

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Mohamed LAHOUEM

Sujet

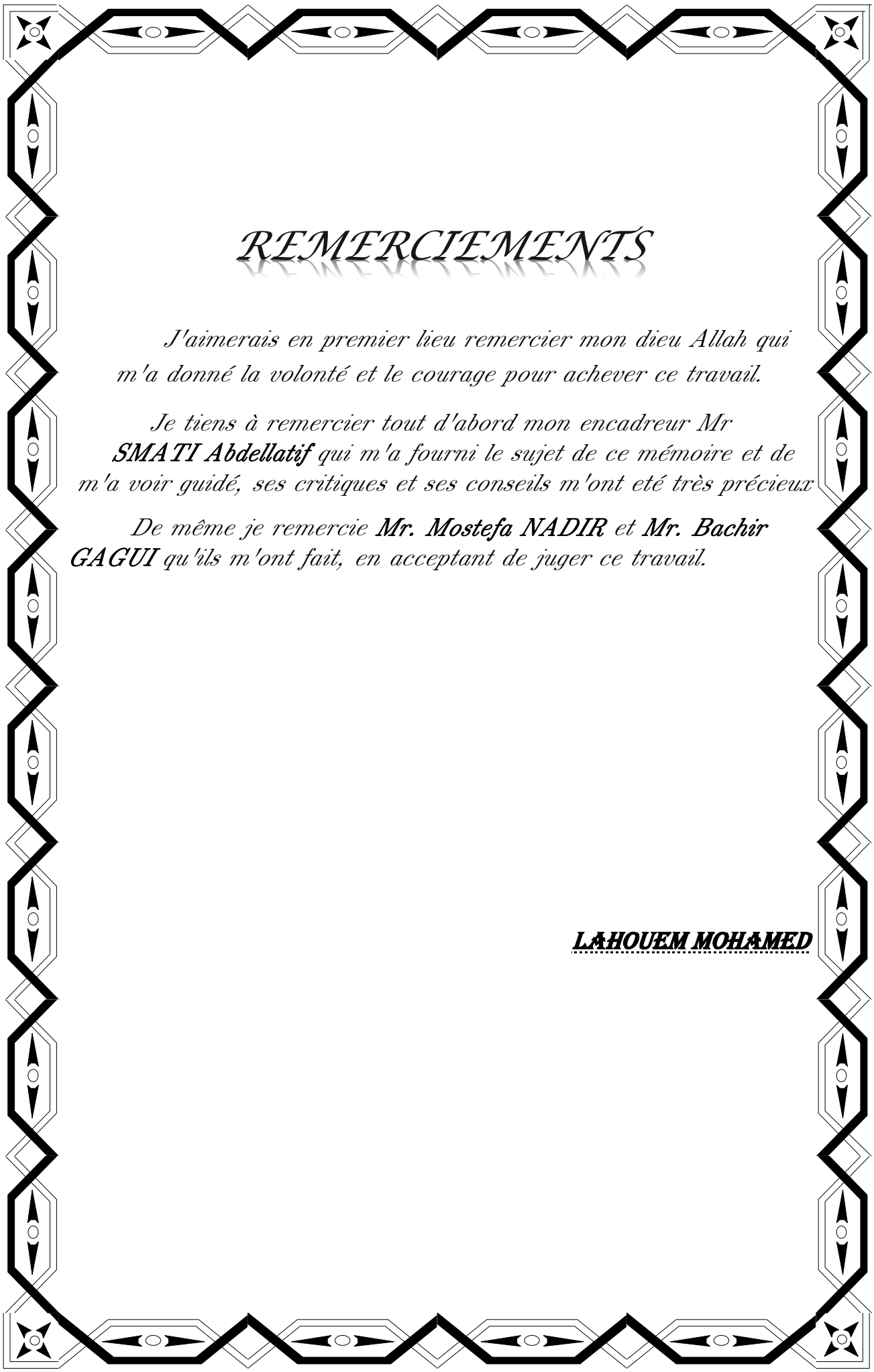
Sur la classe des opérateurs paranormaux

Date de soutenance : 02/07/2019

Devant le jury :

Mr. Mostefa NADIR	Prof. Univ de M'sila	Président
Dr. Abdellatif SMATI	M.A.B. ENS Bousaada	Rapporteur
Mr. Bachir GAGUI	M.C.A. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019



REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

*Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Mr **SMATI Abdellatif** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé, ses critiques et ses conseils m'ont été très précieux*

*De même je remercie **Mr. Mostefa NADIR** et **Mr. Bachir GAGUI** qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.*

LAHOUEM MOHAMED



DEDICACE

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL :

-À MES PARENTS,

-À MES FRÈRES,

-À MES SŒURS,

-À TOUTE LA FAMILLE

JE TIENS REMERCIER L'ENSEMBLE DE TOUS LES ÉTUDIANTS ET ÉTUDIANTES DE
MA PROMOTION,

EN FIN JE DÉDIE CETTE MÉMOIRE À MES COLLÈGUES ET TOUS CEUX QUI ME SONT
CHERS

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et préliminaires	3
1.1 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés	3
1.1.1 Opérateurs compacts	6
1.1.2 Opérateurs adjoints	7
1.1.3 Opérateurs isométriques, unitaires, positifs, auto-adjoints	12
1.1.4 Image numérique	12
1.1.5 Spectre des opérateurs bornés	13
2 Théorie d'opérateurs normaux	17
2.1 Définitions et propriétés	17
2.2 Théorie spectrale des opérateurs normaux	20
2.3 Image numérique d'un opérateur normal	22
3 Les opérateurs paranormaux et ses relations avec les opérateurs normaux et non-normaux	25
3.1 Opérateurs hyponormaux	25
3.1.1 Définitions et propriétés	25
3.1.2 Quelques conditions impliquant la normalité ou l'auto-adjoint	26
3.1.3 Opérateurs p -hyponormaux	28
3.2 Opérateurs normaloïds	28
3.3 Opérateurs paranormaux	31

3.3.1	Définitions et propriétés	31
3.3.2	Opérateurs k -paranormaux	33
Conclusion		35
Bibliographie		36

Introduction

Notons H l'espace complexe de Hilbert et $\mathcal{B}(H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définis dans l'espace de Hilbert H .

Soit A un opérateur dans $\mathcal{B}(H)$. L'opérateur A est dit normal s'il satisfait à la condition suivante: $A^*A = AA^*$, quasi-normal si: $A(A^*A) = (A^*A)A$, normaloïde si $r(A) = \|A\|$ où $r(A)$ est le rayon spectral de A , et hyponormal si: $A^*A \geq AA^*$, qui est équivalent à la condition: $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$ pour tout x dans H .

Dans ce mémoire, nous discutons d'une classe des opérateurs non-normaux, c'est la classe des opérateurs paranormaux. Un opérateur paranormal est une généralisation d'un opérateur normal. Plus précisément, un opérateur linéaire borné A sur un espace de Hilbert H est dit paranormal si: $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$ pour chaque vecteur unitaire x en H . La classe des opérateurs paranormaux a été introduite par **V. Istratescu** dans les années 1960. En [14], cela s'appelle un opérateur de classe (N), bien que le terme "paranormal" soit probablement **d.Furuta**.

