

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



N° d'ordre:.....

# THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat troisième cycle*

Spécialité:

*Mathématiques Pures et Applications*

Option:

Analyse Fonctionnelle

Par:

MAHAMED BENALLIA

Thème

---

## Caractérisation des espaces de Besov homogènes et applications

---

**Soutenue publiquement le : 08/10/ 2019, devant le jury :**

Dahmane Achour	Prof.,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Président
Madani Moussai	Prof.,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Directeur de thèse
Elhadj Dahia	M.C.A.,	Ecole Normale Supérieure de Bou Saada	Examinateur
Douadi Drihem	Prof.,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examinateur
Azedine Rahmoune	M.C.A.,	Université de Bordj Bou Arreridj	Examinateur
Khalil Saadi	Prof.,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examinateur

Promotion 2019/2020.

# Remerciements

Je remercie en premier lieu le professeur Madani Moussai d'avoir dirigé cette thèse et de m'avoir initié à l'étude de l'analyse fonctionnelle. Sa grande disponibilité et son aide m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Je remercie le professeur D. Achour qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'exprime aussi ma gratitude aux professeurs E. Dahia, D. Drihem, A. Rahmoune et K. Saadi qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

Je tiens à remercier les membres du Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Géométrie des Espaces.

# Table des matières

Notations	1
Introduction	3
<b>1 Préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1 Décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	6
1.2 Quelques inégalités classiques . . . . .	8
1.3 Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel . . . . .	9
1.3.1 Le cas homogène . . . . .	9
1.3.2 Le cas non homogène . . . . .	11
1.3.3 Relation entre $\dot{A}_{p,q}^s$ et $A_{p,q}^s$ . . . . .	11
1.4 Réalisations . . . . .	12
1.4.1 Distributions nulles à l'infini . . . . .	12
1.4.2 Réalisations (Généralités) . . . . .	12
1.4.3 Les espaces réalisés . . . . .	14
<b>2 Convolution dans les espaces homogènes <math>\dot{A}_{p,q}^s</math></b>	<b>18</b>
2.1 Généralisations de certains théorèmes de Peetre . . . . .	18
2.2 Remarques sur des cas particuliers . . . . .	24
2.3 Des inégalités de convolution dans les espaces $\dot{A}_{p,q}^s$ . . . . .	28
2.4 Extensions et applications . . . . .	30
2.4.1 Convolution avec l'espace de Besov à poids . . . . .	30
2.4.2 Applications . . . . .	32
<b>3 Estimations de type de Gagliardo-Nirenberg</b>	<b>34</b>
3.1 Généralisations . . . . .	34
3.2 Remarques sur les inégalités de type de Gagliardo-Nirenberg . . . . .	43
3.3 Le cas des espaces homogènes réalisés $\tilde{A}_{p,q}^s$ . . . . .	45
3.3.1 Caractérisations dans les espaces $\tilde{A}_{p,q}^s$ . . . . .	45
3.3.2 Optimalité des estimations . . . . .	53
3.3.3 Extensions dans $\tilde{A}_{p,q}^s$ . . . . .	53
<b>4 Caractérisations par des fonctions données</b>	<b>56</b>

4.1	Espaces de Besov homogènes par les différences . . . . .	56
4.2	Fonctions données non triviales dans les espaces $\tilde{A}_{p,q}^s$ . . . . .	58
4.2.1	Résultats principaux . . . . .	58
4.2.2	Cas particuliers . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Réalisation et caractérisation de <math>\dot{F}_{\infty,q}^s</math> par les différences</b>	<b>68</b>
5.1	Préparations . . . . .	68
5.2	Résultats principaux . . . . .	74
5.2.1	Réalisation de $\dot{F}_{\infty,q}^s$ . . . . .	74
5.2.2	Caractérisation par les différences . . . . .	75
	<b>Questions ouvertes</b>	<b>76</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>76</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>77</b>

# Notations

- Tous les espaces dans cette thèse sont définis sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , et  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- La dérivée partielle  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  est notée  $\partial^\alpha f$  ou  $f^{(\alpha)}$ .
- Pour  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $|A|$  est la mesure de Lebesgue de  $A$ .
- Soit  $a \in \mathbb{R}$ , nous désignerons  $a_+ := \max(0, a)$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $[t]$  désigne la partie entière de  $t$ .
- Si  $X$  et  $Y$  deux espaces de quasi-Banach,  $X \hookrightarrow Y$  est l'injection continue, (c'est-à-dire,  $\exists c > 0 : \|x\|_Y \leq c \|x\|_X, \quad \forall x \in X$ ).
- $C^\infty$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Pour  $0 < p \leq \infty$ , nous notons par  $\|\cdot\|_p$  la quasi-norme de  $L_p$ , et  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ , c'est-à-dire

$$p' := p/(p-1) \quad \text{si } 1 < p \leq \infty \quad \text{et} \quad p' := \infty \quad \text{si } 0 < p \leq 1.$$

- $L_1^{loc}$  est l'espace des fonctions localement intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{D}$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact,  $\mathcal{D}'$  est le dual topologique de  $\mathcal{D}$ .
- $\mathcal{S}$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}^n$  (espace de Schwartz), muni de la norme

$$\zeta_m(f) := \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |f^{(\alpha)}(x)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

- $\mathcal{S}'$  est l'espace des distributions tempérées (le dual topologique de  $\mathcal{S}$ ).
- $\mathcal{E}'$  est l'espace des distributions à support compact (le dual topologique de  $C^\infty$ ).
- Si  $f$  est une fonction (ou une distribution) sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit les translatées et les dilatées de  $f$  par les formules

$$\tau_a f := f(\cdot - a), \quad h_\lambda f := f(\cdot/\lambda),$$

pour tous  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \neq 0$ .

- Nous notons  $\dot{A}_{p,q}^s := \dot{B}_{p,q}^s$  ou  $\dot{F}_{p,q}^s$  l'espace de Besov homogène ou l'espace de Lizorkin-Triebel homogène.
- Nous notons aussi  $A_{p,q}^s := B_{p,q}^s$  ou  $F_{p,q}^s$  l'espace de Besov et de Lizorkin-Triebel non

homogènes.

- $B$  et  $F$  désignent les espaces de Besov ou Lizorkin-Triebel, respectivement.
- Soit  $0 < q \leq \infty$ . Si  $E$  est un espace de quasi-Banach, on désigne par  $\ell_q(\mathbb{Z}; E)$  l'ensemble des suites  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , à valeurs dans  $E$  telles que

$$\|(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_q(\mathbb{Z}; E)} := \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|a_j\|_E^q \right)^{1/q} < +\infty.$$

C'est un espace de quasi-Banach pour la quasi-norme ci-dessus. Pour  $E = \mathbb{R}$  ou  $E = \mathbb{C}$ , on note  $\ell_q(\mathbb{Z})$ .

- Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\mathcal{P}_m$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur strictement à  $m$  telle que  $\mathcal{P}_1 = \{c\}$ ,  $\mathcal{P}_0 = \{0\}$  et  $\mathcal{P}_\infty$  l'ensemble de tous les polynômes.
- On désigne par  $\mathcal{S}_m := \{f \in \mathcal{S} : \langle x^\alpha, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) dx = \widehat{f}^{(\alpha)}(0) = 0; \forall |\alpha| < m\}$ , c'est-à-dire, l'orthogonal de  $\mathcal{P}_m$  dans  $\mathcal{S}$ .
- On notera que  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}$  et que  $\mathcal{S}_\infty := \{f \in \mathcal{S} : \langle \mathcal{P}, f \rangle = 0, \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_\infty\}$ .
- $\mathcal{S}'_m$  est l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes de degré inférieur strictement à  $m$  (est son dual topologique de  $\mathcal{S}_m$ ). Il est muni de la topologie \*-faible.
- Pour tout  $f \in \mathcal{S}'$ , on désigne par  $[f]_{\mathcal{P}}$  la classe d'équivalence de  $f$  modulo  $\mathcal{P}_\infty$ .
- $\mathcal{S}'_\infty := \{[f]_{\mathcal{P}} : [f]_{\mathcal{P}} = \{f + \mathcal{P}, \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_\infty\}\}$ , est appelée encore l'espace des distributions tempérées modulo  $\mathcal{P}_\infty$ , c'est-à-dire, l'espace quotient de  $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ ; De plus, on a

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{S}'_1 \subset \dots \subset \mathcal{S}'_m \subset \dots \subset \mathcal{S}'_\infty.$$

- $\mathcal{S}_\infty$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ .
- Si  $f \in L_1$ , sa transformée de Fourier est

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}f(x) := (2\pi)^{-n} \widehat{f}(-x).$$

- Les opérateurs de différence : pour toute fonction  $f$ , on pose  $\Delta_h f := f(\cdot + h) - f$ ,  $\Delta_h^1 f := \Delta_h f, \dots, \Delta_h^{m+1} f := \Delta_h(\Delta_h^m f)$  ( $\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall m \in \mathbb{N}$ ). On vérifie aisément la formule suivante (voir [28, chap. 15]) :

$$\Delta_h^m f = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} f(\cdot + \ell h).$$

- $c, c_1, \dots$ , désigneront des constantes strictements positives et propres qui changeront leurs valeurs d'une ligne à une autre.

# Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier quelques caractérisations des espaces "fonctionnels" homogènes définis modulo les polynômes  $\dot{A}_{p,q}^s$ , où  $\dot{A}_{p,q}^s$  est l'espace de Besov ou de Lizorkin-Triebel. La notion des *réalisations* introduite par G. Bourdaud en 1988, nous permet de modéliser ces espaces par des espaces fonctionnels.

Aujourd'hui nous avons plusieurs utilisations de cette notion "les réalisations", dans Navier-Stokes, dans les opérateurs pseudo-différentiels, dans la multiplications ponctuelles, dans les ondelettes,... etc, voir par exemple [3], [14], [30], [46], [50] et [51].

Dans cette thèse nous intéressons aux espaces réalisés de Besov et de Lizorkin-Triebel, noté  $\tilde{A}_{p,q}^s$ , par l'étude de certaines propriétés, en particuliers :

- la convolution,
- estimations de type de Gagliardo-Nirenberg,
- caractérisation par des fonctions données.

C'est pourquoi nous avons trois axes dans ce manuscrit.

Les principaux résultats de cette thèse sont liés aux trois problèmes suivants :

Pour la convolution, nous allons démontrer le résultat suivant :

**Théorème 0.1.** *Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $r := \min(1, p)$ ,  $t := \min(1, p, q)$  et  $\mu := -s + (n/p - n)_+$ . Soient  $a_1, a_2, b_1, b_2$  des réels tels que  $0 < a_1 < b_1$ ,  $0 < a_2 < b_2$  et  $a_1/b_2 \leq b_1/a_2$ . Soient  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  des suites dans  $\mathcal{S}'$ , telles que*

- $\widehat{u}_j$  et  $\widehat{v}_j$  sont portées par les couronnes  $a_1 2^j \leq |\xi| \leq b_1 2^j$  et  $a_2 2^j \leq |\xi| \leq b_2 2^j$ , respectivement.

- $A := \|(2^{js} u_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_q(L_p)} < \infty$  et  $B := \|(2^{j\mu} v_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_t(L_r)} < \infty$ .

On définit la suite  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  par :

$$\varepsilon_k := \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j * v_{j-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Alors la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k$  converge dans  $\mathcal{S}'$ , et

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\mu q} \|\varepsilon_k\|_p^q \right)^{1/q} \leq c AB,$$

où la constante positive  $c$  ne dépend que de  $n, s, p, q, a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$ , avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ .

Ce qui donne l'inégalité en fonction suivante :

**Corollaire 0.2.** *La série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_j \theta * Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_\infty$  vers un élément noté par  $\theta \circledast f$ , qui vérifie*

$$\|\theta \circledast f\|_p \leq c \|\theta\|_{\dot{A}_{r,\omega}^\mu} \|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s},$$

pour toute  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  et toute  $\theta \in \dot{A}_{r,\omega}^\mu$ , où la constante  $c > 0$  est indépendante de  $f$  et  $\theta$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ), et  $\omega = q'$  si  $p > 1$  ou  $q \leq p \leq 1$ , et  $1/\omega = 1/p - 1/q$  si  $p \leq \min(1, q)$ .

Nous rappelons les assertions sur la convolution dans [8, chap. 4] et [38, chap. 8]. Nous remarquons que plusieurs résultats liés à la convolution peuvent être trouvés dans [17].

Pour les estimations du type de Gagliardo-Nirenberg, nous rappelons les travaux de Triebel [45] et de Wadade [47], [48] et autres comme dans [26], [27].

Nous allons montrer principalement le résultat suivant :

**Proposition 0.3.** *Soient  $0 < p, q \leq \infty$  et  $m \geq 0$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Soient  $a, b$  des réels tels que  $0 < a < b$ . Soit  $(f_j)_{j \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  telle que  $\widehat{f_j}$  est portée par la couronne  $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ , et  $(2^{m+n/p} f_j)_{j \geq 0}$  dans  $\mathcal{E}_{p,q}$ . Alors la série  $\sum_{j \geq 0} f_j$  converge dans  $\mathcal{S}'$  et il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_v \leq c (m + n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{m+n/p} f_j)_{j \geq 0}\|_{\mathcal{E}_{p,q}}$$

est satisfaite, pour tout  $v \in [p, \infty]$  (avec  $v < \infty$  dans le cas  $F$ ). La constante  $c$ , peuvent être choisis telle que  $c := \max(1, p^{n/p})$  si  $p < v$  et  $c := 1$  si  $p = v$ .

Nous étendrons aux espaces réalisés  $\check{A}_{p,q}^s$ , car il est important de rappeler que si  $f$  est un polynôme non constante alors

$$\|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s} = 0, \quad \text{alors que} \quad \|f\|_u = \infty \quad \text{pour tout} \quad u \in ]0, \infty].$$

Notons que plusieurs résultats dans ce sens se trouvent dans [15].

Dans une dernière axe, nous donnons des fonctions non triviales dans  $\check{A}_{p,q}^s$ . Il s'agit de :

$$f_\tau(x) := |x|^\tau \omega(x/|x|), \quad \text{et} \quad g_\tau(x) := f_\tau(x) \phi(x),$$

où  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur la sphère unité  $S^{n-1}$  et  $\phi \in \mathcal{D}$ .

Nous allons démontrer le résultat suivant :

**Théorème 0.4.** Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $S^{n-1}$  telle que  $\omega$  n'est pas une fonction constante si  $\tau \in 2\mathbb{N}_0$ . Alors  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ ,  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$  et  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ . De plus,

- si  $\tau > -n$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ ), alors  $f_\tau \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ ,
- si  $q < \infty$  alors  $f_\tau \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$ , et si  $p < \infty$  alors  $f_\tau \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ .

On trouve aussi plusieurs applications et exemples dans ce sens.

**Plan.** Cette thèse est organisée en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée modulo les polynômes, les définitions des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes et non homogènes, quelques propriétés et résultats qu'on utilisera par la suite.

Dans le deuxième chapitre, on généralise les théorèmes du [8, chap. 4] et [38, chap. 8] au cas des espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  avec  $0 < p, q < 1$ . On observe aussi le cas des espaces homogènes réalisés  $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$ .

Dans le troisième chapitre, on commence par quelques généralisations sur les inégalités du type de Gagliardo-Nirenberg dans les espaces  $\mathcal{E}_{p,q}$  pour  $0 < p, q \leq \infty$  définis par des suites dans  $\ell_q(\mathbb{Z}; L_p)$  et  $L_p(\mathbb{R}^n; \ell_q(\mathbb{Z}))$ .

Dans le chapitre quatre, nous allons donner quelques fonctions non triviales dans  $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$  en utilisant des semi-normes continues, voir [34].

Dans le cinquième chapitre, nous donnons brièvement un résultat sur la réalisation des espaces  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  (ce chapitre a été écrit comme une annexe dans une première version).

Les résultats principaux de ce travail :

- La Section 2.3, sera publié dans le journal "Publications de l'Institut Mathématique".
- Une partie du troisième chapitre (en particulier le Corollaire 3.13 et la Section 3.3.2), sera publiée dans le journal "Mathematical Reports".
- Le quatrième chapitre peut former une publication en collaboration avec le directeur de la thèse.
- Le cinquième chapitre, sera publié dans le journal "Ufa Mathematical Journal".

# Chapitre 1

## Préliminaires

Ce premier chapitre a pour but de présenter un certain nombre d'outils nécessaires pour le reste de la thèse, comme la décomposition de Littlewood-Paley, des définitions des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes et non homogènes, et quelques inégalités classiques.

### 1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

On fixe dans toute la thèse une Cut-off fonction :  $\rho$  est une fonction positive de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , radiale (c'est-à-dire,  $\rho(\xi) = \tilde{\rho}(|\xi|)$ , avec  $\tilde{\rho} \in \mathcal{D}$ ), et  $0 \leq \rho \leq 1$  telle que

$$\rho(\xi) = 1 \quad \text{si } |\xi| \leq 1, \quad \text{et } \rho(\xi) = 0 \quad \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2}.$$

Nous considérons la fonction  $\gamma \in \mathcal{S}$ , donnée par  $\gamma(\xi) := \rho(\xi) - \rho(2\xi)$  telle que son support est porté par la couronne  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 3/2\}$ , ce qui nous permet d'obtenir les deux partitions de l'unité suivantes : la partition de l'unité homogène

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^j \xi) = 1, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

la partition de l'unité non homogène

$$\rho(2^{-k} \xi) + \sum_{j \geq k+1} \gamma(2^{-j} \xi) = 1, \quad (\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

La construction de  $\rho$  ne pose aucune difficulté, voir par exemple les livres Bergh et Löfström [2], Peetre [38] et Triebel [42], [43]. Pour cette partition de l'unité ; on associe une suite d'opérateurs de convolutions  $(Q_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $(S_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , définis par

$$\widehat{Q_j f} := \gamma(2^{-j}(\cdot)) \widehat{f} \quad \text{et} \quad \widehat{S_j f} := \rho(2^{-j}(\cdot)) \widehat{f}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

On définit également les opérateurs  $(\tilde{Q}_j)_{j \geq 0}$  par  $\tilde{Q}_0 := S_0$  et  $\tilde{Q}_j := Q_j$  pour  $j \geq 1$ . Les opérateurs  $Q_j$  et  $S_j$  ont des valeurs dans l'espace des fonctions analytiques de type exponentiel, voir le théorème de Paley-Wiener [41, thm. 29.2, p. 311] ou [42, rem. 2.3.1/2, p. 45]. Il est clair que l'opérateur  $S_j$  est défini sur  $\mathcal{S}'$  et l'opérateur  $Q_j$  est défini sur  $\mathcal{S}'_\infty$ , puisque  $Q_j f(x) = 0$  si et seulement si  $f$  est un polynôme. Nous servons des conventions suivantes :

- Si  $f \in \mathcal{S}'$ , on note que  $[f]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{S}'_\infty$ .
- Si  $f \in \mathcal{S}'_\infty$ , on définit alors  $Q_j f := Q_j f_1$  pour toute  $f_1 \in \mathcal{S}'$  telle que  $[f_1]_{\mathcal{P}} = f$ . En effet, si  $f \in \mathcal{S}'_\infty$ , pour chaque  $f_1, f_2$  telle que  $[f_1]_{\mathcal{P}} = [f_2]_{\mathcal{P}} = f$  alors  $f_1 - f_2 \in \mathcal{P}_\infty$ , on a  $Q_j f_1 = Q_j f_2 := Q_j f$ .

**Lemme 1.1.** *Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $N \in \mathbb{N}_0$ . Alors il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$  et un nombre entier  $m \in \mathbb{N}_0$  tels que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  et tout  $\psi \in \mathcal{D}$ , (on pose  $\hat{\varphi}_j := \varphi(2^{-j}(\cdot))$  et  $\hat{\psi}_j := \psi(2^{-j}(\cdot))$ ), on a*

- $\|\varphi_j * f\|_p \leq c_1 2^{-jN} \zeta_m(f)$ , pour tout  $f \in \mathcal{S}$  et tout  $j \in \mathbb{N}_0$ .
- $\|\varphi_j * f\|_p + \|\psi_j * f\|_p \leq c_2 2^{jN} \zeta_m(f)$ , pour tout  $f \in \mathcal{S}_\infty$  et tout  $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Voir [33, prop. 2.5]. □

**Corollaire 1.2.** *Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $N \in \mathbb{N}_0$ . Alors il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$  et un nombre entier  $m \in \mathbb{N}_0$  tels que*

- $\|Q_j f\|_p \leq c_1 2^{-jN} \zeta_m(f)$ , pour tout  $f \in \mathcal{S}$  et tout  $j \in \mathbb{N}_0$ .
- $\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \leq c_2 2^{jN} \zeta_m(f)$ , pour tout  $f \in \mathcal{S}_\infty$  et tout  $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Une conséquence du Lemme 1.1 en posant  $\varphi = \gamma$  et  $\psi = \rho$ . □

La convergence faible de la décomposition de Littlewood-Paley d'une fonction est donnée par la proposition suivante, (voir aussi Remarque 3.9 dans le Chapitre 3 ci-dessous) :

**Proposition 1.3.** (i) *Pour tout  $f \in \mathcal{S}_\infty$  (resp.  $\mathcal{S}'_\infty$ ), on a*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f,$$

*converge dans  $\mathcal{S}_\infty$  (resp.  $\mathcal{S}'_\infty$ ).*

(ii) *Pour tout  $f \in \mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ), et tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$f = S_k f + \sum_{j > k} Q_j f,$$

*converge dans  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ).*

**Preuve.** La preuve est une conséquence du Lemme 1.1. □

**Remarque 1.4.** Par l'inégalité de Young, nous montrons facilement que les opérateurs  $(Q_j f)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(S_j f)_{j \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\mathcal{L}(L_p)$ , pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

## 1.2 Quelques inégalités classiques

Nous allons rappeler quelques inégalités connues :

**Lemme 1.5.** Pour  $0 < d \leq 1$ , et pour toute suite réelle à terme positif  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell_q(\mathbb{Z})$ , telle que on a

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \right)^d \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^d.$$

**Lemme 1.6.** Soit  $0 < p \leq q \leq \infty$ . Alors il existe une constante  $c > 0$ , telle que l'inégalité

$$\|f\|_q \leq cR^{n/p-n/q} \|f\|_p \tag{1.2.1}$$

est satisfaite, pour tout  $R > 0$  et tout  $f \in L_p$  telle que  $\text{supp } \hat{f} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ . La constante  $c = p_0^{n/p-n/q}$  où  $p_0 = [p/2] + 1$ .

**Preuve.** Voir [35, thm. 4]. □

**Remarque 1.7.** L'inégalité (1.2.1) est connue sous le nom de Bernstein. Soit  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , on peut généraliser le Lemme 1.6 avec la même condition

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{n/p-n/q+|\alpha|} \|f\|_p,$$

voir [42, rem. 1, p. 18].

**Lemme 1.8.** Soit  $0 < p \leq 1$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\|f * g\|_p \leq cR^{n/p-n} \|f\|_p \|g\|_p$$

est satisfaite, pour tout  $R > 0$  et tout  $f, g \in L_p$ , avec  $\text{supp } \hat{f}$  et  $\text{supp } \hat{g}$  sont portées par la boule  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ . Si  $p = 1$ , alors  $c = 1$ , c'est l'inégalité de Young.

**Preuve.** Voir [42, rem. 2, p. 28]. □

## 1.3 Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

Les définitions de base de  $\dot{A}_{p,q}^s$  et  $A_{p,q}^s$  sont données par l'intermédiaire de la décomposition de Littlewood-Paley, voir [2, p. 139], [24], ou [42, p.45, p. 238].

Dans ce paragraphe  $s, p$  et  $q$  sont de la manière suivante :  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p, q \leq \infty$  et  $p < \infty$  dans le cas  $F$ , sauf indication contraire.

### 1.3.1 Le cas homogène

**Définition 1.9.** (i) L'espace de Besov homogène  $\dot{B}_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'_\infty$  telle que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

(ii) L'espace de Triebel-Lizorkin homogène  $\dot{F}_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'_\infty$  telle que

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} := \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} |Q_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty.$$

**Remarque 1.10.** Les espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  sont des quasi-Banach pour les quasi-normes ci-dessus. Les espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  sont indépendants du choix de la fonction  $\gamma$  qui sert à définir la décomposition de Littlewood-Paley (c'est-à-dire, si on remplace  $\gamma$  par une autre fonction avec les mêmes propriétés on a le même espace). Soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_\infty$ , alors on a  $\|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s} = \|f + \mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}$ . Voir par exemple [8, thm. 2.1, p. 25] dans le cas  $B$ , ou [42, rem. 5.1.3/2].

**Proposition 1.11.** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p, q \leq \infty$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ) on a  $\mathcal{S}_\infty \hookrightarrow \dot{A}_{p,q}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty$ .

**Preuve.** Les démonstrations dans le cas non homogène s'étendent facilement au cas homogène ; voir [38, thms. 2, 3, pp. 61-62] ou [42, thm. 2.3.3, p. 48].  $\square$

Les espaces de Besov homogènes ont des propriétés analogues aux espaces de Lizorkin-Triebel homogènes. Voici quelques unes :

**Proposition 1.12.** (i)  $\dot{B}_{p,p}^s = \dot{F}_{p,p}^s$ .  
(ii) Si  $q_1 < q_2$ , alors  $\dot{A}_{p,q_1}^s \hookrightarrow \dot{A}_{p,q_2}^s$ .  
(iii)  $\dot{B}_{p,\min(p,q)}^s \hookrightarrow \dot{F}_{p,q}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p,\max(p,q)}^s$ .

(iv) Soient  $s_1 > s_2$ ,  $0 < p_1 < p_2 < \infty$  et  $0 < q, r \leq \infty$ . Si  $s_1 - n/p_1 = s_2 - n/p_2$  alors

$$\dot{B}_{p_1, q}^{s_1} \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, q}^{s_2} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty, q}^{s_2 - n/p_2}, \quad \dot{F}_{p_1, q}^{s_1} \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, p_1}^{s_2} \quad \text{et} \quad \dot{F}_{p_1, q}^{s_1} \hookrightarrow \dot{F}_{p_2, r}^{s_2}.$$

**Preuve.** Voir [24, thm. 2.1]. □

**Proposition 1.13.** Si  $0 < p, q < \infty$  alors  $\mathcal{S}_\infty$  est un sous-espace dense dans  $\dot{A}_{p, q}^s$ .

**Preuve.** Voir par exemple [10, prop. 3.11] ou [24, (1.6)]. □

**Proposition 1.14.** (i) Il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telle que

$$c_1 \|f\|_{\dot{A}_{p, q}^s} \leq \lambda^{n/p-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{A}_{p, q}^s} \leq c_2 \|f\|_{\dot{A}_{p, q}^s},$$

pour toute  $f \in \dot{A}_{p, q}^s$  et tout  $\lambda > 0$ .

(ii) Soit  $m \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f$  de  $\mathcal{S}'_\infty$  appartient à  $\dot{A}_{p, q}^s$  si et seulement si les dérivées partielles  $f^{(\alpha)} \in \dot{A}_{p, q}^{s-m}$  pour tout  $|\alpha| = m$ . De plus, l'expression suivante

$$\sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{A}_{p, q}^{s-m}}$$

est une quasi-seminorme dans  $\dot{A}_{p, q}^s$ .

**Preuve.** Pour la preuve (ii) voir [8, prop. 2.1.1, p. 27] dans le cas  $B$ , pour (iii) voir [12, prop. 5], [13, prop. 8]. □

Nous rappelons des estimations de type de Nikol'skij, et nous référons aux [12, prop. 4], [32, prop. 3.4] et [33, props. 2.15, 2.17].

**Proposition 1.15.** Soient  $a, b$  des réels telles que  $0 < a < b$ . Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  telle que

- $\widehat{u}_j$  est portée par la couronne  $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ ,
- $A := \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|u_j\|_p^q \right)^{1/q} < \infty$  ( $A := \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} |u_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty$  dans le cas  $F$ ).

(i) Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j$  converge dans  $\mathcal{S}'_\infty$  et on a

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \right\|_{\dot{A}_{p, q}^s} \leq cA,$$

où la constante  $c$  dépend uniquement de  $n, s, p, q, a$  et  $b$ .

(ii) Si  $s > (n/p - n)_+$  (resp.  $s > (n/\min(p, q) - n)_+$  dans le cas  $F$ ), la même conclusion est valable pour  $a = 0$ .

### 1.3.2 Le cas non homogène

Pour définir les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel non homogènes, il suffit de remplacer la décomposition de Littlewood-Paley homogène par sa version non homogène (voir la Section 1.1).

