on change les roles entre x et y dans cette expression ,on obtient :

$$2(2i+1)(y-x) L_i^*(y) L_i^*(x) = (i+1) [L_{i+1}^*(y) L_i^*(x) - L_i^*(y) L_{i+1}^*(x)] - i [L_{i-1}^*(y) L_i^*(x) - L_i^*(y) L_{i-1}^*(x)]$$

Enfin, on additionner les deux cotes de cette identité alors que  $i$  va de 1 à  $m$  , on trouve (2.18) □

**Remarque 2.1.** On note que l'intégration au  $[0, 1]$  de la formule

(2.18) aux leads

$$\sum_{i=0}^m (2i + 1) L_i^*(x) \int_0^1 L_i^*(y) dy = \frac{m + 1}{2} \int_0^1 \frac{L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)}{y - x}$$

à partir duquel et (1.17) ,nous en déduisons

$$(m + 1) \int_0^1 \frac{L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)}{y - x} dy = 2 \quad (2.19)$$

**Théorème 2.2.** *Si la fonction  $g \in C^1(0, 1)$  , alors la série de Legendre définie par  $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i L_i^*(x)$  converge a la point fixe vers  $g(x)$  sur  $[0, 1]$*

*Démonstration.* Soit  $x \in [0, 1]$ , on considère la somme partielle

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i L_i^*(x) = \sum_{i=0}^m \left[ (2i + 1) \int_0^1 g(y) L_i^*(y) dy \right] L_i^*(x)$$

Inter-changer l'ordre de sommation et d'intégration et on utilise (2.12) , On obtient :

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \int_0^1 g(y) \sum_{i=0}^m (2i + 1) L_i^*(y) L_i^*(x) \\ &= \frac{m + 1}{2} \int_0^1 g(y) \frac{[L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)]}{y - x} dy \end{aligned}$$

Si nous ajoutons et soustrayons la fonction  $g(x)$ , On a :

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{m + 1}{2} g(x) \int_0^1 \frac{L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)}{y - x} dy \\ &+ \frac{m + 1}{2} \int_0^1 \frac{g(y) - g(x)}{y - x} [L_{m+1}^*(y) L_m^*(x) - L_m^*(y) L_{m+1}^*(x)] dy \end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction :

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} & \text{si } y \neq x \\ g'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  est continue dans  $[0, 1]$  et utilise (2.19) pour obtient :

$$S_m(x) = g(x) + \frac{m+1}{2} L_m^*(x) \int_0^1 \varphi(y) L_{m+1}^*(y) dy - \frac{m+1}{2} L_{m+1}^*(x) \int_0^1 \varphi(y) dy \quad (2.20)$$

On pose  $b_m = \int_0^1 \varphi(y) L_m^*(y) dy$  .la somme partielle en (2.20) devient sous la forme :

$$S_m(x) - g(x) = \frac{(m+1) L_m^*(x)}{2\sqrt{2m+3}} b_{m+1} - \frac{(m+1) L_{m+1}^*(x)}{2\sqrt{2m+1}} b_m$$

On utilise , pour voir que dans  $0 < x < 1$

$$\frac{(m+1) |L_m^*(x)|}{2\sqrt{2m+3}} < \left[ \frac{(m+1)^2}{2m^2+3m} \cdot \frac{\pi}{32(x-x^2)} \right]^{1/2} < \sqrt{\frac{\pi}{32(x-x^2)}}$$

Et

$$\frac{(m+1) |L_{m+1}^*(x)|}{2\sqrt{2m+1}} < \left[ \frac{m+1}{2m+1} \cdot \frac{\pi}{32(x-x^2)} \right]^{1/2} < \sqrt{\frac{\pi}{32(x-x^2)}}$$

Ensuite  $\frac{(m+1)L_m^*(x)}{2\sqrt{2m+3}}$  et  $\frac{(m+1)L_{m+1}^*(x)}{2\sqrt{2m+1}}$  sont bornes puisque  $m \rightarrow +\infty$ . On utilise (2.12) pour voir que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} b_{m+1} = 0$$

Donc , on obtient  $S_m(x) \rightarrow_{m \rightarrow +\infty} g(x)$  □

## 2.3 Méthode collocation de Legendre

[[15]] Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Legendre pour résoudre numériquement le problème (2.1).

Nous appliquons la théorème 2.1 et (2.2) , on obtient

$$\sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c'_i(t) L_i^*(x) = \sum_{i=2}^m \sum_{k=2}^i c_i(t) \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x^{k-\beta} + f(x, t) \quad (2.21)$$

Soit  $(x_p), p = 1, 2, \dots, m$  Les racines de  $L_m^*(x)$

$$\sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c'_i(t) L_i^*(x_p) = \sum_{i=2}^m \sum_{k=2}^i c_i(t) \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x_p^{k-\beta} + f(x_p, t) \quad (2.22)$$

$$\left( \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c'_i(t) L_i^*(x_p) \right) - \left[ \left( \sum_{i=2}^m \sum_{k=2}^i \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x_p^{k-\beta} \right) \right] \times \left( \sum_{i=0}^m c_i(t) \right) = f(x_p, t) \quad (2.23)$$

alors :

$$\begin{cases} S_0(x_p) = S_1(x_p) = 0 \\ S_i(x_p) = \sum_{k=2}^i \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x_p^{k-\beta}, i = 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

aussi mettre les conditions aux limite dans (2.2) ,on obtient

$$\sum_{i=0}^m c_i(t) (-1)^i = 0, \sum_{i=0}^m c_i(t) = 0 \quad (2.24)$$

On introduit les vecteurs  $X(t)$  et  $F(t)$  définis par

$$X(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T$$

$$F(t) = (f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_m, t), \varphi(t), \psi(t))^T$$

on remplace (2.2) dans la condition initiale :

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i L_i^*(x)$$

$$\sum_{i=0}^m c_i(0) = \sum_{i=0}^m \beta_i L_i^*(x)$$

$$c_i(0) = \beta_i$$

Soit les matrices  $A, B$  données par

$$A = t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} L_0^*(x_0) & L_0^*(x_1) & \dots & L_m^*(x_0) \\ L_0^*(x_1) & L_1^*(x_1) & \dots & L_m^*(x_1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ L_0^*(x_m) & L_1^*(x_m) & \dots & L_m^*(x_m) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} S_0(x_0) & S_1(x_0) & \dots & S_m(x_0) \\ S_0(x_1) & S_1(x_1) & \dots & S_m(x_1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ S_0(x_m) & S_1(x_m) & \dots & S_m(x_m) \\ 1 & -1 & \dots & (-1)^m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A(t) X'(t) - B(t) X(t) = F(t), \\ X(0) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T, \\ X'(0) = (c'_0(t), c'_1(t), \dots, c'_m(t))^T. \end{cases} \quad (2.25)$$