Il est facile de voir que cette classe contient les opérateurs hyponormaux(en particulier, un opérateur subnormal, un opérateur quasi-normal et un opérateur normal) et inclus dans la classe des opérateurs normaloïdes. Nous allons expliquer que ces relations d'inclusion sont propres et donc les opérateurs paranormaux constituent une nouvelle classe plus large que les opérateurs hyponormaux et plus étroite que les opérateurs normaloïdes.

Ce travail est organisé en trois chapitre:

Première chapitre:

Nous avons parlé sur les opérateurs linéaires bornés (compacts, auto-adjoint, adoint, unitaire, positif et isométrie).

Deuxième chapitre:

Dans ce chapitre on s'intéresse la théorie des opérateurs normaux , la théorie spectrale et l'image numérique d'un opérateur normale.

Troisième chapitre:

Dans le dernier chapitre on presente la définition et des propriétés très importants pour les opérateurs paranormaux et la relation entre les opérateurs paranormaux avec hyponormaux et normaloïds.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

Dans ce chapitre, on présente les notions préliminaires qui concernent la définition d'un opérateur borné avec des exemples des opérateurs bornés dans un espace d'Hilbert et des autres définitions et des résultats que nous avons utilisé dans notre travail avec des preuves détaillées. On parle de l'opérateur compact et l'opérateur adjoint avec ses propriétés, les Opérateurs isométriques, unitaires, positifs, et auto-adjoints avec des propositions et propriétés importantes et des exemples. Puis on passe au spectre d'un opérateur borné avec la définition de tous ses types.

Définition 1.1.1 *En mathématiques et en physique théorique, un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels normés*

Opérateur linéaire : Un opérateur $A : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall(x_1, x_2) \in E, A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

où $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires de E et F

Définition 1.1.2 (*Opérateurs linéaires bornés*) Soient E et F deux espaces de Banach, on appelle opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F .

On dit que A est continu (borné) s'il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\|Ax\| \leq C \|x\|$$

Exemple 1.1.1

1. Soit H un Hilbert. L'opérateur I (l'identité) est borné car

$$\forall x \in H : \|I(x)\| = \|x\|$$

2. Soit $H = \ell^2$. L'opérateur (shift)

$$\begin{aligned} A & : H \rightarrow H \\ x & \rightarrow A(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

est borné

3. Soit $H = \ell^2$. L'opérateur

$$\begin{aligned} A & : H \rightarrow H \\ x & \rightarrow S(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, x_5, 3x_6, \dots) \end{aligned}$$

est borné car

$$\|Ax\|^2 = |x_1|^2 + 9|x_2|^2 + |x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots$$

d'où

$$\|Ax\|^2 \leq 9|x_1|^2 + 9|x_2|^2 + 9|x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots$$

par conséquent

$$\|Ax\|^2 \leq 9 \|x\|^2$$

donc

$$\exists c = 3 > 0 \text{ tel que : } \|Ax\| \leq 3 \|x\|, \forall x \in \ell^2$$

D'où A est borné

4. Soit $H = \ell^2$. L'opérateur

$$\begin{aligned} A & : H \rightarrow H \\ x & \rightarrow A(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots) \end{aligned}$$

n'est pas borné car si on suppose que A est borné, on a

$$\exists c > 0 : \forall x \in \ell^2, \|Ax\| \leq c \|x\|.$$

si on prend $x = e_n = (0, 0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n\text{ème}}, 0, 0, \dots)$ on trouve

$$\|Ae_n\|^2 = \|(0, 0, 0, \dots, n, 0, \dots)\|^2 = n^2 \|e_n\|^2$$

donc

$$\|Ae_n\| = n \|e_n\| \text{ tel que } \|e_n\| = 1$$

et puisque $\|Ae_n\| \rightarrow \infty$ alors A n'est pas borné.

5. Soit $H = L^2[0, 1]$ et φ est une fonction continue sur $[0, 1]$. L'opérateur

$$\begin{aligned} A\varphi & : H \rightarrow H \\ f & \rightarrow A_\varphi f = \varphi f \end{aligned}$$

est borné car

$$\begin{aligned} \|A_\varphi f\|^2 &= \int_0^1 |\varphi(x)f(x)|^2 dx \\ \|A_\varphi f\|^2 &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

donc $\exists c = \|\varphi\|_\infty$ tel que $\|A_\varphi f\| \leq c \|f\|, \forall f \in L^2[0, 1]$. Ce qui assure que A_φ est borné.

6. Soit $H = L^2(]0; 1[)$ et $Af(x) = xf(x)$.

On a

$$\|Af\|^2 = \int |Af(x)|^2 dx = \int x^2 |f(x)|^2 dx \leq \|f\|^2$$

donc A est borné sur H

Définition 1.1.3 [4] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle|$$

Théorème 1.1.1 [4] Si $A \in \mathcal{B}(H)$ avec H est un $\mathbb{C}$ -Hilbert et si

$$\langle Ax, x \rangle = 0$$

pour tout $x \in H$, alors:

$$A = 0$$

Définition 1.1.4 Pour $A \in \mathcal{B}(E, F)$, on note

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \{Ax, x \in E\} \\ \text{Ker}(A) &= \{x \in E, Ax = 0\} \end{aligned}$$

1.1.1 Opérateurs compacts

Rappels et notations

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des opérateurs compacts.

Soient E et F deux espaces de Hilbert. On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, E)$.

Définition 1.1.5 Soit $A \in \mathcal{B}(E, F)$, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F .

Définition 1.1.6 L'opérateur A est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$, la suite $\{Ax_n\}_{n \geq 1}$ admet que sous suite convergente dans F . Dans le cas particulier où $F = C([a, b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de A .

Théorème 1.1.2 [11] (**Arzela-Ascoli**)

Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$, est compacte dans $C([a, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

Théorème 1.1.3 [11] *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0, 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Alors, $A(B(0, 1))$ est relativement compact d'où $\|Ax\| \leq C, \forall x \in B(0, 1)$. Alors A est borné.

Réciproquement, l'opérateur identité I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0, 1)) = B(0, 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

Proposition 1.1.1 [3] *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

Proposition 1.1.2 [11] *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Théorème 1.1.4 [11] *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F .*

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

alors, A est compact.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(E; F)$ est de rang fini si $\dim \mathcal{R}(A) < \infty$.*

1.1.2 Opérateurs adjoints

Définition 1.1.8 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ l'opérateur adjoint de A est l'opérateur linéaire $A^* : H_2 \longrightarrow H_1$ caractérisé par :*

$$\langle A^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Ax \rangle_{H_2}$$

pour tout $x \in H_1, y \in H_2$

Proposition 1.1.3 [10] Soient $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ et $B \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$. Alors

1. A^* est borné et $\|A^*\| = \|A\|$
2. $(A^*)^* = A$
3. $\text{Ker} A = (\text{im} A^*)^\perp$ et $\text{im} A = (\text{Ker} A^*)^\perp$
4. $(BA)^* = A^* B^*$

Démonstration :

1. Remarquons que

$$\|A\| = \sup_{\substack{v_1 \in H_1 \\ v_2 \in H_2}} \frac{\langle v_2, Av_1 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} \quad (1.1.1)$$