**Définition 1.16.** (i) *L'espace de Besov non homogène  $B_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'$  telle que*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|\tilde{Q}_j f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

(ii) *L'espace de Triebel-Lizorkin non homogène  $F_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'$  telle que*

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} := \left\| \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} |\tilde{Q}_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty.$$

**Remarque 1.17.** *Les espaces  $A_{p,q}^s$  sont des espaces quasi-Banach pour les quasi-normes, qui ne dépendent pas de la fonction  $\rho$ , voir par exemple [21, rem. 2.6, p. 51] ou [42, prop. 1, p. 46].*

Maintenant, nous rappelons quelques inclusions entre les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel non homogènes. Pour plus détails sur la caractérisation de  $A_{p,q}^s$ , voir par exemple [2, sect. 6.2, p. 139], [39, chap. 2], [42, sect. 2.3.2, p. 46], [43, chap. 2].

**Proposition 1.18.** (i) *Si  $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$  et  $\varepsilon > 0$ , alors*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow A_{p,\infty}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow A_{p,q_1}^s \hookrightarrow A_{p,q_2}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'.$$

(ii)  $B_{p,\min(p,q)}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s$ .

(iii) *Soient  $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$  et  $0 < q_1, q_2 \leq \infty$ . Pour  $0 < q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$  et  $s_1 - n/p_1 = s - n/p = s_2 - n/p_2$ , alors*

$$B_{p_1,q_1}^{s_1} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_2,q_2}^{s_2}.$$

### 1.3.3 Relation entre $\dot{A}_{p,q}^s$ et $A_{p,q}^s$

Pour passer du cas homogène au cas non homogène, ou inversement, nous disposons la relation suivante :

**Proposition 1.19.** *Si  $s > (n/p - n)_+$ , alors  $f \in A_{p,q}^s$  si et seulement si  $f \in L_p$  et  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s$ . De plus,*

$$\|f\|_p + \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s},$$

*est une quasi-norme équivalente dans  $A_{p,q}^s$ .*

**Preuve.** Voir [2, thm. 6.3.2, p. 148] pour  $p, q \geq 1$ , ou [43, thm. 2.3.3, p. 98].  $\square$

**Proposition 1.20.** *Si  $s > 0$ , alors pour tout  $f \in A_{p,q}^s$  on a  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s$ .*

**Preuve.** C'est une conséquence de la Proposition précédente.  $\square$

## 1.4 Réalisations

Par définition les espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  s'injectent dans  $\mathcal{S}'_{\infty}$ , cependant il existe une plus petit entier  $\nu \in \mathbb{N}_0$  tel que  $\dot{A}_{p,q}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\nu}$ . Nous allons faire de façon à l'apparaître.

### 1.4.1 Distributions nulles à l'infini

On introduit la définition suivante :

**Définition 1.21.** *On dit qu'une distribution tempérée  $f \in \mathcal{S}'$  tend vers 0 à l'infini si  $h_{\lambda}f$  tend vers 0 dans  $\mathcal{S}'$  quand  $\lambda$  tend vers 0, c'est-à-dire*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle f(\lambda^{-1}(\cdot)), \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

L'ensemble de telles distributions est noté  $\tilde{\mathcal{C}}_0$ .

**Lemme 1.22.** *Si  $f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$  est un polynôme, alors  $f = 0$ . C'est-à-dire,  $\tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{P}_{\infty} = \{0\}$ .*

**Preuve.** Voir [5, p. 46].  $\square$

Voici quelques exemples de distributions dans  $\tilde{\mathcal{C}}_0$  :

- Exemple 1.** (i) *Soit  $1 \leq p < \infty$ . Si  $f \in L_p$ , alors  $f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ .*  
(ii) *Si  $f \in L_{\infty}$  ou  $f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ , alors  $\partial_j f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$  ( $j = 1, \dots, n$ ).*  
(iii) *Voir aussi les exemples et les contre-exemples dans l'article [15].*

### 1.4.2 Réalisations (Généralités)

**Définition 1.23.** *Soit  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Soit  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}'_{\infty}$ , muni d'une structure d'espace de quasi-Banach telle que  $E \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\infty}$ . On appelle réalisation*

de  $E$  dans  $\mathcal{S}'_k$  une application linéaire continue  $\sigma : E \rightarrow \mathcal{S}'_k$  telle que  $[\sigma(f)]_{\mathcal{P}} = f$  ( $\forall f \in E$ ) dans  $\mathcal{S}'_{\infty}$ . L'ensemble d'image  $\sigma(E)$  s'appelle l'espace réalisé de  $E$ .

**Remarque 1.24.** Nous rappolons que l'application  $\sigma$  est une bijection de  $E$  dans  $\sigma(E)$ .

Nous avons quelques propriétés nécessaires à rappeler qui concernent l'invariance par translations et par dilatations (c'est-à-dire,  $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$  ou  $\|h_{\lambda} f\|_E = \lambda^{-r} \|f\|_E$ ,  $\forall f \in E, r \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ , et  $\lambda > 0$ ) :

**Proposition 1.25.** Soit  $\sigma_0 : E \rightarrow \mathcal{S}'$  une réalisation. Pour toute  $(\mathcal{L}_{\alpha})_{|\alpha| \leq N}$  une famille finie de fonctions linéaires continues sur  $E$ , la formule suivante définit une réalisation de  $E$  dans  $\mathcal{S}'$  :

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha| \leq N} \mathcal{L}_{\alpha}(f) x^{\alpha}.$$

Inversement, toute réalisation de  $E$  est donnée de cette manière.

**Preuve.** Voir [8, thm. 1.4, p. 20], [9, prop. 1] ou [33, prop. 3.2]. □

**Proposition 1.26.** Soit  $E$  isométriquement invariant par translations. Soit  $\sigma_0 : E \rightarrow \mathcal{S}'_k$  une réalisation, commutant aux translations. Soit  $(\mathcal{L}_{\alpha})_{|\alpha|=k}$  une famille finie de fonctions linéaires continues sur  $E$  telle que

$$\mathcal{L}_{\alpha} \circ \tau_a = \mathcal{L}_{\alpha}.$$

Alors la formule

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \mathcal{L}_{\alpha}(f) x^{\alpha} \quad (\text{modulo } \mathcal{P}_k)$$

définit une réalisation de  $E$  modulo  $\mathcal{P}_k$ , qui commute aux translations. Inversement, toute réalisation de  $E$  modulo  $\mathcal{P}_k$ , commutant aux translations, est donnée de cette manière.

**Preuve.** Voir [8, thm. 1.5, p. 21] ou [9, prop. 2]. □

**Proposition 1.27.** (i) Si  $r \notin \mathbb{N}_0$ , alors  $E$  admet au plus une réalisation qui commute aux dilatations.

(ii) Supposons que  $r \in \mathbb{N}_0$  et  $\sigma_0 : E \rightarrow \mathcal{S}'$  une réalisation, commutant aux dilatations. Soit  $(\mathcal{L}_{\alpha})_{|\alpha|=r}$  une famille de fonctions linéaires continues sur  $E$  telle que

$$\mathcal{L}_{\alpha} \circ h_{\lambda} = \lambda^{-r} \mathcal{L}_{\alpha}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Alors la formule

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha|=r} \mathcal{L}_\alpha(f) x^\alpha$$

définit une réalisation de  $E$ , qui commute aux dilatations. Inversement, toute réalisation de  $E$ , commutant aux dilatations, est donnée de cette manière.

**Preuve.** Voir [8, thm. 1.6, p. 21], [9, prop. 4] ou [33, prop. 3.1].  $\square$

### 1.4.3 Les espaces réalisés

Comme nous l'avons précisé au début de ce paragraphe, nous allons présenter un nombre entier  $\nu \in \mathbb{N}_0$  tel que  $\dot{A}_{p,q}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'_\nu$ . Le nombre entier  $\nu = \nu(s, p, q, n)$  (avec fixé  $\nu$  dans toute cette thèse) sera défini par

$$\nu := \begin{cases} ([s - n/p] + 1)_+ & \text{si } s - n/p \notin \mathbb{N}_0 \text{ ou } q > 1 \text{ dans le cas } B \text{ (} p > 1 \text{ dans le cas } F), \\ s - n/p & \text{si } s - n/p \in \mathbb{N}_0 \text{ et } q \leq 1 \text{ dans le cas } B \text{ (} p \leq 1 \text{ dans le cas } F). \end{cases} \quad (1.4.2)$$

**Proposition 1.28.** *Soit  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$ . Alors la série de Littlewood-Paley  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_\nu$  vers un élément noté  $\sigma(f)$ . De plus,  $\sigma(f)$  est l'unique représentant de  $f$  dans  $\mathcal{S}'_\nu$  qui vérifie :  $[\sigma(f)]_{\mathcal{P}} = f$ ,  $\sigma(f)$  commute avec les translations et les dilatations dans certains cas, et  $\partial^\alpha \sigma(f) \in \tilde{C}_0$  pour  $|\alpha| = \nu$ .*

**Preuve.** Voir [10, prop. 4.6] ou [33, thm. 1.2].  $\square$

On peut aussi trouver la convergence dans  $\mathcal{S}'$ . Pour cela, il faut ajouter un polynôme à la série de Littlewood-Paley.

**Proposition 1.29.** *Pour tout  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  on a la série  $\sigma(f)$  converge dans  $\mathcal{S}'$ ,*

$$[\sigma(f)]_{\mathcal{P}} = f \text{ dans } \mathcal{S}'_\infty \text{ et } \partial^\alpha \sigma(f) \in \tilde{C}_0 \text{ si } |\alpha| = \nu.$$

La série  $\sigma(f)$  est défini comme suit :

(H-1) *Dans le cas  $s < n/p$ , ou  $s = n/p$  et  $0 < q \leq 1$  dans le cas B ( $0 < p \leq 1$  dans le cas F),*

$$\sigma(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f. \quad (1.4.3)$$

(H-2) Dans le cas  $s - n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0$ , ou  $s - n/p \in \mathbb{N}$  et  $0 < q \leq 1$  dans le cas B ( $0 < p \leq 1$  dans le cas F),

$$\sigma(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( Q_j f - \sum_{|\alpha| < \nu} (Q_j f)^{(\alpha)}(0) x^\alpha / \alpha! \right). \quad (1.4.4)$$

(H-3) Dans le cas  $s - n/p \in \mathbb{N}_0$  et  $q > 1$  dans le cas B ( $p > 1$  dans le cas F),

$$\sigma(f) = \sum_{j > 0} Q_j f + \sum_{j \leq 0} \left( Q_j f - \sum_{|\alpha| < \nu} (Q_j f)^{(\alpha)}(0) x^\alpha / \alpha! \right). \quad (1.4.5)$$

**Preuve.** Pour plus de détails et la preuve voir [10, sect. 4] ou [33, thms. 4.1, 4.5].  $\square$

Nous commençons maintenant par la définition des espaces réalisés  $\check{A}_{p,q}^s$ , voir [5], [10], ou [33]. D'après la Définition 1.23, on pose  $\check{A}_{p,q}^s = \sigma(\dot{A}_{p,q}^s)$  et on a la définition suivante :

**Définition 1.30.** L'espace réalisé  $\check{A}_{p,q}^s$  est défini comme suit :

(H-1) Dans le cas  $s < n/p$ , ou  $s = n/p$  et  $0 < q \leq 1$  dans le cas B ( $0 < p \leq 1$  dans le cas F), (ici  $\nu = 0$ ),

$$\check{A}_{p,q}^s := \{f \in \mathcal{S}' : [f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s \text{ et } f \in \tilde{C}_0\}.$$

(H-2) Dans le cas  $s - n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0$ , ou  $s - n/p \in \mathbb{N}$  et  $0 < q \leq 1$  dans le cas B ( $0 < p \leq 1$  dans le cas F), (ici on a  $\nu = [s - n/p] + 1$  ou  $\nu = s - n/p$ , respectivement, avec  $\nu \geq 1$ ),

$$\begin{aligned} \check{A}_{p,q}^s &:= \{f \in \mathcal{S}' : [f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s, f \text{ est de classe } C^{\nu-1}, \\ & f^{(\beta)}(0) = 0 \text{ pour } |\beta| \leq \nu - 1 \text{ et } f^{(\alpha)} \in \tilde{C}_0 \text{ pour } |\alpha| = \nu\}. \end{aligned}$$

(H-3) Dans le cas  $s - n/p \in \mathbb{N}_0$  et  $q > 1$  dans le cas B ( $p > 1$  dans le cas F), (ici on a  $\nu = [s - n/p] + 1 \geq 1$ ),

$$\begin{aligned} \check{A}_{p,q}^s &:= \{f \in \mathcal{S}' : [f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s, f \text{ est de classe } C^{\nu-1}, \\ & f^{(\beta)}(0) = \sum_{j > 0} (Q_j f)^{(\beta)}(0) \text{ pour } |\beta| \leq \nu - 1 \text{ et } f^{(\alpha)} \in \tilde{C}_0 \text{ pour } |\alpha| = \nu\}, \end{aligned}$$

muni de la même quasi-seminorme de  $\dot{A}_{p,q}^s$ , c'est-à-dire

$$\|f\|_{\check{A}_{p,q}^s} := \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}.$$

**Proposition 1.31.** Dans les cas (H-1)–(H-3) on a

$$\check{A}_{p,q}^s = \sigma(\dot{A}_{p,q}^s).$$

**Preuve.** Par définition on a  $\sigma(\dot{A}_{p,q}^s) \subset \tilde{A}_{p,q}^s$ . Pour l'inclusion inverse, soit maintenant  $f \in \tilde{A}_{p,q}^s$ , alors  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s$  et  $f - \sigma([f]_{\mathcal{P}}) \in \mathcal{P}_{\infty}$ . Par le Lemme 1.22 (c'est-à-dire,  $\tilde{C}_0 \cap \mathcal{P}_{\infty} = \{0\}$ ) et puisque  $\partial^{\alpha}(f - \sigma([f]_{\mathcal{P}})) \in \tilde{C}_0$  pour tout  $|\alpha| = \nu$ , alors  $f - \sigma([f]_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{\nu}$ ,

- dans le cas (H-1),  $\nu = 0$  et  $f = \sigma([f]_{\mathcal{P}})$ ;
- dans le cas (H-2) et (H-3), on pose

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{|\beta| < \nu} a_{\beta} x^{\beta},$$

alors par l'identification nous avons

$$\beta! a_{\beta} = (f^{(\beta)} - \partial^{\beta} \sigma([f]_{\mathcal{P}}))(0) = 0,$$

ce qui donne  $f = \sigma([f]_{\mathcal{P}})$ . Nous concluons que  $f$  et  $\sigma([f]_{\mathcal{P}})$  coïncide dans  $\mathcal{S}'_{\nu}$ , et que l'inclusion  $\sigma(\dot{A}_{p,q}^s) \supset \tilde{A}_{p,q}^s$  est satisfaite.  $\square$

**Exemple 2.** Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $\tau \in \mathbb{R}$  telle que  $-n < \tau \notin 2\mathbb{N}_0$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ ). Alors la fonction  $f$  définie par

$$f(x) := |x|^{\tau}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

appartient à  $\tilde{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ . En effet, si  $\tau \in 2\mathbb{N}_0$ , alors  $f$  est une polynôme donc  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  est évitante (c'est-à-dire,  $\|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}} = 0, \forall f \in \mathcal{P}_{\infty}$ ). On suppose maintenant que  $\tau \notin 2\mathbb{N}_0$ , la fonction  $f$  n'est pas un polynôme, localement intégrable ( $f \in L_1^{loc}$ ). Pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\widehat{f}(\lambda\xi) = \lambda^{-n-\tau} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x\xi} |\lambda x|^{\tau} d(\lambda x) = \lambda^{-n-\tau} \widehat{f}(\xi),$$

dans  $\mathcal{S}'$ , et  $\widehat{f}$  est une fonction radiale, c'est-à-dire, nous pouvons trouver une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\widehat{f}(\xi) = g(|\xi|)$ ; comme  $\tau \notin 2\mathbb{N}_0$ , alors il existe une constante  $c_0 \neq 0$  ( $c_0 = \widehat{f}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) = g\left(\left|\frac{\xi}{|\xi|}\right|\right) = g(1)$ ) telle que pour  $\lambda = |\xi|^{-1}$  ( $\xi \neq 0$ ), on a

$$\widehat{f}(\xi) = c_0 |\xi|^{-n-\tau}.$$

Soit la fonction  $\psi$  définie par  $\psi := f * \mathcal{F}^{-1}\gamma$ , puisque  $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\gamma(\xi) = c_0 |\xi|^{-n-\tau}\gamma(\xi) \in C^{\infty}$  et  $\widehat{\psi}^{(m)}(0) = 0, \forall m \in \mathbb{N}$ , donc on a  $\psi \in \mathcal{S}_{\infty}$ . Alors

$$\widehat{Q_j f}(\xi) = \gamma(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi) = c_0 2^{-j(n+\tau)} |2^{-j}\xi|^{-n-\tau} \gamma(2^{-j}\xi) = 2^{-j(n+\tau)} \psi(2^{-j}\xi),$$

sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , c'est-à-dire,  $Q_j f(x) = 2^{-j(n+\tau)} 2^{jn} \mathcal{F}^{-1}\psi(2^j\xi)$ . Par conséquent, nous avons l'égalité

$$\|Q_j f\|_p = 2^{-j(\tau+n/p)} \|\mathcal{F}^{-1}\psi\|_p,$$

ce qui donne  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ .

Maintenant, on démontre que  $f \in \tilde{C}_0$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $\nu := ([s - n/p] + 1)_+ = [\tau] + 1$ .

- Pour  $-n < \tau < 0$ , on trouve immédiatement

$$|\langle f(\cdot/\lambda), \varphi \rangle| = \lambda^{-\tau} |\langle f, \varphi \rangle| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \quad (\forall \lambda > 0),$$

ce qui donne  $f \in \tilde{C}_0$  (où  $\nu = 0$ ).

- Pour  $\tau \geq 0$ , puisque si  $\partial_j^1 f \in \tilde{C}_0$  alors  $f^{(\alpha)} \in \tilde{C}_0, \forall |\alpha| = \nu$ . Il suffit donc étudier le cas  $\tau < 1$ , c'est-à-dire,  $\nu = 1$ . On a  $|x|^\tau = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\tau/2}$ , et

$$\partial_j^1 |x|^\tau = 2(\tau/2)x_j(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{(\tau/2)-1} = \tau x_j |x|^{\tau-2}.$$

Alors pour tout  $\lambda > 0$ , on trouve

$$\left| \langle \partial_j^1 f(\cdot/\lambda), \varphi \rangle \right| = \lambda^{1-\tau} \left| \langle \tau x_j |x|^{\tau-2}, \varphi \rangle \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

ce qui donne  $\partial_j^1 |x|^\tau \in \tilde{C}_0$ . Dans le cas  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  garantit que  $-1 < \tau - \nu$  si  $n = 1$ .

Finalement, on déduit que  $f$  appartient à  $\dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ .

# Chapitre 2

## Convolution dans les espaces homogènes $\dot{A}_{p,q}^s$

Dans ce chapitre nous donnons quelques généralisations sur la convolution liées aux J. Peetre dans les espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  et  $\dot{A}_{p,q}^s$ , où  $s, p$  et  $q$  qui sont de la manière suivante :  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p, q \leq \infty$  et  $p < \infty$  dans le cas  $F$ , sauf indication contraire. Ensuite, on utilise la notation suivante :

$$\begin{cases} r := \min(1, p), \mu := -s + (n/p - n)_+, \text{ et } \omega(p, q) := \omega \text{ telle que} \\ \omega = q' \text{ si } p > 1 \text{ ou } q \leq p \leq 1, \text{ et } 1/\omega = 1/p - 1/q \text{ si } p \leq \min(1, q), \end{cases}$$

où  $q' := q/(q-1)$  si  $q > 1$  et  $q' := \infty$  si  $0 < q \leq 1$ . On se donne en outre une fonction  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  telle que  $\tilde{\gamma}\gamma = \gamma$ . Les opérateurs  $\tilde{Q}_j$  sont alors définis de la même façon que les  $Q_j$ , c'est-à-dire,  $\tilde{Q}_j f := \tilde{\gamma}(2^{-j}(\cdot))\hat{f}$ .

### 2.1 Généralisations de certains théorèmes de Peetre

On désigne par  $\mathcal{E}_{p,q}$  les espaces des suites  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  qui vérifient :

$$\begin{aligned} \|(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} &:= \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|a_j\|_p^q \right)^{1/q} < \infty, \text{ où } \mathcal{E}_{p,q} := \ell_q(\mathbb{Z}; L_p(\mathbb{R}^n)), \\ \|(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} &:= \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty, \text{ où } \mathcal{E}_{p,q} := L_p(\mathbb{R}^n; \ell_q(\mathbb{Z})), \end{aligned}$$

avec la modification usuelle si  $p = \infty$  ou  $q = \infty$ .

**Remarque 2.1.** Soient  $0 < u, v \leq \infty$ , on a

$$\ell_u(L_p) \hookrightarrow L_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_v(L_p),$$

pour tout  $u$  et  $v$  tels que

$$0 < u \leq \min\{p, q\} \quad \text{et} \quad \max\{p, q\} \leq v \leq \infty.$$

**Proposition 2.2.** Soient  $a_1, a_2, b_1, b_2$  des réels tels que  $0 < a_1 < b_1$  et  $0 < a_2 < b_2$ . Soient  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  des suites dans  $\mathcal{S}'$ , telles que

- $\widehat{u}_j$  et  $\widehat{v}_j$  sont portées par les couronnes  $a_1 2^j \leq |\xi| \leq b_1 2^j$  et  $a_2 2^j \leq |\xi| \leq b_2 2^j$ , respectivement.
- $A := \|(2^{js} u_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} < \infty$  et  $B := \|(2^{j\mu} v_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{r,\omega}} < \infty$ .

Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j * v_j$  converge dans  $\mathcal{S}'_\nu$  (pour la définition de  $\nu$  voir (1.4.2)), et

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j * v_j \right\|_p \leq cAB,$$

où la constante positive  $c$  ne dépend que de  $n, s, p, q, a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$ , avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ .

**Preuve.** Voir [17]. □

**Théorème 2.3.** Soient  $t := \min(1, p, q)$ . Soient  $a_1, a_2, b_1, b_2$  des réels tels que  $0 < a_1 < b_1$ ,  $0 < a_2 < b_2$  et  $a_1/b_2 \leq b_1/a_2$ . Soient  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  des suites dans  $\mathcal{S}'$ , telles que

- $\widehat{u}_j$  et  $\widehat{v}_j$  sont portées par les couronnes  $a_1 2^j \leq |\xi| \leq b_1 2^j$  et  $a_2 2^j \leq |\xi| \leq b_2 2^j$ , respectivement.
- $A := \|(2^{js} u_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_q(L_p)} < \infty$  et  $B := \|(2^{j\mu} v_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_t(L_r)} < \infty$ .

On définit la suite  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  par :

$$\varepsilon_k := \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j * v_{j-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.1)$$

Alors la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k$  converge dans  $\mathcal{S}'$ , et

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\mu q} \|\varepsilon_k\|_p^q \right)^{1/q} \leq cAB, \quad (2.1.2)$$

où la constante positive  $c$  ne dépend que de  $n, s, p, q, a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$ , avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ .

**Preuve.** Pour la preuve de ce résultat nous allons la diviser en deux étapes.

Étape 1. Convergence dans  $\mathcal{S}'$ . Tout d'abord on a  $u_j * v_{j-k} = 0$  pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  sauf si  $a_1/b_2 \leq 2^{-k} \leq b_1/a_2$ .

Soient  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $a_1/b_2 \approx 2^{-m_2}$ ,  $b_1/a_2 \approx 2^{-m_1}$ . Nous pouvons écrire

$$\varepsilon_k := \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j * v_{j-k}, \quad m_1 \leq k \leq m_2. \quad (2.1.3)$$

Par conséquent, pour toute  $\varphi \in \mathcal{S}$  nous avons

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle| \leq \sum_{m_1 \leq k \leq m_2} \|\varepsilon_k\|_p \|\varphi\|_{p'},$$

où  $p' := p/(p-1)$  si  $p > 1$  et  $p' := \infty$  si  $0 < p \leq 1$ . Par la Proposition 2.2, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|\varepsilon_k\|_p \leq c 2^{k\mu} AB. \quad (2.1.4)$$

Alors de l'estimation (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle| &\leq c AB \|\varphi\|_{p'} \sum_{m_1 \leq k \leq m_2} 2^{k\mu} \\ &\leq c_1 AB \|\varphi\|_{p'} < \infty. \end{aligned}$$

Étape 2. Preuve de (2.1.2). On distingue deux cas.

• *Le cas  $p \geq 1$  ici  $\mu = -s$ .* En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\varepsilon_k\|_p^q \right)^{1/q} &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|u_j * v_{j-k}\|_p \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|u_j\|_p 2^{(k-j)s} \|v_{j-k}\|_1 \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{(k-l)s} \|u_{k-l}\|_p 2^{ls} \|v_{-l}\|_1 \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

– Si  $q > 1$ , alors par l'inégalité de Minkowski, l'expression (2.1.5) est majorée par

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{ls} \|v_{-l}\|_1 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k-l)sq} \|u_{k-l}\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-ls} \|v_l\|_1 \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|u_k\|_p^q \right)^{1/q} \leq AB. \end{aligned}$$

– Si  $0 < q \leq 1$ , alors en utilisant le Lemme 1.5, l'expression (2.1.5) est majorée par

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{(k-l)sq} \|u_{k-l}\|_p^q 2^{lsq} \|v_{-l}\|_1^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{lsq} \|v_{-l}\|_1^q \right)^{1/q} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|u_k\|_p^q \right)^{1/q} \leq \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-lsq} \|v_l\|_1^q \right)^{1/q} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|u_k\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq AB. \end{aligned}$$

• *Le cas  $0 < p \leq 1$  ici  $\mu = -s + n/p - n$ .* D'après (2.1.3) il est clair que

$$\text{supp } \widehat{v_{j-k}} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{m_2+j}\}, \quad \text{pour } m_1 \leq k \leq m_2.$$

Donc le Lemme 1.8 permet d'obtenir

$$\|u_j * v_{j-k}\|_p \leq c \max(b_1, b_2 2^{m_2})^{n/p-n} 2^{j(n/p-n)} \|u_j\|_p \|v_{j-k}\|_p.$$

Par le Lemme 1.5, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\mu q} \|\varepsilon_k\|_p^q \right)^{1/q} &\leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\mu q} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(n/p-n)p} \|u_j\|_p^p \|v_{j-k}\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &\leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{(j-k)(n/p-n)p} 2^{ksp} \|u_j\|_p^p \|v_{j-k}\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &\leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsp} \|u_j\|_p^p 2^{(j-k)(-s+n/p-n)p} \|v_{j-k}\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &\leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{(l+k)sp} \|u_{l+k}\|_p^p 2^{l(-s+n/p-n)p} \|v_l\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Maintenant, nous séparons cette estimation en ce qui concerne  $q$  dans deux cas :

– Si  $p \leq q$  (ici  $q \in ]0, \infty]$ ), alors par l'inégalité de Minkowski le terme droite dans (2.1.6) est majoré par

$$c \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{l\mu p} \|v_l\|_p^p \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(l+k)sq} \|u_{l+k}\|_p^q \right)^{p/q} \right)^{1/q} \leq cAB.$$

– Si  $q < p$ , par le Lemme 1.5 avec  $d := q/p$  le terme droite dans (2.1.6) est majoré par

$$\begin{aligned} c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{l(n/p-n-s)q} \|v_l\|_p^q 2^{(l+k)sq} \|u_{l+k}\|_p^q \right)^{1/q} \\ \leq c \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{l\mu q} \|v_l\|_p^q \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(l+k)sq} \|u_{l+k}\|_p^q \right)^{1/q} \leq cAB. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a le résultat souhaité.  $\square$

**Théorème 2.4.** Soient  $t := \min(1, q)$  et  $\beta > n/\min(p, q)$ . Soient  $a_1, a_2, b_1, b_2$  des réels tels que  $0 < a_1 < b_1$ ,  $0 < a_2 < b_2$  et  $a_1/b_2 \leq b_1/a_2$ . Soient  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  des suites dans  $\mathcal{S}'$ , telles que

•  $\widehat{u}_j$  et  $\widehat{v}_j$  sont portées par les couronnes  $a_1 2^j \leq |\xi| \leq b_1 2^j$  et  $a_2 2^j \leq |\xi| \leq b_2 2^j$ , respectivement.

•  $A := \|(2^{js} u_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_q)} < \infty$  et  $B := \|(2^{-js} (1 + 2^j \cdot)^{\beta} v_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_t(L_1)} < \infty$ .