### 2.3.1 Méthode d'Euler

Pour un entier positif  $N$ ,  $\tau = \frac{T}{N}$  on définit  $T = t_{n+1} - t_n$  avec  $n = 0.1.2. \dots .N$  on introduisons  $c_i(t_{n+1}) = X^{n+1}$   
 $X^{n+1} = X(t_{n+1}) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T$   
 $F^{n+1} = F(t_{n+1}) = (f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_m, t), \varphi(t), \psi(t))^T$   
 donc on a le système suivant :

$$A(t_{n+1}) X'(t_{n+1}) = B(t_{n+1}) X(t_{n+1}) + F(t_{n+1})$$

et

$$X'(t_{n+1}) = \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\tau}$$

$$X^{n+1} = \frac{X^{n+1} - X^n}{\tau}$$

donc :

$$A^{n+1} \frac{(X^{n+1} - X^n)}{\tau} - B^{n+1} X^{n+1} = F^{n+1}$$

$$(A^{n+1} - \tau B^{n+1}) X^{n+1} = A^{n+1} X^n + \tau F^{n+1}$$

on obtient :

$$X^{n+1} = [A^{n+1} - \tau B^{n+1}]^{-1} [A^{n+1} X^n + \tau F^{n+1}] \quad (2.26)$$

avec :  $X^0 = (0, 0, 0 \dots, 0)$

#### Algorithm 1 (Methode D'Euler)

1: **Initial calculations :**

1. Soit les matrices  $A^{n+1}, B^{n+1}$ .
2. Initialisation  $X^0, \dot{X}^0$ .
3.  $\tau = T/N$
4. le système  $A(t_{n+1}) \dot{X}(t_{n+1}) - B(t_{n+1}) X(t_{n+1}) = F(t_{n+1})$ .

2: **pour chaque pas :**

1. on calcule le temps  $t_{n+1} = (n + 1) \times \tau$  :
2. On a  $\dot{X}(t_{n+1}) = \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\tau}$  alors :

$$\tau A^{n+1} \frac{X^{n+1} - X^n}{\tau} - \tau B^{n+1} X^{n+1} = \tau F^{n+1}$$

3. Donc on trouve :

$$X^{n+1} = [A^{n+1} - \tau B^{n+1}]^{-1} [A^{n+1} X^n + \tau F^{n+1}]$$

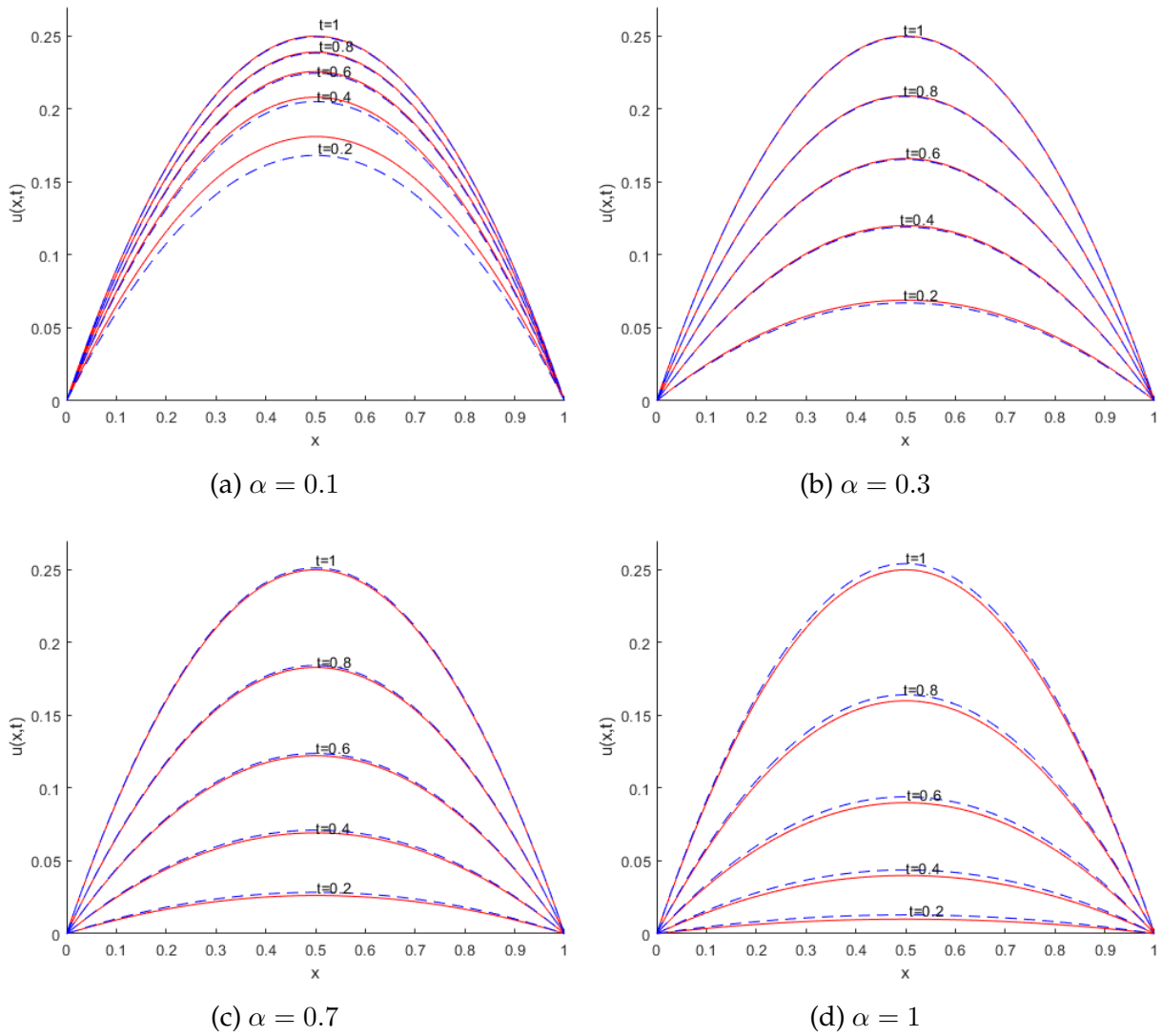
**Exemple 2.3.**

$$\begin{cases} f(x, t) = 2t^\alpha (\alpha (x - x^2) + t^\alpha x^{2-\beta}) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{2\alpha} x(1 - x)$ , Nous appliquons la méthode collocation de Legendre pour  $m=3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i L_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données