En effet, le suprémum dans 1.1.1 n'excède par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'autre part, il existe une suite $\{u_n\} \in H_1$ telle que $\left\{ \frac{\|Au_n\|}{\|u_n\|} \right\} \longrightarrow \|A\|$. En prenant $v_1 = u_n$ et $v_2 = Au_n$ dans 1.1.1, on voit que suprémum coïncide avec $\|A\|$. Par conséquent, on a

$$\|A\| = \sup_{\substack{v_1 \in H_1 \\ v_2 \in H_2}} \frac{\langle v_2, Av_1 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \sup_{\substack{v_1 \in H_1 \\ v_2 \in H_2}} \frac{\langle A^* v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \|A^*\|$$

2. Pour tout $v_1 \in H_1, v_2 \in H_2$. On a

$$\langle v_2, Av_1 \rangle_{H_2} = \langle A^* v_2, v_1 \rangle_{H_1} = \langle v_2, (A^*)^* v_1 \rangle_{H_2}$$

par conséquent $A = (A^*)^*$

3. $v_1 \in \text{Ker} A$ si et seulement si $\langle Av_1, v_2 \rangle_{H_1} = \langle v_1, A^* v_2 \rangle_{H_1} = 0$, pour tout $v_2 \in H_2$ c'est-à-dire $v_1 \in (\text{im} A^*)^\perp$. On obtient la deuxième relation en remplaçant A par A^* et en utilisant (2).

4. Pour tout $v_1 \in H_1, v_3 \in H_3$ on a

$$\langle v_3, BAv_1 \rangle_{H_3} = \langle B^* v_3, Av_1 \rangle_{H_2} = \langle A^* B^* v_3, v_1 \rangle_{H_1}$$

D'autre part, on a aussi

$$\langle v_3, BAv_1 \rangle_{H_3} = \langle (BA)^* v_3, v_1 \rangle_{H_1}$$

par conséquent $A^* B^* = (BA)^*$

En remplaçant B par A^{-1} dans (4) on obtient $I^* = I = A^* (A^{-1})^*$. En échangeant les rôles de A et B , on obtient $I = (A^{-1})^* A^*$.

Par conséquent, A^* admet pour inverse $(A^{-1})^*$

Définition 1.1.9 Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est dit auto-adjoint si $A^* = A$

Proposition 1.1.4 [10] Soit H un espace de Hilbert sur K et $A \in \mathcal{B}(H)$.

- (i) Si A est auto-adjoint alors $\langle Av, v \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in H$.
- (ii) Si $K = \mathbb{C}$ et $\langle Av, v \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in H$ alors A est auto-adjoint.

Démonstration :

- (i) Si A est auto-adjoint alors, pour tout $v \in H$

$$\langle Av, v \rangle = \langle v, A^*v \rangle = \langle v, Av \rangle = \overline{\langle Av, v \rangle}$$

- (ii) Si $\langle Av, v \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in H$. Alors

$$\langle Av, v \rangle = \overline{\langle v, Av \rangle} = \langle v, Av \rangle = \langle A^*v, v \rangle$$

de sorte que $\langle (A - A^*)v, v \rangle = 0$. En prenant $v = v_1 + cv_2$ avec $v_1, v_2 \in H$ et $c \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\langle (A - A^*)v_1, v_1 \rangle + c \langle (A - A^*)v_1, v_2 \rangle + \bar{c} \langle (A - A^*)v_2, v_1 \rangle + |c|^2 \langle (A - A^*)v_2, v_2 \rangle = 0$$

Le premier et le quatrième terme de cette somme sont nuls. Si $c = 1$, on obtient

$$\langle (A - A^*)v_1, v_2 \rangle + \langle (A - A^*)v_2, v_1 \rangle = 0$$

et si $c = i$, on obtient

$$\langle (A - A^*)v_1, v_2 \rangle - \langle (A - A^*)v_2, v_1 \rangle = 0$$

de sorte que $\langle (A - A^*)v_1, v_2 \rangle = 0, \forall v_1, v_2 \in H$ et donc $A = A^*$.

Exemple 1.1.2 Pour tout $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, l'opérateur $A^*A \in \mathcal{B}(H_1)$ est auto-adjoint, car

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A.$$

Proposition 1.1.5 Soit $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Alors

- (i) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.
(ii) $A^*A = 0$ ou $AA^* = 0$ implique $A = 0$

Démonstration

(i) On a

$$\|A^*A\| = \sup_{\substack{v_1 \in H_1 \\ v_2 \in H_2}} \frac{\langle v_2, A^*Av_1 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \sup_{\substack{v_1 \in H_1 \\ v_2 \in H_2}} \frac{\langle Av_2, Av_1 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} \geq \sup_{v_1 \in H_1} \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} = \|A\|^2$$

mais d'autre part, $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$, donc $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

L'autre égalité s'obtient en échangeant les rôles de A et A^* .

(ii) Si $A^*A = 0$ alors $0 = \|A^*A\| = \|A\|^2$, donc $A = 0$. On procède de même manière pour AA^* .

Théorème 1.1.5 [10] Si $A \in \mathcal{B}(H)$ avec H est un $\mathbb{C}$ -Hilbert et si

$$\langle Ax, x \rangle = 0$$

pour tout $x \in H$, alors:

$$A = 0$$

Démonstration

$$\langle A(x+y), x+y \rangle = 0 \implies \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0 \dots (1)$$

Si on remplace y par iy on trouve :

$$-i \langle Ax, y \rangle + i \langle Ay, x \rangle = 0 \dots (2)$$

Multiplions (2) par i et on ajoute (1) on trouve :

$$\langle Ax, y \rangle = 0 \dots (3)$$

$$A = 0$$

Démonstration

$$\langle A(x+y), x+y \rangle = 0 \implies \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0 \dots (1)$$

Si on remplace y par iy on trouve :

$$-i \langle Ax, y \rangle + i \langle Ay, x \rangle = 0 \dots (2)$$

Multiplions (2) par i et on ajoute (1) on trouve :

$$\langle Ax, y \rangle = 0 \dots (3)$$

Prenant

$$y = Ax$$

On trouve

$$\|Ax\|^2 = 0$$

Et donc

$$Ax = 0, \forall x \in H$$

i.e.

$$A = 0$$

Remarque 1.1.1 Si H est un Hilbert sur $\mathbb{R}$, alors: le théorème précédent n'a pas été vérifié .

Exemple 1.1.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\langle Ax, x \rangle = 0$ mais $A \neq 0$

Remarque 1.1.2 Si A est auto-adjoint sur un $\mathbb{R}$ -Hilbert , alors :

$$\langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H \implies A = 0$$

Corollaire 1.1.1 Si $B \in \mathcal{B}(H)$ et $A \in \mathcal{B}(H)$, avec H un $\mathbb{C}$ - Hilbert et si

$$\langle Bx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

pour tout $x \in H$, alors :

$$B = A$$

1.1.3 Opérateurs isométriques, unitaires, positifs, auto-adjoints

Définition 1.1.10 Soit H un espace de Hilbert

1. Un opérateur $S \in \mathcal{B}(H)$ est appelé hermitien ou auto adjoint si :

$$S = S^*$$

2. Un opérateur $U \in \mathcal{B}(H)$ est appelé unitaire si :

$$U^*U = Id_H$$

et

$$UU^* = Id_H$$

3. Un opérateur $U \in \mathcal{B}(H)$ est appelé isométrie si :

$$U^*U = I$$

4. Un opérateur $P \in \mathcal{B}(H)$ est appelé positif si : P est auto-adjoint et si :

$$\langle P(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in H$$

5. On définit la projection orthogonale par :

$$P^2 = P, P = P^*$$

la projection $P \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur auto-adjoint

