



N° d'ordre :

THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat de Troisième Cycle (LMD)*

Domaine

Mathématiques et Informatique

Spécialité

Algèbre et Mathématiques Discrète

Par

MOHAMED ANOUAR RAKDI

Thème

Classification des trivecteurs de rang 8 sur un corps fini et applications

Soutenu le devant le jury composé de :

Lemnaouar ZEDAM	Prof.	Université de M'sila	Président
Noureddine MIDOUNE	M.C.A.	Université de M'sila	Directeur de thèse
Douadi MIHOUBI	Prof.	Université de M'sila	Examineur
Abdelaziz AMROUNE	Prof.	Université de M'sila	Examineur
Soheyb MILLES	M.C.A.	Centre universitaire de Barika	Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

UNIVERSITÉ DE MSILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

**CLASSIFICATION DES TRIVECTEURS DE RANG 8
SUR UN CORPS FINI ET APPLICATIONS**
**"CLASSIFICATION OF TRIVECTORS OF RANK 8
OVER A FINITE FIELD AND APPLICATIONS"**

RAKDI MOHAMED ANOUAR

THÈSE SOUMISE POUR RÉPONDRE AUX
EXIGENCES DU DEGRÉ DE
DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021

Table des matières

Remerciements	iv
Liste des tableaux	v
Notations	vi
Introduction	1
1 Préliminaires	4
1.1 Produit tensoriel et produit extérieure	4
1.1.1 L'action de $GL(V)$ sur $Alt_3(V)$ ou $\wedge^3 V$	6
1.1.2 Support et rang	7
1.1.3 Trivecteur décomposable	7
1.1.4 Eléments scindables	7
1.2 Invariants et trivecteurs	8
1.2.1 Groupes d'automorphismes	8
1.2.2 Commutant	10
1.2.3 Polynôme radical	14
1.3 Systèmes projectifs et codes de Grassmann	15
1.3.1 Système projectif	15
1.3.2 Codes de Grassmann	16
2 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs de di-	

mension ≤ 8	20
2.1 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en	
dimension 6	21
2.1.1 Spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 6	22
2.2 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en	
dimension 7	23
2.2.1 Classification des trivecteurs en dimension 7	23
2.3 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en	
dimension 8	26
2.3.1 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivec-	
teurs dégénérées	28
2.3.2 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivec-	
teurs non dégénérées	30
3 Spectre des codes associés à la variété grassmannienne $G(3,7)$	32
3.1 Poids des codes des trivecteurs en dimension 7	32
3.1.1 Poids des codes des trivecteurs dégénérées	34
3.1.2 Poids des codes des trivecteurs non dégénérées	36
4 Poids des codes des trivecteurs 2-scindables de rang 8 sur un corps fini	49
4.1 Poids des code des trivecteurs dégénérées (trivecteurs de rang < 8) . .	49
4.2 Poids des codes des trivecteurs 2-scindables non dégénérées (trivecteurs	
de rang 8)	50
4.2.1 Poids des codes sur \mathbb{F}_q^8	53
Conclusions générales	62
Bibliographie	63

Remerciements

En tout premier lieu, louanges à Dieu, le tout puissant, pour tous ces bienfaits, celui qui m'a créé et qui m'a donné ce rare privilège et la force de réaliser mon rêve d'enfance : celui d'atteindre la plus haute distinction académique.

En second lieu, je remercie mes très chers parents et sœurs qui m'ont tout donné et m'ont soutenu depuis toujours auxquels je dois reconnaissance et fierté.

J'adresse également mes sincères remerciements à mon enseignant Mr. Noureddine Midoune qui m'a guidé dans mon travail au long de cette thèse.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions. Il s'agit de :

Mr. Lemnaouar Zedam Mr. Douadi Mihoubi Mr. Abdelaziz Amroune Mr. Soheyb
Milles

Je tiens surtout à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs de l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila qui m'ont enseigné et qui m'ont soutenu pour la poursuite de mes études.

Mes remerciements vont également à l'encontre de tous mes amis qui par leur prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Merci, enfin à toute personne qui a participé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Liste des tableaux

2.1 Trivecteurs de rang ≤ 6 sur \mathbb{F}_q .	21
2.2 Trivecteurs de rang ≤ 7 sur \mathbb{F}_q .	24
2.3 Groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang ≤ 7 .	25
2.4 Cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang ≤ 7 .	25
2.5 Cardinaux d'orbites des trivecteurs de rang ≤ 7 .	26
2.6 Les trivecteurs de rang 8 sur un corps fini de caractéristique différent 2 et 3.	27
2.7 Les invariants des trivecteurs de rang 8 sur un corps fini.	28
2.8 Cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang < 8 .	29
2.9 Cardinaux d'orbites des trivecteurs de rang < 8 .	29
2.10 Cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang 8 de	
caractéristique différent 2 et 3.	30
2.11 Cardinaux d'orbites des trivecteurs de rang 8 de caractéristique différent	
2 et 3.	31
4.1 Trivecteurs 2-scindables de rang 8 sur un corps fini de caractéristique	
différent de 3.	52
4.2 La variété $X_1(\omega_{8,i})$.	53
4.3 La variété $X_2(\omega_{8,i})$.	57
4.4 Poids et spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 8 .	63