FIGURE 2.1 – comparaison entre solution approche et exacte avec  $m = 3, \beta = 2$ **Exemple 2.4.**

$$\begin{cases} f(x, t) = 2\alpha t^\alpha x^{1+\alpha} (1 - x) - t^{2\alpha} \left( (\alpha + \alpha^2) x^{1-\beta+\alpha} - (2 + \alpha) (1 + \alpha) x^{2+\alpha-\beta} \right) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{2\alpha} x^{1+\alpha} (1-x)$ , Nous appliquons la méthode collocation de Legendre pour  $m = 3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i L_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données avec  $\alpha = 1$

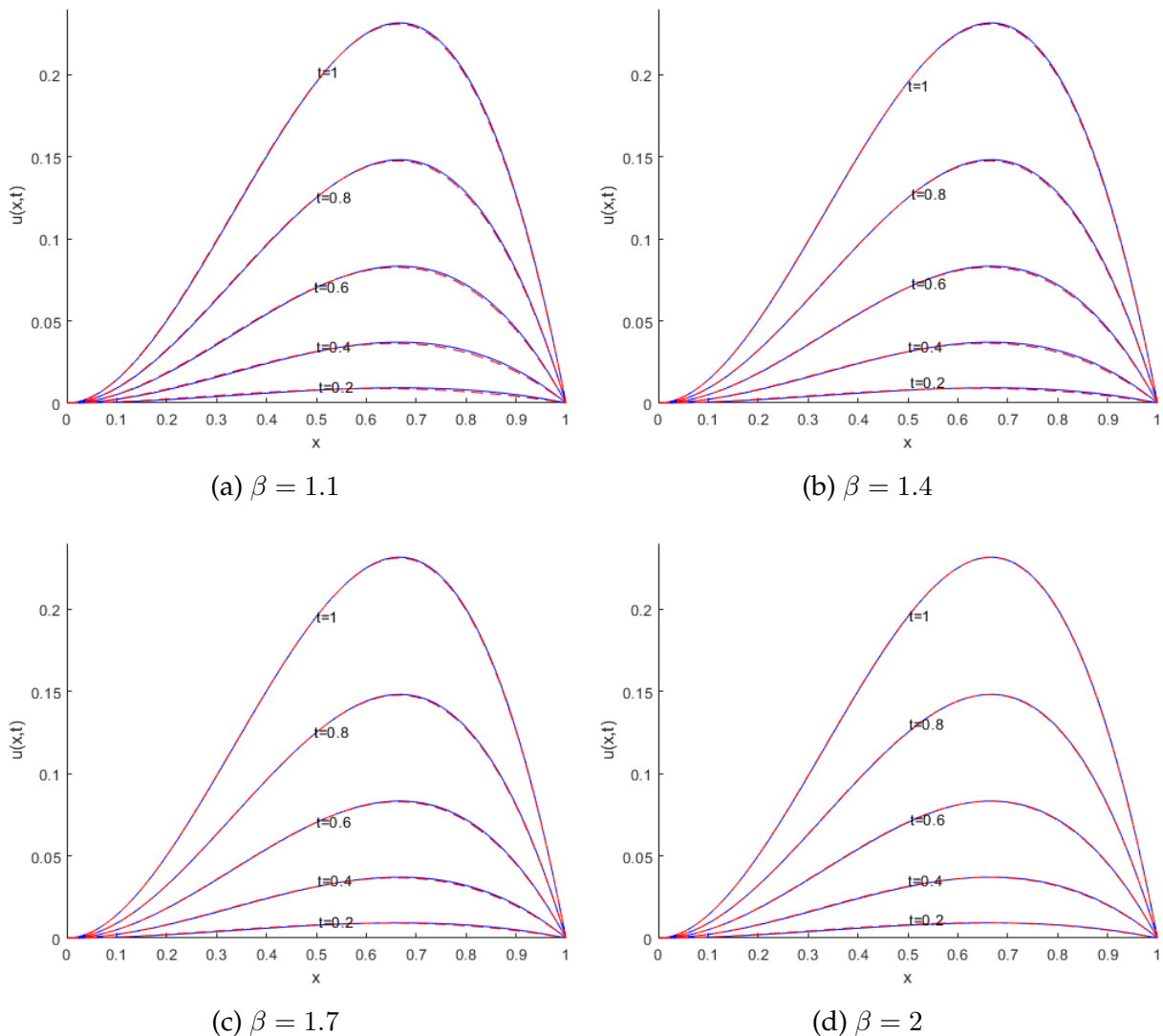


FIGURE 2.2 – comparaison entre solution approché et exacte avec  $m = 3, \alpha = 1$