1. Au lieu d'auto-adjoint, on dit des fois symétrique si on est sur $\mathbb{R}$, et on dit hermitien sur $\mathbb{C}$.

2. T unitaire $\Rightarrow T$ isométrie

1.1.4 Image numérique

Définition 1.1.11 Soit A un opérateur linéaire borné. On définit l'image numérique de A l'ensemble :

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle, \|x\| = 1 \}$$

Exemple 1.1.4

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 W(A) &= \{|x_1|^2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \|x\| = 1\} \\
 &= \{|x_1|^2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\} \\
 &= [0, 1]
 \end{aligned}$$

1.1.5 Spectre des opérateurs bornés

Définition 1.1.12 Soit A un opérateur borné, A est inversible si : $\exists B$ borné tel que :

$$BA = AB = I$$

Définition 1.1.13 Le **spectre** d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / A - \lambda Id \text{ n'est pas inversible}\}$$

Définition 1.1.14 Le complémentaire de $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé **résolvant** de A et on la note : $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

Théorème 1.1.6 [4] Le spectre de tout opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$

Démonstration: Le spectre de A est borné car : si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|A\|$, alors : $A - \lambda Id$ est inversible .

En effet :

$$|\lambda| > \|A\| \implies 1 > \|\lambda^{-1}A\|$$

donc : $I - \lambda^{-1}A$ est inversible (serie de Neumann) i-e : $\lambda I - A$ est inversible .

D'où : $\lambda \in \rho(A)$ pour montrer que $\sigma(A)$ est fermé on va définir la fonction

$$\begin{aligned}
 F &: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(H) \\
 \lambda &\rightarrow F(\lambda) = \lambda I - A
 \end{aligned}$$

F est continue (c'est même une isométrie) car :

$$\|F(\lambda) - F(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| = |\lambda - \mu|$$

On note par : $\mathcal{B}_i(H)$ l'ensemble des opérateurs inversibles.

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : F \in \mathcal{B}(H)/\mathcal{B}_i(H)\} \\ &= F^{-1}\{(\mathcal{B}(H)/\mathcal{B}_i(H))\}\end{aligned}$$

donc : $\sigma(A)$ fermé car: $\mathcal{B}(H)/\mathcal{B}_i(H)$ ouvert

$\sigma(A)$ est non vide car:

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{A}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right)$$

Si $|\lambda| > \|A\|$ alors la serie de Neumann est convergent .donc si

$$|\lambda| \longrightarrow \infty, \|R_\lambda\| \longrightarrow 0$$

Si $\sigma(A)$ est vide alors : R_λ est une fonction bornée analytique (entière) donc par le théorème de liouville $R_\lambda(A)$ égale a zéro et ceci est une contradiction .

D'où : $\sigma(A)$ est non vide.

Définition 1.1.15 Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in \mathcal{B}(H)$

$(A - \lambda I)$ inversible si et seulement si :

1. $(A - \lambda I)$ injectif
2. $(A - \lambda I)$ surjectif
3. $(A - \lambda I)^{-1}$ borné

Remarque 1.1.3 Si $\lambda \in \sigma(A)$ on a les cas suivante

1. $(A - \lambda I)$ n'est pas injectif, ou
2. $(A - \lambda I)$ est injectif et $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H$, ou
3. $(A - \lambda I)$ est injectif et $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H$

Définition 1.1.16

. Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\exists \varphi \in H, \varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$.On dit que φ est un vecteur propre de A associe à la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre ponctuel** noté : $\sigma_p(A)$

. Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ et $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H$ on dit que λ est dans le **spectre continue**

de A noté $\sigma_c(A)$

. Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ et $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H$ on dit que λ appartient au **spectre résiduel** de A noté $\sigma_r(A)$

Remarque 1.1.4

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Lemme 1.1.1 Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ alors : $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$

Définition 1.1.17 Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et :

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Théorème 1.1.7 [4] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$

1. Si A est inversible alors : $\sigma(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$
2. $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ tel que $P \in C[X]$ (spectral mapping theory).

Démonstration.

1. Puisque A est inversible, 0 n'appartient pas à $\sigma(A)$ et $(\sigma(A))^{-1}$ a un sens, On a :

$$A^{-1} - \lambda^{-1} = (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$$

$$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1}) \iff A^{-1} - \lambda^{-1} \text{ est inversible} \iff (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1} \text{ est inversible}$$

donc :

$$(\lambda - A) \text{ est inversible}$$

Alors :

$$\lambda \in \rho(A)$$

D'où : $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1}) \iff \lambda \in \sigma(A)$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ posons $Q(z) = \lambda - P(z)$, $Q(z)$ est un polynôme de degré n car $P(z)$ est un polynôme. D'après le théorème fondamental de l'algèbre $Q(z)$ admet n racines

i.e.

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= c(z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n), c \neq 0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{C} \\
 \lambda \in \rho(A) &\iff \lambda I - P(A) \text{ inversible} \iff Q(A) \text{ inversible} \\
 &\iff c(z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) \text{ inversible} \\
 &\iff (-\mu_i) \text{ inversible } \forall i \\
 &\iff \mu_i \in \rho(A) \quad \forall i \\
 &\iff Q(\mu) \neq 0 \quad \forall \mu \in \sigma(A) \\
 &\iff \lambda \neq P(\mu) \quad \forall \mu \in \sigma(A) \\
 &\iff \lambda \text{ n'appartient pas à } P(\sigma(A))
 \end{aligned}$$

Exemple 1.1.5 On utilise le théorème spectral pour calculer le spectre d'un polynôme par

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\sigma(A) = \{1, 2\}$ Si on veut calculer $\sigma(A^2)$ à partir de $\sigma(A)$ on trouve

$$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$$

car : si $P(x) = x^2$, alors : $\sigma(A^2) = (\sigma(A))^2$

Proposition 1.1.6 [1] Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint alors on a :

1. Le spectre $\sigma(A)$ est réel de plus si z et z' sont deux valeurs propres distincts de A on a

$$\text{Ker}(A - zI) = \text{Ker}(A - z'I)$$

2. $\sigma_r(A) = \emptyset$

3. $\sigma(A) \subset [m, M]$ où $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$

4. $r(A) = \|A\|$ où $r(A)$ est le module du plus grand élément du spectre, appelée le **rayon**

spectral

Chapitre 2

Théorie d'opérateurs normaux

Dans cette chapitre on introduit quelques notions de base de la théorie des opérateurs normaux qui joueront un rôle essentiel dans ce travail.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 *On dit que $A \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur normal si A commute avec son adjoint i.e. $A^*A = AA^*$.*

Exemple 2.1.1 *La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$.*

En effet, on a $(A_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$ ou $\varphi \in C([0, 1])$, $f \in L^2([0, 1])$.