Notations

- S_ω support d'un trivecteur ω .
- $Aut(\omega)$ groupe de automorphisme de ω .
- \mathbb{F}_q corps fini à q élément.
- $G_2(\mathbb{F}_q)$ groupe de Chevalley.
- $O(\omega)$ l'orbite de ω .
- $C(\omega)$ le commutant de ω .
- $p(\omega)$ le polynôme radical de ω .
- \mathbb{P}^{k-1} l'espace projectif de dimension $k - 1$ sur \mathbb{F}_q .
- $V(n, q)$ l'espace vectoriel de dimension n sur un corps fini \mathbb{F}_q .
- $G(p, n)$ variété de Grassmann (ou Grassmannienne) de dimension p dans un espace vectoriel V dimension n .
- $GL(n, q)$ groupe linéaire sur un corps fini \mathbb{F}_q .
- $|GL(n, q)| = [n]_q$ cardinal de groupe linéaire $GL(n, q)$.
- $e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_p$ indique $e_1 e_2 \dots e_p$.
- $wt(\omega)$ poids du code de ω .
- $A(\omega)$ spectre de ω .

Introduction

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K . La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 V$. Comme $\wedge^3 V^* \simeq (\wedge^3 V)^*$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées ou trivecteurs.

Pour classifier les trivecteurs, on utilisera le plus souvent les invariants, par exemple, le groupes d'automorphisme d'un trivecteur ω , $Aut(\omega)$, car, deux trivecteurs ω_1 et ω_2 sont équivalents si et seulement si leurs groupes d'automorphismes $Aut(\omega_1)$ et $Aut(\omega_2)$ le sont. Plusieurs auteurs ont étudié les formes trilinéaires alternées.

Pour $n \leq 7$, la classification est complètement déterminé par plusieurs auteurs, par exemple A.M.Cohen et A.G. Helminck [4].

Pour $n = 8$, cette classification est déterminé dans le cas où $K = \mathbb{R}$ [5], \mathbb{C} [6], K (algébriquement clos) [17], \mathbb{F}_q de caractéristiques différentes de 2 et 3 [12, 18] et \mathbb{F}_2 [21].

Cette classification joue un rôle important dans la théorie des codes [8, 15, 20, 22, 30] et les courbes elliptiques généralisée CCEG [1].

Les codes de Grassmann sont des codes linéaires associés au variété Grassmannienne $G(p, n)$ des sous-espaces de dimension p dans l'espace vectoriel \mathbb{F}_q^n de dimension n . Un système projectif $[m, k]$ est un ensemble de m points (pas nécessairement distincts) dans l'espace projectif \mathbb{P}^{k-1} de dimension $k - 1$ sur \mathbb{F}_q il est appelé non dégénérée s'il n'est contenu dans aucun hyperplan. On utilise le système projectif pour définir

les codes de Grassmann $C(p, n)$ donné par le plongement de plücker de $G(p, n)$ dans $\mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{F}_q^n)$ et par les paramètres m et k des codes $C(p, n)$:

$$m = |G(p, n)| = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-p+1} - 1)}{(q^p - 1)(q^{p-1} - 1) \cdots (q - 1)},$$

$$k = \binom{n}{p},$$

$$d = q^{p(n-p)}.$$

Pour $p = 3$, soit ω le trivecteur correspondant à un mot de code de $C(3, n)$, et soit \mathcal{H} l'hyperplan correspondant le poids du mot de ω est définie par :

$$\text{wt}(\omega) = |\{P_i : 1 \leq i \leq n, P_i \notin \mathcal{H}\}|.$$

Il existe une relation entre les classes d'équivalences des systèmes projectifs $[m, k]$ non dégénérées et les classes d'équivalences des codes linéaires $[m, k]$ non dégénérées. On peut décrire ces codes en utilisant la correspondance entre les codes linéaires et les systèmes projectifs de ces codes sont décrits [29].

Les codes de Grassmann ont été introduits par C.Ryan [26] pour $q = 2$, et par D.Y.Nogin [14] pour q quelconque, le spectre des poids de $C(2, n)$ et $C(3, 6)$ a été déterminé aussi par D.Y.Nogin dans [14, 15], et $C(3, 7)$ par K.V.Kaipa et H.K.Pillai dans [20], les poids des codes des trivecteurs 2-scindables de rang 8 a été déterminer par M.A. Rakdi et N.Midoune dans [22].

Dans cette thèse, nous étudions :

- * La classifications des trivecteurs de rang 8.
- * Application : nous utilisons cette classifications pour déterminer les poids des codes des trivecteurs de rang ≤ 8 .

Dans le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les notions produit extérieure, scindabilité, invariants, groupe d'automorphismes, commutant et polynôme radical. Nous rappelons quelques définitions et propriétés de systèmes projectifs et des codes de Grassmann, nous reprendrons le résultat qui nous donne la correspondance entre les systèmes projectifs non dégénérées et les codes linéaires non dégénérées.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons l'essentiel des résultats déjà connu sur

la classification des trivecteurs (les formes trilinéaires alternées) dans un espace de dimension ≤ 8 . Nous donnons aussi les cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs, on calcule le cardinal de chaque groupe ensuite on déduit le cardinal de chaque orbite.