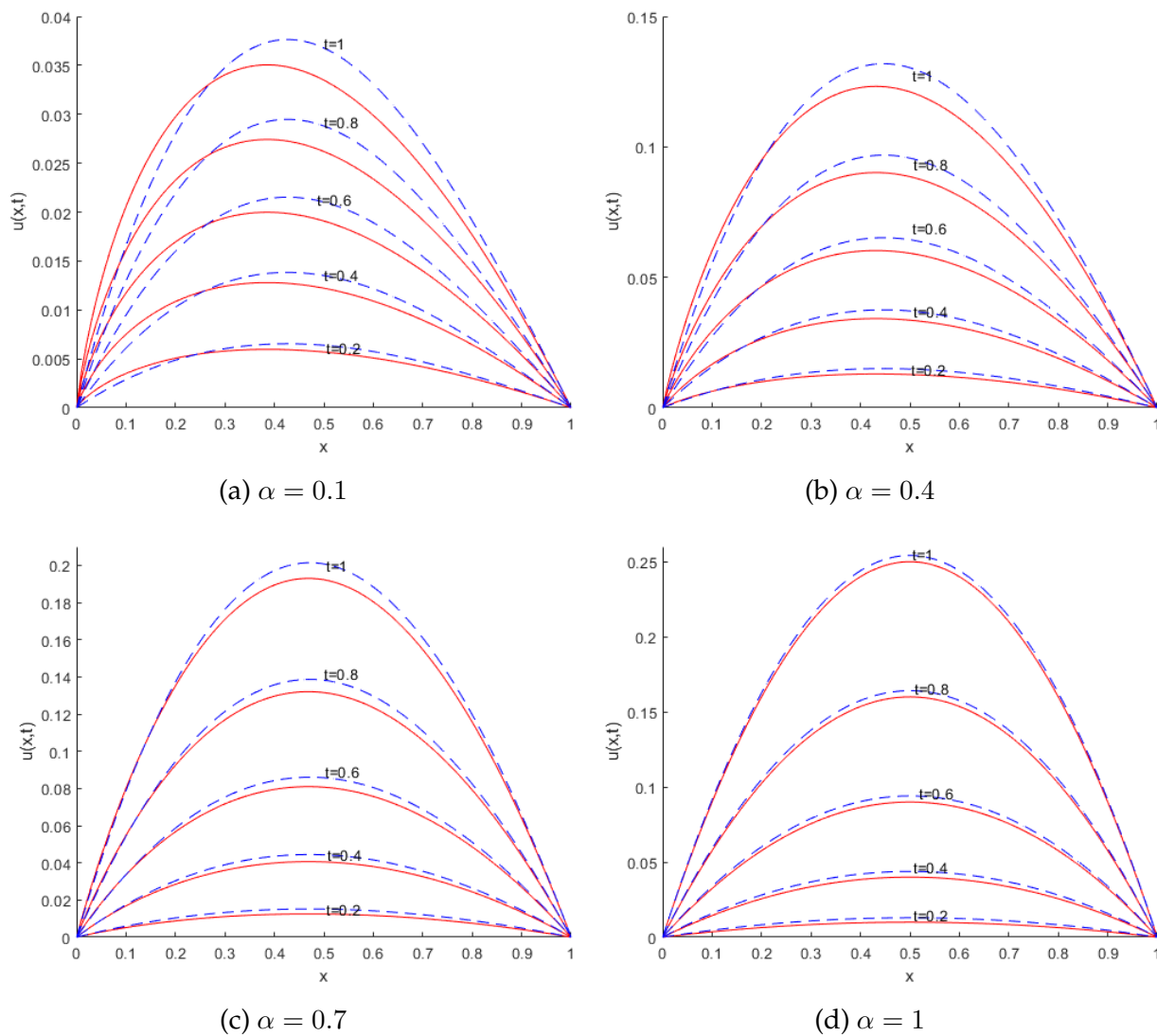
**Exemple 2.5.**

$$\begin{cases} f(x, t) = (1 + \alpha) t (x - x^{1+\alpha}) + t^{1+\alpha} x^{2-\beta} (\alpha (1 + \alpha) x^{\alpha-1}) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{1+\alpha} (x - x^{1+\alpha})$ , Nous appliquons la méthode collocation de Legendre pour  $m=3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i L_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données

FIGURE 2.3 – comparaison entre solution approché et exacte avec  $m = 3, \beta = 1 + \alpha$

## MÉTHODE DE COLLOCATION DE TCHEBYCHEV

---

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de collocation de Tchebychev de quatrième espèce pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire conformable avec conditions aux limites de Dirichlet . En utilisant la définition et l'évaluation de la dérivée conformable avec la série polynomiale de Tchebychev de quatrième espèce décalée , le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler. Trois exemples numériques utilisés pour montrer que cette méthode est fiable et efficace.

### 3.1 Polynômes de Tchebychev décalés $W_i^*(x)$

[[15]] Pour un point de vue pratique, l'intervalle  $[0, 1]$  est plus important que l'intervalle  $[-1, 1]$ . En utilisant la transformation

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1) \text{ avec } s \in [-1, 1] \text{ et } x \in [0, 1]$$

on obtient les polynômes de Tchebychev décalés de la quatrième espèce  $W_i^*(x)$  sont définis par

$$W_i^*(x) = W_n(s) = W_n(2x - 1)$$

Les polynômes de Tchebychev décalés de la quatrième espèce  $W_i^*(x)$  de degré  $n$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} W_0^*(x) = 1, \\ W_1^*(x) = 4x - 1, \\ W_n^*(x) = 2(2x - 1)W_{n-1}^*(x) - W_{n-2}^*(x), \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

La forme explicite de  $W_n^*(x)$  de degré  $n$  est donnée par :

$$W_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{\Gamma(2n - k + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(2n - 2k + 1)} x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Une fonction  $g(x)$ , qui est carrée intégrable dans  $[0, 2]$ , peut être exprimée en termes de polynômes de Tchebychev décalés de la

quatrième espèce comme suit :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i W_i^*(x),$$

ou

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(x) \sqrt{\frac{1-x}{x}} W_i^*(x) dx.$$

Pour des raisons pratiques, nous prenons seulement les premiers  $(m + 1)$ -termes de  $W_i^*(x)$  qui est donnée :

$$g_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i W_i^*(x).$$

### 3.2 Évaluation du dérivée fractionnaire conformable en utilisant polynôme de Tchebychev

**Théorème 3.1.** *Soit  $g_m(x)$  est l'approximation de fonction par le polynôme de Tchebychev*

$$g_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i(t) W_i^*(x) \tag{3.1}$$

Donc on obtient :

$$\mathcal{D}^\alpha (g_m(x)) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-n-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(N)} x^{i-k-\alpha}, \text{ avec } n < \alpha \leq n + 1$$

et  $\mathcal{N}_{i,k}^{(n)}$  donnée par

$$\mathcal{N}_{i,k}^{(n)} = (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+1) \Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2i-2k+1) \Gamma(i-k-n)} \quad (3.2)$$

*Démonstration.* Par la linéarité de dérivée conformable et l'équation (2.1) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i \mathcal{D}_x^\alpha W_i^*(x), \quad \alpha > 0 \quad (3.3)$$

on utilisant (1.2) et (1.3) on obtient

$$\mathcal{D}_x^\alpha W_i^*(x) = 0, \quad i = 0.1... [\alpha] - 1, \quad n \in \mathbb{N}, n < \alpha \leq n+1 \quad (3.4)$$

On a :

$$\mathcal{D}_x^\alpha x^{i-k} = \frac{\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, n < \alpha \leq n+1$$

De l'équation (1.15) :

$$\mathcal{D}_x^\alpha W_i^*(x) = \sum_{k=0}^{i-n-1} (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+1) \Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2i-2k+1) \Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\alpha} \quad (3.5)$$

Par la combinaison des équations (2.4) (2.5) et (2.6) on obtient :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-n-1} c_i (-1)^k \frac{\Gamma(2i-k+1) \Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2i-2k+1) \Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\alpha} \quad (3.6)$$