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi f, g \rangle &= \langle f(t)\varphi(t), g(t) \rangle \\ &= \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \right\rangle\end{aligned}$$

donc $(T_\varphi^*g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$, c'est-à-dire $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$

D'où, $T_\varphi^*T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$

L'opérateur T_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 2.1.1 [17] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors A est normal, si et seulement si,*

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \text{ pour tout } x \in H$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
 A \text{ est normal} &\Leftrightarrow A^*A - AA^* = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle (A^*A - AA^*)x, x \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in H \\
 &\Leftrightarrow \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \text{ pour tout } x \in H \\
 &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 \text{ pour tout } x \in H
 \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1 Si $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, on a

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*)$$

Proposition 2.1.2 [11] Soit A est normal, on a

1. L'opérateur aA est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.
2. L'opérateur A^n est aussi normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve.

1) Nous avons $(aA)(aA)^* = aaAA^*$ et $(aA)^*(aA) = aaA^*A$.

Puisque A est normal, d'où il sont égaux.

2) A est normal, d'où $AA^* = A^*A$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (AA^*)^n = (A^*A)^n \\
 &\Rightarrow A^n(A^*)^n = (A^*)^n A^n \\
 &\Rightarrow A^n(A^n)^* = (A^n)^* A^n
 \end{aligned}$$

C'est -à-dire A^n est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 2.1.2 Soit P est polynôme et A est un opérateur normal. Alors $P(A)$ est aussi normal.

Remarque 2.1.1 A^n normal $\nRightarrow A$ normal.

En effet, soit $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais A n'est pas normal.

Proposition 2.1.3 [9] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, on a*

$$\text{Ker}(A) \oplus \overline{\text{Im}(A)} = H$$

Preuve. On sait que : $\text{Ker}(A^*) = (\text{Im } A)^\perp$, d'où

$$(\text{Ker}(A^*))^\perp = ((\text{Im } A)^\perp)^\perp = \overline{(\text{Im } A)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} H &= \text{Ker}(A^*) \oplus (\text{Ker}(A^*))^\perp \\ &= \text{Ker}(A) \oplus \overline{\text{Im}(A)} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4 [11] *(Inverse d'un opérateur normal)*

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal et inversible d'inverse A^{-1} .

Alors A^{-1} est aussi normal.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (A^{-1})^* A^{-1} &= (A^*)^{-1} A^{-1} \\ &= (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} \text{ (car } A \text{ normal)} \\ &= A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^*. \end{aligned}$$

Donc A^{-1} est un opérateur normal.

Proposition 2.1.5 [11] *Pour tout est unitaire. L'opérateur U^*AU est normal si et seulement si A est normal.*

Preuve. On a

$$(U^*AU)^*(U^*AU) = U^*T^*AU$$

et

$$(U^*AU)(U^*AU)^* = U^*AA^*U$$

On remarque que $A^*A = AA^*$ si et seulement si U^*AU est normal.

Proposition 2.1.6 [11] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes

- i. A est normal.
- ii. $A^{-1}A^*$ (ou A^*A^{-1}) est unitaire.
- iii. Il existe un opérateur U tel que : $A^* = UA$.

Preuve. Montrons que

1) $i \Rightarrow ii$ On a

$$\begin{aligned} (A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) &= A(A^{-1})^*A^{-1}A^* \\ &= AA^{-1}(A^{-1})^*A^* = I(AA^{-1})^* = I \end{aligned}$$

2) $ii \Rightarrow iii$ clair

$iii \Rightarrow i$ Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|A^*x\|^2 &= \|UAx\|^2 \\ &= \langle UAx, UAx \rangle = \langle Ax, U^*UAx \rangle = \|Ax\|^2 \end{aligned}$$

Donc, A est normal.

2.2 Théorie spectrale des opérateurs normaux

Proposition 2.2.1 [11] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, alors

- 1. Si $Ax = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors, $A^*x = \bar{\lambda}x$
- 2. Deux espaces propres de A associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

Proposition 2.2.2 [11] Le rayon spectral d'un opérateur normal $A \in \mathcal{B}(H)$ vérifie

$$r(A) = \|A\|$$

Preuve. On suppose d'abord que A est auto-adjoint. On a $\|A^2\| = \|A\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, il vient

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$

On revient au cas normal, l'élément AA^* est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned}
 r(A) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\|A^n((A^n)^*)\|^{\frac{1}{n}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\|(AA^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\
 &= \sqrt{r(AA^*)} \\
 &= \sqrt{\|AA^*\|} = \|A\|
 \end{aligned}$$

Proposition 2.2.3 [9] *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisation du spectre continu d'un opérateur normal borné.

Théorème 2.2.1 [11] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, les assertions suivantes sont équivalentes*

- i) $\lambda \in \sigma_c(A)$
- ii) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$
- iii) $A - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(A - \lambda I)(H)$ n'a pas fermée.

Preuve. ii) $\implies$ i) puisque $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$, alors $A - \lambda I$ est injectif ; mais ne pas surjectif. Supposons que l'image $(A - \lambda I)(H)$ n'est pas dense dans H , alors il existe $z \in (A - \lambda I)(H)^\perp$. Par conséquent nous avons,

$$z \in (A - \lambda I)(H)^\perp = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ker}(A - \lambda I).$$

D'où contradiction, donc nous concluons que $\lambda \in \sigma_c(A)$.

i) $\implies$ iii) est évidente à partir de la définition du spectre continu.

iii) $\implies$ ii) on a $A - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Supposons que $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe un opérateur (inversible) $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $B(A - \lambda I)x = x$, pour tout $x \in H$.

En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|B\|} \|x\| \leq \|(A - \lambda I)x\|, \forall x \in H$$

D'où $(A - \lambda I)(H)$ est complet et fermée dans H , qui est une contradiction. Nous concluons que $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$.

Corollaire 2.2.1 *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur normal. Alors,*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) = \sigma_{ap}(A).$$

Théorème 2.2.2 [11] *Soient H un espace de Hilbert complexe, et $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(A_\lambda) = H\}$
2. $\sigma_p(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \overline{\Re(A_\lambda)} \neq H \right\}$
3. $\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \overline{\Re(A_\lambda)} = H \text{ et } \Re(A_\lambda) \neq H \right\}$
4. $\sigma_r(A) = \phi$

2.3 Image numérique d'un opérateur normal

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'image numérique et facile à démontrer.

Proposition 2.3.1 [11] *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ et soit $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire (i.e. $U^*U = UU^* = I$). Alors on a*

1. $W(\alpha A + \beta B) = \alpha W(A) + \beta W(B)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
2. $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$
3. $W(A^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(A)\}$
4. $W(U^*AU) = W(A)$

Théorème 2.3.1 [11] (Toeplitz-Hausdorff) *L'image numérique d'un opérateur linéaire borné est un ensemble convexe borné.*

Théorème 2.3.2 [11] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Alors, on a*

1. $\sigma_p(A) \subset W(A)$
2. $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$

Théorème 2.3.3 [11] *L'opérateur A est un auto-adjoint si et seulement si $W(A) \subset \mathbb{R}$*

Preuve. Si A est auto-adjoint, alors pour tout $x \in H$,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

D'où $W(A) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(A) \subset \mathbb{R}$, alors $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$. Donc A est auto-adjoint.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un A opérateur normal.

Théorème 2.3.4 [11] *Si $W(A)$ est un segment de droite, alors A est un opérateur normal.*

Preuve. Soit α un point sur le segment de droite ayant une inclinaison θ , d'où $W(e^{-i\theta} [A - \alpha I])$ est inclu dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème précédent implique que $e^{-i\theta} [A - \alpha I]$ est un opérateur auto-adjoint. On déduit donc, par un calcul simple que A est un opérateur normal.