On définit la suite  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  comme dans (2.1.1). Alors la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k$  converge dans  $\mathcal{S}'$ , et

$$\left\| \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\varepsilon_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq cAB, \quad (2.1.7)$$

où la constante positive  $c$  ne dépend que de  $n, s, p, q, a_1, a_2, b_1, b_2$  et  $\beta$ .

Pour la preuve, on introduit la fonction maximale de Peetre :

$$u_j^{*,\beta}(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |2^j y|)^{-\beta} |u_j(x - y)| \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{Z}, \beta > 0).$$

**Proposition 2.5.** *Il existe  $c_1, c_2 > 0$ , tels que si  $\beta > n/\min(p, q)$  et  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  donnée comme dans le Théorème 2.4, alors*

$$c_1 \|(2^{js} u_j^{*,\beta})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_q)} \leq \|(2^{js} u_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_q)} \leq c_2 \|(2^{js} u_j^{*,\beta})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_q)}.$$

**Preuve.** Voir [42, p. 30]. □

**Preuve du Théorème 2.4.** Nous allons démontrer ce théorème en deux étapes en utilisant la Proposition 2.5.

Étape 1. Convergence dans  $\mathcal{S}'$ . Par l'Étape 1/preuve du Théorème 2.3, nous avons

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle| \leq \sum_{m_1 \leq k \leq m_2} \|\varepsilon_k\|_p \|\varphi\|_{p'}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Pour  $\beta > n/\min(p, q)$ , il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} \|u_j * v_{j-k}\|_p &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} v_{j-k}(y) (1 + 2^j |y|)^\beta \frac{u_j(\cdot - y)}{(1 + 2^j |y|)^\beta} dy \right\|_p \\ &\leq \|u_j^{*,\beta}\|_p \int_{\mathbb{R}^n} |v_{j-k}(y)| (1 + 2^j |y|)^\beta dy, \end{aligned}$$

par l'inégalité élémentaire

$$(1 + 2^j |y|)^\beta \leq c \max(2^{-k\beta}, 2^{k\beta}) (1 + 2^{j-k} |y|)^\beta, \quad \forall \beta > 0, \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.8)$$

où  $c$  indépendant de  $j$  et  $k$ . Donc ce qui donne (avec  $\beta > n/\min(p, q)$ ) :

$$\begin{aligned} \|u_j * v_{j-k}\|_p &\leq c_1 2^{-ks} \max(2^{-k\beta}, 2^{k\beta}) (2^{js} \|u_j^{*,\beta}\|_p) \int_{\mathbb{R}^n} 2^{-(j-k)s} |v_{j-k}(y)| (1 + 2^{j-k} |y|)^\beta dy \\ &\leq c_2 \max(2^{-ks'}, 2^{-ks''}) \left\| \sup_{l+k \in \mathbb{Z}} 2^{(l+k)s} \|u_{l+k}^{*,\beta}(\cdot)\|_p \right\| \left\| \sup_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-ls} \|(1 + 2^l |y|)^\beta v_l\|_1 \right\| \\ &\leq c_2 \max(2^{-ks'}, 2^{-ks''}) \|(2^{ms} u_m^{*,\beta})_{m \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_\infty)} \|(2^{-ls} (1 + 2^l |\cdot|)^\beta v_l)_{l \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_\infty(L_1)}, \end{aligned}$$

où  $s' := s + \beta \in \mathbb{R}$  et  $s'' := s - \beta \in \mathbb{R}$ . Alors par les inclusions  $\ell_t(L_1) \hookrightarrow \ell_\infty(L_1)$  et  $L_p(\ell_q) \hookrightarrow L_p(\ell_\infty)$ , on trouve que série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle|$  est majorée par  $cAB$ .

Étape 2. Preuve de (2.1.7). Nous distinguons deux cas.

- *Le cas  $q > 1$ .* En utilisant l'inégalité de Minkowski (deux fois) et l'inégalité (2.1.8)

(où  $(1 + 2^{l+k}|y|)^\beta \leq c(1 + 2^l|y|)^\beta$  et  $m_1 \leq k \leq m_2$ ), on obtient

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\varepsilon_k|^q \right)^{1/q} &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{ks} |u_j(\cdot - y) v_{j-k}(y)| dy \right)^q \right)^{1/q} \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} |u_j(\cdot - y)| 2^{(k-j)s} |v_{j-k}(y)| \right)^q \right)^{1/q} dy \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-ls} |v_l(y)| \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+l)sq} (1 + 2^{l+k}|y|)^{\beta q} \left| \frac{u_{k+l}(\cdot - y)}{(1 + 2^{l+k}|y|)^\beta} \right|^q \right)^{1/q} dy \\
 &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-ls} |v_l(y)| (1 + 2^l|y|)^\beta \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+l)sq} |u_{l+k}^{*,\beta}(\cdot)|^q \right)^{1/q} dy \\
 &\leq c \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{msq} |u_m^{*,\beta}|^q \right)^{1/q} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-ls} \|(1 + 2^l|\cdot|)^\beta v_l\|_1.
 \end{aligned}$$

On passe à présent au calcul de la quasi-norme  $L_p$ . Par l'inclusion  $\ell_t(L_1) \hookrightarrow \ell_1(L_1)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \left\| \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\varepsilon_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p &\leq \left\| \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{msq} |u_m^{*,\beta}(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_p \left\| (2^{-ls} (1 + 2^l|\cdot|)^\beta v_l)_{l \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell_1(L_1)} \\
 &\leq cAB.
 \end{aligned}$$

• *Le cas  $0 < q \leq 1$ .* Par le Lemme 1.5 avec  $d := q$  et l'inégalité  $(1 + 2^{l+k}|y|)^\beta \leq c(1 + 2^l|y|)^\beta$  pour  $m_1 \leq k \leq m_2$ , on a

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\varepsilon_k|^q \right)^{1/q} &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j * v_{j-k}|^q \right)^{1/q} \\
 &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} 2^{ks} |u_j(\cdot - y) v_{j-k}(y)| dy \right)^q \right)^{1/q} \\
 &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} 2^{ks} \left| \frac{u_{l+k}(\cdot - y)}{(1 + 2^{l+k}|y|)^\beta} (1 + 2^{l+k}|y|)^\beta v_l(y) \right| dy \right)^q \right)^{1/q} \\
 &\leq c \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(l+k)sq} |u_{l+k}^{*,\beta}(\cdot)|^q \left( \int_{\mathbb{R}^n} 2^{-ls} |(1 + 2^l|y|)^\beta v_l(y)| dy \right)^q \right)^{1/q} \\
 &\leq c \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{msq} |u_m^{*,\beta}|^q \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-lsq} \|(1 + 2^l|\cdot|)^\beta v_l\|_1^q \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

Alors nous calculons la quasi-norme  $L_p$  de  $\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\varepsilon_k|^q \right)^{1/q}$  alors l'estimation désirée est obtenue. Ce qui termine la démonstration.  $\square$

## 2.2 Remarques sur des cas particuliers

Dans ce paragraphe nous donnons quelques généralisations des théorèmes de [8, chap. 4] ou [38, chap. 8] au cas  $0 < p, q < 1$ . Nous commençons par le corollaire suivant :

**Corollaire 2.6.** *La série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_j \theta * Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_\infty$  vers un élément noté par  $\theta \otimes f$ , qui vérifie*

$$\|\theta \otimes f\|_p \leq c \|\theta\|_{\dot{A}_{r,\omega}^\mu} \|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s},$$

pour toute  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  et toute  $\theta \in \dot{A}_{r,\omega}^\mu$ , où la constante  $c > 0$  est indépendante de  $f$  et  $\theta$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ).

**Preuve.** Une conséquence immédiate de la Proposition 2.2. Il suffit de poser  $u_j := Q_j f$  et  $v_j := \tilde{Q}_j \theta$ .  $\square$

**Théorème 2.7.** *La série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_j \theta_\lambda * Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_\nu$  vers un élément noté par  $\theta_\lambda \otimes f$  où  $\theta_\lambda := \lambda^{-n} \theta(\lambda^{-1}(\cdot))$ . De plus :*

(i) *il existe une constante  $c > 0$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ) telle que l'inégalité*

$$\lambda^{-s} \|\theta_\lambda \otimes f\|_p \leq c \|\theta\|_{\dot{A}_{r,\omega}^\mu} \|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s} \quad (\forall \lambda > 0) \quad (2.2.9)$$

*est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  et toute  $\theta \in \dot{A}_{r,\omega}^\mu$ ,*

(ii) *on pose  $t := \min(1, p, q)$  et  $\lambda := 2^{-k}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ) indépendante de  $k$  telle que l'inégalité*

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\theta_{2^{-k}} \otimes f\|_p^q \right)^{1/q} \leq c \|\theta\|_{\dot{B}_{r,t}^\mu} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

*est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{B}_{p,q}^s$  et toute  $\theta \in \dot{B}_{r,t}^\mu$ .*

**Preuve.** La convergence de  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_j \theta_\lambda * Q_j f$  dans  $\mathcal{S}'_\nu$  est comme dans la preuve de la Proposition 2.2, et nous omettons les détails. Sa limite sera notée par  $\theta_\lambda \otimes f$ .

Étape 1. *Preuve de (i).* En utilisant la Proposition 1.14 / (i), on obtient (2.2.9).

Étape 2. *Preuve de (ii).* La preuve de cette étape se trouve dans l'article [17].  $\square$

Soit  $M_t f$  la fonction maximale de Littlewood-Hardy telle que

$$M_t f(x) := \left( \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|^t dy \right)^{1/t}, \quad (\forall f \in L_1^{loc}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0),$$

où  $B(x,r)$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

**Lemme 2.8.** *Soit  $0 < t \leq 1$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$|\mathcal{F}^{-1}\varphi * f(x)| \leq cR^{n/t-n}\|\varphi\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}}(M|f|^t(x))^{1/t} \quad (2.2.10)$$

*est satisfaite, pour tout  $R > 0$  et toute  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $f \in C^\infty$  avec  $\varphi$  et  $\widehat{f}$  sont portées par la boule  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ . La constante  $c$  ne dépend pas de  $\varphi, f, R$  et  $x$ .*

**Preuve.** Voir [29] ou [25, prop. 3.13] ou [52, prop. 6.1, p. 150]. L'inégalité (2.2.10) est connue sous le nom de Marschall.  $\square$

**Lemme 2.9.** *Soient  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$  et  $0 < t < \min\{p, q\}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (M_t f_j)^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p$$

*est satisfaite, pour toute suite de fonctions  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty$ .*

**Preuve.** Voir [19] ou [49, thm. 2.2].  $\square$

**Théorème 2.10.** *Soient  $\theta_\ell \in \dot{B}_{1,r}^\alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < r < \infty$  et  $\ell = 1, \dots, N$ , telle que  $\widehat{\theta}_\ell$  ne s'annulent pas simultanément sur  $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c \sum_{\ell=1}^N \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|f * \widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}}\|_p^q \right)^{1/q} \quad (2.2.11)$$

*est satisfaite, pour toute  $f \in \mathcal{S}'_\infty$ , avec  $\widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} := \widehat{\theta}_\ell(2^{-k}(\cdot))$ .*

Pour la preuve de ce théorème, on utilise le lemme suivant (voir [8, coro. 1.3.1, p. 9]) :

**Lemme 2.11.** *Soit  $E$  l'une des algèbres,  $E = \mathcal{F}(L_1)$ , ou  $E = C^m$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_N$  des éléments de  $E$ . On suppose que  $\text{supp } f \subseteq K$  ( $K \subset \mathbb{R}^n$  compact) et qu'en chacun de ses points l'une au moins des fonctions  $g_\ell$  ne s'annule pas, pour tout  $\ell = 1, \dots, N$ . Alors il existe des éléments  $v_1, \dots, v_N$  de  $E$ , avec  $\text{supp } v_\ell \subseteq K$ , telle que*

$$f = \sum_{\ell=1}^N v_\ell g_\ell.$$

**Preuve du Théorème 2.10.** Soit  $f \in \mathcal{S}'_\infty$ . Prise dans compte le support de  $\widehat{\theta}_\ell$ , telle que

$$\theta_\ell = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{Q}_k \theta_\ell.$$

En effet, si  $\theta_\ell \in \dot{B}_{1,r}^\alpha$  alors  $\widetilde{Q}_k \theta_\ell \in L_1$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire,  $\widetilde{\gamma} \widehat{\theta}_\ell \in \mathcal{FL}_1$  telle que  $\gamma = \gamma \widetilde{\gamma}$  et  $\widetilde{\gamma}(\xi) \widehat{\theta}_\ell(\xi) \neq 0$  dans la couronne  $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$ . D'après le Lemme 2.11, il existe une suite  $(v_\ell)_{\ell=1}^N$  dans  $\mathcal{FL}_1$ , telle que

$$\gamma(\xi) = \sum_{\ell=1}^N v_\ell(\xi) \widetilde{\gamma}(\xi) \widehat{\theta}_\ell(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que

$$\gamma(2^{-k}\xi) \widehat{f}(\xi) = \sum_{\ell=1}^N v_\ell(2^{-k}\xi) \widetilde{\gamma}(2^{-k}\xi) \widehat{\theta}_\ell(2^{-k}\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Donc nous pouvons écrire

$$Q_k f = \sum_{\ell=1}^N \widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f * \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\mathcal{F}^{-1}v_\ell)(2^k \cdot)).$$

On distingue deux cas :

- Le cas  $p \geq 1$ . Dans ce cas il suffit d'appliquer l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \left( \sum_{\ell=1}^N \left\| \widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f * \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\mathcal{F}^{-1}v_\ell)(2^k \cdot)) \right\|_p \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \sum_{\ell=1}^N \left\| \widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f \right\|_p^q \left\| \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\mathcal{F}^{-1}v_\ell)(2^k \cdot)) \right\|_1^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_1 \sum_{\ell=1}^N \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \left\| \widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f \right\|_p^q \left\| \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\mathcal{F}^{-1}v_\ell)(2^k \cdot)) \right\|_1^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

où la constante  $c_1$  ne dépendent pas de  $\theta_\ell$  et  $f$ , et on a

$$\left\| \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\mathcal{F}^{-1}v_\ell)(2^k \cdot)) \right\|_1 \leq c \|\mathcal{F}^{-1}v_\ell\|_1 < \infty,$$

alors nous déduisons l'estimation (2.2.11).

- Le cas  $0 < p < 1$ . En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Marschall (2.2.10), on obtient

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \left( \sum_{\ell=1}^N 2^{k(\frac{n}{t}-n)p} \left\| \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\widehat{\mathcal{F}^{-1}v_\ell})(2^k \cdot)) \right\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}}^p \left\| (M|\widetilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f|^t(\cdot))^{1/t} \right\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

où la constante  $c$  est indépendante de  $k$ , et on a

$$\left\| \widetilde{Q}_k(2^{kn}(\widehat{\mathcal{F}^{-1}v_\ell})(2^k \cdot)) \right\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}} = \left\| \widetilde{\gamma}(2^{-k}(\cdot)) v_\ell(2^{-k}(\cdot)) \right\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}} = 2^{-k(n/t-n)} \|\widetilde{\gamma} v_\ell\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}},$$

et encore par l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (voir le Lemme 2.9) en choisissant  $p/t > 1$ , il est facile d'obtenir les estimations suivantes

$$\left\| \left( M|\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f|^t(\cdot) \right)^{1/t} \right\|_p \leq \left\| M|\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f|^t \right\|_{p/t}^{1/t} \leq c_1 \left\| |\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f|^t \right\|_{p/t}^{1/t} = c_1 \|\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f\|_p.$$

Par conséquent, nous prouvons que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\leq c_2 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \left( \sum_{\ell=1}^N \|\tilde{\gamma}v_\ell\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}}^p \|\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f\|_p^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &\leq c_3 \sum_{\ell=1}^N \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\tilde{\gamma}v_\ell\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}}^q \|\tilde{\theta}_{\ell,2^{-k}} * f\|_p^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

où la constante  $c_3$  dépend seulement de  $N$ , donc nous déduisons l'estimation (2.2.11). Ce qui termine la preuve du Théorème 2.10.  $\square$

**Remarque 2.12.** Le Théorème 2.10 donne une extension au cas  $p$  et  $q < 1$ .

**Remarque 2.13.** (i) Dans le Théorème 2.10, on peut remplacer la couronne  $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$  par la couronne  $a \leq |\xi| \leq b$  avec  $0 < 2a < b$  (voir [8, thm. 4.2/2, p. 53]).  
 (ii) Le Théorème 2.10 est vrai si l'on remplace l'espace  $\dot{B}_{1,r}^\alpha$  par l'espace  $C^\infty$  (car,  $v_\ell \in C^\infty$  implique  $\tilde{\gamma}v_\ell \in C^\infty$ , où  $\tilde{\gamma} \in C^\infty$  voir aussi le Lemme 2.11).

**Exemple 3.** Soit  $g \in \mathcal{S}_\infty$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la fonction  $\varphi$  définie par

$$\widehat{\varphi}(\xi) := |\xi|^m \widehat{g}(\xi)$$

appartient à  $\dot{B}_{1,r}^{-s}$ , où  $0 < r < \infty$ .

En effet, soit  $g \in \mathcal{S}_\infty$ , on définit  $Q_j \varphi := 2^{jn} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j \cdot) * \varphi$  et  $\psi \in \mathcal{S}_\infty$  telle que  $\widehat{\psi}(\xi) := |\xi|^m \gamma(\xi)$ , alors

$$\widehat{Q_j \varphi}(\xi) = \gamma(2^{-j} \xi) \widehat{\varphi}(\xi) = 2^{jm} \widehat{\psi}(2^{-j} \xi) \widehat{g}(\xi).$$

Ce qui implique que  $Q_j \varphi = 2^{jm} \psi_j * g$  avec  $\psi_j(\cdot) := 2^{jn} \psi(2^j(\cdot))$ . Alors en utilisant l'inégalité de Young, on obtient l'égalité

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-jsr} \|Q_j \varphi\|_1^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(m-s)r} \|\psi_j * g\|_1^r := I_1 + I_2,$$

où  $I_1 := \sum_{j < 0} \dots$ , et  $I_2 := \sum_{j \geq 0} \dots$

D'abord, pour l'estimation de  $I_1$ , par remarqué que  $g \in \mathcal{S}_\infty$ , alors il existe  $M \in \mathbb{N}_0$  telle que  $\|\psi_j * g\|_1 \leq c_1 2^{jN_1} \zeta_M(g)$  pour chaque  $j < 0$  (voir le Lemme 1.1), alors nous pouvons choisir un nombre entier  $N_1$  qui satisfait  $N_1 > s - m$ , telle que

$$I_1 \leq c \left( \zeta_M(g) \right)^r \sum_{j < 0} 2^{j(m-s+N_1)r} < \infty.$$

Maintenant, pour l'estimation de  $I_2$ . En raisonnant comme dans l'estimation de  $I_1$  alors  $\|\psi_j * g\|_1 \leq c_1 2^{-jN_2} \zeta_M(g)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}_0$  et tout  $M \in \mathbb{N}_0$  (voir aussi le Lemme

1.1), alors nous pouvons choisir un nombre entier  $N_2$  qui satisfait  $N_2 > m - s$ , telle que

$$I_2 \leq c \left( \zeta_M(g) \right)^r \sum_{j \geq 0} 2^{j(m-s-N_2)r} < \infty.$$

Ce qui donne que  $\varphi$  appartient à  $\dot{B}_{1,r}^{-s}$ .

## 2.3 Des inégalités de convolution dans les espaces $\dot{A}_{p,q}^s$

Dans ce paragraphe on prolonge les résultats de la Section 2.2 aux espaces homogènes réalisés  $\dot{A}_{p,q}^s$  au sens où  $\theta \otimes f = \theta * f$  où "  $\otimes$  " est défini dans le Corollaire 2.6.

**Lemme 2.14.** *Soit  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Si  $f \in \mathcal{S}'_k$  (resp.  $\mathcal{S}_k$ ) et  $\theta \in \mathcal{S}_k$  (resp.  $\mathcal{E}'$ ), alors  $\theta * f \in \mathcal{S}'$  (resp.  $\mathcal{S}_k$ ).*

**Preuve.** Supposons que  $f \in \mathcal{S}'_k$  et  $\theta \in \mathcal{S}_k$ . Alors on a

$$\langle \theta * f, \varphi \rangle = \langle f, \bar{\theta} * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

avec  $\bar{\theta}(x) := \theta(-x)$ . Il est clair que l'on a  $\bar{\theta} * \varphi \in \mathcal{S}_k$ , car

$$\mathcal{F}(\bar{\theta} * \varphi) = (2\pi)^n (\mathcal{F}^{-1}\theta) \cdot \hat{\varphi} \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}^{-1}\theta)^{(\alpha)}(0) = 0, \quad \forall |\alpha| < k.$$

et  $\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{S}$ .

Supposons maintenant  $f \in \mathcal{S}_k$  et  $\theta \in \mathcal{E}'$ . Il suffit d'observer que  $\mathcal{F}(\theta * f) = \hat{\theta} \cdot \hat{f}$  et le fait que  $\hat{f}^{(\alpha)}(0) = 0$  si  $|\alpha| < k$  et  $\hat{\theta}$  est une fonction de la classe  $C^\infty$  avec  $|\hat{\theta}^{(\beta)}(\xi)| \leq c_{\beta,m}(1+|\xi|)^m$  pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$  et tout  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ , voir [22, thm. 1.7.5, p. 20]. Ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 2.15.** *Il existe une constante  $c > 0$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ) telle que l'inégalité*

$$\|\theta * f\|_p \leq c \|\theta\|_{\mathcal{P}} \|\theta\|_{\dot{A}_{r,\omega}^\mu} \|f\|_{\mathcal{P}} \|\hat{f}\|_{\dot{A}_{p,q}^s} \quad (2.3.12)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  et toute  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{r,\omega}^\mu$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ .

**Preuve.** La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [17]. Voici les grands lignes de cette démonstration :

- On démontre que  $\theta * f = \theta \otimes f$  dans  $\mathcal{S}'_\nu$ .
- On introduit la suite de fonctions  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  définie par :

$$g_k := \theta * f - \theta * (S_{-k}f), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

On démontre (2.3.12) pour cette suite et on applique le lemme de Fatou.  $\square$

**Remarque 2.16.** La condition sur  $f$  garantit un "bon" représentant. En effet, si nous remplaçons l'hypothèse  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  par  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s$ , il est possible de tomber sur une contradiction. Par exemple, supposons que (2.3.12) soit valide dans ce cas. Soit  $f$  un polynôme non nul sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s} = 0$ . Nous prenons

$$\theta := \sum_{|k| \leq m} \delta^{(k)}.$$

Nous avons  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{n/p-n-m}$  avec  $0 < p \leq \infty$  (voir ci-dessous), alors

- si  $0 < p \leq 1$ , on choisit  $s := m$  et  $q \leq p$ , on trouve

$$\|[\theta]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p-n-m}} \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,q}^m} = 0,$$

- si  $1 < p \leq \infty$ , on choisit  $s := m + n - n/p$ , on trouve

$$\|[\theta]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{1,\infty}^{n/p-n-m}} \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,1}^{m+n-n/p}} = 0,$$

cependant

$$\theta * f = \sum_{|k| \leq m} f^{(k)},$$

il est donc impossible de satisfaire (2.3.12) puisque son côté gauche est  $\infty$ .

$\theta := \sum_{|k| \leq m} \delta^{(k)}$ . Alors  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{n/p-n-m}$ . En effet, un calcul facile donne :

$$Q_j \theta(x) = \sum_{|k| \leq m} c'_k 2^{j(k+n)} (\mathcal{F}^{-1} \gamma)^{(k)}(2^j x).$$

Ensuite, on passe à la norme  $L_p$  de cette fonction, il vient

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_p &\leq \sum_{|k| \leq m} c'_k 2^{j(k+n)} \|(\mathcal{F}^{-1} \gamma)^{(k)}(2^j(\cdot))\|_p \\ &= c_1 \sum_{|k| \leq m} 2^{j(k+n)} 2^{-jn/p} \|(\mathcal{F}^{-1} \gamma)^{(k)}\|_p \\ &= c_2 \sum_{|k| \leq m} 2^{j(k+n/p')} \leq c_3 2^{j(m+n-n/p)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$2^{-j(m+n-n/p)} \|Q_j f\|_p \leq c,$$

et on passe au  $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \dots$ , on trouve  $\|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p-n-m}} < \infty$ .

**Remarque 2.17.** Si  $\theta \in \mathcal{S}'$ , alors le Théorème 2.15 est valable pour  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{p,q}^s$  seulement. En effet, d'après le Lemme 2.14 on a  $\theta * f \in \mathcal{S}'$ , et si  $[f_1]_{\mathcal{P}} = [f_2]_{\mathcal{P}} = f$  alors

$$f_1 - f_2 = \mathcal{P} \in \mathcal{P}' \quad \text{et} \quad \mathcal{P} * \theta = 0.$$

(Rappelons que  $\mathcal{F}(x^\alpha * \theta) = c \hat{\theta} \delta^{(\alpha)} = 0$  car  $\hat{\theta}^{(\beta)}(0) = 0$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ).

**Théorème 2.18.** Soit  $\theta_\lambda$  telle que  $\widehat{\theta}_\lambda := \widehat{\theta}(\lambda(\cdot))$ .

(i) Il existe une constante  $c > 0$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ) telle que l'inégalité

$$\lambda^{-s} \|\theta_\lambda * f\|_p \leq c \|\theta\|_{\dot{A}_{r,\omega}^\mu} \|f\|_{\dot{A}_{p,q}^s} \quad (\forall \lambda > 0)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$  et toute  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{r,\omega}^\mu$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ .

(ii) On pose  $t := \min(1, p, q)$  et  $\lambda := 2^{-k}$ . Il existe une constante  $c > 0$  (avec  $c = 1$  si  $p \geq 1$ ) indépendante de  $k$  telle que l'inégalité

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\theta_{2^{-k}} * f\|_p^q \right)^{1/q} \leq c \|\theta\|_{\dot{B}_{r,t}^\mu} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{B}_{p,q}^s$  et toute  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{r,t}^\mu$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ .

**Preuve.** Voir [17]. □

**Remarque 2.19.** On considère la fonction  $\theta_\lambda$  définie comme  $\theta_\lambda := \lambda^{-n} \theta(\lambda^{-1}(\cdot))$ , pour tout  $\lambda > 0$ . Alors le Corollaire 2.6, donne une généralisation de [38, thm. 1, p. 156]. Pour les paramètres  $\omega \geq r$ , nous avons  $\dot{B}_{r,r}^\mu \hookrightarrow \dot{A}_{r,\omega}^\mu$ , en particulier  $\dot{B}_{1,1}^{-s} \hookrightarrow \dot{A}_{1,q'}^{-s}$  si  $p \geq 1$ , ce qui couvre le résultat donné dans la référence précédente.

## 2.4 Extensions et applications

On s'intéresse à une extension aux espaces de Sobolev homogènes  $\dot{W}_p^m$  telle que

$$\dot{W}_p^m := \left\{ f \in \mathcal{S}'_m : f^{(\alpha)} \in L_p, |\alpha| = m \right\}, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall m \in \mathbb{N}_0),$$

et  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $\dot{W}_p^m$  est muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_p.$$

### 2.4.1 Convolution avec l'espace de Besov à poids

On définit l'espace de Besov homogène à poids  $\dot{B}_{p,q}^{s,a}$ , (voir [37]).

**Définition 2.20.** Soit  $a \geq 0$ . L'espace de Besov homogène à poids  $\dot{B}_{p,q}^{s,a}$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'_\infty$  telle que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,a}} := \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|(1 + 2^j \cdot | \cdot |)^a Q_j f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

- Proposition 2.21.** (i)  $\dot{B}_{p,q}^{s,0} = \dot{B}_{p,q}^s$ .  
 (ii)  $\dot{B}_{p,q}^{s,a} \hookrightarrow \dot{B}_{p,q_1}^{s,a}$  si  $q \leq q_1$ .  
 (iii)  $\dot{B}_{p,q}^{s,a} \hookrightarrow \dot{B}_{p_1,q}^{s_1,a}$  si  $s - n/p = s_1 - n/p_1$  et  $p < p_1$ .