Et on peut écrire :

$$\mathcal{D}_x^\alpha g_m(x) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-n-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^n x^{i-k-\alpha}$$

□

**Exemple 3.1.** Considère  $g(x) = x^2$  et  $m = 2$ ,  $\alpha = 1.8$  et  $n = 1$

$$\mathcal{D}_x^{(1.8)} g(x) = \mathcal{D}_x^{(0.8)}(2x) = 2\mathcal{D}_x^{(0.8)}(x) = 2x^{0.2}$$

On utilise la théorème 2.1 et on obtient :

$$\mathcal{D}^{(1.8)} g(x) = c_2 N_{2,0}^1 x^{0.2}$$

$$c_2 = 1/16 \text{ et } \mathcal{N}_{2,0}^1 = 32$$

donc :

$$D^{(1.8)} g(x) = 2x^{0.2}$$

### 3.2.1 Analyse des erreurs

L'objectif de cette section est d'étudier l'erreur de troncature et l'analyse de convergence.

**Théorème 3.2.** (*Théorème de convergence uniforme*). Soit  $g \in L^2(0, 1)$  une fonction deux fois différentiable avec la deuxième dérivée est bornée sur  $[0, 1]$  c'est à dire

$$\exists M > 0, \forall x \in [0, 1] : |g''(x)| \leq M.$$

Si  $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i W_i^*(x)$  alors la suite des sommes partielles  $(g_m)$  avec  $g_m(x) = \sum_{i=0}^m b_i W_i^*(x)$  converge uniforme vers  $g(x)$  sur  $[0, 1]$ .

*Démonstration.* En utilisant le changement de variable  $2x - 1 = \cos(\theta)$  dans refreee ,on obtient :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g\left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right) \sin\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta\right] \sin(\theta/2) d\theta.$$

Avec l'intégration par partie deux fois, on obtient :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g''\left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right) \delta_i(\theta) d\theta.$$

ou

$$\delta_i(\theta) = \sin(\theta) \left[ \frac{1}{i} \left( \frac{\sin(i-1)\theta}{i-1} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) + \frac{1}{i+1} \left( \frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i+2} \right) \right]$$

$$|c_i| = \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g''\left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right) \delta_i(\theta) d\theta \right| \leq \frac{M}{4\pi} \int_0^\pi |\delta_i(\theta)| d\theta = \frac{M(i^2 + 2i + 1)}{i(i^2 - 1)(i + 2)}$$

D'autre part, on a :

$$|g(x) - g_m(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| |W_i^*(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{M}{i^2}.$$

Alors,  $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$  est une série de Riemann convergente, donc le reste de cette série est converge vers zéro. Par conséquent, la suite des sommes partielles  $g_m(x)$  converge uniformément vers  $g(x)$  sur  $[0, 1]$ . □

### 3.3 Méthode collocation de Tchebychev

[[15]] Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Tchebychev pour résoudre numériquement le problème (2.1).

Nous appliquons la théorème 2.1 et (2.2) , on obtient

$$\sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c_i'(t) W_i^*(x) = \sum_{i=2}^m \sum_{k=0}^i c_i(t) \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x^{k-\beta} + f(x, t) \quad (3.7)$$

Soit  $(x_p), p = 1, 2, \dots, m$  Les racines de  $W_m^*(x)$  donnée par :

$$x_p = \frac{1}{2} (1 + \cos(p\pi/m)), \quad p = 1, 2, \dots, m-1.$$

Donc :

$$\sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c_i'(t) W_i^*(x_p) = \sum_{i=2}^m \sum_{k=0}^i c_i(t) \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x_p^{i-k-\beta} + f(x_p, t) \quad (3.8)$$

$$\left( \sum_{i=0}^m t^{1-\alpha} c_i'(t) W_i^*(x_p) \right) - \left[ \left( \sum_{i=2}^m \sum_{k=0}^i \mathcal{N}_{i,k}^{(1)} x_p^{i-k-\beta} \right) \right] \times \left( \sum_{i=0}^m c_i(t) \right) = f(x_p, t) \quad (3.9)$$

alors :

$$\begin{cases} S_0(x_p) = S_1(x_p) = 0 \\ S_i(x_p) = \sum_{k=0}^i \mathcal{N}_{i,k}^1 x^{i-k-\beta}, \quad i = 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

aussi mettre les conditions aux limite dans (3.3) ,on obtient

$$\sum_{i=0}^m c_i(t) (-1)^i = 0, \sum_{i=0}^m (2i + 1) c_i(t) = 0 \quad (3.10)$$

On introduit les vecteurs  $X(t)$  et  $F(t)$  définis par

$$X(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T$$

$$F(t) = (f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_m, t), \varphi(t), \psi(t))^T$$

on remplace (3.3) dans la condition initiale :

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i W_i^*(x)$$

$$\sum_{i=0}^m c_i(0) = \sum_{i=0}^m \beta_i W_i^*(x)$$

$$c_i(0) = \beta_i$$

Soit les matrices  $A, B$  données par

$$A = t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} W_0^*(x_0) & W_0^*(x_1) & \dots & W_m^*(x_0) \\ W_0^*(x_1) & W_1^*(x_1) & \dots & W_m^*(x_1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ W_0^*(x_m) & W_1^*(x_m) & \dots & W_m^*(x_m) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} S_0(x_0) & S_1(x_0) & \dots & S_m(x_0) \\ S_0(x_1) & S_1(x_1) & \dots & S_m(x_1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ S_0(x_m) & S_1(x_m) & \dots & S_m(x_m) \\ 1 & -1 & \dots & (-1)^m \\ 1 & 3 & \dots & 2m+1 \end{pmatrix}$$

A la fin ,on obtient :

$$\begin{cases} A(t) X'(t) - B(t) X(t) = F(t), \\ X(0) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T, \\ X'(0) = (c'_0(t), c'_1(t), \dots, c'_m(t))^T. \end{cases}$$