L'étude de spectre des codes sont liée à celle des cardinaux des d'orbites des trivecteurs.

Dans le troisième chapitre, nous reprendrons un résultat connu dans [20] qui donne les poids et spectres des codes des trivecteurs dans un espace de dimension 7 sur un corps fini.

Dans le dernier chapitre, nous présentons un résultat nouveau concernant la détermination des poids des codes des trivecteurs 2-scindables dans un espace de dimension 8.

Les notions non redéfinies proviennent de [4, 7, 11, 13, 14].

PRÉLIMINAIRES

Nous rappelons quelques généralités sur le produit tensoriel et produit extérieure, système projectif et code de Grassmann [2],[14].

1.1 Produit tensoriel et produit extérieure

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K .

Définition 1. *Il existe un espace vectoriel sur V , notée $V \otimes V$ qui se lit V tenseur V et une application bilinéaire :*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : V \times V &\rightarrow V \otimes V \\ (u, v) &\mapsto \varphi_1(u, v) \end{aligned}$$

tel que, pour toute forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} \varphi_2 : V \times V &\rightarrow K \\ (u, v) &\mapsto \varphi_2(u, v) \end{aligned}$$

il existe une unique forme linéaire $\varphi : V \otimes V \rightarrow K$ telle que :

$$\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1.$$

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\forall \varphi_2 K} & \\ \exists \varphi_1 \downarrow & \nearrow \exists! \varphi & \\ V \otimes V & & \end{array}$$

l'ensemble des formes bilinéaires de $V \times V$ dans K , s'identifie l'ensemble des formes linéaires de $V \otimes V$ dans K

$$\varphi_1(V \times V, K) \simeq (V \otimes V, K)$$

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi$$

et cette propriété caractérise $V \otimes V$.

On pose $T^3(V) = V \otimes V \otimes V = \otimes^3 V$.

Définition 2. On note $\Lambda^3 V$ le quotient de $T^3(V)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ où $v_i = v_j$ pour 2 indices $i \neq j$.

On appelle $\Lambda^3 V$ la puissance extérieure 3-ième de V .

On note $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = \overline{v_1 \otimes v_2 \otimes v_3}$ qui se lit v_1 extérieur v_2 extérieur v_3 .

Remarques 1.

1) Pour $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ c'est-à-dire le produit extérieur n'est pas commutative.

2) En particulier, $\Lambda^0 V = K$, $\Lambda^1 V = V$.

Corollaire 1.

Soit V un K -espace vectoriel de base $B = (e_1, \dots, e_n)$, alors

$$(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_3})_{1 \leq j_1 < \dots < j_3 \leq n}$$

est une base de $\Lambda^3 V$ et

$$\dim \Lambda^3 V = C_n^3.$$

En particulier,

$$\dim \Lambda^n K^n = 1 \text{ et } \dim \Lambda^3(V) = 0 \text{ si } n < 3.$$

Définition 3. Une forme trilinéaire φ de V^3 dans K est dite alternée si pour tout $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ vérifiant :

$$\exists i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, v_i = v_j, \text{ alors } \varphi(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

Notons $Alt_3(V)$ l'espace des formes trilinéaires alternées.

Théorème 1. Pour tout espace vectoriel V sur K , il existe une unique forme linéaire $\omega : \wedge^3 V \rightarrow K$ détermine une forme trilinéaire alternée $\omega_1 : V^3 \rightarrow K$ par l'intermédiaire de

$$\begin{array}{ccc} (v_1, v_2, v_3) \in V^3 & \xrightarrow{\forall \omega_1} & K \\ \omega_2 \downarrow & \nearrow \exists! \omega & \\ v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \in \wedge^3 V & & \end{array}$$

tel que :

$$\omega_1 = \omega \circ \omega_2$$

$$\omega_2(v_1, v_2, v_3) = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

$$\omega(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \omega_1(v_1, v_2, v_3)$$

L'application $\omega \mapsto \omega_1$ est un isomorphisme alors

$$[\wedge^3 V]^* \simeq \wedge^3 V^* \simeq \text{Alt}_3(V).$$

1.1.1 L'action de $GL(V)$ sur $\text{Alt}_3(V)$ ou $\wedge^3 V$

Définition 4. L'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace des formes trilinéaires alternées $\text{Alt}_3(V)$, est définie par :

Pour $f \in GL(V)$ et $\omega : V^3 \rightarrow K$ une forme trilinéaire alternée, on a :

$$f \cdot \omega(v_1, v_2, v_3) = \omega(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous $f_1, f_2 \in GL(V)$, ω une forme trilinéaire alternée

1. $(f_1 \circ f_2) \cdot \omega = f_1 \cdot (f_2 \cdot \omega)$

2. $Id_V \cdot \omega = \omega$.

Définition 5. L'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 V$, est définie par : pour tous $f \in GL(V)$, $\omega \in \wedge^3 V$, $f \cdot \omega = (\wedge^3 f)(\omega)$ où $\wedge^3 f$ est un endomorphisme de $\wedge^3 V$, définie par :

$$\wedge^3 f(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = f(v_1) \wedge f(v_2) \wedge f(v_3).$$

Du fait des isomorphismes $\wedge^3 V^* \simeq (\wedge^3 V)^*$ on emploiera indifféremment le langage des formes alternées ou des trivecteurs.