**Preuve.** La preuve est la même comme dans l'espace  $\dot{B}_{p,q}^s$ , nous nous référons à Jawerth [24].  $\square$

**Théorème 2.22.** Soient  $a > n/\min(p, q)$  et  $t := \min(1, q)$ .

- (i) Soient  $f \in \dot{F}_{p,q}^s$  et  $\theta \in \dot{B}_{1,t}^{-s,a}$ . Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_j \theta_{2^{-k}} * Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_v$  vers un élément noté  $\theta_{2^{-k}} \circledast f$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . De plus, il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $k$  telle que pour toute  $f$  et toute  $\theta$ , on a

$$\left\| \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\theta_{2^{-k}} \circledast f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \|\theta\|_{\dot{B}_{1,t}^{-s,a}} \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}.$$

- (ii) Soit  $f \in \tilde{F}_{p,q}^s$ . Soit  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{1,t}^{-s,a}$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ . Alors l'inégalité

$$\left\| \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} |\theta_{2^{-k}} * f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \|[\theta]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{1,t}^{-s,a}} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\tilde{F}_{p,q}^s}$$

est satisfaite. La constante  $c > 0$  ne dépend pas de  $k$ ,  $f$  et  $\theta$ .

**Preuve.** Voir [17].  $\square$

Les résultats énoncés ci-dessous se trouvent aussi dans l'article [17] dans le cas  $B$ .

**Théorème 2.23.** Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $m \in \mathbb{N}_0$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\|\theta * f\|_{\dot{W}_p^m} \leq c \|[\theta]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{1,1}^0} \|f\|_{\dot{W}_p^m}$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{W}_p^m$  et toute  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{1,1}^0$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ .

Nous notons que sous les hypothèses de ce théorème,  $\theta * f$  est bien défini, voir encore le Lemme 2.14, ou [22, thm. 1.7.6, p. 21] et [41, thm. 30.2, p. 317]. D'autre part, la preuve est basée sur la proposition suivante :

**Proposition 2.24.** Soient  $m \in \mathbb{N}_0$  et  $1 \leq p \leq \infty$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Alors on a l'inclusion  $\dot{W}_p^m \hookrightarrow \dot{A}_{p,\infty}^m$ .

**Preuve.** D'abord, par l'inégalité de Young on a

$$\|Q_j f\|_p \leq c \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p,$$

et pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on obtient  $L_p \hookrightarrow \dot{A}_{p,\infty}^0$ . Maintenant, par la Proposition 1.14/(iii) on a

$$\|f\|_{\dot{A}_{p,\infty}^m} = \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{A}_{p,\infty}^0} \leq c \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_p = c \|f\|_{\dot{W}_p^m},$$

où  $f^{(\alpha)} \in \dot{A}_{p,\infty}^0$ , ce qui donne l'inclusion souhaitée.  $\square$

**Preuve du Théorème 2.23.** En utilisant la Proposition 2.24 la preuve est la même comme dans [17].  $\square$

**Remarque 2.25.** *Similaire au Théorème 2.23, on a*

$$\|\theta * f\|_{\dot{W}_\infty^{m+k}} \leq c \|\theta\|_{\dot{A}_{1,1}^k} \|f\|_{\dot{W}_\infty^m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pour toute  $f \in \dot{W}_p^m$  et toute  $\theta$  telles que  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{1,1}^k$  et  $\theta \in \mathcal{S}$  ou  $\theta \in \mathcal{E}'$ .

## 2.4.2 Applications

Voici cinq exemples d'application du Corollaire 2.6 et du Théorème 2.15. Pour les exemples 2,3 et 5 les détails se trouvent dans l'article [17].

1. On considère  $\theta_d(x) := \theta(x) = |x|^d$  avec  $-n < d \notin 2\mathbb{N}_0$ . Alors on a  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{r,\infty}^{d+n/r}$ ; ici  $r \in ]0, \infty]$ . En effet, puisque  $\hat{\theta}(\xi) = c_0 |\xi|^{-n-d}$  et si on définit  $\psi \in \mathcal{S}_\infty$  par

$$\hat{\psi}(\xi) := c_0 |\xi|^{-n-d} \gamma(\xi),$$

alors  $\|Q_k \theta\|_r = 2^{-k(d+n/r)} \|\psi\|_r$ , pour plus détails voir l'exemple 2.

Maintenant, en utilisant l'opérateur  $\otimes$  comme défini ci-dessus, alors pour tout  $s < 0$ ,  $d := -s - n \notin 2\mathbb{N}_0$  et - si  $0 < q \leq p \leq 1$ , - ou  $p > 1$  et  $0 < q \leq 1$ , (ici  $r := \min(1, p)$ ), alors il existe une constante  $c := c(n, s, p, q) > 0$  telle que

$$\|\theta_{-s-n} \otimes f\|_p \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \quad (\forall f \in \dot{B}_{p,q}^s).$$

On note que nous ne pouvons pas remplacer  $\theta \otimes f$  par la convolution usuelle  $\theta * f$ ; pour voir cela, il suffit de tester par exemple la fonction constante  $f(x) := 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2. On considère une fonction  $\theta$  telle que  $\hat{\theta}(\xi) := (e^{ih\xi} - 1)^m$ . Il est clair que l'on a

$$\theta(x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^{m-j} \delta_{-jh},$$

où  $\delta_{-jh}$  est la distribution de Dirac au point  $x = -jh$ , alors on a

$$\Delta_h^m f = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^{m-j} \delta_{-jh} * f.$$

En conséquence, par le Théorème 2.15, pour tout  $q \in ]0, 1]$  et tout  $p \geq q$  et  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c := c(m, p, q) > 0$  telle que

$$\|\Delta_h^m f\|_p \leq c \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,q}^0}, \quad (\forall f \in \dot{B}_{p,q}^0).$$

Cette estimation est fautive avec l'hypothèse  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,q}^0$  seulement. En effet, soit  $f_0(x) := x_1^m$ , alors  $\| [f_0]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,q}^0} = 0$ , tandis que  $\Delta_h^m f_0(x) = m! h_1^m$  pour tout  $x, h \in \mathbb{R}^n$ , ce qui implique  $\|\Delta_h^m f_0\|_p = \infty$ .

**3.** Soit  $\varrho$  est une fonction de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\varrho(t) = 1$  pour  $t \leq e^{-3}$  et  $\varrho(t) = 0$  pour  $t \geq e^{-2}$ . Pour  $\alpha > -n$  et  $\beta \geq 0$ , on a la fonction

$$\theta_{\alpha,\beta}(x) := |x|^\alpha (-\log|x|)^{-\beta} \varrho(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors  $\theta_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}'$ , et pour tout  $s < 0$ ,  $\alpha := -s - n \neq 0$ ,  $(p, q) \in ]0, \infty]^2$  ( $p \neq \infty$  dans le cas  $F$ ),  $r := \min(1, p)$ ,  $\omega$  est défini comme dans le début de ce chapitre et  $\beta\omega > 1$  (avec  $\beta r > 1$  dans le cas  $F$ ) pour  $\alpha \neq 0$ , on trouve une constante  $c_1 > 0$  telle que

$$\|\theta_{-n-s,\beta} * f\|_p \leq c_1 \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{A}_{p,q}^s} \quad (\forall f \in \dot{A}_{p,q}^s),$$

et pour  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = 0$  et  $(\beta + 1)\omega > 1$  (avec  $(\beta + 1)r > 1$  dans le cas  $F$ ), il existe une constante  $c_2 > 0$  telle que

$$\|\theta_{0,\beta} * f\|_p \leq c_2 \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{A}_{p,q}^{-n}} \quad (\forall f \in \dot{A}_{p,q}^{-n}).$$

**4.** En cas particulier  $p = q = \infty$  : Soit  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , telle que  $\theta := \delta_a - \delta$  et par exemple  $f(x) := x^2 + 1$ , alors  $[\theta]_{\mathcal{P}} \in \dot{A}_{1,1}^{-s}$  pour tout  $s < 1$  et  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{\infty,\infty}^s$  car  $\| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^s} = 0$  (rappelons que  $\dot{B}_{\infty,\infty}^s = \dot{C}^s$ ), alors on a

$$[f]_{\mathcal{P}} \otimes [\theta]_{\mathcal{P}} = 0, \quad \text{et} \quad (f * \theta)(x) = -2ax + a^2,$$

donc ce qui donne  $f * \theta \notin L_\infty$ .

**5.** Soit  $\mathcal{X}$  la fonction caractéristique du cube unité  $[-1, 1]^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il est clair que

$$\widehat{\mathcal{X}}(\xi) = i^{-n} \prod_{j=1}^n (e^{i\xi_j} - e^{-i\xi_j}) / \xi_j.$$

Alors pour  $-n < s < 0$  et  $0 < q \leq \infty$ , ou  $s = -n$  et  $0 < q \leq 1$ , on a

$$\|\mathcal{X} * f\|_p \leq c_1 \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,q}^s} \quad (\forall f \in \dot{B}_{p,q}^s),$$

où  $c$  est une constante qui ne dépend que de  $n, s, p, q$ .

**Remarque 2.26.** Les exemples ci-dessus peuvent être adaptés selon les Théorèmes 2.18, 2.22.

# Chapitre 3

## Estimations de type de Gagliardo-Nirenberg

Dans ce chapitre, nous étudions certaines inégalités de type de Gagliardo-Nirenberg dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes. Nous nous penchons sur la caractérisation des espaces *réalisés* par des estimations de ce type. Nous notons que les résultats de ce chapitre sont des généralisations de celles de l'article [15].

### 3.1 Généralisations

Nous allons utiliser la notation  $\mathcal{E}_{p,q}$  définie dans le début de Section 2.1. On commence par l'inégalité suivante :

**Lemme 3.1.** *Soit  $\beta > 0$ . Alors on a l'inégalité suivante*

$$\sum_{j \geq 0} 2^{-j\beta} \leq \frac{2^\beta}{\beta \log 2}.$$

**Preuve.** Par la formule de Taylor, il vient

$$2^\beta = 1 + \beta \log 2 + \frac{1}{2} \beta^2 (\log 2)^2 + \dots > 1 + \beta \log 2.$$

Alors

$$\sum_{j \geq 0} 2^{-j\beta} = \frac{1}{1 - 2^{-\beta}} = \frac{2^\beta}{2^\beta - 1} \leq \frac{2^\beta}{\beta \log 2}.$$

□

**Proposition 3.2.** Soient  $0 < p, q \leq \infty$  et  $m \geq 0$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Soient  $a, b$  des réels tel que  $0 < a < b$ . Soit  $(f_j)_{j \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  telle que  $\widehat{f_j}$  est portée par la couronne  $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ , et  $(2^{m+n/p} f_j)_{j \geq 0}$  dans  $\mathcal{E}_{p,q}$ . Alors la série  $\sum_{j \geq 0} f_j$  converge dans  $\mathcal{S}'$  et il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_v \leq c(m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{m+n/p} f_j)_{j \geq 0}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} \quad (3.1.1)$$

est satisfaite, pour tout  $v \in [p, \infty]$  (avec  $v < \infty$  dans le cas  $F$ ). La constante  $c$ , peuvent être choisis telle que  $c := \max(1, p^{n/p})$  si  $p < v$  et  $c := 1$  si  $p = v$ , voir (1.2.1).

**Remarque 3.3.** Dans la Proposition 3.2, la consante  $c$  est indépendante de  $v$ ; en effet, on a  $c := p_0^{n(1/p-1/v)}$  avec  $p_0 = [p/2] - 1 \in \mathbb{N}$  telle que  $p_0 > p/2$ , voir par exemple [35, thm. 4], alors

$$0 < c \leq p_0^{n/p} \leq \max(1, p^{n/p}), \quad \text{si } p < v,$$

et cependant on a  $c := 1$  si  $p = v$ , voir encore le Lemme 1.6.

**Preuve de la Proposition 3.2.** Nous ferons la preuve dans deux étapes.

Étape 1. Dans le cas  $B$ .

**1.1. Convergence dans  $\mathcal{S}'$ .** Soient  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  une fonction positive et radiale telle que  $\eta = 1$  sur  $a \leq |\xi| \leq b$ . On définit  $\eta_j := \eta(2^{-j}D)$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}_0$ , c'est-à-dire,  $\widehat{\eta_j g} := \eta(2^{-j}(\cdot))\widehat{g}$ , alors on a  $f_j = \eta_j(f_j)$ . Donc, en utilisant la propriétés de  $\eta$ , nous pouvons écrire  $\langle f_j, \varphi \rangle = \langle f_j, \eta_j \varphi \rangle$ , et on démontre que la série

$$\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \eta_j \varphi \rangle| < \infty.$$

Pour la démonstration, on distingue deux cas :

- Le cas  $1 \leq p \leq \infty$ . En utilisant l'inégalité de Hölder (avec  $1/p + 1/p' = 1$ ) et par le Lemme 1.1, on peut choisir un nombre entier  $N_1$  qui satisfait  $N_1 > -(m+n/p)$ . Alors pour quelque  $M \in \mathbb{N}_0$ , et pour  $q \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| &\leq \sum_{j \geq 0} \|\eta_j \varphi\|_{p'} \|f_j\|_p \leq c_1 \zeta_M(\varphi) \sum_{j \geq 0} (2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p) 2^{-j(N_1+m+n/p)} \\ &\leq c_1 \zeta_M(\varphi) \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(m+n/p)q} \|f_j\|_p^q \right)^{1/q} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+N_1+n/p)q'} \right)^{1/q'}, \quad \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right) \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)}. \end{aligned}$$

Pour  $0 < q < 1$ , en utilisant l'inclusion  $\ell_q(L_p) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$ , c'est-à-dire,

$$\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| \leq \sum_{j \geq 0} \|\eta_j \varphi\|_{p'} \|f_j\|_p \leq c_1 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+N_1+n/p)}.$$

et donc on trouve  $\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| < \infty$ .

- Le cas  $0 < p < 1$ . Dans ce cas en utilisant le Lemme 1.6 et aussi le Lemme 1.1

(c'est-à-dire,  $\forall j, N_2 \in \mathbb{N}_0$  on a  $\|\eta_j \varphi\|_\infty \leq c 2^{-j N_2} \zeta_M(\varphi)$ ), avec le choix d'un nombre entier  $N_2$  qui satisfait  $N_2 > -(m+n)$ , pour quelque  $M \in \mathbb{N}_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| &\leq \sum_{j \geq 0} \|f_j \cdot \eta_j \varphi\|_1 \leq c_1 \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n)} \|f_j \cdot \eta_j \varphi\|_p \\ &\leq c_1 \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n)} \|f_j\|_p \|\eta_j \varphi\|_\infty \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \sum_{j \geq 0} (2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p) 2^{-j(n+N_2+m)}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser aussi l'inclusion  $\ell_q(L_p) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$  ( $\forall p > 0$ ), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| &\leq c_3 \zeta_M(\varphi) \sup_{j \geq 0} 2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p \sum_{j \geq 0} 2^{-j(n+N_2+m)} \\ &\leq c \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)}, \end{aligned}$$

et donc on a  $\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| < \infty$ .

**1.2. Preuve de (3.1.1).** Posons  $f = \sum_{j \geq 0} f_j$ . Nous séparons les cas selon  $q$  et  $v$ .

• Le cas  $q \geq 1$  et  $v \geq 1$ . Par le Lemme 1.6 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_v \leq \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v \leq c_1 \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n/v)} \|f_j\|_p \\ &\leq c_1 \sum_{j \geq 0} (2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p) 2^{-j(m+n/v)} \\ &\leq c_1 \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(m+n/p)q} \|f_j\|_p^q \right)^{1/q} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+n/v)q'} \right)^{1/q'}, \quad (q' := q/(q-1)) \\ &\leq c_1 \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+n/v)q'} \right)^{1/q'} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)}, \end{aligned}$$

avec  $c$  indépendante de  $v$ , voir la Remarque 3.3. Maintenant, il suffit alors d'appliquer le Lemme 3.1, ce qui donne

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq c_1 \left( \frac{2^{(m+n/v)q'}}{(m+n/v)q' \log 2} \right)^{1/q'} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)} \\ &\leq c_1 \frac{(m+n/v)^{-1/q'}}{(q' \log 2)^{1/q'}} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)} \\ &\leq c (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)}. \end{aligned}$$

• Le cas  $q \geq 1$  et  $0 < v < 1$ . En utilisant le Lemme 1.5, le Lemme 1.6 et l'inclusion  $\ell_p(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow \ell_v(\mathbb{N}_0)$  car  $p \leq v$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_v \leq \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v^v \right)^{1/v} \\ &\leq \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n/v)p} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(m+n/p)p} \|f_j\|_p^p 2^{-j(m+n/v)p} \right)^{1/p} \\
 &\leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+n/v)p} \right)^{1/p} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)}.
 \end{aligned}$$

Aussi, en appliquant le Lemme 3.1, on obtient immédiatement l'estimation souhaité :

$$\begin{aligned}
 \|f\|_v &\leq c_1 (m+n/v)^{-1/p} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \\
 &\leq c_1 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)}, \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

puisque  $-1/p < -1 < 1/q - 1$  et nous avons l'inclusion  $\ell_q(L_p) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$ , et le terme droite dans (3.1.2) est majoré par

$$c (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)}.$$

- Le cas  $0 < q < 1$  et  $v \geq 1$ . De manière analogue au cas précédente, d'après le Lemme 1.5 et le Lemme 1.6, on trouve

$$\begin{aligned}
 \|f\|_v &\leq \left\| \left( \sum_{j \geq 0} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_v \leq \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v^q \right)^{1/q} \\
 &\leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n/v)q} \|f_j\|_p^q \right)^{1/q} \\
 &\leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(m+n/p)q} \|f_j\|_p^q 2^{-j(m+n/v)q} \right)^{1/q} \\
 &\leq c (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_q(L_p)},
 \end{aligned}$$

puisque on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 2^{-j(m+n/v)q} &= (2^{-j(m+n/v)})^{q(1-1/q)} 2^{-j(m+n/v)} \quad (\text{avec } 2^{-j(m+n/v)} \leq 1, \forall j \geq 0) \\
 &\leq \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-k(m+n/v)} \right)^{q(1-1/q)} \\
 &\leq c_1 \left( (m+n/v)^{-1} 2^{m+n/v} \right)^{q(1-1/q)} \quad (\text{avec } 2^{-(m+n/v)} \leq 1) \\
 &\leq c_2 (m+n/v)^{q(1/q-1)} 2^{q(m+n/v)}.
 \end{aligned}$$

- Le cas  $0 < q < 1$  et  $0 < v < 1$ . Rappelons que  $p \leq v$  et  $m \in \mathbb{N}_0$ , ce qui implique

$$-p^{-1} \log(m+n/v) < 0 < (1/q - 1) \log(m+n/v) \quad (\text{avec } m+n/v > 1).$$

En raisonnant comme dans la preuve dans le cas précédent ( $q \geq 1, 0 < v < 1$ ), et par

l'inclusion  $\ell_p(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow \ell_v(\mathbb{N}_0)$ , on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}
 \|f\|_v &\leq \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v^v \right)^{1/v} \leq \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p} \\
 &\leq c_1 \left( \sum_{j \geq 0} (2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p)^p 2^{-j(m+n/v)p} \right)^{1/p} \\
 &\leq c_2 (m+n/v)^{-1/p} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \\
 &\leq c (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)}. \tag{3.1.3}
 \end{aligned}$$

Étape 2. Dans le cas  $F$ .

**2.1.** *Convergence dans  $\mathcal{S}'$ .* En utilisant les mêmes arguments utilisés dans la démonstration dans le cas de  $B$ /l'Étape 1 avec l'application de l'inclusion  $L_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$ .

• Pour le cas  $1 \leq p \leq \infty$ . Comme dans la preuve de l'Étape 1 (le cas  $1 \leq p \leq \infty$ ), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| &\leq c_1 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(N_1+m+n/p)} \\
 &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{L_p(\ell_q)},
 \end{aligned}$$

avec  $N_1 + m + n/p > 0$ , alors on trouve  $\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| < \infty$ .

• Pour le cas  $0 < p < 1$ . Aussi par le même argument de l'Étape 1 (le cas  $0 < p < 1$ ), nous avons

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| &\leq c_1 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(n+N_2+m)} \\
 &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{L_p(\ell_q)},
 \end{aligned}$$

avec  $N_2 + m + n > 0$ , donc on trouve  $\sum_{j \geq 0} |\langle f_j, \varphi \rangle| < \infty$ .

**2.2.** *Preuve de (3.1.1).* Posons encore  $f = \sum_{j \geq 0} f_j$ . On utilisera l'inclusion  $L_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$ , et on discutera suivant les cas de  $q$  et  $v$ .

- Le cas  $q \geq 1$  et  $0 < v \leq 1$ . Voir (3.1.2).
- Le cas  $0 < q < 1$  et  $0 < v \leq 1$ . Voir (3.1.3).
- Le cas  $0 < q \leq \infty$  et  $v > 1$ . D'après l'Étape 1/1.2 (avec  $q = \infty$ ), ce qui donne

$$\|f\|_v \leq c (m+n/v)^{1/\infty-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)},$$

nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_v &= \|f\|_v^{1-1/q} \|f\|_v^{1/q} \\
 &\leq \left( c_1 (m+n/v)^{1/\infty-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)} \right)^{1-1/q} \left( \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v \right)^{1/q} \\
 &\leq c_2 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{(m+n/v)(1-1/q)} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_p)}^{1-1/q} \|(f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_1(L_v)}^{1/q} \\
 &\leq c_3 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{L_p(\ell_q)}^{1-1/q} \|(f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_1(L_v)}^{1/q},
 \end{aligned}$$

rappelons que  $2^{-(m+n/v)\frac{1}{q}} \leq 1$ , et on déduit l'estimation souhaitée par l'inégalité suivante

$$\|(f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_1(L_v)} \leq c_1 \|(2^{j(m+n/v)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_v)} \leq c_2 \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{L_p(\ell_q)},$$

en effet, on a

$$\|(f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_1(L_v)} = \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_v \leq \|(2^{j(m+n/v)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\ell_\infty(L_v)} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(m+n/v)},$$

et pour la deuxième estimation, il suffit d'utiliser l'inégalité (1.2.1). Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

**Théorème 3.4.** *Soient  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$  et  $m \geq 0$ . On pose  $r := \min(1, p)$  dans le cas B et  $r := 1$  dans le cas F. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < a < b$ . Soit  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  telles que*

- $\widehat{f_j}$  est portée par la couronne  $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ ,
- $A := \|(2^{jm} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,r}} < \infty$  et  $B := \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} < \infty$ .

Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$  converge dans  $\mathcal{S}'_\infty$ , et il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \right\|_v \leq c (m + n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} A^{p/v+mp/n} B^{1-p/v-mp/n} \quad (3.1.4)$$

est satisfaite, pour tout  $v \in [p, \infty[$ .

**Preuve.** Étape 1. Convergence dans  $\mathcal{S}'_\infty$ . Soit  $\theta$  une fonction  $C^\infty$  telle que  $\widehat{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  et  $\widehat{\theta} = 1$  si  $a \leq |\xi| \leq b$ . On pose  $\theta_j := 2^{jn} \theta(2^j(\cdot))$ , alors par hypothèse on a  $\theta_j * f_j = f_j$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}_\infty$  et par la propriétés de  $\theta$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f_j, \varphi \rangle| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f_j, \theta_j * \varphi \rangle| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f_j \cdot (\theta_j * \varphi)\|_1 \\ &\leq \sum_{j < 0} \|f_j\|_\infty \|\theta_j * \varphi\|_1 + \sum_{j \geq 0} \|f_j \cdot (\theta_j * \varphi)\|_1 \\ &:= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où  $I_1 := \sum_{j < 0} \dots$ , et  $I_2 := \sum_{j \geq 0} \dots$ . Pour simplification de la preuve, il suffit de démontrer le cas  $\ell_\infty(L_p)$ , puisque on a  $\mathcal{E}_{p,r} \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$  et  $\mathcal{E}_{p,q} \hookrightarrow \ell_\infty(L_p)$ , car d'après la Remarque 2.1 nous avons

$$\ell_r(L_p), \ell_q(L_p) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p) \quad \text{où} \quad \ell_r, \ell_q \hookrightarrow \ell_\infty,$$

et

$$L_p(\ell_r), L_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty(L_p) \quad \text{où} \quad \max(p, r), \max(p, q) \leq \infty.$$

Éstimation  $I_1$ . En appliquant le Lemme 1.6 et le Lemme 1.1, et on choisit un nombre entier  $N_1$  qui satisfait  $N_1 > -n/v$ , alors pour quelque  $M \in \mathbb{N}_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c_1 \sum_{j<0} 2^{jn/p} \|f_j\|_p \|\theta_j * \varphi\|_1 \leq c_2 \zeta_M(\varphi) \sum_{j<0} 2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p 2^{j(N_1-m)} \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \sum_{j<0} \left(2^{jm} \|f_j\|_p\right)^{p/v+mp/n} \left(2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p\right)^{1-p/v-mp/n} 2^{j(N_1-m+n/v+m)} \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) \left\| (2^{jm} f_j)_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell_\infty(L_p)}^{p/v+mp/n} \left\| (2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell_\infty(L_p)}^{1-p/v-mp/n} \sum_{j<0} 2^{j(N_1+n/v)} \\ &\leq c_3 \zeta_M(\varphi) A^{p/v+mp/n} B^{1-p/v-mp/n}. \end{aligned}$$

Éstimation  $I_2$ . • Le cas  $p \geq 1$ . Par le Lemme 1.1 et l'inégalité de Hölder ( $1/p + 1/p' = 1$ ), et on choisit un nombre entier  $N_2$  qui satisfait  $N_2 > n/v - n/p$ , alors pour quelque  $M \in \mathbb{N}_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{j \geq 0} \|f_j\|_p \|\theta_j * \varphi\|_{p'} \leq c_1 \zeta_M(\varphi) \sum_{j \geq 0} 2^{-jN_2} \|f_j\|_p \\ &\leq c_1 \zeta_M(\varphi) \sum_{j \geq 0} \left(2^{jm} \|f_j\|_p\right)^{p/v+mp/n} \left(2^{j(m+n/p)} \|f_j\|_p\right)^{1-p/v-mp/n} 2^{-j(N_2+n/p-n/v)} \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) A^{p/v+mp/n} B^{1-p/v-mp/n}. \end{aligned}$$

• Le cas  $0 < p < 1$ . Par le Lemme 1.6 et le Lemme 1.1, et on choisit un nombre entier  $N_3$  qui satisfait  $N_3 > n/v - n$ , alors pour quelque  $M \in \mathbb{N}_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c_1 \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n)} \|f_j \cdot (\theta_j * \varphi)\|_p \leq c_1 \sum_{j \geq 0} 2^{j(n/p-n)} \|\theta_j * \varphi\|_\infty \|f_j\|_p \\ &\leq c_2 \zeta_M(\varphi) A^{p/v+mp/n} B^{1-p/v-mp/n} \sum_{j \geq 0} 2^{-j(N_3+n-n/v)}. \end{aligned}$$

Étape 2. Preuve de (3.1.4). Posons  $f = \sum_{j \geq 0} f_j$ . On rappelle que le paramètre  $r$  est défini par  $r := \min(1, p)$  dans le cas  $B$  et  $r := 1$  dans le cas  $F$ . Alors d'après la Proposition 3.2, on trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq c_1 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \geq 0}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} \\ &\leq c_1 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \left( \|f\|_p + \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} \right) \\ &\leq c_2 (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \left( \|(2^{jm} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,r}} + \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}} \right), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

puisque par le Lemme 1.5 et l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f\|_p = \left\| \sum_{j \geq 0} 2^{jm} 2^{-jm} f_j \right\|_p \leq \left\| \left( \sum_{j \geq 0} |2^{jm} f_j(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_p \leq c \|(2^{jm} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,r}}.$$

Maintenant, pour tout  $\lambda > 0$ , on remplace  $f$  par  $f(\lambda(\cdot))$  on note que  $f(\lambda(\cdot)) = \sum_{j \geq 0} f_j(\lambda(\cdot))$  dans (3.1.5), et choisissons  $N \in \mathbb{Z}$  de sorte que  $2^N \leq \lambda < 2^{N+1}$ , on trouve

$$\lambda^{-n/v} \|f\|_v \leq c (m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \left( c_1 \lambda^{m-n/p} A + c_2 \lambda^m B \right),$$

et rappelons que

$$\|f(\lambda(\cdot))\|_{\mathcal{E}_{p,q}} = \lambda^{-n/p} \|f\|_{\mathcal{E}_{p,q}}.$$

Ce qui implique

$$\|f\|_v \leq c(m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} (c_1 \lambda^{m+n/v-n/p} A + c_2 \lambda^{m+n/v} B),$$

donc en prenant

$$\lambda := A^{p/n} B^{-p/n} = \|(2^{jm} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,r}}^{p/n} \|(2^{j(m+n/p)} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p,q}}^{-p/n},$$

avec  $B \neq 0$  (c'est-à-dire,  $f_j \neq 0$ ). En effet, supposons que

$$\lambda^{m+n/v} B = A^{p/v+mp/n} B^{1-p/v-mp/n},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda &= A^{(p/v+mp/n)(v/(vm+n))} B^{(-p/v-mp/n)(v/(vm+n))} \\ &= A^{p/n} B^{-p/n}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'estimation (3.1.4), ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

**Théorème 3.5.** Soit  $0 < p, q < \infty$  avec  $q \leq 1$  dans le cas  $B$  et  $p \leq 1$  dans le cas  $F'$ . Soient  $a, b$  des réels tel que  $0 < a < b$  et soit  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathcal{S}'$  telles que

- $\widehat{f_j}$  est portée par la couronne  $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ ,
- $A := \|(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_u(\ell_1)} < \infty$  et  $B := \|(2^{jn/p_1} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{p_1,q}} < \infty$ . Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$  converge dans  $\mathcal{S}'_\infty$ , et il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \right\|_v \leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} A^{u/v} B^{1-u/v} \quad (3.1.6)$$

est satisfaite, pour tout  $(2^{jn/p} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  dans  $\mathcal{E}_{p,q}$ , tout  $u, v \in ]0, \infty[$  tel que  $v > \max(p, u)$  et  $p_1 \in [p, \infty[$ .