Nous utilisons méthode (*Mthode D' Euler*) que on a utilisé dans le chapitre 2 pour résoudre le système et on obtient :

$$X^{n+1} = [A^{n+1} - \tau B^{n+1}]^{-1} [A^{n+1} X^n + \tau F^{n+1}]$$

avec :  $X^0 = (0, 0, 0 \dots, 0)$

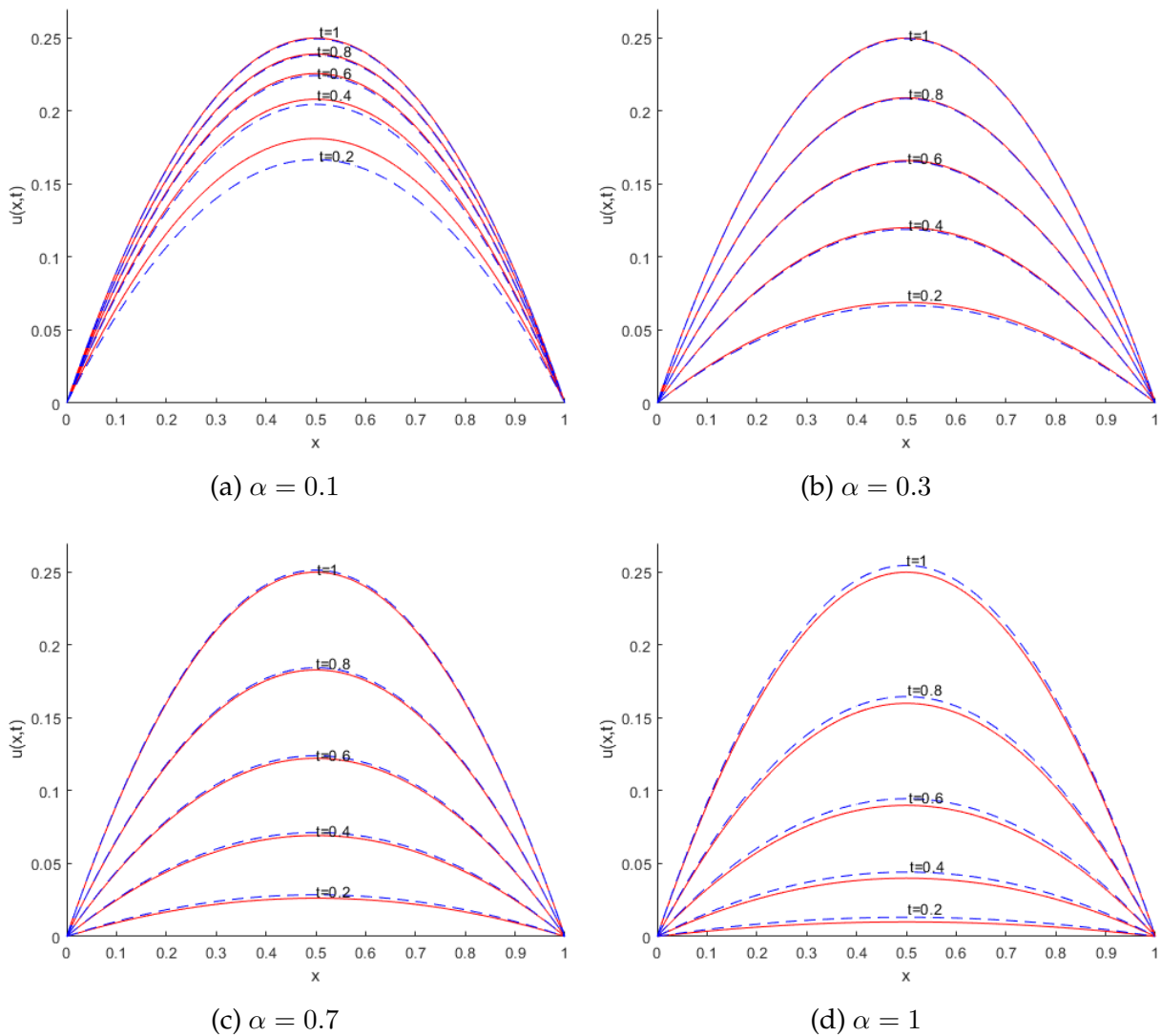
### Exemple 3.2.

$$\begin{cases} f(x, t) = 2t^\alpha (\alpha (x - x^2) + t^\alpha x^{2-\beta}) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{2\alpha} x(1 - x)$ , Nous appliquons la méthode collocation de Tchebychev pour  $m = 3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i W_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données avec  $\beta = 2$

FIGURE 3.1 – comparaison entre solution approche et exacte pour  $m = 3, \beta = 2$ **Exemple 3.3.**

$$\begin{cases} f(x, t) = 2\alpha t^\alpha x^{1+\alpha} (1 - x) - t^{2\alpha} \left( (\alpha + \alpha^2) x^{1-\beta+\alpha} - (2 + \alpha) (1 + \alpha) x^{2+\alpha-\beta} \right) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{2\alpha} x^{1+\alpha} (1 - x)$ , Nous

appliquons la méthode collocation de Legendre pour  $m = 3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i W_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données avec  $m = 3, \alpha = 1$