L'étude est essentiellement consacrée au cas $n = 8$ et $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini, c'est-à-dire l'action de $GL_8(\mathbb{F}_q)$ sur $\wedge^3 \mathbb{F}_q^8$.

1.1.2 Support et rang

Soit ω un trivecteur de $\wedge^3 V$. On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de V tel que $\omega \in \wedge^3 F$, sa dimension est le rang de ω , noté $rg(\omega)$.

Exemple 1. Pour $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $rg(\omega) = 3$.

- Soit $\omega \in \wedge^3 V^*$ une forme trilinéaire alternée, le radical de ω est :

$$Rad(\omega) = \{v_1 \in V, \omega(v_1, v_2, v_3) = 0, \forall v_2, v_3 \in V\}.$$

- Si $Rad(\omega) = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

Exemple 2. Si $V = K^6$ et $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6$, $rg(\omega) = 6$ et $Rad(\omega) = \{0\}$, donc ω est non dégénérée.

1.1.3 Trivecteur décomposable

Soit ω un trivecteur de $\wedge^3 V$. On dit que ω décomposable s'il existe v_1, v_2 et v_3 dans V tel que $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$.

Dans ce cas le support de ω est le sous-espace vectoriel F engendré par v_1, v_2 et v_3 , $S_\omega = \text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, c'est à dire $\dim S_\omega = 3$ car $\{v_1, v_2, v_3\}$ est un système libre puisque $\omega \neq 0$.

Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.

1.1.4 Éléments scindables

Pour $V = V_1 \oplus V_2$.

On dit que $\omega \in \wedge^3 V$ est scindable s'il existe V_1 et V_2 supplémentaires dans V tel que $\omega \in V_1 \otimes \wedge^2 V_2$.

Si $\dim V_1 = 2$, on dit que ω est 2-scindable.

Exemple 3. Soit $\omega \in \wedge^3 V$, tel que : $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 = e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) + e_4 \wedge (e_5 \wedge e_6) = e_1 u_1 + e_2 u_2$ donc ω est 2-scindable.

1.2 Invariants et trivecteurs

Pour classifier les trivecteurs il est nécessaire d'utiliser les invariants nous utilisons 3 invariants : groupe d'automorphisme, commutant et polynôme radical.

1.2.1 Groupes d'automorphismes

Soit $\omega \in \wedge^3 V$, le groupe des automorphismes de ω , noté $Aut(\omega)$, est le sous-groupe de $GL(V)$ des automorphismes de V qui laissent ω invariant :

$$Aut(\omega) = \{f, f \in GL(V) \mid \wedge^3 f(\omega) = \omega\}.$$

L'orbite de ω par $GL(V)$ est en bijection avec l'ensemble des classes à droite $GL(V)/Aut(\omega)$.

Exemples 1.

1. Soit V un K -espace vectoriel, avec $\dim V = 3$.

Si $\omega_3 \in \wedge^3 V - \{0\}$, il existe une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V telle que $\omega_3 = e_1 e_2 e_3$.

Soit $f \in Aut(\omega_3)$, alors $\wedge^3 f(\omega_3) = \omega_3$, donc

$$f(e_1 e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3,$$

et d'autre part

$$f(e_1 e_2 e_3) = f(e_1) \wedge f(e_2) \wedge f(e_3) = \det_f e_1 e_2 e_3,$$

ce qui donne $\det_f = 1$ c-à-d $Aut(\omega_3) = SL_3(K)$.

2. Soit V un K -espace vectoriel de dimension 6, calculons le groupe d'automorphisme de $\omega_{6,1}$,

$$A_{6,1} = Aut(\omega_{6,1}),$$

$$\text{où } \omega_{6,1} = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6.$$

l'ensemble $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \cup \langle e_4, e_5, e_6 \rangle = V_1 \cup V_2$ est une partie stable pour $f \in A_{6,1}$ i.e. $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$ et comme $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, donc $\{f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2\}$ ou $\{f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1\}$,

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes φ

$$\begin{aligned} \varphi : A_{6,1} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f &\longmapsto \varphi(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \\ 0 & \text{si } f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Cela permet de définir la suite exacte :

$$1 \longrightarrow A' \longrightarrow A_{6,1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

où $A' = \ker(\varphi) = \{f \in GL(V), \varphi(f) = 1\}$.

Évidemment pour $f \in A'$, donc $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$, on prend $f_1 = f|_{V_1}$ et $f_2 = f|_{V_2}$.

Donc la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = M_B(f_1), A_2 = M_B(f_2) \in GL_3(K)$$

Comme $f \in A_{6,1}$, alors $\wedge^3 f(\omega_{6,1}) = \omega_{6,1}$ ce qui donne $\wedge^3 f(e_1 e_2 e_3) + \wedge^3 f(e_4 e_5 e_6) = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6$, par suite

$$\det A_1 e_1 e_2 e_3 + \det A_2 e_4 e_5 e_6 = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6,$$

d'où $\det A_1 = \det A_2 = 1$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1, A_2 \in SL_3(K)$$

Alors $A' = SL_3(K) \times SL_3(K)$.

φ est surjective car, $\varphi(\text{id}_V) = 1$ et $\varphi(f_3) = 0$ avec f_3 est définie par : $\{f_3(e_1) = e_4, f_3(e_2) = e_5, f_3(e_3) = e_6, f_3(e_4) = e_1, f_3(e_5) = e_2, f_3(e_6) = e_3\}$.