**Preuve.** Nous ferons la démonstration dans deux étapes.

Étape 1. Convergence dans  $\mathcal{S}'_\infty$ . D'après le Théorème 3.4, nous obtenons immédiatement  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$  converge vers un élément noté  $f$  dans  $\mathcal{S}'_\infty$ .

Étape 2. Preuve de (3.1.6). Posons  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ , et rappelons que

$$\|f\|_u = \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \right\|_u = \|(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_u(\ell_1)}.$$

**2.1.** Par le Lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \left\| \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \right|^{u/v} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \right|^{1-u/v} \right\|_v \\ &\leq \| |f|^{u/v} \|_v \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f_j\|_\infty \right)^{1-u/v} \\ &\leq c_1 \|f\|_u^{u/v} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jn/p_1} \|f_j\|_{p_1} \right)^{1-u/v}, \end{aligned}$$

et encore par les Lemmes 1.6 et 1.5, avec  $0 < p \leq p_1 < \infty$ , on trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq c_2 \|f\|_u^{u/v} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jn/p_1} 2^{jn(1/p-1/p_1)} \|f_j\|_p \right)^{1-u/v} \\ &\leq c_2 \|f\|_u^{u/v} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqn/p} \|f_j\|_p^q \right)^{1/q(1-u/v)}. \end{aligned}$$

Pour le cas de  $F$ , on utilise l'inégalité suivante

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f_j\|_\infty \leq c \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqn/p} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p,$$

car : pour  $0 < p \leq 1$ , on a

$$\|(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_1(L_\infty)} \leq c_1 \|(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell_p(L_\infty)} \leq c_2 \|(2^{jn/p} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L_p(\ell_q)},$$

donc, on trouve l'estimation souhaitée, c'est-à-dire,

$$\|f\|_v \leq c A^{u/v} B^{1-u/v}. \quad (3.1.7)$$

**2.2.** Soient  $p_1 \geq p$  et  $v \geq p$ . Par l'inégalité (3.1.7), on a  $f \in L_v$ . Alors par l'application de la Proposition 3.2 avec  $m = 0$  et  $v = p$ , on trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} \|(2^{jn/v} f_j)_{j \geq 0}\|_{\mathcal{E}_{v,q}} \\ &\leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} (\|f\|_v + \|(2^{jn/v} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{v,q}}), \end{aligned}$$

où la constante  $c$  dépend de  $n$  et  $q$  seulement ; donc en utilisant encore l'inégalité (3.1.7), on obtient

$$\|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} (c_2 A^{u/v} B^{1-u/v} + \|(2^{jn/v} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{v,q}}).$$

On change maintenant la fonction  $f$  par  $f(\lambda(\cdot))$  pour tout  $\lambda > 0$ , où on note que  $f(\lambda(\cdot)) = \sum_{j \geq 0} f_j(\lambda(\cdot))$  dans la dernière inégalité, et choisissons  $N \in \mathbb{Z}$  de sorte que  $2^N \leq \lambda < 2^{N+1}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \lambda^{-n/v} \|f\|_v &\leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} (c_1 \lambda^{-n/v} \lambda^{(-n/p_1)(1-u/v)} A^{u/v} B^{1-u/v} + \lambda^{-n/v} \|(2^{jn/v} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{v,q}}) \\ &\leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} (c_2 \lambda^{-n/v} A^{u/v} B^{1-u/v} + c_3 \|(2^{jn/v} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{v,q}}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|f\|_v \leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} (c_3 A^{u/v} B^{1-u/v} + c_3 \lambda^{n/v} \|(2^{jn/v} f_j)_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{E}_{v,q}}).$$

Alors, nous prenons  $\lambda \rightarrow 0$ , et on obtient l'inégalité désirée.  $\square$

## 3.2 Remarques sur les inégalités de type de Gagliardo-Nirenberg

On commence par le résultat suivant :

**Proposition 3.6.** *Soient  $0 < p, q \leq \infty$  et  $m \geq 0$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\|f\|_v \leq c(m + n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|f\|_{A_{p,q}^{m+n/p}} \quad (3.2.8)$$

est satisfaite, pour tout  $v \in [p, \infty]$  (avec  $v < \infty$  dans le cas  $F$ ) et toute  $f \in A_{p,q}^{m+n/p}$ , où la constante  $c := \max(1, p^{n/p})$  si  $p < v$  et  $c := 1$  si  $p = v$ .

**Preuve.** Une conséquence de la Proposition 3.2 avec  $f_j := Q_j f$ . □

**Remarque 3.7.** L'estimation (3.2.8) est une prolongement de l'inégalité donnée dans [18, p. 90] ou [45, 4.2.3] dans les cas  $0 < q \leq 1$ ,  $m \geq 1$  et le cas  $F$ . En effet, dans le cas  $m = 0$ , si  $p \geq 1$  ou  $u \geq 1$  alors la constante dans l'inégalité (3.2.8), peut être limitée par  $c v^{1-1/q}$ .

**Théorème 3.8.** *Soit  $0 < q \leq 1$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_u^{u/v} \|f\|_{B_{\infty,q}^0}^{1-u/v},$$

pour tout  $u \in ]0, \infty[$ , tout  $v \in [u, \infty]$ , et toute  $f \in L_u \cap B_{\infty,q}^0$ .

**Preuve.** Soit  $f \in L_u \cap B_{\infty,q}^0$ , alors on a

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \left\| \left| \sum_{j \geq 0} \tilde{Q}_j f \right|^{u/v} \left| \sum_{j \geq 0} \tilde{Q}_j f \right|^{1-u/v} \right\|_v \quad (3.2.9) \\ &\leq \| |f|^{u/v} \|_v \left( \sum_{j \geq 0} \|\tilde{Q}_j f\|_{\infty} \right)^{1-u/v} \\ &\leq \|f\|_u^{u/v} \|f\|_{B_{\infty,1}^0}^{1-u/v}. \end{aligned}$$

Donc par l'inclusion  $B_{\infty,q}^0 \hookrightarrow B_{\infty,1}^0$ , on trouve le résultat. □

**Remarque 3.9.** Dans la preuve du Théorème 3.8 on obtient la convergence de la série  $\sum_{j \geq 0} \tilde{Q}_j f$  dans  $L_v$ , ce qui justifie l'écriture (3.2.9), voir par exemple [32].

Dans la suite de ce travail nous confondrons  $f$  (avec  $f \in \mathcal{S}'$  ou  $f \in \mathcal{S}'_{\infty}$ ) et son série de Littlewood-Paley, voir à nouveau [32, preuve de la prop. 2.23].

**Corollaire 3.10.** Soient  $0 < q \leq 1$  et  $0 < p \leq \infty$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v},$$

pour tout  $u \in ]0, \infty[$ , tout  $v \in [u, \infty]$  et toute  $f \in L_u \cap A_{p,q}^{n/p}$ .

**Preuve.** En utilisant le Théorème 3.8 (avec  $q = 1$  et l'inclusion  $A_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow B_{\infty,1}^0$ ) et la Proposition 1.19, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq \|f\|_u^{u/v} \|f\|_{B_{\infty,1}^0}^{1-u/v} \\ &\leq c_1 \|f\|_u^{u/v} \|f\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v} \\ &\leq c \|f\|_u^{u/v} \left( \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}} \right)^{1-u/v}, \quad \forall f \in A_{p,q}^{n/p}. \end{aligned}$$

Alors en remplaçant  $f$  par  $f(\lambda(\cdot))$ , pour tout  $\lambda > 0$ , on trouve

$$\lambda^{-n/v} \|f\|_v \leq c \lambda^{(-n/u)(u/v)} \|f\|_u^{u/v} \left( \lambda^{-n/p} \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}} \right)^{1-u/v}.$$

Ce qui implique

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_u^{u/v} \left( \lambda^{-n/p} \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}} \right)^{1-u/v},$$

donc il reste que, on prend  $\lambda \rightarrow \infty$  dans la dernière inégalité, on obtient le résultat.  $\square$

**Corollaire 3.11.** Soit  $0 < p, q \leq \infty$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|f\|_v \leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v},$$

pour tout  $u \in ]0, \infty[$ , tout  $v \in [u, \infty[$  et toute  $f \in L_u \cap A_{p,q}^{n/p}$ .

**Preuve.** Étape 1. Dans le cas  $B$ . D'après la Proposition 3.6 (avec  $m = 0$  et  $v = p$ ), nous avons

$$\|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} \|f\|_{B_{v,q}^{n/v}}, \quad \forall v \in ]0, \infty[.$$

En appliquant la Proposition 1.19, pour toute  $f \in B_{v,q}^{n/v}$ , ce qui donne

$$\|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} \left( \|f\|_v + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{v,q}^{n/v}} \right).$$

Maintenant, en utilisant le Corollaire 3.10 pour tout  $u \leq v$ , on trouve

$$\|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} \left( c_2 \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v} + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{v,q}^{n/v}} \right).$$

En remplaçant  $f$  par  $f(\lambda(\cdot))$  dans la dernière inégalité, nous avons

$$\lambda^{-n/v} \|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} \left( c_2 \lambda^{-n/v} \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v} + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{v,q}^{n/v}} \right).$$

Ce qui donne

$$\|f\|_v \leq c_1 v^{1-1/q} 2^{n/v} \left( c_2 \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v} + \lambda^{n/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{v,q}^{n/v}} \right).$$

Alors il reste que, on prend  $\lambda \rightarrow 0$  on trouve l'estimation souhaitée.

Étape 2. Dans le cas  $F$ . Par l'Étape 1 (avec  $q = \infty$ ) et le Corollaire 3.10, on trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \|f\|_v^{1-1/q} \|f\|_v^{1/q} \\ &\leq \left( c_1 v 2^{n/v} \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}}^{1-u/v} \right)^{1-1/q} \left( c_2 \|f\|_u^{u/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

alors par l'inclusion  $\dot{F}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{F}_{p,\infty}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{n/p}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 3.12.** Les Corollaires 3.10 et 3.11 sont des prolongements du Théorème donnée dans [45, p. 146] dans les cas  $p = \infty$ ,  $0 < u < 1$  et  $0 < q \leq 1$ , respectivement. Aussi, dans le cas  $F$ .

### 3.3 Le cas des espaces homogènes réalisés $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$

On s'intéresse maintenant aux espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes réalisés  $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$ . Nous rappelons aussi que ces types d'estimations sur les espaces homogènes de Besov et de Triebel-Lizorkin, ont été étudiés dans plusieurs travaux, par exemple [26], [27], [36], [47], [48].

#### 3.3.1 Caractérisations dans les espaces $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$

Nous commençons ce sous-section par le théorème suivant :

**Théorème 3.13.** Soient  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ . Soient  $s \geq 0$  tels que

–  $s - n/p \in \mathbb{N}_0$  ou pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $s := m + n/p$ ,

–  $(n/p - n)_+ < s < n/p$ .

Alors l'inclusion  $\dot{\tilde{A}}_{p,q}^s \hookrightarrow L_1^{loc}$  est satisfaite.

**Preuve.** Soit  $f \in \dot{\tilde{A}}_{p,q}^s$ , nous allons faire la démonstration en trois étapes.

Étape 1. *Preuve dans le cas  $s = n/p$ .* Pour démontrer ce cas on sépare les deux cas  $B$  et  $F$ .

**1.1.** *Dans le cas  $B$ .* Soit  $f \in \dot{B}_{p,q}^{n/p}$ . Nous séparons les cas en ce qui concerne  $q$ , nous supposons donc d'abord que  $q > 1$ . En utilisant le Lemme 1.6 et la Proposition 1.29/(1.4.5), et en posant  $f := f_1 + f_2$  où

$$f_1 := \sum_{j \geq 1} Q_j f \quad \text{et} \quad f_2 := \sum_{j \leq 0} (Q_j f - Q_j f(0)),$$

(car  $\nu = 1$ ); alors on a

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &\leq |x| \sum_{j \leq 0} \|\nabla Q_j f\|_\infty \leq c_1 |x| \sum_{j \leq 0} 2^j (2^{jn/p} \|Q_j f\|_p) \\ &\leq c_2 |x| \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}}, \end{aligned}$$

et  $f_2 \in L_1^{loc}$ . Cependant, pour  $f_1$  aussi on suppose que  $p \geq 1$  (rappelons que  $L_p \hookrightarrow L_1^{loc}$ ), on obtient donc

$$\|f_1\|_p \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}} \sum_{j \geq 1} 2^{-jn/p} \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}};$$

si  $0 < p < 1$ , par le Lemme 1.6 on a

$$\begin{aligned} \|f_1\|_1 &\leq c_1 \sum_{j \geq 1} 2^{j(n/p-n)} \|Q_j f\|_p \leq c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}} \sum_{j \geq 1} 2^{-jn} \\ &\leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{n/p}}. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que  $0 < q \leq 1$ , dans ce cas on a donc  $\nu = 0$ , et aussi par la Proposition 1.29/(1.4.3) et l'inclusion  $\dot{B}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0$ , on obtient  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$  et

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|Q_j f\|_\infty = \|f\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}, \quad (3.3.10)$$

ce qui donne  $f \in L_1^{loc}$ .

**1.2.** *Dans le cas  $F$ .* Si  $p > 1$ , alors en raisonnant comme dans la preuve précédente (le cas  $B$  avec  $q > 1$ ) et par l'inclusion  $\dot{F}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{n/p}$ , on trouve le résultat.

Cependant, si  $0 < p \leq 1$ , alors on va appliquer successivement les inclusions  $\dot{F}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{p,p}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0$  (ou  $\dot{F}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,p}^0 \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0$ ) dans l'estimation (3.3.10), on trouve le résultat facilement.

Étape 2. *Preuve dans le cas  $s - n/p := m \in \mathbb{N}$  ou  $s := m + n/p$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}_0$ .* Nous commençons par  $q \leq 1$  dans le cas  $B$  (avec  $p \leq 1$  dans le cas  $F$ ) (ici  $\nu := m$ , voir le Chapitre 1 pour la définition de  $\nu$ ). Soit  $f \in \dot{A}_{p,q}^s$ . Rappelons que par la formule de Taylor avec le reste integral à l'ordre  $N$ , appliquée à la fonction  $f$  nous avons

$$f(x-y) = \sum_{|\alpha| < N+1} \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) + (N+1) \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(\alpha)}(x-ty) dt.$$

D'après la Proposition 1.29 formule (1.4.4) on a

$$f(x) = \sigma(f) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|\alpha| < \nu} (Q_j f)^{(\alpha)}(0) x^\alpha / \alpha!,$$

où  $\nu := m$  et par la formule de Taylor, on a

$$Q_j f(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (Q_j f)^{(\alpha)}(0) + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (Q_j f)^{(\alpha)}(tx) dt,$$

avec  $m = N + 1$  et  $x = -y$ . Alors nous écrivons la fonction  $f$  comme suit

$$f(x) = m \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|\alpha|=m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (Q_j f)^{(\alpha)}(tx) dt,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq c_1 |x|^m \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|\alpha|=m} \|(Q_j f)^{(\alpha)}\|_\infty \leq c_2 |x|^m \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|Q_j f\|_p \\ &\leq c_3 |x|^m \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,1}^s} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et par l'inclusion  $\dot{A}_{p,q}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p,1}^s$  (avec  $\cdot$ ), on déduit  $f \in L_1^{loc}$ .

Maintenant, supposons que  $q > 1$  dans le cas  $B$  (avec  $p > 1$  dans le cas  $F$ ) (ici  $\nu := \max([s - n/p] + 1, 0) = \max([m] + 1, 0) = m + 1, \forall m \in \mathbb{N}_0$ ). Comme dans le cas précédent nous écrivons, la formule (1.4.5) dans la Proposition 1.29, on a aussi

$$f(x) = \sum_{j \geq 1} Q_j f(x) + (m+1) \sum_{j \leq 0} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m (Q_j f)^{(\alpha)}(tx) dt.$$

On pose

$$f_1 := \sum_{j \geq 1} Q_j f \quad \text{et} \quad f_2 := f - f_1.$$

Pour  $f_1$ , il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec  $1/q + 1/q' = 1$ , alors on obtient

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &\leq c_1 \sum_{j \geq 1} 2^{-js} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \leq c_1 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s} \left( \sum_{j \geq 1} 2^{-jsq'} \right)^{1/q'} \\ &\leq c_2 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $f_1 \in L_\infty$  et on a  $L_\infty \hookrightarrow L_1^{loc}$ .

Pour  $f_2$ , on trouve aussi

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &\leq c_1 |x|^{m+1} \sum_{j \leq 0} \sum_{|\alpha|=m+1} \|(Q_j f)^{(\alpha)}\|_\infty \leq c_2 |x|^{m+1} \sum_{j \leq 0} 2^{j(s+1)} \|Q_j f\|_p \\ &\leq c_2 |x|^{m+1} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} \sum_{j \leq 0} 2^j \\ &\leq c_3 |x|^{m+1} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors on a  $f_2 \in L_1^{loc}$ .

*Étape 3. Preuve dans le cas  $(n/p - n)_+ < s < n/p$ .*

*Méthode 1.* La fonction  $f$  coïncide avec  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$ , voir la Proposition 1.29/(1.4.3). Nous écrivons  $f = f_1 + f_2$  où

$$f_1 := \sum_{j \geq 1} Q_j f \quad \text{et} \quad f_2 := \sum_{j \leq 0} Q_j f.$$

D'après le Lemme 1.6, on trouve

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &\leq c_1 \sum_{j \leq 0} 2^{j(n/p-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \\ &\leq c_1 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} \sum_{j \leq 0} 2^{j(n/p-s)} \leq c_2 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

et  $f_2 \in L_\infty$  (rappelons que  $\dot{A}_{p,q}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^s$  et  $L_\infty \hookrightarrow L_1^{loc}$ ). Pour  $f_1$ , considérons tout d'abord le cas  $p \geq 1$  (avec  $L_p \hookrightarrow L_1^{loc}$ ), et on obtient

$$\|f_1\|_p \leq c_1 \sum_{j \geq 1} 2^{-js} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \leq c_2 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s};$$

pour le cas  $0 < p < 1$ , par le Lemme 1.6 on trouve

$$\begin{aligned} \|f_1\|_1 &\leq c_1 \sum_{j \geq 1} 2^{j(n/p-n-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \\ &\leq c_1 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} \sum_{j \geq 1} 2^{j(n/p-n-s)} \leq c_2 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

ce qui donne  $f \in L_1^{loc}$ .

*Méthode 2.* Dans le cas  $B$ . Nous divisons  $f$  en  $f_1 + f_2$ , où  $f_1 := \sum_{j \geq 1} Q_j f$  et  $f_2 := \sum_{j \leq 0} Q_j f$ . Par la Proposition 1.15 et l'inclusion  $B_{p,q}^s \hookrightarrow L_p$  ( $s > 0$ ), on a

$$\|f_1\|_p \leq c_1 \|f_1\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s}.$$

On conclut par l'inclusion  $L_p \hookrightarrow L_1^{loc}$  dans le cas  $p \geq 1$ .

Si  $p < 1$ , par le Lemme 1.6 on a

$$\|Q_j f\|_1 \leq c 2^{j(n/p-n-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \leq c 2^{j(n/p-n-s)} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s},$$

pour tout  $j \geq 0$ . Alors

$$\|f_1\|_1 \leq c_1 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \sum_{j \geq 1} 2^{j(n/p-n-s)} \leq c_2 \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s},$$

et nous concluons par l'inclusion  $L_1 \hookrightarrow L_1^{loc}$ . D'autre part, par le Lemme 1.6 nous donne

$$\|Q_j f\|_\infty \leq c 2^{j(n/p-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p) \leq c 2^{j(n/p-s)} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui implique  $\|f_2\|_\infty \leq c \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ , et par l'inclusion  $L_\infty \hookrightarrow L_1^{loc}$ , d'où le résultat.

Pour le cas  $F$ , d'après le cas  $B$  avec  $q = \infty$ , il suffit d'appliquer l'inclusion  $\dot{F}_{p,q}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^s$ .

Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

Nous allons maintenant par un prolongement du Théorème 3.4 aux espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes réalisés.

**Corollaire 3.14.** *Soit  $0 < p, q < \infty$ . Soit  $m \geq 0$ , qui satisfait les deux conditions suivante :*

(i)  $m \in \mathbb{N}_0$ .

(ii)  $m > (n/p - n)_+$  et  $m < n/p$  ou  $m - n/p \in \mathbb{N}_0$ .

*On pose  $r := \min(1, p)$  dans le cas  $B$  et  $r := 1$  dans le cas  $F$ . Alors il existe une constante  $c = c(n, p, q) > 0$  telle que l'inégalité*

$$\|f\|_v \leq c(m + n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,r}^m}^{p/v+mp/n} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^{m+n/p}}^{1-p/v-mp/n} \quad (3.3.11)$$

*est satisfaite, pour tout  $v \in [p, \infty[$  et toute  $f \in \dot{A}_{p,r}^m \cap \dot{A}_{p,q}^{m+n/p}$ .*

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le Théorème 3.4 avec  $f_j := Q_j f$  et le Théorème 3.13. Voir aussi [15, thm. 3].  $\square$

**Théorème 3.15.** *Soient  $0 < q \leq 1$  et  $0 < p \leq \infty$  (avec  $p < \infty$  dans le cas  $F$ ). Alors il existe une constante  $c > 0$ , telle que l'inégalité*

$$\|f\|_v \leq c \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{F}_{p,q}^0}^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v}$$

*est satisfaite, pour tout  $u \in ]0, \infty[$  et  $v \in [u, \infty]$ , toute  $f \in \dot{F}_{p,q}^0 \cap \dot{A}_{p,q}^{n/p}$ .*

**Preuve.** Puisque on a l'inclusion  $\dot{A}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0$  et  $\dot{F}_{p,q}^0 \hookrightarrow \dot{F}_{p,1}^0$ , il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\|f\|_v \leq \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{F}_{p,1}^0}^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}^{1-u/v} \quad (\forall f \in \dot{F}_{p,1}^0 \cap \dot{B}_{\infty,1}^0).$$

Maintenant, soient  $f \in \dot{F}_{p,1}^0 \cap \dot{B}_{\infty,1}^0$ . Puisque  $\nu = 0$ , alors  $f \in \tilde{C}_0$ . Par conséquent, par le Lemme 1.22, on a

$$\sigma(f) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = f,$$

car  $\sigma(f) - f \in \tilde{C}_0 \cap \mathcal{P}_\infty = \{0\}$ . Alors on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \left\| \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f \right|^{u/v} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f \right|^{1-u/v} \right\|_v \\ &\leq \left\| \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f \right|^{u/v} \right\|_v \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|Q_j f\|_\infty \right)^{1-u/v} \\ &\leq \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{F}_{p,1}^0}^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}^{1-u/v}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat souhaitée.  $\square$

Encore, nous allons maintenant à par une prolongement du Théorème 3.5 aux espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel homogènes réalisés.

**Proposition 3.16.** *Soit  $0 < p, q \leq \infty$  avec  $q \leq 1$  dans le cas B et  $p \leq 1$  dans le cas F. Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_u^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p,q}^{n/p}}^{1-u/v}$$

est satisfaite, pour tout  $u \in ]0, \infty[$ , tout  $v \in [u, \infty]$  et toute  $f \in L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$ .

**Preuve.** Voir [15]. □

**Théorème 3.17.** *Soit  $0 < p, q < \infty$  avec  $q \leq 1$  dans le cas B et  $p \leq 1$  dans le cas F. Soit  $0 < \eta < 1$ .*

(i) *Alors il existe une constante  $c > 0$ , telle que*

$$\|f\|_p^{1-(p/\omega)\eta} \leq c \omega^{(1-1/q)\eta} 2^{(n/\omega)\eta} \|f\|_u^{1-\eta} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{(1-p/\omega)\eta},$$

pour toute  $f \in L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$ , tout  $0 < u < p < \omega < \infty$  et  $p \leq p_1$ , avec  $\eta(1/u - 1/\omega) = 1/u - 1/p$ .

(ii) *Soient  $0 < \theta < 1$  et  $\omega > \max(v, p - u)$ , alors il existe une constante  $c > 0$ , telle que*

$$\|f\|_v \leq c \omega^{(1-1/q)\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}} 2^{(n/\omega)\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}} \|f\|_u^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-u/v},$$

pour toute  $f \in L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$ , où  $v = \omega^{\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}}$  et

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &:= \theta + \frac{(1-\eta)(p/\omega)}{1-(p/\omega)\eta} (1-\theta), \\ 1 - \frac{u}{v} &= (1-p/\omega)(1-\theta) + \frac{(1-p/\omega)(p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta} (1-\theta). \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin de rappeler la proposition suivante :

**Proposition 3.18.** *Soit  $0 < p, q < \infty$  avec  $q \leq 1$  dans le cas B et  $p \leq 1$  dans le cas F. Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité*

$$\|f\|_v \leq c v^{1-1/q} 2^{n/v} \|f\|_u^{u/v} \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-u/v}$$

est satisfaite, pour tout  $u \in ]0, \infty[$ , tout  $v \in ]0, \infty[$  telle que  $v \geq \max(p, u)$ , tout  $p_1 \in [p, \infty[$  et toute  $f \in L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$ .

**Preuve.** Voir [15]. □

**Preuve du Théorème 3.17.** Étape 1. *Preuve de (i).* En utilisant la Proposition 3.18, nous avons

$$\|f\|_\omega \leq c\omega^{1-1/q}2^{n/\omega}\|f\|_p^{p/\omega}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-p/\omega}.$$

En appliquant l'inégalité élémentaire suivante

$$\|f\|_p = \|f^{1-\eta}f^\eta\|_p \leq \|f\|_u^{1-\eta}\|f\|_\omega^\eta, \quad \text{où } \frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{u} + \frac{\eta}{\omega},$$

où  $p < \omega$  et  $u < p$ , il vient

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \|f\|_u^{1-\eta} \left( c\omega^{1-1/q}2^{n/\omega}\|f\|_p^{p/\omega}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-p/\omega} \right)^\eta \\ &\leq c_1\omega^{(1-1/q)\eta}2^{(n/\omega)\eta}\|f\|_u^{1-\eta}\|f\|_p^{(p/\omega)\eta}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{(1-p/\omega)\eta}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|f\|_p^{1-(p/\omega)\eta} \leq c\omega^{(1-1/q)\eta}2^{(n/\omega)\eta}\|f\|_u^{1-\eta}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{(1-p/\omega)\eta}.$$

Étape 2. *Preuve de (ii).* Aussi, par la Proposition 3.18 et l'inégalité élémentaire suivante

$$\|f\|_v \leq \|f\|_\omega^{1-\theta}\|f\|_u^\theta, \quad \text{où } \frac{1}{v} = \frac{1-\theta}{\omega} + \frac{\theta}{u}.$$

où  $u < p < \omega$  et  $v < \omega$ . On trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_v &\leq \|f\|_u^\theta \left( c\omega^{1-1/q}2^{n/\omega}\|f\|_p^{p/\omega}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-p/\omega} \right)^{1-\theta} \\ &\leq c_1\omega^{(1-1/q)(1-\theta)}2^{(n/\omega)(1-\theta)}\|f\|_u^\theta\|f\|_p^{(p/\omega)(1-\theta)}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{(1-p/\omega)(1-\theta)}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Maintenant, par l'Étape 1 alors le second membre de (3.3.12) est majoré par

$$\begin{aligned} &c_1\omega^{(1-\frac{1}{q})(1-\theta)}2^{\frac{n}{\omega}(1-\theta)}\|f\|_u^\theta \left( c_2\omega^{\frac{(1-1/q)\eta}{1-(p/\omega)\eta}}2^{\frac{(n/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta}}\|f\|_u^{\frac{1-\eta}{1-(p/\omega)\eta}}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{\frac{(1-p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta}} \right)^{\frac{p}{\omega}(1-\theta)} \\ &\quad \times \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{(1-\frac{p}{\omega})(1-\theta)} \\ &\leq c_3\omega^{(1-\frac{1}{q})(1-\theta)}\left(1+\frac{(p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta}\right)2^{\frac{n}{\omega}(1-\theta)}\left(1+\frac{(p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta}\right)\|f\|_u^{\theta+(1-\theta)\left(\frac{1-\eta}{1-(p/\omega)\eta}\frac{p}{\omega}\right)} \\ &\quad \times \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{\left(1-\frac{p}{\omega}+\frac{(1-p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta}\frac{p}{\omega}\right)(1-\theta)} \\ &\leq c_3\omega^{(1-\frac{1}{q})\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}}2^{\frac{n}{\omega}\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}}\|f\|_u^{u/v}\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p_1,q}^{n/p_1}}^{1-u/v}, \end{aligned}$$

où

$$\theta + \frac{(1-\eta)p/\omega}{1-(p/\omega)\eta}(1-\theta) := \frac{u}{v},$$

et nous avons

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{p}{\omega} + \frac{(1-p/\omega)\eta p}{1-(p/\omega)\eta\omega}\right)(1-\theta) &= \frac{p}{\omega}(1-\theta)\left(\frac{(1-p/\omega)\eta}{1-(p/\omega)\eta} - 1\right) + (1-\theta) \\
 &= \frac{p}{\omega}(1-\theta)\frac{\eta-1}{1-(p/\omega)\eta} + (1-\theta) \\
 &= -\theta - \frac{p}{\omega}(1-\theta)\frac{1-\eta}{1-(p/\omega)\eta} + 1 \\
 &= -\theta - \left(\frac{u}{v} - \theta\right) + 1 \\
 &= 1 - \frac{u}{v},
 \end{aligned}$$

et pour  $\omega^{(1-1/q)\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}} = v^{1-1/q}$ , on obtient  $v = \omega^{\frac{1-\theta}{1-(p/\omega)\eta}}$ . Ce qui est précisément la conclusion souhaitée.  $\square$

Une conséquence immédiate de ces résultats concerne les inclusions dans l'espace  $L_p$ .