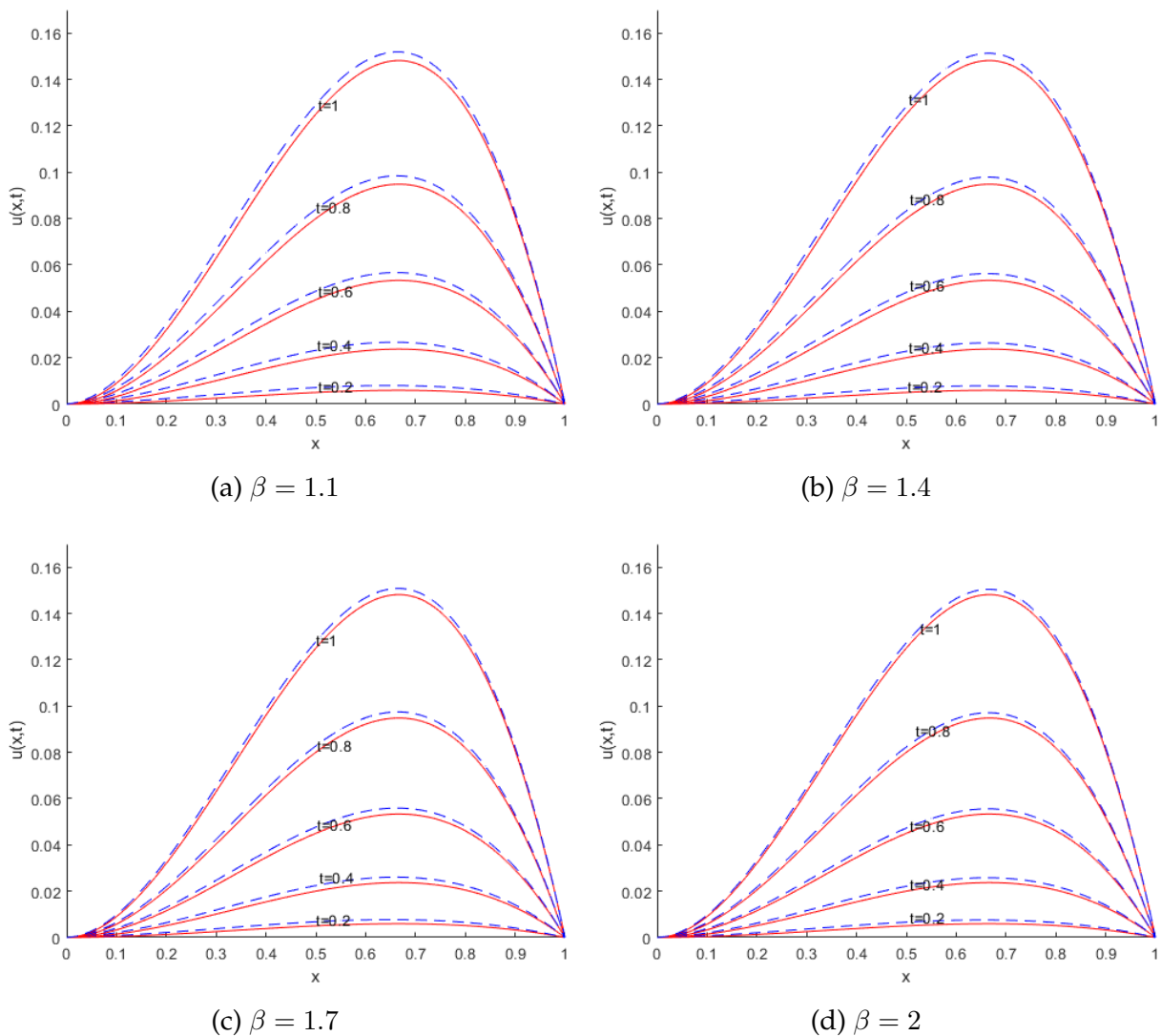


FIGURE 3.2 – comparaison entre solution approché et exacte avec  $\alpha = 1$

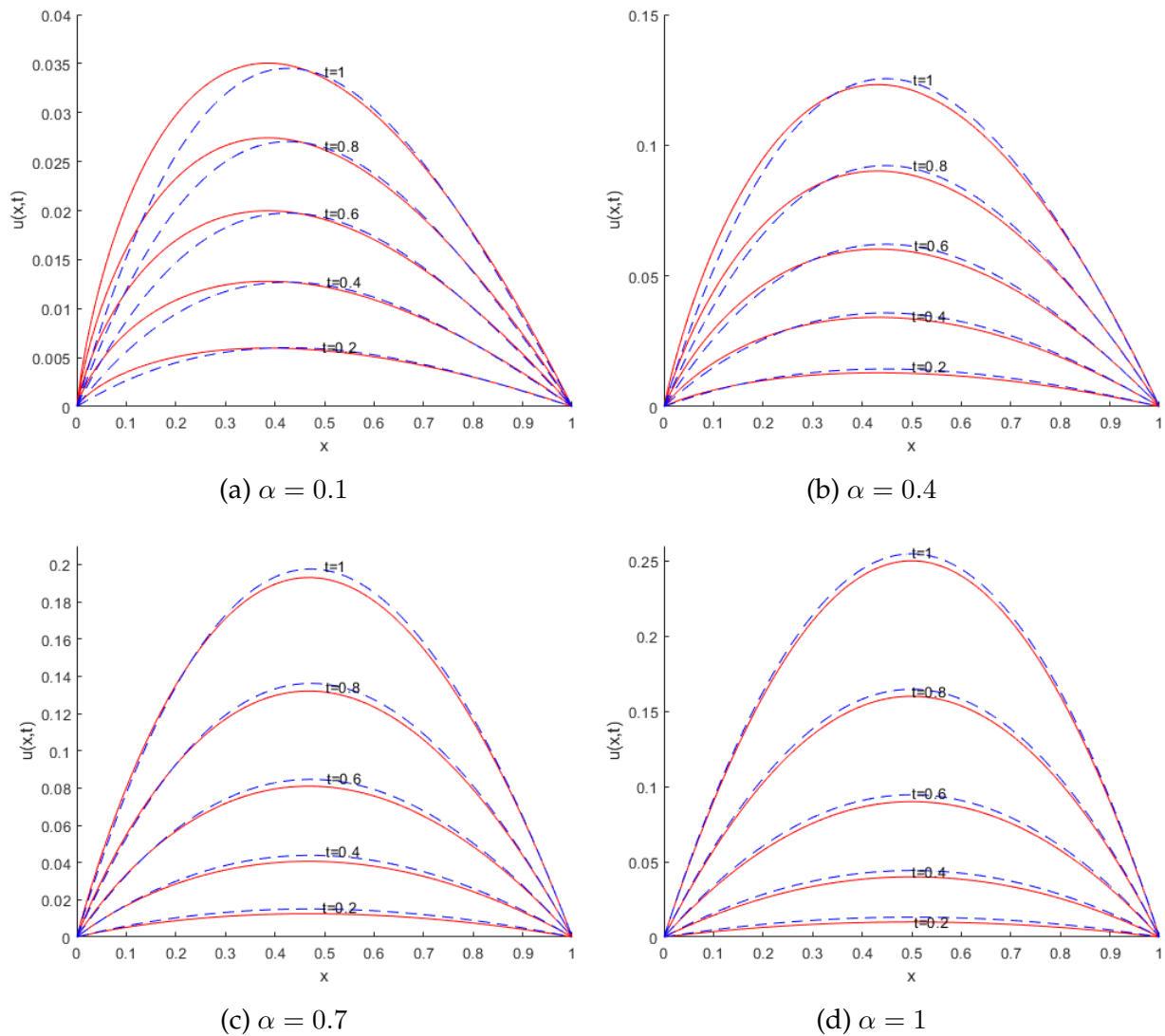
**Exemple 3.4.**

$$\begin{cases} f(x, t) = (1 + \alpha) t (x - x^{1+\alpha}) + t^{1+\alpha} x^{2-\beta} (\alpha (1 + \alpha) x^{\alpha-1}) \\ u(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) = 0, u(1, t) = \psi(t) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par  $u(x, t) = t^{1+\alpha} (x - x^{1+\alpha})$ , Nous appliquons la méthode collocation de Legendrere pour  $m=3$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i W_i^*(x)$$

En utilisant le système linéaire (2.26), nous calculons la solution approchée  $u_3(x)$ . Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données avec  $\beta = 1 + \alpha$

FIGURE 3.3 – comparaison entre solution approché et exacte avec  $m = 3, \beta = 1 + \alpha$

---

## Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons proposé deux méthodes de collocation de Legendre et de Tchebychev pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire conformable avec conditions aux limites de Dirichlet. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Méthode de collocation de Legendre** : En utilisant la série polynomiale de Legendre décalée et leur propriété d'orthogonalité, le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler.
- ✓ **Méthode de collocation de Tchebychev** : En utilisant la série polynomiale de Tchebychev décalée et leur propriété d'orthogonalité, le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler.