Enfin nous déduisons la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow SL_3(K) \times SL_3(K) \longrightarrow A_{6,1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

d'où

$$Aut(\omega_{6,1}) = SL_3(K) \times SL_3(K) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

1.2.2 Commutant

Le deuxième invariant a été introduit par B.Kahn ([9]). Si $\omega \in \wedge^3 V^*$, on appelle commutant de ω et on note $C(\omega)$, l'ensemble des endomorphismes $f : V \longrightarrow V$ tel que :

$$\omega(f(v_1), v_2, v_3) = \omega(v_1, f(v_2), v_3) = \omega(v_1, v_2, f(v_3)), \text{ pour tout } v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Exemples 2.

1) Soit V un K -espace vectoriel de dimension 5, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ une base de V , soit $\omega \in \wedge^3 V$

$$\text{avec } \omega_5 = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_4 e_5,$$

$$C(\omega_5) = \{f : V \longrightarrow V, \omega(f(e_i), e_j, e_k) = \omega(e_i, f(e_j), e_k) = \omega(e_i, e_j, f(e_k)), 1 \leq i, j, k \leq 5\},$$

si $f \in C(\omega_5)$ alors la matrice associée à f est de la forme :

$$M(f) = \begin{matrix} f(e_1)f(e_2)f(e_3)f(e_4)f(e_5) \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 & \mu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 & \mu_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 & \mu_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \lambda_5 & \mu_5 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix}.$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)) \\ \text{et} \\ \omega(f(e_1), e_4, e_5) = \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5)). \end{array} \right.$$

Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_1, e_4, e_5) = 1 \\ \text{et} \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0. \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_2, e_3) &= \omega(e_1, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_3) \\ &= \omega(e_1, e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5) \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned} \star \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_2, e_3) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_2, e_3) + \alpha_2 \omega(e_2, e_2, e_3) + \alpha_3 \omega(e_3, e_2, e_3) \\ &\quad + \alpha_4 \omega(e_4, e_2, e_3) + \alpha_5 \omega(e_5, e_2, e_3) \\ &= \alpha_1 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star \omega(e_1, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_3) &= \beta_1 \omega(e_1, e_1, e_3) + \beta_2 \omega(e_1, e_2, e_3) + \beta_3 \omega(e_1, e_3, e_3) \\ &\quad + \beta_4 \omega(e_1, e_4, e_3) + \beta_5 \omega(e_1, e_5, e_3) \\ &= 0 + \beta_2 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star \omega(e_1, e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5) &= \gamma_1 \omega(e_1, e_2, e_1) + \gamma_2 \omega(e_1, e_2, e_2) + \gamma_3 \omega(e_1, e_2, e_3) \\ &\quad + \gamma_4 \omega(e_1, e_2, e_4) + \gamma_5 \omega(e_1, e_2, e_5) \\ &= \gamma_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3,$$

de

$$\omega(f(e_1), e_4, e_5) = \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5)),$$

i.e.

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_4, e_5) &= \omega(e_1, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5, e_5) \\ &= \omega(e_1, e_4, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5) \end{aligned}$$

donc

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_4, e_5) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_5) = \alpha_1$$

$$\omega(e_1, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5, e_5) = \lambda_4 \omega(e_1, e_4, e_5) = \lambda_4$$

$$\omega(e_1, e_4, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5) = \mu_5 \omega(e_1, e_4, e_5) = \mu_5$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \lambda_4 = \mu_5.$$

De même

$$\beta_1 = \gamma_1 = \lambda_1 = \mu_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = \lambda_2 = \mu_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \lambda_3 = \mu_3 = \alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = \mu_4 = \alpha_5 = \beta_5 = \gamma_5 = \lambda_5 = 0.$$

Finalement, la matrice associée à f prendra la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 I_5$$

d'où $C(\omega_5) = K$.

2) Soit $\omega_{6,2}$ le trivecteur $e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6$, calculons $C(\omega_{6,2})$:

Nous avons

$$\begin{cases} \omega(e_1, e_2, e_4) = \omega(e_2, e_3, e_5) = \omega(e_1, e_3, e_6) = 1 \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0. \end{cases}$$

Si $f \in C(\omega_{6,2})$ alors

$$\begin{cases} \omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(e_1, f(e_2), e_4) = \omega(e_1, e_2, f(e_4)) \\ \text{et} \\ \omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(e_2, f(e_3), e_5) = \omega(e_2, e_3, f(e_5)) \\ \text{et} \\ \omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(e_1, f(e_3), e_6) = \omega(e_1, e_3, f(e_6)) \end{cases}$$

la matrice associée à f dans la base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ est de la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \delta_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \delta_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \delta_6 \end{pmatrix}$$

par un calcul direct on trouve :

$$\omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(e_1, f(e_2), e_4) = \omega(e_1, e_2, f(e_4)) = \alpha_1 = \lambda_4 = \beta_2$$

$$\omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(e_2, f(e_3), e_5) = \omega(e_2, e_3, f(e_5)) = \beta_2 = \gamma_3 = \mu_5$$

$$\omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(e_1, f(e_3), e_6) = \omega(e_1, e_3, f(e_6)) = \alpha_1 = \gamma_3 = \delta_6$$

et

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \lambda_4 = \mu_5 = \delta_6 = \lambda, \quad \lambda \in K.$$