Théorème 2.3.5 [11] *Si A est un opérateur normal. Alors,*

$$w(A) = \|A\|.$$

Rappelons aussi que l'enveloppe convexe de $\sigma(A)$, noté $\text{Conv} \{ \sigma(A) \}$ est le plus petit convexe contenant $\sigma(A)$. Le théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre.

Théorème 2.3.6 [11] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, on a*

$$\overline{w(A)} = \overline{\text{Conv} \{ \sigma(A) \}}.$$

Corollaire 2.3.1 *Soient m et M deux nombres complexes. Si*

$$\overline{w(A)} = [m, M].$$

Alors

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(A)$$

Preuve. Si $\overline{W(A)} = [m, M]$, alors le théorème 1.1.6 implique que A est un opérateur normal. Ainsi, d'après le théorème 1.1.8 $\overline{W(A)}$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(A)$, ou encore

$$[m, M] = \overline{w(A)} = \overline{\text{Conv}\{\sigma(A)\}}.$$

Il suit donc que $\{m, M\} \subseteq \sigma(A)$.

Chapitre 3

Les opérateurs paranormaux et ses relations avec les opérateurs normaux et non-normaux

3.1 Opérateurs hyponormaux

Dans cette section, nous examinerons quelques propriétés générales des opérateurs hyponormaux.

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est hyponormal si $A^*A \geq AA^*$, qui est équivalent à la condition $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$. Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est cohyponormal si son adjoint est hyponormal. Si c'est hyponormal ou cohyponormal, alors on l'appelle seminormal.*

Proposition 3.1.1 [5] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors A est un opérateur hyponormal si et seulement si $A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$ donnés. A est opérateur hyponormal si et seulement si

$$\begin{aligned}
(\|A^*x\| \leq \|Ax\|) &\iff \|Ax\|^2 + 2\lambda \|A^*x\|^2 + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq 0 \\
&\iff \langle Ax, Ax \rangle + 2\lambda \langle A^*x, A^*x \rangle + \lambda^2 \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \\
&\iff \langle A^*Ax, x \rangle + 2\lambda \langle AA^*x, x \rangle + \lambda^2 \langle A^*Ax, x \rangle \geq 0 \\
&\iff \langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x \rangle \geq 0 \\
&\iff A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A \geq 0
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1 Si $A \in \mathcal{B}(H)$ est hyponormal, alors $(A - \lambda I)$ est hyponormal pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.1.2 [5] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, si A est hyponormal et $(A - \lambda I)^{-1}$ existe,

alors $(A - \lambda I)^{-1}$ est hyponormal

Preuve. puisque l'hyponormalité est préservée sous la traduction, on peut supposer $\lambda = 0$.

Ainsi $A^*A - AA^* \geq 0$ et donc

$$0 \leq A^{-1}(A^*A - AA^*)A^{*-1} = A^{-1}A^*AA^{*-1} - I.$$

Maintenant depuis $A \geq I$ implique $A^{-1} \leq I$ nous avons

$$I - A^*A^{-1}A^{*-1}A \geq 0$$

et donc

$$(T^{*-1}T^{-1} - T^{-1}T^{*-1}) = T^{*-1}(I - T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1} \geq 0$$

qui complète la preuve.

3.1.2 Quelques conditions impliquant la normalité ou l'auto-adjoint

Dans cette sous section, nous allons donner quelques résultats classiques importants relatifs aux opérateurs hyponormaux.

Corollaire 3.1.1 Si A est hyponormal et $\sigma(A)$ est un réel, alors A est auto-adjoint.

Corollaire 3.1.2 *Si A est hyponormal et $\sigma(A)$ se trouve sur le cercle unitaire, alors A est unitaire.*

Définition 3.1.2 *un opérateur A est quasi-normal si $(A^*A)A = A(A^*A)$. Un opérateur A sur un espace de Hilbert H est subnormale s'il existe un espace de Hilbert K . $K \supseteq H$, et un opérateur normal S défini sur K avec $Ax = Bx$ pour $x \in H$.*

Remarque 3.1.2 *On a la relation d'inclusion suivante pour les classes d'opérateurs :*

$$\text{Normal} \subset \text{Quasi-normal} \subset \text{Hyponormal}.$$

Théorème 3.1.1 [5] *Si A est quasi-normal et $\sigma(A)$ n'a pas d'intérieur, alors A est normal.*

Théorème 3.1.2 [12] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$*

$$A \text{ est hyponormal} \not\Rightarrow A^2 \text{ est hyponormal}.$$

S. Berbérien a dit q'un opérateur doit être subnormale si tous ses puissances sont hyponormaux. mais J. G. Stampfli [12] donne une réponse négative à cette question. soit $\{f_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ une base orthonormale pour H et définir

$$Af_i = \begin{cases} f_{i+1}, & i \leq 0 \\ 2f_{i+1}, & i > 0 \end{cases}.$$

alors $A^k f_i = b_{i,k} f_{i+k}$ là où $|b_{i,k}| \leq |b_{i+1,k}|$, donc A^k est hyponormal pour $k = 1, 2, \dots$

Depuis

$$\|Af_0 = A^*f_0\| \text{ mais } \|A^*Af_0\| \neq \|A^2f_0\|,$$

nous devons conclure que A n'est pas subnormale.

Théorème 3.1.3 [20] *Soit A un opérateur hyponormal avec $A^n = B$, où n est un entier positif et B est un opérateur normal ; alors A est normal.*

3.1.3 Opérateurs p -hyponormaux

Définition 3.1.3 Soit A un opérateur borne, on dit que A est p -hyponormal si

$$(AA^*)^p \leq (A^*A)^p, \forall p \geq 0$$

Remarque 3.1.3 Si $p = 1$, A est hyponormal et si $p = \frac{1}{2}$ A est semi-hyponormal

Théorème 3.1.4 (Inégalité de Hansen [13]) si $A \geq 0$ et $\|B\| \leq 1$, alors

$$(B^*AB)^p \geq (B^*A^pB)$$

pour $0 \leq p \leq 1$.

Théorème 3.1.5 [5] soit $0 \leq p \leq 1$. soit A un opérateur p -hyponormal. les inégalités

$$(A^{n*}A^n)^{\frac{p}{n}} \geq (A^*A)^p \geq (AA^*)^p \geq (A^nA^{n*})^{\frac{p}{n}}$$

pour tout entier positif n .

Preuve. soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A . Pour chaque entier positif n , soit $A_n = (A^{n*}A^n)^{\frac{p}{n}}$ et $B_n(A^nA^{n*})^{\frac{p}{n}}$ Nous utiliserons l'induction pour établir les inégalités

$$A_n \geq A_1 \geq B_1 \geq B_n. \quad (2.1)$$

Les inégalités (2.1) sont clairement valables pour $n = 1$. Supposons (2.1) maintenir pour $n = k$. L'induction et l'hypothèse selon laquelle A est p -hyponormale impliquent

$$U^*A_nU \geq U^*A_1U \geq A_1.$$

Steurs Normaloïd

3.2 Opérateurs normaloïds

Définition 3.2.1 Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est normaloïde si $r(A) = \|A\|$, où

$$r(A) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

est le rayon spectral de A .