Dans les deux cas, nous avons présenté trois exemples pour montrer la fiabilité et l'efficacité de ces méthodes. Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

- ☞ Méthodes de collocation spectrale pour une équation d'onde

fractionnaire suivante :

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, t) = \kappa(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} u(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha, \beta \in [1$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et condition aux limites de Dirichlet,

$$u(0, t) = g(t), \quad u(1, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

ou conditions aux limites de Neumann,

$$u_x(0, t) = g(t), \quad u_x(1, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

---

## Bibliographie

---

- [1] A. Abdelhakim Ahmed. The flaw in the conformable calculus : it is conformable because it is not fractional. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 22(2) :242–254, 2019.
- [2] Y. Çerdik and F. Mutlu. Numerical solution of the conformable differential equations via shifted legendre polynomials. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(5) :1016–1028, 2020.
- [3] F. Gao, X. Yang, and H.M. Srivastava. Exact traveling-wave solutions for linear and non-linear heat transfer equations. *Therm. Sci.*, 21(6A) :2307–2311, 2017.
- [4] A. Ghorbani and A. Alavi. Application of he’s variational iteration method to solve semi differential equations of nth order. *Math. Probl. Eng.*, 627983 :1–10, 2008.
- [5] J. He. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 167(1-2) :57–68, 1998.
- [6] A.A. Hemeda. Homotopy perturbation method for solving partial differential equations of fractional order. *Int. J. Math. Anal.*, 6(49) :2431–2448, 2012.

- [7] Y. Hu, Y. Luo, and Z. Lu. Analytical solution of the linear fractional differential equation by adomian decomposition method. *J. of Comput. and Appl. Math.*, 215(1) :220–229, 2008.
- [8] M.M. Khadar, N.H. Sweilam, and A.M.S. Mahdy. An efficient numerical method for solving the fractional diffusion equation. *J. Appl. Math. Bioinformatics*, 1(2) :1–12, 2011.
- [9] M.M. Khader. On the numerical solutions for the fractional diffusion equation. *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.*, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.09.007>.
- [10] R. Khalil, A. Mohammed, Y. Abdelrahman, and S. Mohammad. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014.
- [11] C. Mason and C. Handscomb David. *Chebyshev polynomials*. CRC press, 2002.
- [12] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [13] E.A. Rainville. *Special functions*. The MACMILLAN COMPANY, New York, 1960.
- [14] A. Silverman Richard. *Special functions and their applications*. Courier Corporation, 1972.
- [15] A. Saad and N. Brahim. An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations. *Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPA)*, 7(3) :413–429, 2021.

- [16] K.M. Saad, E.H.F. Al-Shareef, A.K. Alomari, D. Baleanu, and J.F. Gomez-Aguilar. On exact solutions for time-fractional korteweg-de vries and korteweg-de vries-burger's equations using homotopy analysis transform method. *Chin. J. Phys.*, 63 :149–162, 2020.
- [17] M. Seifollahi and A.S. Shamloo. Numerical solution of non-linear multi-order fractional differential equations by operational matrix of chebyshev polynomials. *World Appl. Prog.*, 3(3) :85–92, 2013.
- [18] H.M. Srivastava, R.M. Jena, S. Chakraverty, and S.K. Jena. Dynamic response analysis of fractionally-damped generalized bagley-torvik equation subject to external loads. *Russian J. Math. Phys.*, 27 :254–268, 2020.
- [19] H.M. Srivastava, F.A. Shah, and R. Abass. An application of the gegenbauer wavelet method for the numerical solution of the fractional bagley-torvik equation. *Russian J. Math. Phys.*, 26 :77–93, 2019.
- [20] K.V. Zhukovsky and H.M. Srivastava. Analytical solutions for heat diffusion beyond fourier law. *Appl. Math. Comput.*, 293 :423–437, 2017.

**ملخص:** في هذه المذكرة ، اقترحنا طريقتين للتجميع لجوندر وتشيببشاف لحل معادلة الانتشار ذات مشتقات كسرية متوافقة و شروط حدودية لدريكلي. باستخدام سلسلي كثيرات الحدود لجوندر وتشيببشاف وخصائصهما المتعامدة ، تم تبسيط المسألة وتحويلها إلى جملة خطية من المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى والتي يمكن حلها بطريقة أولر. توضح الأمثلة العددية المقدمة أن كلتا الطريقتين موثوقتان وفعالتان في بناء الحل العددي لمعادلة الانتشار ذات المشتقات الكسرية.

**كلمات مفتاحية:** الحساب الكسري المتوافق ، طريقة التجميع لجوندر، طريقة التجميع لتشيببشاف، طريقة أولر.

---

**D**ans ce mémoire, nous avons proposé deux méthodes de collocation de Legendre et de Tchebychev pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire conformable avec conditions aux limites de Dirichlet . En utilisant les séries polynomiales de Legendre et Tchebychev décalées et leurs propriétés d'orthogonalités, le problème est réduit au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre un qui peut être résolu par la méthode d'Euler. Les exemples numériques montrent que les deux méthodes sont fiables et efficaces pour construire la solution numérique de l'équation de diffusion fractionnaire.

**Mots-Clés :** Calcul fractionnaire conformable, Méthode de collocation de Legendre, Méthode de collocation de Tchebychev, Méthode d'Euler.

---

**I**n this memoir, we have proposed two collocation methods of Legendre and Chebyshev to solve the conformable fractional diffusion equation with Dirichlet boundary conditions. By using the shifted Legendre and Chebyshev polynomial series and their orthogonality properties, the problem is reduced to the linear system of ordinary differential equations of one order which can be solved by Euler's method. The numerical examples show that both methods are reliable and efficient in constructing the numerical solution of the fractional diffusion equation.

**Keywords :** Conformable fractional calculus, Legendre collocation method, Chebyshev collocation method, Euler method.