Nous avons aussi

$$\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3))$$

$$\Rightarrow \alpha_5 = -\beta_6 = \gamma_4 = \beta, \quad \beta \in K$$

$$\omega(f(e_i), e_j, e_k) = \omega(e_i, f(e_j), e_k) = \omega(e_i, e_j, f(e_k)) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = \gamma_6$$

$$= \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = \delta_1 = \delta_2$$

$$= \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0.$$

Donc, la matrice $M_B(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A = \lambda I_3$, $D = \lambda I_3$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$

où $\lambda, \beta \in K$,

désignons par $\varepsilon : V \longrightarrow V$ l'application linéaire définie par $\varepsilon(e_1) = e_5$, $\varepsilon(e_2) = -e_6$, $\varepsilon(e_3) = e_4$, $\varepsilon(e_i) = 0$, si $i \in \{4, 5, 6\}$, donc $f = \lambda id_V + \beta \varepsilon$, $\varepsilon^2 = \varepsilon \circ \varepsilon = 0$ ce qui prouve que $C(\omega_{6,2}) = K[\varepsilon]$, où $\varepsilon^2 = 0$.

1.2.3 Polynôme radical

Le troisième invariant a été introduit par Hora ([21]), le polynôme radical de ω . Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini \mathbb{F}_q et ω une forme trilinéaire alternée.

On fixe $v \in V$, on définit le radical $Rad_\omega(v)$ de v par :

$$Rad_\omega(v) = \{u \in V, \omega(v, u, z) = 0, \forall z \in V\}.$$

Le rang de v et le codimension de $Rad_\omega(v)$ dans V ,

$$\text{i.e. } r_\omega(v) = n - \dim Rad_\omega(v).$$

On pose

$$p(\omega) = \sum_{v \in V} x^{r(v)} y^{n-r(v)}.$$

$p(\omega)$ est un polynôme homogène de degré n , il s'écrit sous la forme :

$$p(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i},$$

avec $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = q^n$.

Exemple 4. Soit V un espace vectoriel de dimension 5 sur \mathbb{F}_2 , pour $\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5$.

Calculons $p(\omega_5) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i x^i y^{5-i}$ avec $\sum_{i=0}^4 \alpha_i = 2^5 = 32$.

$\dim Rad_{\omega_5}(0) = 5$, donc $r_{\omega_5}(0) = 0$, $\alpha_0 = 1$,

il existe 15 vecteurs :

$e_2, e_3, e_4, e_5, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5, e_2 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_5, e_2 + e_4 + e_5, e_3 + e_4 + e_5, e_2 + e_3 + e_4 + e_5$

où le radical est dimension 3 donc $r_{\omega_5}(v) = 2$, $\alpha_2 = 15$,

il existe 16 vecteurs :

$e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_5, e_1 + e_3 + e_4, e_1 + e_3 + e_5, e_1 + e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_5, e_1 + e_2 + e_4 + e_5, e_1 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$

où le radical est dimension 1 donc $r_{\omega_5}(v) = 4$, $\alpha_4 = 16$.

D'où le polynôme radical de ω_5 est :

$$p(\omega_5) = y^5 + 15x^2y^3 + 16x^4y, \quad \text{avec } 1 + 15 + 16 = 32 = 2^5.$$

1.3 Systèmes projectifs et codes de Grassmann

1.3.1 Système projectif

Le langage des systèmes projectifs ([28], Sec.1.12) est un outil pratique pour étudier les codes linéaires.

Définition 6. Un système projectif $[m, k]$ est un ensemble de m points (pas nécessairement distincts) de l'espace projectif \mathbb{P}^{k-1} de dimension $k - 1$ sur \mathbb{F}_q .

Définition 7. Deux systèmes sont équivalents s'il existe une transformation projectif du \mathbb{P}^{k-1} qui fait correspondre l'un d'eux à l'autre.

Définition 8. On appelle code de longueur m , de dimension k , un sous-espace vectoriel de \mathbb{F}_q^m . Les éléments de ce sous espace vectoriel C sont appelés les mots du code.

Définition 9. Un code C est non dégénérée s'il n'y a pas de i tel que $c_i = 0$ pour tous les mots de code $c = (c_1, \dots, c_m) \in C$.

Pour un code linéaire C de paramètres $[m, k]$, nous pouvons construire un système projectif associé comme suit : Considérons les formes x_i :

$$\begin{aligned} x_i : \quad C &\longrightarrow \mathbb{F}_q \\ (c_1, \dots, c_m) &\mapsto c_i \end{aligned}$$

Les restrictions $x_i|_C$ sont des fonctions linéaires sur C , c'est-à-dire des éléments de l'espace vectoriel dual C^* . Si le code est non dégénérée (c'est-à-dire que tous les $x_i|_C$ sont différents de zéro), alors les fonctions $x_i|_C$ fournissent m points \tilde{x}_i dans l'espace projectif $\mathbb{P}C = \mathbb{P}^{k-1}$.