Proposition 3.2.1 [5] $r(A) = \|A\|$ si et seulement si $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Théorème 3.2.1 [5] tout opérateur hyponormal est normaloïde

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur hyponormal sur un espace de Hilbert H .

Revendication 1 $\|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \|A^{n-1}\|$ pour tout entier positif n .

pour chaque $n \geq 1$ et chaque $x \in H$. Maintenant si A est hyponormal, alors

$$\|A^n x\|^2 = (A^n x, A^n x) = (A^* A^n x, A^{n-1} x) \leq \|A^* A^n x\| \|A^{n-1} x\|$$

et donc pour chaque $n \geq 1$

$$\|A^n x\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \|A^{n-1}\| \|x\|^2$$

qui assure le résultat revendiqué, complétant ainsi la preuve de la revendication 1.

Revendication 2 $\|A^n\| = \|A\|^n$ pour tout $n \geq 1$.

Le résultat ci-dessus est trivial si $A = 0$ et il l'est également pour $n = 1$. Soit $A \neq 0$ et supposons que le résultat ci-dessus soit valable pour un entier $n \geq 1$: selon la revendication 1, nous obtenons

$$\|A\|^{2n} = (\|A\|^n)^2 = \|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \|A^{n-1}\| \leq \|A^{n+1}\| \|A\|^{n-1}.$$

Par conséquent, comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, et puisque $A \neq 0$,

$$\|A\|^{n+1} = \|A\|^{2n} (\|A\|^{n-1})^{-1} \leq \|A^{n+1}\| \|A\|^{n+1}.$$

donc $\|A^{n+1}\| = \|A\|^{n+1}$. Ensuite, le résultat revendiqué est valable pour $n + 1$ à chaque fois qu'il est valide pour n , qui conclut la preuve de la revendication 2 par induction.

Donc $\|A^n\| = \|A\|^n$ pour chaque entier $n \geq 1$ selon la revendication 2, et donc A est normaloïde.

Depuis $\|A^{*n}\| = \|A^n\|$ pour chaque $n \geq 1$; il s'ensuit que $r(A^*) = r(A)$. donc un opérateur A est normaloïde si et seulement si son adjoint A^* est normaloid, et ainsi chaque opérateur seminormal est normaloïde.

Proposition 3.2.2 [5] *Un opérateur A est normaloïde si et seulement si*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Ax, x \rangle|\}.$$

Définition 3.2.2 *Pour un sous-ensemble convexe X du plan, un point $\lambda \in X$ est nu si il y a un cercle tel qu'aucun point de X ne soit en dehors de ce cercle.*

Théorème 3.2.2 [18] *Soit A un opérateur tel que $(A - \lambda I)$ est normaloïde pour tout numéro complexe λ , alors nous avons*

$$\overline{W(A)} = co \sigma(A).$$

où $co \sigma(A)$ désigne la coque convexe de $\sigma(A)$.

Pour prouver le théorème énoncé ci-dessus, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.1 [5] *Soit A un opérateur et $\lambda \in \overline{W(A)}$ un point de $\overline{W(A)}$, alors il*

existe un nombre complexe λ_0 satisfaisant

$$|\lambda - \lambda_0| = \sup \left\{ |\mu - \lambda_0| : \mu \in \overline{W(A)} \right\}.$$

Lemme 3.2.2 [5] *Soit C un sous-ensemble convexe compact non vide du plan et S soit la collection de tous ses points nus. Alors C est la coque convexe fermée de S . Pour plus de commodité, nous énonçons le résultat connu suivant sous la forme d'un lemme.*

Lemme 3.2.3 [16] *pour un opérateur A , et $\lambda \in \overline{W(A)}$, et $\|\lambda\| = \|A\|$ implique $\lambda \in \sigma(A)$.*

Preuve de théorème. Il suffit de montrer que chaque point nu de $\overline{W(A)}$ appartient à

Corollaire 3.2.1 *Si un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est compact et normaloïde, alors $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ et il existe $\lambda \in \sigma_p(A)$ tel que $\|\lambda\| = \|A\|$.*

Théorème 3.2.3 [15] *Chaque opérateur hyponormal compact est normal*

Preuve. voir [5,p41]

3.3 Opérateurs paranormaux

Dans cette section, nous discutons d'une classe d'opérateurs paranormaux. Dans [14], cela s'appelle un opérateur de classe (N). nous montrons que cette classe contient les opérateurs hyponormaux et inclus dans la classe des opérateurs normaloids.

3.3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.3.1 *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est paranormal si $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$ pour chaque vecteur unitaire x dans H .*

Proposition 3.3.1 *Tout opérateur hyponormal est paranormal.*

Preuve. en effet,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^2x\|$$

Théorème 3.3.1 [5] *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Si A est paranormal alors*

- 1) A est normaloid.
- 2) A^{-1} est également paranormal si A est inversible.

Lemme 3.3.1 *Soit A un opérateur paranormal, alors*

$$\|A^3x\| = \|A^2x\| \|Ax\| \tag{1}$$

Preuve. pour chaque vecteur unitaire x en H , tel que $Ax \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|A^3x\| &= \|Ax\| \left\| A^2 \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \geq \|Ax\| \left\| A \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\|^2 \\ &= \frac{\|A^2x\|^2}{\|Ax\|} \geq \frac{\|A^2x\| \|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \|A^2x\| \|Ax\| \end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.2 *Soit A un opérateur paranormal, alors*

$$\|A^{k+1}x\|^2 \geq \|A^kx\|^2 \|A^2x\| \tag{P_k}$$

Lemme 3.3.3 pour un entier positif $k \geq 1$, et chaque vecteur unité x dans H .

Preuve. Pour le cas $k = 1$

$$\|A^2x\|^2 = \|A^2x\| \|A^2x\| \geq \|A^2x\| \|Ax\|^2$$

et (P_1) est clair. maintenant Supposons que (P_k) est valide pour k et que nous supposons que $\|Ax\| \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} \|A^{k+2}x\|^2 &= \|Ax\|^2 \left\| A^{k+1} \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\|^2 \\ &\geq \|Ax\|^2 \left\| A^k \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\|^2 \left\| A^2 \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\geq \|A^{k+1}x\|^2 \left\| \frac{A^2x}{\|Ax\|} \right\| \\ &\geq \|A^{k+1}x\|^2 \|A^2x\| \end{aligned}$$

par de Lemme (3.3.1) et (P_k) . Donc (P_{k+1}) est valide et la preuve est complète par le calcul induction mécanique.

Théorème 3.3.2 [8] Si A est un opérateur paranormal, alors A^n est paranormal pour

chaque entier $n \geq 1$.

Preuve. est suffisant pour montrer que si A et A^k est paranormal, alors A^{k+1} est paranormal

aussi. Nous pouvons supposer $\|A^2x\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \|A^{2(k+1)}x\|^2 &= \|A^2x\|^2 \left\| A^{2k} \frac{A^2x}{\|A^2x\|} \right\|^2 \\ &\geq \|A^2x\|^2 \left\| A^k \frac{A^2x}{\|A^2x\|} \right\|^2 \\ &\geq \frac{\|A^{k+2}x\|^2}{\|A^2x\|} \\ &\geq \frac{\|A^{k+1}x\|^2 \|A^2x\|}{\|A^2x\|} \\ &= \|A^{k+1}x\|^2 \end{aligned}$$

par (P_{k+1}) de Lemma (3.3.2). Donc A^{k+1} est paranormal.