**Corollaire 3.19.** (i) Soient  $p, q, r$  et  $v$  comme dans le Corollaire 3.14 et le Théorème 3.15. Alors on a  $\tilde{A}_{p,r}^m \cap \tilde{A}_{p,q}^{m+n/p} \hookrightarrow L_v$  et  $\tilde{F}_{p,q}^0 \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow L_v$ , respectivement.

(ii) Soient  $p, q, u$  et  $v$  comme dans la Proposition 3.18. Alors on a  $L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p} \hookrightarrow L_v$ .

Pour la preuve de ce corollaire on utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.20.** Soient  $x, y \in \mathbb{R}^+$  et  $0 < \alpha < 1$ . Alors

$$x^\alpha \cdot y^{1-\alpha} \leq c(x+y).$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que la fonction  $x \mapsto \log x$  est concave sur  $]0, \infty[$ .  $\square$

**Preuve du Corollaire 3.19.** D'après le Corollaire 3.14, nous avons  $\tilde{A}_{p,r}^m \cap \tilde{A}_{p,q}^{m+n/p} \subset L_v$  et par le Lemme 3.20 on obtient alors la continuité; en effet, on a

$$\|f\|_v \leq c_v \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\tilde{A}_{p,r}^m}^\alpha \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\tilde{A}_{p,q}^{m+n/p}}^{1-\alpha} \leq c(v) \left( \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\tilde{A}_{p,r}^m} + \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\tilde{A}_{p,q}^{m+n/p}} \right),$$

où  $c(v) := c(m+n/v)^{1/q-1} 2^{m+n/v}$  et  $\alpha := p/v + mp/n$ . De la même façon pour (ii), ce qui est précisément le corollaire souhaité.  $\square$

**Remarque 3.21.** Comme mentionné avant, les résultats des estimations dans cette section est faux pour remplacer les espaces  $\tilde{A}_{p,r}^m \cap \tilde{A}_{p,q}^{m+n/p}$  par  $\dot{A}_{p,r}^m \cap \dot{A}_{p,q}^{m+n/p}$ ,  $\tilde{F}_{p,q}^0 \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$  par  $\dot{F}_{p,q}^0 \cap \dot{A}_{p,q}^{n/p}$  et  $L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$  par  $L_u \cap \dot{A}_{p,q}^{n/p}$ , car les espaces  $\dot{A}_{p,q}^s$  sont définie par  $f \in \mathcal{S}'_\infty$ . Contrairement aux espaces homogènes, les résultats dans cette section couvrent le

cas des espaces non homogènes ; autrement dit, nous pouvons prendre  $A_{p,r}^m \cap A_{p,q}^{m+n/p}$ ,  $F_{p,q}^0 \cap A_{p,q}^{n/p}$  et  $L_u \cap A_{p,q}^{n/p}$  au lieu de  $\tilde{A}_{p,r}^m \cap \tilde{A}_{p,q}^{m+n/p}$ ,  $\tilde{F}_{p,q}^0 \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$  et  $L_u \cap \tilde{A}_{p,q}^{n/p}$  (comme dans la Section 3.2), respectivement.

**Remarque 3.22.** Soit  $1 < p, q < \infty$  dans le cas  $B$  et  $1 \leq q \leq p < \infty$  ( $p \neq 1$ ) dans le cas  $F$ . Pour couvrir les deux cas  $p \leq q$  et  $p \geq q$ , on peut écrire le Corollaire 3.14 et la Proposition 3.18 comme suit

$$\|f\|_v \leq c v^{1-1/\min(p,q)} 2^{n/v} AB,$$

où  $A$  et  $B$  est les termes comme dans le Corollaire 3.14 (avec  $m = 0$ ) et la Proposition 3.18 avec les mêmes conditions, car :

- si  $p \leq q$ , alors  $1 - 1/p \leq 1 - 1/q$ , donc ce qui donne  $v^{1-1/p} \leq v^{1-1/q}$ .
- si  $p \geq q$ , alors  $1 - 1/p \geq 1 - 1/q$ , donc ce qui donne  $v^{1-1/p} \geq v^{1-1/q}$ .

### 3.3.2 Optimalité des estimations

A l'aide de la proposition 2 dans [7] et du théorème 2.7.1, page 82, du [18] ou [44] la constante  $(m+n/v)^{1/q-1}$  dans (3.3.11) est optimale quand  $v \rightarrow +\infty$  pour  $1 < p, q < \infty$  dans le cas  $B$  et  $1 \leq q \leq p < \infty$  ( $p \neq 1$ ) dans le cas  $F$  (voir [15]). Il serait intéressant de démontrer la même chose pour les constantes dans (3.1.4) et (3.1.6).

### 3.3.3 Extensions dans $\tilde{A}_{p,q}^s$

On s'intéresse au prolongement de quelques estimations précédentes au espaces réalisés.

**Proposition 3.23.** Soient  $0 < p < v < \infty$  et  $\alpha > 0$ . On pose  $\beta := \alpha(v/p - 1)$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\|f\|_v \leq c \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{F}_{p,\infty}^\beta}^{p/v} \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v} \quad (3.3.13)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in F_{p,\infty}^\beta$  telle que  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}$ .

**Preuve.** Pour la preuve de ce résultat nous allons la diviser en deux étapes.

Étape 1. L'idée de la preuve de cette étape se trouve dans [42, pp. 129-130].

Si  $\| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} = 0$ , alors l'inégalité (3.3.13) est triviale puisque les hypothèses impliquent que  $f = 0$ . Maintenant, on suppose que  $\| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} = 1$ , et écrivons

$$\|f\|_v^v = v \int_0^\infty t^{v-1} \left| \left\{ x : |f(x)| > t \right\} \right| dt = v \int_0^\infty t^{v-1} \left| \left\{ x : \left| \sum_{j \geq 0} \tilde{Q}_j f(x) \right| > t \right\} \right| dt$$

$$= v \int_0^{2c} t^{v-1} |\{x : \dots\}| dt + v \int_{2c}^{\infty} t^{v-1} |\{x : \dots\}| dt,$$

où  $|\{x : \dots\}|$  est la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $\{x : \dots\}$ . Nous avons

$$\left| \left\{ x : \sum_{j \geq 0} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| = \left| \left\{ x : \sum_{j \leq k} |\tilde{Q}_j f(x)| > t/2 \right\} \cup \left\{ x : \sum_{j \geq k+1} |\tilde{Q}_j f(x)| > t/2 \right\} \right|,$$

et puisque pour tout  $\alpha > 0$  on a

$$\sum_{j \leq k} |\tilde{Q}_j f(x)| \leq \sum_{j \leq k} 2^{j\alpha} 2^{-j\alpha} \|\tilde{Q}_j f\|_{\infty} \leq c \|f\|_{B_{\infty, \infty}^{-\alpha}} 2^{k\alpha} = ca 2^{k\alpha},$$

où  $a := \|f\|_{B_{\infty, \infty}^{-\alpha}}$ , la constante  $c$  indépendante de  $k$  et  $f$ . On choisit  $k$  le plus grand nombre naturel tel que

$$ca 2^{k\alpha} \leq t/2. \quad (3.3.14)$$

Alors nous avons  $\{x : \sum_{j \leq k} \dots > t/2\} = \emptyset$ . Donc on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x : \sum_{j \geq 0} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| &= \left| \left\{ x : \sum_{j \geq k+1} 2^{j\beta} 2^{-j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > t/2 \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > c(t/2) 2^{k\beta} \right\} \right| \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Pour  $\theta\beta = \alpha(1 - \theta)$ , en utilisant l'inégalité (3.3.14), on obtient

$$c(t/2) 2^{k\beta} \geq ac_1 2^{k\beta} 2^{k\alpha} = ac_1 (2^{k\alpha})^{1/\theta} \geq c' at^{1/\theta},$$

où la constante  $c'$  indépendante de  $t$ ,  $k$  et  $f$ . Donc le second membre de (3.3.15) sera majoré par

$$\left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > c' at^{1/\theta} \right\} \right|.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{2c}^{\infty} t^{v-1} \left| \left\{ x : \sum_{j \geq 0} 2^{j\beta} 2^{-j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| dt &\leq \int_{2c}^{\infty} t^{v-1} \left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > c' at^{1/\theta} \right\} \right| dt \\ &\leq c_1 \int_{ac'(2c)^{1/\theta}}^{\infty} t^{p-1} \left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > t' \right\} \right| dt' \\ &\leq c_1 \|f\|_{F_{p, \infty}^{\beta}}^p, \quad (t' = c' at^{1/\theta}), \end{aligned}$$

avec posons  $\theta := p/v < 1$ . De même pour l'estimation de  $\int_0^{2c} \dots dt$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{2c} t^{v-1} \left| \left\{ x : \sum_{j \geq 0} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| dt &\leq \int_0^{2c} t^{v-1} \left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| dt \\ &\leq (2c)^{v-p} \int_0^{2c} t^{p-1} \left| \left\{ x : \sup_{j \geq 0} 2^{j\beta} |\tilde{Q}_j f(x)| > t \right\} \right| dt \\ &= (2c)^{v-p} \|f\|_{F_{p, \infty}^{\beta}}^p, \quad (t^v = t^{v-p} t^p \leq (2c)^{v-p} t^p). \end{aligned}$$

Finalemant, on obtient

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_{F_{p,\infty}^\beta}^{p/v}.$$

*Étape 2.* Supposons que  $\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} \neq 0$  et on change  $f$  par  $(\|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{-1})f$  dans la dernière inégalité, alors nous déduisons que l'estimation suivante

$$\|f\|_v \leq c \|f\|_{F_{p,\infty}^\beta}^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v} \quad (3.3.16)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in F_{p,\infty}^\beta$  telle que  $[f]\mathcal{P} \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}$ . En appliquant la Proposition 1.19 dans (3.3.16), on trouve

$$\|f\|_v \leq c \left( \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,\infty}^\beta} \right)^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v}, \quad \forall f \in F_{p,\infty}^\beta,$$

et on replacer  $f$  par  $f(\lambda(\cdot))$ , pour tout  $\lambda > 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^{-n/v} \|f\|_v &\leq c \lambda^{-\alpha(1-p/v)} \left( \lambda^{-n/p} \|f\|_p + \lambda^{\beta-n/p} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,\infty}^\beta} \right)^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v} \\ &\leq c \lambda^{-\alpha(1-p/v)} \lambda^{(\beta-n/p)p/v} \left( \lambda^{-\beta} \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,\infty}^\beta} \right)^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v}, \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que  $(\beta - n/p)p/v - \alpha(1 - p/v) = -n/v$ , nous avons alors

$$\|f\|_v \leq c \left( \lambda^{-\beta} \|f\|_p + \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,\infty}^\beta} \right)^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v},$$

en prenant  $\lambda \rightarrow \infty$  on trouve (3.3.13), ce qui est précisément l'estimation souhaitée.  $\square$

**Théorème 3.24.** Soient  $0 < p < v < \infty$  et  $0 < q < \infty$ . Soit  $\alpha$  un nombre réelle telle que  $\alpha > 0$  et  $\beta := \alpha(v/p - 1)$  qui satisfait

$$\beta > (n/p - n)_+ \quad \text{et} \quad \beta < n/p \quad \text{ou} \quad \beta - n/p \in \mathbb{N}_0.$$

Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\|f\|_v \leq c \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{F}_{p,q}^\beta}^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v} \quad (3.3.17)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha} \cap \dot{F}_{p,q}^\beta$ .

**Preuve.** La démonstration de ce résultat se trouve dans l'article [15].  $\square$

**Corollaire 3.25.** Soient  $p, q, v, \alpha$  et  $\beta$  être donné comme dans le Théorème 3.24. Soient  $q \leq p$  dans le cas B. Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité

$$\|f\|_v \leq c \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{A}_{p,q}^\beta}^{p/v} \|[f]\mathcal{P}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-p/v} \quad (3.3.18)$$

est satisfaite, pour toute  $f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha} \cap \dot{A}_{p,q}^\beta$ .

**Remarque 3.26.** Le Corollaire 3.25 couvre le résultat donné dans [1, thm. 2.42, p. 82].

**Remarque 3.27.** Comme dans le Corollaire 3.19, à partir des inégalités (3.3.11), (3.3.17) et (3.3.18) nous avons l'intersection de certains espaces réalisés sont inclus dans les espaces  $L_v$ .

# Chapitre 4

## Caractérisations par des fonctions données

Nous allons caractériser l'espace  $\dot{A}_{p,q}^s$  par des fonctions données non triviales (des fonctions homogènes,  $C^\infty$ , ... etc). Pour ceci, on a besoin des semi-normes de  $\dot{A}_{p,q}^s$  par les différences.

### 4.1 Espaces de Besov homogènes par les différences

Dans cette section, on introduit l'espace de Besov homogène défini par les différences.

**Définition 4.1.** Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $1 \leq u \leq \infty$  et  $s > 0$ . Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $h \in \mathbb{R}^n$  on pose

$$M_{p,q}^{s,m}(f) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q},$$

$$K_{p,q}^{s,m}(f) := \left( \int_0^\infty t^{-sq} \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^m f\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

$$L_{p,q}^{s,m}(f) := \sum_{k=1}^n \left( \int_0^\infty t^{-sq} \|\Delta_{t e_k}^m f\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

où  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On pose aussi

$$J_{p,q}^{s,m,u}(f) := \left( \int_0^\infty t^{-sq} \left\| \left( t^{-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^m f(\cdot)|^u dh \right)^{1/u} \right\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

**Remarque 4.2.** Les fonctionnelles précédentes (Définition 4.1) ne peuvent pas définir des quasi-normes équivalentes dans les espaces  $\dot{B}_{p,q}^s$ , car

$$M_{p,q}^{s,m}(f) = K_{p,q}^{s,m}(f) = L_{p,q}^{s,m}(f) = J_{p,q}^{s,m,u}(f) = \infty,$$

pour tout polynôme  $f$  de degré  $m$  (rappelons que  $\Delta_h^m x^\alpha$  est une constante non nulle pour  $|\alpha| = m$ ). Par exemple  $f(x) := x_1^m$ , alors  $\Delta_h^m f(x) = m!h_1^m$  ( $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$ ), ce qui implique

$$\|\Delta_h^m f\|_p = \infty \quad \text{et} \quad \left\| \left( t^{-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^m f(\cdot)|^u dh \right)^{1/u} \right\|_p = \infty; \quad \text{où} \quad \|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0.$$

**Proposition 4.3.** Les expressions  $M_{p,q}^{s,m}$ ,  $K_{p,q}^{s,m}$  et  $J_{p,q}^{s,m,u}$  définissent des quasi-seminormes équivalentes dans  $\tilde{B}_{p,q}^s$ .

**Preuve.** Voir [34, thm. 1.1]. □

**Remarque 4.4.** Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $1 \leq u \leq \infty$ ,  $s > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que pour chaque distribution tempérée régulière  $f$ , telle que  $J_{p,q}^{s,m,u}(f) < \infty$ , qui satisfait  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,q}^s$ , et

$$\|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c J_{p,q}^{s,m,u}(f),$$

pour la preuve voir [34, prop. 3.1].

**Proposition 4.5.** Soit  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $(n/p - n)_+ < s < m$ . Alors  $L_{p,q}^{s,m}$  définit une quasi-seminorme équivalente dans  $\tilde{B}_{p,q}^s$ .

**Preuve.** Ce résultat est une conclusion des deux estimations

$$L_{p,q}^{s,m}(f) \leq c_1 K_{p,q}^{s,m}(f) \quad \text{et} \quad M_{p,q}^{s, nm}(f) \leq c_2 L_{p,q}^{s,m}(f),$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  des constantes indépendantes de  $f$ , où la première inégalité est évidente, cependant la seconde est prouvée par Triebel dans [42, (9) p. 115]; rappelons que  $M_{p,q}^{s, nm}$  est une quasi-seminorme dans  $\tilde{B}_{p,q}^s$ , voir la Proposition 4.3. □

**Remarque 4.6.** Nous notons que ces résultats peuvent être comparés aux : Bergh et Löfström [2, thm. 6.3.1, p. 147], Peetre [38, chap. 8, p. 160, thm. 18, p. 254] et Triebel [42, thm. 5.2.3/2, rem. 5.2.3/2, p. 242].

Dans la suite nous allons utiliser le résultat suivant, prouvé dans le livre de L. Hörmander [23, thm. 7.1.18, p. 168] :

**Théorème 4.7.** Si  $f \in \mathcal{D}'$  et sa restriction à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est homogène de degré  $\alpha$ , alors  $f \in \mathcal{S}'$ . Si en plus  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  alors  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

## 4.2 Fonctions données non triviales dans les espaces

$$\dot{A}_{p,q}^s$$

Dans cette section, nous étudierons quelques exemples (des fonctions puissances) données non triviales dans les espaces de Besov et de Lizoukin-Triebel homogènes  $\dot{A}_{p,q}^s$  et homogènes réalisés  $\check{A}_{p,q}^s$ , c'est-à-dire, on étudie les fonctions du type

$$f_\tau(x) := |x|^\tau \omega(x'), \quad x' := x|x|^{-1},$$

où  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.2.1 Résultats principaux

**Théorème 4.8.** *Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $S^{n-1}$  telle que  $\omega$  n'est pas une fonction constante si  $\tau \in 2\mathbb{N}_0$ . Alors  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ ,  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$  et  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ . De plus,*

- si  $\tau > -n$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ ), alors  $f_\tau \in \check{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ ,
- si  $q < \infty$  alors  $f_\tau \notin \check{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$ , et si  $p < \infty$  alors  $f_\tau \notin \check{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ .

**Remarque 4.9.** (i) Rappelons que les fonctions du type  $f(x) := |x|^\tau \phi(x)$ , où  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\phi \in \mathcal{D}$  avec  $\phi(0) \neq 0$ , appartiennent à  $B_{p,q}^s$  ou  $F_{p,q}^s$ , voir [39, pp. 43-48].  
(ii) Dans le cas des espaces de Besov non homogènes  $B_{p,q}^s$ , G. Bourdaud [4, lem. 9, p. 110] a prouvé que  $\phi f_\tau \in B_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  et  $\phi f_\tau \notin B_{p,q}^{\tau+n/p}$ , avec  $p \geq 1$  et  $1 \leq q < \infty$  où  $\phi \in \mathcal{D}$  telle que  $\phi(0) \neq 0$ .

**Preuve du Théorème 4.8.** Rappelons tout d'abord que la méthode de la preuve dans [4, lem. 9, p. 111-114] est applicable dans notre cas. Nous allons expliquer la preuve en deux étapes.

Étape 1. Par le Théorème 4.7, on obtient immédiatement

$$\widehat{f}_\tau(\xi) = |\xi|^{-n-\tau} \Omega(\xi'), \quad \text{où } \xi' := \xi/|\xi|,$$

et  $\Omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $S^{n-1}$ . On pose

$$\widehat{g}(\xi) := |\xi|^{-n-\tau} \Omega(\xi') \gamma(\xi).$$

Maintenant  $\widehat{g} \in \mathcal{D}$  (c'est-à-dire,  $g \in \mathcal{S}$ ), alors on trouve

$$\|Q_j f_\tau\|_p = 2^{-j(n/p+\tau)} \|g\|_p \quad (\forall j \in \mathbb{Z}),$$

ce qui donne  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  et  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$ .

Nous montrons  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ . On introduit un paramètre  $p_1$  tel que  $p < p_1 < \infty$ . D'après la Proposition 1.12 (iv) on a l'inclusion  $\dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{p_1,p}^{\tau+n/p_1}$  et de l'Étape 1, on trouve  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p_1,p}^{\tau+n/p_1}$ .

Étape 2. • Supposons que  $\tau > -n$ . L'hypothèse sur  $\tau$  donne  $f \in \mathcal{S}'$ . En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  et tout  $N > n + \tau$ , on a

$$\begin{aligned} |\langle f_\tau, \varphi \rangle| &\leq \int_{|x| \leq 1} |x|^\tau |\omega(x')| |\varphi(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^\tau |\omega(x')| |\varphi(x)| dx \quad (x' := x/|x|) \\ &\leq \|\omega\|_{L_1(S^{n-1})} \left( \|\varphi\|_\infty \int_0^1 t^{n+\tau-1} dt + c_1 \int_1^\infty t^{n+\tau-1-N} dt \right) \leq c_2. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Puisque

$$\nu = [\tau] + 1 \quad \text{si } \tau \geq 0 \quad \text{et} \quad \nu = 0 \quad \text{si } -n < \tau < 0, \quad (4.2.2)$$

donc on a  $\tau - \nu < 0$  (pour la définition de  $\nu$  voir le Chapitre 1/Section 1.4.3), alors on peut obtenir  $f_\tau^{(\alpha)} \in \tilde{C}_0$  pour  $|\alpha| = \nu$ . En effet, on suppose que  $\nu \geq 1$ , alors par un calcul simple on a

$$\partial_k f_\tau(x) = |x|^{\tau-1} \left( \tau \frac{x_k}{|x|} \omega(x') + \partial_k \omega(x') - \sum_{j=1}^n \frac{x_j x_k}{|x|^2} \partial_j \omega(x') \right),$$

alors on pose

$$\partial_k f_\tau(x) =: |x|^{\tau-1} \Lambda_k(x'), \quad \text{où } \Lambda_k \in C^\infty(S^{n-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ce qui donne

$$f_\tau^{(\alpha)}(x) = |x|^{\tau-|\alpha|} \tilde{\Lambda}_\alpha(x'),$$

où  $\tilde{\Lambda}_\alpha$  est une fonction continue sur  $S^{n-1}$  (cette égalité peut être obtenue par induction sur  $|\alpha|$  par exemple). Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  et tout  $\lambda > 0$  on a

$$|\langle f_\tau^{(\alpha)}(\cdot/\lambda), \varphi \rangle| \leq \lambda^{\nu-\tau} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tau-\nu} |\tilde{\Lambda}_\alpha(x')| |\varphi(x)| dx \quad (|\alpha| = \nu), \quad (4.2.3)$$

où le côté droite tend à 0 avec  $\lambda \rightarrow 0$  car  $-n < \tau - \nu < 0$ . La condition  $-n < \tau - \nu$  implique que l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^n} \dots dx$  dans (4.2.3) converge, voir (4.2.1) (en particulier,  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  garantit que  $-1 < \tau - \nu$  si  $n = 1$ ). En conséquence, par l'Étape 1, on a  $f_\tau \in \tilde{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  et  $f_\tau \notin \tilde{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$ .

• Maintenant, dans le cas  $\tau > -\min(n, n/p)$  et  $q < \infty$ . En utilisant la Proposition 4.5 on trouve  $f_\tau \notin \tilde{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$ . En effet, pour  $|\alpha| = m$  où le nombre entier  $m$  est choisit tel que  $m > \tau + n/p$ , nous avons

$$f_\tau^{(\alpha)}(x) = |x|^{\tau-m} \tilde{\Lambda}_m(x').$$

Soit  $u_0 \in S^{n-1}$  est fixé, telle que  $\tilde{\Lambda}_m(u_0) \neq 0$ . Puisque  $\tilde{\Lambda}_m \in C^\infty(S^{n-1})$ , on a

$$\exists \delta > 0, \text{ telle que } \forall x \neq 0 : |x' - u_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{\Lambda}_m(x')| \geq \frac{1}{2} |\tilde{\Lambda}_m(u_0)| > 0; \quad (4.2.4)$$

en prenant par exemple,

$$\delta := \frac{1}{2} \|\tilde{\Lambda}_m\|_\infty^{-1} |\tilde{\Lambda}_m(u_0)|.$$

Soit  $h > 0$ . On définit

$$D_h := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > ah\},$$

où  $a \geq m$ . Pour tout  $x \in D_h$  et tout  $t \in [0, 1]$  on a  $x + th e_1 \neq (0, \dots, 0)$ . Nous allons appliquer maintenant la formule suivante :

Soit  $g$  est une fonction de classe  $C^m$ . En appliquant le théorème de valeur moyenne  $m$ -fois et puisque  $\partial_{\ell_j}(\Delta_u g) = \Delta_u(\partial_{\ell_j} g)$ , alors il existe  $\Theta_{x,u} \in ]0, m[$  telle que

$$\Delta_u^m g(x) = \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n u_{\ell_1} \dots u_{\ell_m} \frac{\partial^m g}{\partial_{\ell_1} \dots \partial_{\ell_m}}(x + \Theta_{x,u} u), \quad (4.2.5)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $u \in \mathbb{R}^n$ . En effet, par exemple on démontre que l'égalité (4.2.5) pour  $m = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta_u^2 g(x) &= \sum_{j=1}^n u_j \partial_j (\Delta_u g)(x + \theta_1 u) = \sum_{j=1}^n u_j \Delta_u (\partial_j g)(x + \theta_1 u) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_j u_k \partial_{j,k}^2 g(x + (\theta_1 + \theta_2)u), \quad \theta_1 + \theta_2 \in ]0, 2[, \dots \end{aligned}$$

Alors en appliquant l'égalité (4.2.5) sur  $f$ , c'est-à-dire, pour tout  $x \in D_h$ , il existe  $\Theta_{x,h} \in ]0, m[$  telle que

$$\Delta_{h e_1}^m f(x) = h^m \partial_1^m f(x + \Theta_{x,h} h e_1). \quad (4.2.6)$$

On pose  $y = y(x, h) := \Theta_{x,h} h e_1$ , alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{|x+y|} - \frac{x}{|x|} \right| &= \frac{1}{|x||x+y|} \left| |x+y|y + (|x| - |x+y|)(x+y) \right| \\ &\leq \frac{2|y|}{|x|} < \frac{2m}{a}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, il convient d'introduire les coordonnées polaires. On écrit  $x := rx'$  où  $r := |x|$  et  $x' := x/|x| \in S^{n-1}$ ; pour  $h > 0$  suffisamment petit, on pose

$$D_{h,1} := \{x \in \mathbb{R}^n : ah < r < 1, |x' - u_0| < \delta/2\}.$$

On choisit  $a > m \max(1, 4/\delta)$ . En conséquence, pour tout  $x \in D_h$  on a

$$|x+y| < 2|x|, \quad (4.2.7)$$

et pour tout  $x \in D_{h,1}$  (rappelons que  $D_{h,1} \subseteq D_h$ ), on obtient donc

$$\left| \frac{x+y}{|x+y|} - u_0 \right| \leq \left| \frac{x+y}{|x+y|} - \frac{x}{|x|} \right| + \left| \frac{x}{|x|} - u_0 \right| < \frac{2m}{a} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

alors en utilisant (4.2.4), (4.2.6) et (4.2.7) on trouve

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h\varepsilon_1}^m f\|_p^p &\geq h^{pm} \int_{x \in D_{h,1}} |x+y|^{(\tau-m)p} \left| \tilde{\Lambda}_m \left( \frac{x+y}{|x+y|} \right) \right|^p dx \quad (\text{avec } \tau - m < -n/p) \\ &\geq c_1 h^{pm} |\tilde{\Lambda}_m(u_0)|^p \int_{x \in D_{h,1}} |x|^{(\tau-m)p} dx \\ &= c_2 h^{pm} \int_{ah}^1 r^{n-1+(\tau-m)p} dr \int_{|x'-u_0| < \delta/2} dx' \\ &= c_3 h^{pm} \left( (ah)^{n+(\tau-m)p} - 1 \right). \end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse  $\tau > -\min(n, n/p)$  implique  $\tau + n/p > (n/p - n)_+$ , alors nous pouvons appliquer la Proposition 4.5, et il suffit d'estimer  $L_{p,q}^{\tau+n/p,m}(f)$ . Alors pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} L_{p,q}^{\tau+n/p,m}(f) &\geq c_1 \left( \int_{\varepsilon^2 < h < \varepsilon} h^{(m-\tau-n/p)q-1} \left( (ah)^{(\tau+n/p-m)p} - 1 \right)^{q/p} dh \right)^{1/q} \\ &= c_1 \left( \int_{\varepsilon^2 < h < \varepsilon} h^{-1} \left( a^{(\tau+n/p-m)p} - h^{(m-\tau-n/p)p} \right)^{q/p} dh \right)^{1/q} \\ &\geq c_1 \left( a^{(\tau+n/p-m)p} - \varepsilon^{(m-\tau-n/p)p} \right)^{1/p} \left( \log \varepsilon^{-1} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

et le dernier terme tend vers  $\infty$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . La preuve est complète.  $\square$

**Théorème 4.10.** Soient  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\omega$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $S^{n-1}$  telle que  $\omega$  n'est pas une fonction constante si  $\tau \in 2\mathbb{N}_0$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}$  et on pose

$$g_\tau(x) := f_\tau(x)\phi(x) = |x|^\tau \omega(x/|x|)\phi(x).$$

Alors  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ . Si  $\phi(x) = 1$  si  $|x| \leq \delta$  avec  $\delta > 0$  suffisamment petit, alors  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$  et  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ . De plus,

- si  $\tau > -n$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ ), alors  $g_\tau \in \tilde{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ ,
- si  $\phi(0) \neq 0$ , alors  $g_\tau \notin \tilde{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$  et  $g_\tau \notin \tilde{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ .

**Remarque 4.11.** Rappelons qu'en cas des espaces de Besov non homogènes, ce théorème a été prouvé dans [4, lem. 9, p. 110] dans les cas  $p \geq 1$  et  $-n/p < \tau \notin \mathbb{N}_0$ .

**Preuve du Théorème 4.10.** Nous allons expliquer la démonstration en trois étapes.

*Étape 1. Preuve de  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ .* Soit  $m$  est un nombre entier telle que  $m \geq [\tau + n/p] + 1$ . Par la Remarque 4.4, il suffit de vérifier que  $J_{p,\infty}^{\tau+n/p,m,u}(g_\tau) < \infty$  (on travaille

avec  $J_{p,\infty}^{\tau+n/p,m,u}(g_\tau)$  car il n'y a pas de restriction sur  $p$ , voir la Remarque 4.4). Alors nous allons estimer l'expression

$$U(t) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( t^{-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^m g_\tau(x)|^u dh \right)^{p/u} dx \right)^{1/p}. \quad (4.2.8)$$

Dans (4.2.8) on divise l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^n} \dots dx$ , en deux parties  $\left( \int_{|x|\leq 2mt} + \int_{|x|\geq 2mt} \right) \dots dx$ .

Pour la première partie, l'inégalité élémentaire suivante

$$\begin{aligned} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^m g_\tau(x)|^u dh &\leq c_1 \|\phi\|_\infty^u \left( \int_{|y|\leq 3mt} |f_\tau(y)|^u dy + |f_\tau(x)|^u \int_{|h|\leq t} dh \right) \\ &\leq c_2 \|\phi\|_\infty^u \left( t^{n+u\tau} + t^n |f_\tau(x)|^u \right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq 2mt} \left( t^{-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^m g_\tau(x)|^u dh \right)^{p/u} dx &\leq c_3 \|\phi\|_\infty^p \left( t^{np} + \int_{|x|\leq 2mt} |f_\tau(x)|^p dx \right) \\ &\leq c \|\phi\|_\infty^p t^{\eta p} \quad (\eta := \tau + n/p). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Pour la deuxième partie, nous procédons comme dans l'Étape 2 de la preuve du Théorème 4.8. D'abord, on a

$$f_\tau^{(\alpha)}(x) = |x|^{\tau-|\alpha|} \tilde{\Lambda}_\alpha(x'), \quad \text{où } x' := x|x|^{-1}, \quad \tilde{\Lambda}_\alpha \in C^\infty(S^{n-1}). \quad (4.2.10)$$

Alors en appliquant l'égalité (4.2.5) à  $g_\tau$ , avec

$$\partial^m g_\tau(x) := \partial^m (f_\tau \phi)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \binom{m}{|\alpha|} |x|^{\tau-|\alpha|} \tilde{\Lambda}_\alpha(x') \partial^{m-|\alpha|} \phi(x),$$

et un calcul direct nous donne

$$\left| \Delta_h^m g_\tau(x) \right| \leq c |h|^m \|\tilde{\Lambda}_m\|_{L^\infty(S^{n-1})} \sum_{|\alpha|\leq m} \left| x + \Theta_{x,h} h \right|^{\tau-|\alpha|} \left| \partial^{m-|\alpha|} \phi(x + \Theta_{x,h} h) \right|, \quad (4.2.11)$$

où  $0 < \Theta_{x,h} < m$ . Donc, d'une part, pour  $|x| \geq 2mt$  et  $|h| \leq t$  (c'est-à-dire,  $|\Theta_{x,h} h| \leq |x|/2$ ) ce qui donne

$$|x + \Theta_{x,h} h| \geq |x|/2,$$

alors on a

$$\left| x + \Theta_{x,h} h \right|^{\tau-|\alpha|} \leq 2^{m-\tau} |x|^{\tau-m} \left| x + \Theta_{x,h} h \right|^{m-|\alpha|}, \quad (\forall |\alpha| \leq m).$$

D'autre part, il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\text{supp } \phi$  est un sous-ensemble de la boule du rayon  $M$ . Alors à partir de (4.2.11), et pour  $|x| \geq 2mt$  et  $|h| \leq t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \Delta_h^m g_\tau(x) \right| &\leq c_1 t^m |x|^{\tau-m} \sum_{|\alpha|\leq m} \left| x + \Theta_{x,h} h \right|^{m-|\alpha|} \left| \partial^{m-|\alpha|} \phi(x + \Theta_{x,h} h) \right| \\ &\leq c_1 t^m |x|^{\tau-m} \sum_{|\alpha|\leq m} M^{m-|\alpha|} \|\partial^{m-|\alpha|} \phi\|_\infty \\ &\leq c_2 t^m |x|^{\tau-m}. \end{aligned}$$

Nous passons à l'estimation de  $\int_{|x| \geq 2mt} \dots dx$ . On ait

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2mt} \left( t^{-n} \int_{|h| \leq t} \left| \Delta_h^m g_\tau(x) \right|^u dh \right)^{p/u} dx &\leq c_1 t^{mp} \int_{|x| \geq 2mt} |x|^{(\tau-m)p} dx \\ &\leq c_2 t^{np} \quad (\text{avec } n + (\tau - m)p < 0). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

En remplaçant les estimations (4.2.9) et (4.2.12) dans (4.2.8), on obtient directement  $\sup_{t>0} t^{-n} U(t) < \infty$ .

Étape 2. Comme dans la preuve du Théorème 4.8/ Étape 2/, l'hypothèse  $0 > \tau > -n$  ce qui donne  $g_\tau \in \mathcal{S}'$ . Alors pour montrer que  $g_\tau^{(\alpha)}$  appartient à  $\tilde{C}_0$  pour tout  $|\alpha| = \nu$ , on utilise l'égalité (4.2.10) et on écrit

$$\begin{aligned} g_\tau^{(\alpha)}(x) &= \sum_{|\beta| \leq \nu} \binom{\nu}{|\beta|} |x|^{\tau-|\beta|} \tilde{\Lambda}_\beta(x') \phi^{(\beta)}(x) \\ &= \left( \sum_{\tau < |\beta| \leq \nu} + \sum_{|\beta| \leq \tau} \right) \binom{\nu}{|\beta|} |x|^{\tau-|\beta|} \tilde{\Lambda}_\beta(x') \phi^{(\beta)}(x) \\ &=: I_1(x) + I_2(x), \end{aligned}$$

où  $I_1(x) := \sum_{\tau < |\beta| \leq \nu} \dots$ , et  $I_2(x) := \sum_{|\beta| \leq \tau} \dots$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $\lambda > 0$ , tels que

• Pour  $I_1(x)$ , on ait

$$|\langle I_1(\cdot/\lambda), \varphi \rangle| \leq c \sum_{\tau < |\beta| \leq \nu} \lambda^{|\beta|-\tau} \|\phi^{(\beta)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tau-|\beta|} |\tilde{\Lambda}_\beta(x')| |\varphi(x)| dx, \quad (4.2.13)$$

et de (4.2.2), nous avons  $-n < \tau - \nu < 0$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$  implique que  $-1 < \tau - \nu < 0$ ) et  $-n < \tau < |\beta| \leq \nu < \tau + n$ , en conséquence  $-n < \tau - |\beta| < 0$ . Alors dans (4.2.13) l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^n} \dots dx$  converge (voir (4.2.1)) et le côté droite tend vers 0 quand  $\lambda$  tend vers 0.

• Pour  $I_2(x)$ , on ait

$$\begin{aligned} |\langle I_2(\cdot/\lambda), \varphi \rangle| &= \lambda^n \left| \sum_{|\beta| \leq \tau} \binom{\nu}{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tau-|\beta|} \tilde{\Lambda}_\beta(x') \phi^{(\beta)}(x) \varphi(\lambda x) dx \right| \\ &\leq c \|\varphi\|_\infty \lambda^n \sum_{|\beta| \leq \tau} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tau-|\beta|} |\tilde{\Lambda}_\beta(x')| |\phi^{(\beta)}(x)| dx; \end{aligned}$$

et le dernière terme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

Étape 3. Preuve de  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  si  $q < \infty$  et  $[g_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ . Ici on suppose que  $\phi(0) \neq 0$ . On pose

$$\psi := \phi - \phi(0) = \phi - 1.$$

Donc  $\psi$  est une fonction de classe  $C^\infty$ , à support compact dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . On écrit

$$g_\tau := f_\tau \phi = \psi f_\tau + \phi(0) f_\tau = \psi f_\tau + f_\tau.$$

La fonction  $\psi f_\tau$  est clairement dans  $\mathcal{D}$ , alors  $\psi f_\tau \in \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  et  $\psi f_\tau \in \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  puisque les deux inclusions  $\mathcal{D} \hookrightarrow B_{p,q}^{\tau+n/p}$ ,  $\mathcal{D} \hookrightarrow F_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  et la Proposition 1.19 ce qui donne  $[\psi f_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  et  $[\psi f_\tau]_{\mathcal{P}} \in \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ . Maintenant, par le Théorème 4.8 on a  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{\tau+n/p}$  et  $[f_\tau]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$ . Ainsi s'achève la démonstration du Théorème 4.10.  $\square$

**Remarque 4.12.** La restriction dans les deux Théorèmes 4.8 et 4.10, que la fonction  $\omega$  est une constante si  $\tau \in 2\mathbb{N}_0$  est exclus, car : devient  $f_\tau$  est une fonction polynôme. Aussi, pour la restriction  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ , voir les commentaires juste après les formules (4.2.3) et (4.2.13).

## 4.2.2 Cas particuliers

**Corollaire 4.13.** Soit  $0 < p, q \leq \infty$ .

- (i) La fonction  $f(x) := \log|x|$  appartient à  $\dot{B}_{p,q}^s$  si et seulement si  $s = n/p$  et  $q = \infty$ , et  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{n/p}$  si  $p < \infty$ . En particulier,  $f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ .
- (ii) Soit  $\tau \in \mathbb{R}$ . Alors la fonction  $f(x) := |x|^\tau$  appartient à  $\dot{B}_{p,q}^s$  si et seulement si  $s = \tau + n/p$  et  $q = \infty$ .  
En particulier, si  $\tau > -n$  (avec  $\tau \notin \mathbb{N}_0$  si  $n = 1$ ), alors  $f \in \dot{B}_{p,q}^s$  si et seulement si  $s = \tau + n/p$  et  $q = \infty$ , et  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  si  $p < \infty$ .

**Preuve.** Étape 1. Preuve de (i).

- 1.1. – Méthode 1. D'après la Proposition 1.14/(ii), on a

$$\|[f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c \sum_{j=1}^n \|[\partial_j f]_{\mathcal{P}}\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}},$$

alors il suffit d'appliquer le Théorème 4.8, avec

$$f_\tau(x) := \partial_1 f(x) = \frac{x_1}{|x|^2} = |x|^{-1} \frac{x_1}{|x|}.$$

– Méthode 2. Il n'est pas difficile de montrer que la transformée de Fourier de la fonction localement intégrable  $x_\ell/|x|^2$  ( $\ell = 1, \dots, n$ ) sur  $\mathbb{R}^n$  est la distribution  $c_0 \xi_\ell/|\xi|^n$ , c'est-à-dire,

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_\ell}{|x|^2}\right)(\xi) = c_0 \frac{\xi_\ell}{|\xi|^n}, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, n\},$$

où  $c_0$  est une constante qui dépend de  $n$  seulement, et  $c_0 \neq 0$  puisque  $x_\ell/|x|^2$  n'est pas un polynôme. Nous avons aussi  $\partial_\ell f(x) = x_\ell/|x|^2$  ( $\ell = 1, \dots, n$ ) dans le sens de distributions. D'autre part, si l'on définit  $\varphi_\ell \in \mathcal{S}_\infty$  par

$$\widehat{\varphi}_\ell(\xi) := c_0 \frac{\xi_\ell}{|\xi|^n} \gamma(\xi),$$

alors on trouve

$$Q_k(\partial_\ell f)(x) = 2^k \varphi_\ell(2^k x),$$

et on passe à présent au calcul de la norme  $L_p$  de cette fonction, il vient

$$\|Q_k(\partial_\ell f)\|_p = 2^{k(1-n/p)} \|\varphi_\ell\|_p. \quad (4.2.14)$$

Donc on a  $[\partial_\ell f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{n/p-1}$ , c'est-à-dire,  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{n/p}$  (voir la Proposition 1.14/(ii)) et  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{n/p}$  si  $q < \infty$ . En particulier  $f$  appartient à l'espace de Hölder  $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ , qui a été observée dans [11, p. 4119] dans le cas unidimensionnel.

Pour prouver  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{n/p}$  si  $p < \infty$ , soit  $p_1$  telle que  $p < p_1$  alors il suffit d'appliquer l'inclusion  $\dot{F}_{p,\infty}^{n/p} \hookrightarrow \dot{B}_{p_1,p}^{n/p}$ .

• **1.2.** Maintenant, on démontre  $\partial_\ell f \in \tilde{C}_0$ , pour tout  $\lambda > 0$  et toute  $\psi \in \mathcal{S}$  on ait

$$|\langle \partial_\ell f(\cdot/\lambda), \psi \rangle| \leq \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty |x_\ell|^{-1} |\psi(x) - \psi(-x)| dx_1 \dots dx_n \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

( $\ell = 1, \dots, n$ ). Alors on obtient  $\partial_\ell f \in \tilde{C}_0$ . Par (4.2.14) on trouve que la distribution tempérée  $x_\ell/|x|^2$  appartient à  $\dot{B}_{p,q}^s$  si et seulement si  $s = n/p - 1$  et  $q = \infty$ .

Étape 2. Preuve de (ii). Nous avons

$$\mathcal{F}(Q_k f)(\xi) = c_0 |\xi|^{-n-\tau} \gamma(2^{-k} \xi),$$

On définit alors  $\psi \in \mathcal{S}_\infty$  par  $\hat{\psi}(\xi) := c_0 |\xi|^{-n-\tau} \gamma(\xi)$  et qui nous permet d'obtenir

$$\|Q_k f\|_p = 2^{-k(\tau+n/p)} \|\psi\|_p.$$

Donc on a  $[f]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}$  (pour plus détails voir Chapitre 1/Exemple 2). Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème 4.8. Maintenant, par exemple, par la Proposition 4.3 si  $m$  est un nombre entier telle que  $m > \tau + n/p$ , alors

$$\sup_{h \neq 0} |h|^{-(\tau+n/p)} \|\Delta_h^m f\|_p \leq c \| [f]_{\mathcal{P}} \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\tau+n/p}}.$$

Ce qui termine la preuve. □

**Corollaire 4.14.** Soient  $0 < p \leq \infty$  et . Soit  $\phi \in \mathcal{D}$  est une fonction donnée comme dans le Théorème 4.10. La fonction

$$f(x) := (\log |x|) \phi(x),$$

appartient à  $\dot{B}_{p,q}^s$  si et seulement si  $s = n/p$  et  $q = \infty$ , et  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{n/p}$  si  $p < \infty$ .

**Preuve.** Comme dans la preuve du Corollaire 4.13 (i), on a

$$\partial_1 f(x) = x_1 |x|^{-2} \phi(x) + (\log |x|) \partial_1 \phi(x).$$

Maintenant la fonction

$$x \rightarrow (\log |x|)\partial_1\phi(x),$$

est clairement dans  $\mathcal{D}$ . D'autre part, par le Théorème 4.10, la fonction

$$x \rightarrow x_1|x|^{-2}\phi(x),$$

appartient à  $\tilde{B}_{p,\infty}^{-1+n/p}$ . Ce qui donne le résultat souhaité.  $\square$

**Remarque 4.15.** Soit  $\delta \in \mathbb{R}$ . On pose

$$f_\delta(x) := (-\log |x|)^\delta \phi(x).$$

Il est intéressant d'étendre le Corollaire 4.14 à la fonction  $f_\delta$ .

Dans le paragraphe suivant, on étudie le cas limite  $\tau := -n$  sur les deux Théorèmes 4.8 et 4.10, c'est-à-dire, nous intéressons au cas des fonctions

$$f(x) := |x|^{-n}\omega(x/|x|),$$

avec  $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$ . Nous allons maintenant le résultat suivant :

**Corollaire 4.16.** Soit  $0 < p, q \leq \infty$ . Soit  $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$  tel que

$$\int_{S^{n-1}} \omega(x') d\sigma(x') = 0, \quad (4.2.15)$$

où  $x' := x/|x|$  et  $d\sigma(x')$  est la mesure Euclidienne sur  $S^{n-1}$ , alors on a

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^{-n}\omega(x/|x|)\varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}).$$

- (i) On pose  $f(x) := |x|^{-n}\omega(x/|x|)$ . Alors  $f \in \tilde{B}_{p,\infty}^{n/p-n}$ ,  $f \notin \tilde{B}_{p,q}^{n/p-n}$  si  $q < \infty$  et  $f \notin \tilde{F}_{p,\infty}^{n/p-n}$  si  $p < \infty$ .
- (ii) Supposons que  $n \geq 2$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}$  définie dans le Théorème 4.10. On pose  $g(x) := f(x)\phi(x)$ . Alors  $g \in \tilde{B}_{p,\infty}^{n/p-n}$ ,  $g \notin \tilde{B}_{p,q}^{n/p-n}$  si  $q < \infty$  et  $g \notin \tilde{F}_{p,\infty}^{n/p-n}$  si  $p < \infty$ .

**Remarque 4.17.** Pour plus de détails sur la définition de cette forme des distributions tempérées, voir par exemple [6, p. 85-89], [31, p. 23] ou [40, p. 38].

**Preuve du Corollaire 4.16.** *Étape 1. Preuve de (i).* Il suffit d'appliquer le Théorème 4.8 (où  $\tau := -n$ ) on trouve  $[f]_{\mathcal{P}} \in \tilde{B}_{p,\infty}^{n/p-n}$ ,  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \tilde{B}_{p,q}^{n/p-n}$  si  $q < \infty$  et  $[f]_{\mathcal{P}} \notin \tilde{F}_{p,\infty}^{n/p-n}$  si  $p < \infty$ , et puisque pour tout  $\lambda > 0$ , on ait

$$\langle f(\cdot/\lambda), \varphi \rangle = \lambda^n \langle f, \varphi \rangle \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

ce qui donne  $f \in \tilde{C}_0$  (voir aussi (4.2.17) ci-dessous). Alors  $f$  appartient aux espaces homogènes réalisés.

*Étape 2. Preuve de (ii).* Par le Théorème 4.10 on trouve  $[g]_{\mathcal{P}} \in \dot{B}_{p,\infty}^{n/p-n}$ ,  $[g]_{\mathcal{P}} \notin \dot{B}_{p,q}^{n/p-n}$  si  $q < \infty$  et  $[g]_{\mathcal{P}} \notin \dot{F}_{p,\infty}^{n/p-n}$  si  $p < \infty$ .

Pour appartenir à des espaces homogènes réalisés, on suppose que  $\omega$  qui satisfait (4.2.15). On pose  $x' := x/|x|$ , alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  on a

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^{-n} \omega(x') \phi(x) \varphi(x) dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{-n} \omega(x') (\phi(x) - 1) \varphi(x) dx \\ &+ \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{-n} \omega(x') (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &+ \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{-n} \omega(x') dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^{-n} \omega(x') \phi(x) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

(rappelons que  $\phi(x) = 1$  si  $|x| \leq \delta$  avec  $\delta > 0$  suffisamment petit). Clairement dans le côté droite de (4.2.16) le dernier terme converge, par (4.2.15) le troisième terme est égale à 0, par le théorème de convergence dominée le première et le deuxième terme tend vers

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^{-n} \omega(x') (\phi(x) - 1) \varphi(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{|x| \leq 1} |x|^{-n} \omega(x') (\varphi(x) - \varphi(0)) dx,$$

quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , respectivement (rappelons que  $\phi(0) = 1$ ). Alors

$$\langle g, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^{-n} \omega(x/|x|) \phi(x) \varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}).$$

On voit maintenant, si  $g$  appartient à  $\tilde{C}_0$  : pour tout  $\lambda > 0$ , nous décomposons  $\langle g(\cdot/\lambda), \varphi \rangle$  et par (4.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} |\langle g(\cdot/\lambda), \varphi \rangle| &\leq \lambda^{n-1} \|\nabla \phi\|_{\infty} \int_{|x| \leq 1} |x|^{1-n} |\omega(x')| |\varphi(x)| dx \\ &+ \lambda^n \|\nabla \varphi\|_{\infty} \int_{|x| \leq 1} |x|^{1-n} |\omega(x')| dx + \lambda^n \|\phi\|_{\infty} \int_{|x| \geq 1} |x|^{-n} |\omega(x')| |\varphi(x)| dx, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

donc pour  $n \geq 2$ , tous les termes du côté droite de (4.2.17) tendent vers 0 quand  $\lambda \downarrow 0$ . Par conséquent, nous avons le résultat souhaité.  $\square$

**Remarque 4.18.** Dans le Corollaire 4.16 (ii), si  $n = 1$  alors par le Corollaire 4.13 (i) on obtient immédiatement  $\text{pv} \frac{1}{x}$  appartient à  $\dot{B}_{p,q}^s$  (où  $\text{pv} \frac{1}{x}$  la valeur principale) si et seulement si  $0 < p \leq \infty$ ,  $s = 1/p - 1$  et  $q = \infty$ .

# Chapitre 5

## Réalisation et caractérisation de $\dot{F}_{\infty,q}^s$ par les différences

Dans ce chapitre, nous étudions quelques propriétés de l'espace de Lizorkin-Triebel dans le cas limite  $p = \infty$ , et nous donnons la réalisation des espaces  $\dot{F}_{\infty,q}^s$ . On note que ce chapitre a été écrit sous forme d'une annexe dans une première version de cette thèse.

### 5.1 Préparations

Soient  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ , on désigne par  $P_{k,\mu}$  le cube dyadique de longueur de côté  $2^{-k}$  et de coin  $2^{-k}\mu$ , c'est-à-dire,

$$P_{k,\mu} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2^{-k}\mu_j \leq x_j < 2^{-k}(\mu_j + 1), \quad j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

La définition de base des espaces de Triebel-Lizorkin homogènes  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  et non homogènes  $F_{\infty,q}^s$  est donnée par la décomposition de Littlewood-Paley, voir Frazier et Jawerth [21, p. 70, et p. 133].

**Définition 5.1.** Soient  $0 < q < \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ .

(i) L'espace de Triebel-Lizorkin homogène  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'_{\infty}$  telle que

$$\|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \infty.$$

(ii) L'espace de Triebel-Lizorkin non homogène  $F_{\infty,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'$  telle que

$$\|f\|_{F_{\infty,q}^s} := \|S_0 f\|_{\infty} + \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \infty.$$

**Remarque 5.2.** Dans le cas  $q = \infty$ , on a

(i)  $\dot{F}_{\infty,\infty}^s$  coïncide avec l'espace de Hölder  $\dot{B}_{\infty,\infty}^s$ , voir [24, (1.3)]. On pose

$$\|f\|_{\dot{F}_{\infty,\infty}^s} := \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|Q_j f\|_{\infty} < \infty.$$

(ii) On pose

$$F_{\infty,\infty}^s = B_{\infty,\infty}^s := \|S_0 f\|_{\infty} + \sup_{j > 0} 2^{js} \|Q_j f\|_{\infty} < \infty,$$

voir aussi [42, rem. 3, p. 51].

**Remarque 5.3.** Dans le cas  $1 < q < \infty$ , l'espace  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  a une autre définition introduite par Triebel [42, p. 239] qui est compatible avec celle de Frazier et Jawerth, voir le commentaire dans [21, p. 70].

**Remarque 5.4.** – Les espaces  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  et  $F_{\infty,q}^s$  devient un quasi-Banach par rapport à cette quasi-seminorme.

– Les définitions de ces espaces sont indépendantes du choix de  $\gamma$ , voir [21, coro. 5.3].

**Proposition 5.5.** Soient  $0 < q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Alors on a

$$\mathcal{S}_{\infty} \hookrightarrow \dot{F}_{\infty,q}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\infty}.$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la Proposition 1.3/(i) et le Corollaire 1.2. □

**Proposition 5.6.** Soient  $0 < q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Alors il existe deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telle que

$$c_1 \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \leq \lambda^s \|h_{\lambda} f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \leq c_2 \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}, \quad (5.1.1)$$

pour toute  $f \in \dot{F}_{\infty,q}^s$  et tout  $\lambda > 0$ .

**Preuve.** Dans un premier temps, nous prouvons l'inégalité (5.1.1) avec  $\lambda := 2^N$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ , donc en utilisant l'identité

$$Q_j(h_{2^N} f) = Q_{j+N} f(2^{-N}(\cdot)),$$

il est facile d'obtenir

$$\|h_{2^N} f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} = 2^{-Ns} \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}.$$

Maintenant, pour tout  $\lambda > 0$ , on introduit un nombre entier  $N \in \mathbb{Z}$  telle que

$$2^N \leq \lambda < 2^{N+1},$$

alors en utilisant l'équivalence de la quasi-seminorme dans  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  défini par la fonction  $\gamma_1 := \gamma(2^N \lambda^{-1}(\cdot))$ , qui satisfait

$$\|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} = 2^{Ns} \|f(2^{-N} \lambda(\cdot))\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}.$$

Alors il suffit de prouver

$$c_1 \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \leq \|f(2^{-N} \lambda(\cdot))\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \leq c_2 \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s};$$

(ce qui n'est pas difficile) avec  $c_1$  et  $c_2$  des constantes positives indépendante de  $N$ ,  $\lambda$  et  $f$ , d'où le résultat.  $\square$

**Lemme 5.7.** *Soit  $0 < q \leq \infty$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\sup_{x \in P_{j,\mu}} |\varphi(x)| \leq c 2^{jn/q} \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi\|_{L_q(P_{j,\eta})} \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall \mu \in \mathbb{Z}^n), \quad (5.1.2)$$

pour toute  $\varphi \in \mathcal{S}'$ , avec  $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset \{\xi : |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ .

**Preuve.** La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [20, p. 782, (2.11)].  $\square$

**Remarque 5.8.** L'inégalité inverse à (5.1.2) est vraie, où l'hypothèse  $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset \{\xi : |\xi| \leq 2^{j+1}\}$  n'est pas nécessaire; la preuve est facile.

**Proposition 5.9.** *Soient  $0 < q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Alors on a*

$$\dot{F}_{\infty,q}^s \hookrightarrow \dot{F}_{\infty,\infty}^s = \dot{B}_{\infty,\infty}^s.$$

**Preuve.** Cette proposition est certainement connue, voir [21, p. 70] pour l'égalité; nous donnons ici une preuve de l'inclusion pour plus de clarté.

Soit  $f \in \dot{F}_{\infty,q}^s$ . Par le Lemme 5.7 et pour tout  $\mu \in \mathbb{Z}^n$ , on a

$$|Q_j f(x)|^q \leq c_1 2^{jn} \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,\eta}} |Q_j f(y)|^q dy \quad (\forall x \in P_{j,\mu}), \quad (5.1.3)$$

le second membre de (5.1.3) sera majoré par

$$c_1 2^{-jsq} 2^{jn} \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,\eta}} \sum_{l \geq j} 2^{lsq} |Q_l f(y)|^q dy,$$

où la constante  $c_1$  est indépendante de  $f, j$  et  $\mu$ . Il est clair que cette inégalité implique

$$|Q_j f(x)| \leq c 2^{-js} \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \quad (\forall x \in P_{j,\mu}). \quad (5.1.4)$$

Soit maintenant  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  une fonction positive et radiale telle que  $\gamma \tilde{\gamma} = \gamma$ . On définit une suite d'opérateurs de convolutions  $(\tilde{Q}_j)$  comme  $(Q_j)$ , c'est-à-dire, en prenant  $\tilde{\gamma}$  au lieu de  $\gamma$  (voir Chapitre 1/Section 1.1). En écrivant

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= \tilde{Q}_j Q_j f(x) = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^j(x-y)) Q_j f(y) dy \\ &= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} 2^{jn} \int_{P_{j,\mu}} \mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^j(x-y)) Q_j f(y) dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et par l'inégalité (5.1.4), on obtient

$$|Q_j f(x)| \leq c 2^{-js} \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} 2^{jn} \int_{P_{j,\mu}} |\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^j(x-y))| dy. \quad (5.1.5)$$

Mais en faisant le changement de variable  $z := 2^j y$ , on aura

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} 2^{jn} \int_{P_{j,\mu}} |\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^j(x-y))| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^j x - z)| dz = \|\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}\|_1.$$

On applique alors cette égalité dans (5.1.5), on trouve

$$|Q_j f(x)| \leq c 2^{-js} \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}, \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}^n). \quad (5.1.6)$$

Clairement, l'inégalité (5.1.6) implique

$$\sup_{j \geq k} 2^{js} |Q_j f(x)| \leq c \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s},$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , tout  $x \in P_{k,\mu}$  et tout  $\mu \in \mathbb{Z}^n$ , c'est-à-dire,

$$\dot{F}_{\infty,q}^s \hookrightarrow \dot{F}_{\infty,\infty}^s.$$

Nous passons maintenant à l'inégalité (5.1.3). On a

$$\begin{aligned} 2^{jsq} |Q_j f(x)|^q &\leq c_1 2^{jn} \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \geq j} \sup_{z \in P_{j,\eta}} 2^{ksq} |Q_k f(z)|^q \int_{P_{j,\eta}} dy \quad (\forall x \in P_{j,\mu}) \\ &\leq c_2 \|f\|_{\dot{F}_{\infty,\infty}^s}^q \\ &\leq c \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}^q. \end{aligned}$$

Nous notons que l'inégalité (5.1.6) implique

$$\dot{F}_{\infty,\infty}^s \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^s,$$

et pour l'inclusion inverse en utilisant facilement les définitions. Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

**Proposition 5.10.** Soient  $0 < q \leq \infty$  et  $s > 0$ . Alors

(i)  $F_{\infty,q}^s \hookrightarrow L_\infty$ ,

(ii)  $F_{\infty,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in L_\infty$  telle que  $[f]_\infty \in \dot{F}_{\infty,q}^s$ . L'expression

$$\|f\|_\infty + \|[f]_\infty\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}$$

est une quasi-norme équivalente dans  $F_{\infty,q}^s$ .

**Preuve.** Étape 1. Preuve de (i). Voir [52, p. 110].

Étape 2. Preuve de (ii). Voir [16, prop. 3]. □

On peut aussi caractériser l'espace  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  par la fonction maximale. Pour cette raison nous commençons par le lemme suivant :

**Lemme 5.11.** Soit  $0 < a < \infty$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité suivante

$$\sup_{z \in \mathbb{Z}} (1 + |z|^{n/a})^{-1} |\varphi(x - z)| \leq c \left( (M|\varphi|^a)(x) \right)^{1/a} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n), \quad (5.1.7)$$

est satisfaite, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  où  $\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 3/2\}$ .

**Preuve.** Voir [42, p. 16]. □

Soient  $f \in \mathcal{S}'$  et  $a > 0$ . On définit les opérateurs maximaux associés aux  $S_j$  et  $Q_j$  par :

$$S_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|S_j f(x - y)|}{(1 + |2^j y|)^a}, \quad \text{et} \quad Q_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x - y)|}{(1 + |2^j y|)^a}.$$

**Proposition 5.12.** Soient  $0 < q \leq \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $a > n/q$ . Alors

$$\|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s}^* := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j^{*,a} f(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

est une quasi-norme équivalente dans  $\dot{F}_{\infty,q}^s$ .

**Preuve.** Pour la preuve de ce résultat nous allons la diviser en deux étapes.

Étape 1. Soit  $f \in \mathcal{S}'$ . En utilisant la même notation de la preuve Proposition 5.9, c'est-à-dire, les opérateurs  $(\tilde{Q}_j)$  sont alors définis de la même façon que les opérateurs  $(Q_j)$ ,

où  $\tilde{\gamma}\gamma = \gamma$  et  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Il est facile de voir que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $j \in \mathbb{Z}$  et tout  $a > 0$  nous avons

$$|Q_j f(x)| = |\tilde{Q}_j Q_j f(x)| \leq c Q_j^{*,a} f(x).$$

Alors on trouve

$$\|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \leq c \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^{*,s}}.$$

*Étape 2.* On pose  $\varphi_j := Q_j f(2^{-j}(\cdot))$ , où  $\varphi_j$  est portée par la couronne  $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$ . Alors on a

$$\begin{aligned} |Q_j^{*,a} f(x)| &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x - 2^{-j}z)|}{(1 + |z|)^a} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(2^{-j}(2^j x - z))|}{(1 + |z|)^a} \\ &\leq c_1 \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|\varphi_j(2^j x - z)|}{1 + |z|^a}, \end{aligned}$$

et on applique le Lemme 5.11, on obtient aussi

$$\begin{aligned} |Q_j^{*,a} f(x)| &\leq c \left( M |\varphi_j|^{\frac{n}{a}}(2^j x) \right)^{\frac{a}{n}} = c \left( M |Q_j f(2^{-j}(\cdot))|^{\frac{n}{a}}(2^j x) \right)^{\frac{a}{n}} \\ &\leq c \left( M |Q_j f|^{\frac{n}{a}}(x) \right)^{\frac{a}{n}}, \end{aligned}$$

En conséquence, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  nous avons

$$\left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j^{*,a} f(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_1 \left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \left( \sum_{j \geq k} 2^{jsq} \left( M |Q_j f|^{\frac{n}{a}}(x) \right)^{\frac{aq}{n}} \right)^{\frac{n}{aq} \cdot \frac{aq}{n}} \right)^{\frac{n}{aq} \cdot \frac{a}{n}}.$$

Puisque  $L_{aq/n}$  est une norme et le fait que la fonction maximale  $M$  est bornée de  $L_{aq/n}$  dans  $L_{aq/n}$  pour  $aq/n > 1$ , alors nous estimons la dernière expression par

$$c_2 \left\| \left( \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j f(\cdot)|^q \right)^{\frac{n}{aq}} \right\|_{L_{\frac{qa}{n}}(P_{k,\mu})}^{\frac{a}{n}} = c_2 \left\| \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j f(\cdot)|^q \right\|_{L_1(P_{k,\mu})}^{\frac{1}{q}}.$$

Finalment, on passe le  $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \dots$  et le  $\sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \dots$ , on obtient l'estimation

$$c^{-1} \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^{*,s}} \leq \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

On peut passer à l'espace non homogène  $F_{\infty,q}^s$  par la même caractérisation, c'est-à-dire :

**Proposition 5.13.** *Soient  $0 < q \leq \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $a > n/q$ . Alors*

$$\|f\|_{F_{\infty,q}^{*,s}} := \|S_0^{*,a} f\|_{\infty} + \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_{P_{k,\mu}} \sum_{j \geq k} 2^{jsq} |Q_j^{*,a} f(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

est une quasi-norme équivalente dans  $F_{\infty,q}^s$ .

**Preuve.** Il suffit dans la démonstration précédente d'ajouter :

- Dans l'Étape 1. Nous avons

$$\|S_0 f\|_{\infty} \leq c \|S_0^{*,a} f\|_{\infty}.$$

- Dans l'Étape 2. D'après le Lemme 5.11 (avec on pose  $\varphi_j := S_0 f$ ) et le Lemme 2.9, on trouve

$$\|S_0^{*,a} f\|_{\infty} \leq c \left\| \left( M |S_0 f(\cdot)|^{\frac{\nu}{a}} \right)^{\frac{a}{\nu}} \right\|_{\infty} \leq c \|S_0 f\|_{\infty},$$

ainsi s'achève la preuve de la proposition 5.13.  $\square$

## 5.2 Résultats principaux

### 5.2.1 Réalisation de $\dot{F}_{\infty,q}^s$

Le but est de réaliser les espaces  $\dot{F}_{\infty,q}^s$ , puisque il est possible d'obtenir la convergence de la série de Littlewood-Paley dans  $\mathcal{S}'_{\nu}$  pour un entier bien défini  $\nu$  :

$$\nu := \max(0, [s] + 1) \in \mathbb{N}_0.$$

On désigne par  $[f]_m$  la classe d'équivalence d'une distributions tempérées  $f$  modulo  $\mathcal{P}_m$ . Cela consiste à trouver une application linéaire continue :

$$\sigma : \dot{F}_{\infty,q}^s \rightarrow \mathcal{S}'_{\nu}$$

telle que,  $\forall f \in \dot{F}_{\infty,q}^s$  on a  $[\sigma(f)]_{\nu} = f$  dans  $\mathcal{S}'_{\nu}$ .

**Théorème 5.14.** Soient  $0 < q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Soit  $f \in \dot{F}_{\infty,q}^s$ .

- Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$  converge dans  $\mathcal{S}'_{\nu}$ .
- Soit  $\sigma(f)$  est définie comme sa somme qui appartient à  $\mathcal{S}'_{\nu}$ . Alors l'application  $\sigma : \dot{F}_{\infty,q}^s \rightarrow \mathcal{S}'_{\nu}$  est une réalisation de  $\dot{F}_{\infty,q}^s$ , telle que

$$\begin{aligned} \tau_a \circ \sigma &= \sigma \circ \tau_a, & \forall a \in \mathbb{R}^n, \\ h_{\lambda} \circ \sigma &= \sigma \circ h_{\lambda}, & \forall \lambda > 0, \end{aligned}$$

de plus  $\partial^{\alpha} \sigma(f) \in \tilde{C}_0, \forall |\alpha| = \nu$ .

**Preuve.** Voir [16].  $\square$

## 5.2.2 Caractérisation par les différences

Le point essentiel de ce sous-section est la caractérisation des espaces de Lizorkin-Triebel homogènes réalisés  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  (voir [16, sect. 2.3]) par les différences. Commençons par la proposition suivante :

**Proposition 5.15.** *Soient  $0 < q \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\max(n/q - n, 0) < s < m.$$

(i) *Alors une fonction  $f$  appartient à  $F_{\infty,q}^s$  si et seulement si  $f \in L_{\infty}$  et*

$$\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,1}(f) := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_0^{2^{1-k}} t^{-sq} \sup_{t/2 \leq |h| < t} \int_{P_{k,\mu}} |\Delta_h^m f(x)|^q dx \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

*De plus, l'expression*

$$\|f\|_{\infty} + \mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,1}(f)$$

*est une quasi-seminorme équivalente dans  $F_{\infty,q}^s$ .*

(ii) *Nous avons la même conclusion dans (i), si on remplace  $\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,1}(f)$  par*

$$\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,2}(f) := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_0^{2^{1-k}} t^{-sq} \int_{P_{k,\mu}} \left( t^{-n} \int_{t/2 \leq |h| < t} |\Delta_h^m f(x)| dh \right)^q dx \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

*ou*

$$\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,3}(f) := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left( 2^{kn} \int_0^{2^{1-k}} t^{-sq} \int_{P_{k,\mu}} t^{-n} \int_{t/2 \leq |h| < t} |\Delta_h^m f(x)|^q dh dx \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

**Preuve.** Voir [52, rem. 4.8 et cor. 4.3]. □

Remarquons que si  $f$  est un polynôme de degré  $m$ , alors  $\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,i}(f) \neq 0$ , pendant que  $\|[f]_{\infty}\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} = 0$ , par exemple  $f(x) := x_1^m$ , alors

$$\Delta_h^m f(x) = m! h_1^m \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,1}(f) = m! 2^{m-s} (q(m-s))^{-1/q} > 0.$$

**Théorème 5.16.** *Soient  $0 < q \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{R}$  tel que*

$$(n/q - n)_+ < s < m.$$

*Alors les expressions  $\mathcal{N}_{\infty,q}^{s,m,i}(f)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), sont des quasi-seminormes équivalentes dans  $\dot{F}_{\infty,q}^s$ .*

**Preuve.** Voir [16]. □

**Remarque 5.17.** Dans [16], en plus des résultats principaux, on trouve aussi quelques assertions dans  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  et  $\tilde{F}_{\infty,q}^s$ , quelques caractérisations de l'espace  $\tilde{F}_{\infty,q}^s$  et des questions ouvertes de perspectives.

## Questions ouvertes

Voici quelques questions ouvertes.

- Extension des résultats du Chapitre 2 et 3 au espaces homogènes du types de Besov  $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$  et de Lizorkin-Triebel  $\dot{F}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ .
- Chercher l'optimalité dans les estimations qui résultent.

## Conclusion

Cette thèse comporte une étude sur la caractérisation des espaces de Besov homogènes réalisés  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  et de Lizorkin-Triebel homogènes réalisés  $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , par des théorèmes de Peetre, par des inégalités de type de Gagliardo-Nirenberg et par des fonctions données.

Une étude supplémentaire sur le cas limite  $p = \infty$  concernant l'espace  $\dot{F}_{\infty,q}^s$  est donnée dans un dernier chapitre.

# Bibliographie

Par le symbole " $\supseteq$ ", nous indiquons les pages où la référence concernée est citée.

- [1] H. Bahouri, J.Y. Chemin, R. Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **343**. Springer-Verlag, Berlin, 2011. DOI : 10.1007/978-3-642-16830-7.  $\supseteq$  55.
- [2] G. Bergh, J. Löfström. *Interpolation Theory, An Introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **223**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. DOI : 10.1007/978-3-642-66451-9.  $\supseteq$  6, 9, 11, 12, 57.
- [3] S. Bissar, M. Moussai. *Pointwise multiplication in the realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*. Probl. Anal. Issues Anal. **7**(25), no. 1 (2018), 3–22. DOI : 10.15393/j3.art.2018.4170.  $\supseteq$  3.
- [4] G. Bourdaud. *Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers*. Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.  $\supseteq$  58, 61.
- [5] G. Bourdaud. *Réalisations des espaces de Besov homogènes*. Ark. Mat. **26**, no. 1-2 (1988), 41–54. DOI : 10.1007/BF02386107.  $\supseteq$  12, 15.
- [6] G. Bourdaud. *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*. 2ième édition, Publications Mathématiques de l'Université Paris 7, **23**, 1995.  $\supseteq$  66.
- [7] G. Bourdaud. *A sharpness result for powers of Besov functions*. J. Funct. Spaces Appl. **2**, no. 3 (2004), 267–277. DOI : 10.1155/2004/823103.  $\supseteq$  53.
- [8] G. Bourdaud. *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov*. Preprint, Paris 2009.  $\supseteq$  4, 5, 9, 10, 13, 14, 24, 25, 27.
- [9] G. Bourdaud. *Realizations of homogeneous Sobolev spaces*. Complex Var. Elliptic Equ. **56**, no. 10-11 (2011), 857–874. DOI : 10.1080/17476933.2010.538844.  $\supseteq$  13, 14.
- [10] G. Bourdaud. *Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces*. Math. Nachr. **286**, no. 5-6 (2013), 476–491. DOI : 10.1002/mana.201100151.  $\supseteq$  10, 14, 15.
- [11] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis. *Functional calculus in Hölder-Zygmund spaces*. Tran. AMS. **354**, no. 10 (2002), 4109–4129. DOI : 10.1090/S0002-9947-02-03000-3.  $\supseteq$  65.
- [12] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. *Composition operators in Lizorkin-Triebel spaces*. J. Funct. Anal. **259**, no. 5 (2010), 1098–1128. DOI : 10.1016/j.jfa.2010.04.008.  $\supseteq$  10.

- [13] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. *Composition operators acting on Besov spaces on the real line*. Ann. Mat. Pura Appl. **193**, no. 5 (2014), 1519–1554. DOI : 10.1007/s10231-013-0342-x.  $\supseteq$  10.
- [14] L. Brandolese. *Application of the realization of homogeneous Sobolev spaces to Navier-Stokes*. SIAM J. Math. Anal. **37**, no. 2 (2005), 673–683. DOI : 10.1137/S0036141004444408.  $\supseteq$  3.
- [15] M. Benallia, M. Moussai. *Inequalities of Gagliardo-Nirenberg type in realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*. To appear in Math. Rep.  $\supseteq$  4, 12, 34, 49, 50, 53, 55.
- [16] M. Benallia, M. Moussai. *Realization of homogeneous Triebel-Lizorkin spaces with  $p = \infty$  and characterizations via differences*. To appear in Ufa Math. Jour.  $\supseteq$  72, 74, 75.
- [17] M. Benallia, M. Moussai. *Some convolution inequalities in realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*. To appear in Publ. Inst. Math.  $\supseteq$  4, 19, 24, 28, 30, 31, 32.
- [18] D.E. Edmunds, H. Triebel. *Function spaces, entropy numbers, differential operators*. Cambridge Tracts in Mathematics **120**, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. DOI : 10.1017/CBO9780511662201.  $\supseteq$  43, 53.
- [19] C. Fefferman, E.M. Stein. *Some maximal inequalities*. Amer. J. Math. **93**, no. 1 (1971), 107–115. DOI : 10.2307/2373450.  $\supseteq$  25.
- [20] M. Frazier, B. Jawerth. *Decomposition of Besov spaces*. Indiana Univ. Math. J. **34** no. 4 (1985), 777–799. DOI : 10.1512/iumj.1985.34.34041.  $\supseteq$  70.
- [21] M. Frazier, B. Jawerth. *A discrete transform and decomposition of distribution spaces*. J. Funct. Anal. **93**, no. 1 (1990), 34–170. DOI : 10.1016/0022-1236(90)90137-A.  $\supseteq$  11, 68, 69, 70.
- [22] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **116**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. DOI : 10.1007/978-3-662-30722-9.  $\supseteq$  28, 31.
- [23] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **256**. Springer-Verlag, Berlin-New York Tokyo, 1983. DOI : 10.1007/978-3-642-96750-4.  $\supseteq$  57.
- [24] B. Jawerth. *Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces*. Math. Scand. **40**, no. 1 (1977), 94–104. DOI : 10.7146/math.scand.a-11678.  $\supseteq$  9, 10, 31, 69.
- [25] J. Johnsen, W. Sickel. *On the trace problem for Triebel-Lizorkin spaces with mixed norms*. Math. Nachr. **281**, no. 5 (2008), 669–696. DOI : 10.1002/mana.200610634.  $\supseteq$  25.
- [26] V.I. Kolyada, F.J. Pérez Lázaro. *On Gagliardo-Nirenberg type inequalities*. J. Fourier Anal. Appl. **20**, no. 3 (2014), 577–607. DOI : 10.1007/s00041-014-9320-y.  $\supseteq$  4, 45.
- [27] H. Kozono, H. Wadade. *Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequality with critical Sobolev space and BMO*. Math. Z. **259**, no. 4 (2008), 935–950. DOI : 10.1007/s00209-007-0258-5.  $\supseteq$  4, 45.
- [28] M. Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Prace Nauk. Uniw. Śląski, **489**, Polish Scientific Publishers (PWN), Warszawa-Kraków-

- Katowice, 1985. Second Edition, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Edited and with a preface by A. Gilányi. DOI : 10.1007/978-3-7643-8749-5.  $\supseteq$  2.
- [29] J. Marschall. *Nonregular pseudo-differential operators*. Z. Anal. Anwend. **15**, no. 1 (1996), 109–148. DOI : 10.4171/ZAA/691.  $\supseteq$  25.
- [30] S. Meliani, M. Moussai. *Boundedness of pseudodifferential operators on realized homogeneous Besov spaces*. Taiwanese J. Math. **21**, no. 2 (2017), 441–465. DOI : 10.11650/tjm/7808.  $\supseteq$  3.
- [31] G. Metivier. *Intégrales Singulières*. Cours DEA. Université de Rennes, France, 1981.  $\supseteq$  66.
- [32] M. Moussai. *Composition operators on Besov algebras*. Rev. Mat. Iberoam. **28**, no. 1 (2012), 239–272. DOI : 10.4171/RMI/676.  $\supseteq$  10, 43.
- [33] M. Moussai. *Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and an application to pointwise multipliers*. Anal. Appl. (Singap.) **13**, no. 2 (2015), 149–183. DOI : 10.1142/S0219530514500250.  $\supseteq$  7, 10, 13, 14, 15.
- [34] M. Moussai. *Characterisation of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces via differences*. Appl. Math. J. Chinese Univ. **33**, no. 2 (2018), 188–208. DOI : 10.1007/s11766-018-3431-1.  $\supseteq$  5, 57.
- [35] R. J. Nessel, G. Wilmes. *Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type*. J. Austral. Math. Soc. **25**, no. 1 (1978), 7–18. DOI : 10.1017/S1446788700038878.  $\supseteq$  8, 35.
- [36] T. Ozawa. *On critical cases of Sobolev’s inequalities*. J. Funct. Anal. **127**, no. 2 (1995), 259–269. DOI : 10.1006/jfan.1995.1012.  $\supseteq$  45.
- [37] J. Peetre. *On spaces of Triebel-Lizorkin type*. Ark. Mat. **13**, no. 1-2 (1975), 123–130. DOI : 10.1007/BF02386201.  $\supseteq$  30.
- [38] J. Peetre. *New Thoughts on Besov Spaces*. Duke University Mathematics Series I, Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C., 1976.  $\supseteq$  4, 5, 6, 9, 24, 30, 57.
- [39] T. Runst, W. Sickel. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications **3**, Walter de Gruyter, Berlin, 1996. DOI : 10.1515/9783110812411.  $\supseteq$  11, 58.
- [40] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series, no. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. DOI : 10.1515/9781400883882.  $\supseteq$  66.
- [41] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Pure and Applied Mathematics **25**. Academic Press, INC., 1967.  $\supseteq$  7, 31.
- [42] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Monographs in Mathematics **78**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. DOI : 10.1007/978-3-0346-0416-1.  $\supseteq$  6, 7, 8, 9, 11, 22, 53, 57, 69, 72.
- [43] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II*. Monographs in Mathematics **84**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. DOI : 10.1007/978-3-0346-0419-2.  $\supseteq$  6, 11, 12.
- [44] H. Triebel. *Approximation numbers and entropy numbers of embeddings of fractional Besov-Sobolev spaces in Orlicz spaces*. Proc. London Math. Soc. **66**, no. 3 (1993), 589–618. DOI : 10.1112/plms/s3-66.3.589.  $\supseteq$  53.

- [45] H. Triebel. *Local function spaces, heat and Navier-Stokes equations*. EMS Tracts in Mathematics **20**. European Mathematical Society (EMS) Publishing House, Zürich, 2013. DOI : 10.4171/123.  $\supseteq$  4, 43, 45.
- [46] B. Vedel. *Flat wavelet bases adapted to the homogeneous Sobolev spaces*. Math. Nachr. **282**, no. 1 (2009), 104–124. DOI : 10.1002/mana.200810725.  $\supseteq$  3.
- [47] H. Wadade. *Remarks on the Gagliardo–Nirenberg type inequality in the Besov and the Triebel-Lizorkin spaces in the limiting case*. J. Fourier Anal. Appl. **15**, no. 6 (2009), 857–870. DOI : 10.1007/s00041-009-9069-x.  $\supseteq$  4, 45.
- [48] H. Wadade. *Quantitative estimates of embedding constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities on critical Sobolev-Besov-Lorentz spaces*. J. Fourier Anal. Appl. **19**, no. 5 (2013), 1029–1059. DOI : 10.1007/s00041-013-9287-0.  $\supseteq$  4, 45.
- [49] M. Yamazaki. *A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I : Boundedness on spaces of Besov type*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **33** (1986), 131–174. II : A Symbolic calculus. *ibidem* **33** (1986), 311–345.  $\supseteq$  25.
- [50] A. Youssfi. *Localisation des espaces de Besov homogènes*. Indiana Univ. Math. J. **37**, no. 3 (1988), 565–587. DOI : 10.1512/iumj.1988.37.37028.  $\supseteq$  3.
- [51] A. Youssfi. *Localisation des espaces de Lizorkin-Triebel homogènes*. Math. Nachr. **147**, no. 1 (1990), 107–121. DOI : 10.1002/mana.19901470113.  $\supseteq$  3.
- [52] W. Yuan, W. Sickel, D. Yang. *Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel*. Lecture Notes in Mathematics **2005**, Springer-Verlag, Berlin 2010. DOI : 10.1007/978-3-642-14606-0.  $\supseteq$  25, 72, 75.

**ملخص:** بما أن فضاءات بيزوف المتجانسة وفضاءات وليزوركين- تريبل المتجانسة يتم تعريفها بواسطة كثيرات الحدود، وعناصرها حينئذ تشكل أصناف التكافؤ في فضاءات التوزيعات بترديد كثيرات الحدود. وأيضا فإن هذه الفضاءات المتجانسة يمكن تحقيقها بنسخ جديدة من فضاءات الدالية، وهذه هي النسخ المحققة التي طورتها أعمال جيرار بوردو وغيرها. تهتم هذه الأطروحة بدراسة عدة خصائص على الفضاءات المتجانسة المحققة، وعلى وجه الخصوص

- جداء التزاوج،
- مترجمات من نوع غاجلياردو-نيرنبرغ،
- خصائص باستعمال الدوال الغير تافهة.

**كلمات مفتاحية:** فضاءات بيزوف، فضاءات ليزوركين- تريبل، الفضاءات المتجانسة، التحقيقات، جداء التزاوج، مترجمات من نوع غاجلياردو-نيرنبرغ، طريقة نيكولسكي.

**Résumé:** Comme les espaces de Besov homogènes et Lizorkin-Triebel homogènes sont définis à des polynômes près, leurs éléments alors sont des classes d'équivalences dans les espaces des distributions modulo les polynômes. Les espaces de Besov homogènes et Lizorkin-Triebel homogènes possèdent alors des versions d'espaces fonctionnels, ce sont leurs versions réalisées développées par des travaux de G. Bourdaud et autres.

Dans cette thèse nous intéressons aux espaces réalisés de Besov et de Lizorkin-Triebel, par l'étude de certaines propriétés, en particuliers:

- la convolution,
- estimations de type de Gagliardo-Nirenberg,
- caractérisation par des fonctions données.

**Mots-clés:** Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Espaces homogènes, Réalisations, Convolutions, Inégalités de Gagliardo-Nirenberg, Méthode de représentation de Nikol'skij.

**Abstract:** As the homogeneous Besov spaces and the homogeneous Lizorkin-Triebel are defined except for polynomials, their elements then are classes of equivalences in spaces of the distributions modulo polynomials. Spaces of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel have versions of functional spaces then, they are their versions carried out developed by the work of G. Bourdaud and others. In this thesis, we are interested in the realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces, by the study of certain properties, in particular:

- convolution,
- Gagliardo-Nirenberg estimates type,
- characterization by given functions.

**Keywords :** Besov spaces, Triebel-Lizorkin spaces, Homogeneous spaces, Realizations, Convolutions, Gagliardo-Nirenberg inequalities, Nikol'skij representation method.