Un mot de code non nul $c \in C$ correspond donc à un hyperplan $H(c) \subset \mathbb{P}^{k-1}$ et son poids est le nombre de formes des coordonnées, c'est-à-dire

$$wt(c) = |\{\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_i \notin H(c)\}|. \quad (1.1)$$

Pour la distance minimale d de ce code, nous avons

$$d = \min_H |\{\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_i \notin H\}| = m - \max_H |\{\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_i \in H\}|. \quad (1.2)$$

Inversement, étant donné un système projectif $\{x_1, \dots, x_m\}$ dans $\mathbb{P}^{k-1} = \mathbb{P}V$ on peut construire un code linéaire associé de la manière suivante : soulever arbitrairement chaque $x_i \in \mathbb{P}V$ en un vecteur $y_i \in V$ et considérer l'application suivante,

$$(y_1, \dots, y_m) : V^* \rightarrow \mathbb{F}_q^m.$$

Son image est un code. Si le système projectif n'est pas dégénéré, c'est-à-dire qu'il n'est pas contenu dans un hyperplan, alors le code ainsi obtenu est un $[m, k]$ -code .

Rappelons que les deux codes C_1 et C_2 sont appelés équivalents si C_1 peut être obtenu à partir de C_2 par transposition de coordonnées et multiplication par des éléments non nuls de \mathbb{F}_q .

Théorème 2. *Il existe une correspondance biunivoque naturelle entre l'ensemble des classes d'équivalence des $[m, k]$ -systèmes projectifs non dégénérés et l'ensemble des classes d'équivalence des $[m, k]$ -codes linéaires non dégénérés.*

1.3.2 Codes de Grassmann

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini \mathbb{F}_q . Notons $V = V(n, q)$.

Définition 10. *La variété de Grassmann (ou Grassmannienne) $G(p, n)$ est la variété de tous les sous-espaces de dimension p d'un espace de dimension n .*

$$G(p, n) = \{ V(p, q) \mid V(p, q) \subset V(n, q) \}.$$

Remarque 1.

Comme q est le cardinal de \mathbb{F}_q , donc $V(n, q)$ comporte exactement $q^n - 1$ vecteurs non nuls.

Le nombre des points q -rationnels de $G(p, n)$ est le nombre de sous-espaces de dimension p dans

$V(n, q)$ qui est égal au coefficient binomial de Gauss :

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-p+1} - 1)}{(q^p - 1)(q^{p-1} - 1) \cdots (q - 1)} \quad (1.3)$$

Les points \mathbb{F}_q -rationnels du Grassmannien $G(p, n)$ peuvent être identifiés avec le sous-ensemble de $\mathbb{P}(\wedge^p V) \simeq \mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}$ correspondant aux éléments décomposables du produit extérieur $\wedge^p V$.

Le plongement de plücker de $G(p, n)$ dans $\mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}$ est définie par :

$$G(p, n) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1},$$

qui peut être défini :

pour un sous-espace L de V engendré par p vecteurs e_1, \dots, e_p considérons le produit extérieur $e_1 \wedge \dots \wedge e_p \in \wedge^p V$, et le point \tilde{L} est

$$\tilde{L} = [e_1 \wedge \dots \wedge e_p] \in \mathbb{P}(\wedge^p V) = \mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}.$$

Le point \tilde{L} ne dépend pas du choix de la base de L .

Considérons maintenant le système projectif $[m, k]$ c'est l'ensemble de tous les points \mathbb{F}_q -rationnels de l'image de plongement de plücker.

$$k = \binom{n}{p}, \quad m = |G(p, n)| = \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q.$$

D'après le théorème [2](#), il existe des codes linéaires de paramètres m, k . Nous les appelons codes de Grassmann, donc

$$G(p, n) (\mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathbb{P}^{k-1} \rightsquigarrow [m, k]_q - \text{code } C(p, n).$$

Calculons la distance minimale en utilisant [\(1.2\)](#).

Théorème 3. [14] La distance minimale d'un code associé au Grassmannien $G(p, n)$ est

$$d = q^{p(n-p)}$$

Proposition 1. [14] Tout hyperplan H contenue dans $\wedge^p V_n$ est un hyperplan de type

$$H_\omega = \{\omega' \in \wedge^p V_n, \omega' \wedge \omega = 0\} \quad (1.4)$$

pour quelque $\omega \in \wedge^{n-p} V_n$.

En effet, un hyperplan peut être considéré comme un élément d'un espace dual $(\wedge^p V)^*$, et par la dualité $(\wedge^p V)^* \cong (\wedge^{n-p} V)$.

Proposition 2. [15] Soit $\omega \in \wedge^{n-p} V$, $e \in V$. Alors $e \wedge \omega = 0$ si et seulement si $\omega = e \wedge \omega'$, où $\omega' \in \wedge^{n-p-1} V$.

Remarques 2.

1. Une base de $V(n, q)$ est une famille de n vecteurs linéairement indépendants. Donc le nombre de bases de V sur \mathbb{F}_q est :

$$|GL(n, q)| = [n]_q = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

2. Le cardinal du groupe linéaire $GL(n, q)$ est donné par :

$$|GL(n, q)| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q - 1)|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1),$$

on aussi

$$|G(n, p)| = |G_{n,p}(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_p(\mathbb{F}_q)| \cdot |GL_{n-p}(\mathbb{F}_q)| \cdot q^{p(n-p)}},$$

où $G_{n,p}(\mathbb{F}_q)$ est la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension p de \mathbb{F}_q^n .