Il existe un opérateur paranormal qui n'est pas hyponormal. C'est-à-dire que la classe des opérateurs hyponormaux sont correctement inclus dans la classe des opérateurs paranormaux. Dans [12] Halmos donne un exemple d'opérateur hyponormal A tel que A^2 n'est pas hyponormal.

Par le théorème 3.3.2, ce A est paranormal. Nous obtenons donc un exemple de non hyponormal, dans le théorème 3.2.3, nous prouvons que tout opérateur hyponormal compact est nécessairement normal, le théorème suivant en est une légère généralisation.

Théorème 3.3.3 [14] *Soit A un opérateur paranormal tel que $A^{*p_1} A^{q_1} \dots A^{*p_m} A^{q_m}$*

est compact pour certains entiers non négatifs $p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$. Alors A est nécessairement un opérateur normal.

3.3.2 Opérateurs k -paranormaux

Définition 3.3.2 *Un opérateur A est k -paranormal, si A satisfait*

$$\|A^{k+1}x\| \geq \|Ax\|^{k+1}$$

pour tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$.

Proposition 3.3.2 [7] *Si un opérateur paranormal A a une puissance compacte A^k , alors A est compact. Cependant, ceci n'est pas vrai pour les opérateurs normaloid en général.*

Preuve. Supposons que

$$\|x_\alpha\| \rightarrow 0 \quad (\text{faiblement}), \quad \|x_\alpha\| \leq 1.$$

Puisque A est $(k-1)$ -paranormal, puis

$$\|A^k x_\alpha\| \geq \frac{\|Ax_\alpha\|^k}{\|x_\alpha\|} \geq \|Ax_\alpha\|^k,$$

ce qui nous dit que Ax_α converge fortement vers 0, puisque $\|A^k x_\alpha\| \rightarrow 0$ par la compacité de A .

Par conséquent, A est compact.

Pour prouver la moitié restante du théorème, posons $H = \ell^2$. Définir un opérateur A par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

en ce qui concerne la base orthonormale

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$$

Ensuite, on peut facilement en déduire

$$Ae_i = \begin{cases} e_1 & (i = 1) \\ e_{i+1} & (i = 2j) \\ 0 & (i = 2j + 1) \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

Donc

$$\|A\| = 1 \quad \text{et} \quad A^k = P \quad (k \geq 2)$$

où P est la projection appartenant au sous-espace couvert par les multiples scalaires de e_1 . Donc,

$$\|A^k\| = \|A\|^k = 1$$

pour tout k , ce qui montre que A est un normaloïde.

Depuis $A^k = P$ pour $k \geq 2$, A^k est compact pour $k \geq 2$, alors que A n'est pas compact puisque l'image de A contient un ensemble orthonormal infini $\{e_i ; i = 1, 3, 5, \dots\}$. La seconde moitié du théorème est maintenant prouvée.

Conclusion

Le présent travail a permis de traiter la classe des opérateurs paranormaux, on a commencé par étudier quelques propriétés de ces opérateurs, par exemple, si A est paranormal et inversible alors A^{-1} est également paranormal. D'autre par si A est paranormal alors A^n est également paranormal par contre cette propriété n'est pas vérifiée dans la classe des opérateurs hyponormaux car si A est hyponormal, A^2 n'est pas hyponormal. Et enfin on a discuté sur les relations entre sa classe et les classes des opérateurs normaux et non-normaux et on trouve que la classe des opérateurs paranormaux contient les opérateurs hyponormaux et inclus dans la classe des opérateurs normaloïds. C'est à dire

$$\text{normal} \subset \text{hyponormal} \subset \text{paranormal} \subset \text{normaloïd}$$

Les perspectives de recherche dans le domaine traité ici dans ce mémoire sont nombreuses, on peut citer quelques unes:

- Etudier la classe des opérateurs paranormaux dans le cas des opérateurs non bornés.
- Etudier la théorie spectrale de cette classe.

Bibliographie

- [1] M. Akkouchi, Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space, An. St. Univ. Ovidius Constanta. 16/2 (2008), 7-14.
- [2] A. ALUTHGE and D. WANG, Powers of p -hyponormal operators, J. of Inequal. Appl., 3 (1999), 279-284.
- [3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.
- [4] C. Chellali, commutativité à un facteur près, thèse de doctorat, Université d'Oran1 2015.
- [5] S. Dehimi, operators similar to their adjoints, thèse de doctorat, Université d'Oran1 2017.
- [6] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part II, Wiley, New York, 1971
- [7] T. FURUTA, M. HORIE and R. NAKAMOTO : A remark on a class of operators. Proc. Japan Acad., 43, 607-609 (1967).
- [8] T. FURUTA, On the class of paranormal operators, Proc. Japan Acad. 43 (1967) 594-598.
- [9] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, Basic of Classes of Linear Operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003
- [10] D. Guemari, N. Boulifa, théorie spectrale des quelques classes d'opérateurs, thème de master académique, Université d'EL-oued, 2014.

- [11] M. Guesba, traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf-M'sila 2017.
- [12] P. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, Summa Brasil. Math. 2 (1950), 125-134
- [13] F. HANSEN, An operator inequality, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.
- [14] V. Istratescu, T. Saitô, and T. Yoshino: On a class of operators. TShoku. Math. Journ, 18, 410-413 (1966).
- [15] V. ISTRATESCU, On some hyponormal operators, Pacific J. Math. 22 (3) (1967) 413-417
- [16] C. S. KUBRUSLY, Spectral theory of operators on Hilbert spaces. New York, NY, USA: Birkh® auser, 2012
- [17] G. H. ORLAND, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc, 15(1964), 75-79
- [18] T. SAITO and T. YOSHINO, On a conjecture of Berberian. Tohoku. Math. Journ, 17, 147-149(1965).
- [19] A. SMATI, Etude des conditions entre les opérateurs compacts, normaux et positifs, thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf-M'sila, 2018.
- [20] J.G. STAMPFLI, Hyponormal operators and spectral density, Trans. Amer. Math. Soc. 117(1965), 469-476. MR 33:4686
- [21] J.G. STAMPFLI, Hyponormal operators, Pacific J. Math, 12 (1962), 1453-1458.

ملخص

درسنا في المذكرة صنف المؤثرات الشبه ناظمية وهذا لما له من أهمية في الدراسات الرياضية حيث تم تسليط الضوء على مبرهنات وخصائص المؤثرات الشبه ناظمية وعلاقتها بالمؤثرات الناظمية والغير ناظمية.

الكلمات المفتاحية

- المؤثرات الناظمية
- المؤثرات الشبه ناظمية
- المؤثرات المتراصة

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié la classe des opérateurs paranormaux, qui est à une importance dans les études mathématiques, notamment l'étude des définitions et propriétés des opérateurs paranormaux et ses relations avec les opérateurs normaux et non-normaux.

Mots clés

- opérateurs paranormaux
- opérateurs hyponormaux
- opérateurs normaloïds

ABSTRACT

In this memory, we have studied the subject on the classes of paranormal operators. This study is important in mathematics domains and we show a definitions and properties of paranormal operators and its relationship with normal operators and non-normal.

Key words

- paranormals operators
- hyponormals operators
- normaloïds operators