3. Pour $X, Y \in V(n, q)$, on définit une relation d'équivalence \sim , comme suit :

$$\forall X, Y \in V \setminus \{0\}, X \sim Y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{F}_q^*, Y = \lambda X$$

L'ensemble des classes est,

$$(V(n, q) \setminus \{0\}) / \sim = \{\bar{X}, X \in V(n, q) \setminus \{0\}\} = PG(n - 1, q).$$

Où $PG(n - 1, q)$ c'est l'espace projectif de dimension $n - 1$ sur un corps fini.

Le nombre de points de $PG(n - 1, q)$ est donné par :

$$\frac{|(V(n, q) \setminus \{0\})|}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = |PG(n - 1, q)| = |\mathbb{P}^{n-1}|.$$

CARDINAUX DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES ET D'ORBITES DES TRIVECTEURS DE DIMENSION ≤ 8

Dans ce chapitre , nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs de dimension $n \leq 8$, puis nous déterminons les cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites sur un corps fini.

Lemme 1. *Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini \mathbb{F}_q . Le cardinal de $Aut(\omega_i^n)$, $i < n$ des trivecteurs dans $\wedge^3 K^n$ est donné par :*

$$|Aut(\omega_i^n)| = |GL_{n-i}(\mathbb{F}_q)| \cdot |Aut(\omega_i)| \cdot q^{i(n-i)} \quad (2.1)$$

Lemme 2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini $K = \mathbb{F}_q$. Le cardinal de $Aut(\omega_i^n)$ et l'orbite $O(\omega_i^n)$, de trivecteur de rang inférieur à n , dans $\wedge^3 K^n$, $3 \leq i = rg(\omega) \leq p < n$ est donné par :*

1)

$$|Aut(\omega_i^n)| = q^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} \cdot (q^{n-i} - 1) \cdots (q^{p+1-i} - 1) |Aut(\omega_i^p)| \quad (2.2)$$

2)

$$|O(\omega_i^n)| = \frac{(q^n - 1) \cdots (q^{p+1} - 1)}{(q^{n-i} - 1) \cdots (q^{p+1-i} - 1)} \times |O(\omega_i^p)| \quad (2.3)$$

2.1 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en dimension 6

Nous calculons les cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs des rang inférieur ou égale 6.

Théorème 4. [24] Soit V un espace vectoriel de dimension 6, sur un corps fini \mathbb{F}_q , et soit (e_i) , $1 \leq i \leq 6$ une base de V . Tout trivecteur de $\wedge^3 V$ de rang ≤ 6 équivalent à l'un des trivecteurs :

ω_i	Trivecteur	$Aut(\omega_i)$
ω_3	$e_1 e_2 e_3$	$SL_3(\mathbb{F}_q)$
ω_5	$e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$	$Sp_4(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^4$
$\omega_{6,1}$	$e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6$	$(SL_3(\mathbb{F}_q))^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\omega_{6,1,d_1}$	$e_1(e_3 e_4 + e_5 e_6) + e_2(e_3 e_6 - d_1 e_4 e_5)$ si $car \mathbb{F}_q \neq 2$	$SL_3(\mathbb{F}_{q^2}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\omega_{6,1,d_2}$	$e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5) + e_6(e_2 e_4 - d_2 e_3 e_5 + e_4 e_5)$ si $car \mathbb{F}_q = 2$	$SL_3(\mathbb{F}_{q^2}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\omega_{6,2}$	$e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6$	$GL_3(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^8$

TABLE 2.1 – Trivecteurs de rang ≤ 6 sur \mathbb{F}_q .

où, $d_1 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^2$, $d_2 \in (\mathbb{F}_{q^*})^2$.

1) Cardinal de $Aut(\omega_i^6)$

- Pour $i = 3, 5$, nous utilisons (2.1), on a

$$\begin{aligned} |Aut(\omega_3^6)| &= q^{15}(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^2(q - 1) \\ |Aut(\omega_5^6)| &= q^{13}(q - 1)^2(q^2 - 1)(q^4 - 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Cardinal de $O(\omega_i^6)$

$$\text{On a } |O(\omega_i^6)| = \frac{|GL_6(\mathbb{F}_q)|}{|Aut(\omega_i^6)|}$$

donc

$$\begin{aligned} |O(\omega_3^6)| &= (q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1) \\ |O(\omega_5^6)| &= q^2(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + q + 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2) Cardinal de $O(\omega_{6,i})$

Les cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang 6 est

donné par :

$$|Aut(\omega_{6,1})| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| \cdot |SL_3(\mathbb{F}_q)|^2 = 2q^6(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^2$$

$$|Aut(\omega_{6,1,d_1d_2})| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| \cdot |SL_3(\mathbb{F}_{q^2})| = 2q^6(q^6 - 1)(q^4 - 1)$$

$$|Aut(\omega_{6,2})| = |\mathbb{F}_q^8| \cdot |GL_3(\mathbb{F}_q)| = q^{11}(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$$

donc le cardinal de l'orbite de $\omega_{6,i}$ est donné par :

$$|O(\omega_{6,i})| = \frac{|GL_6(\mathbb{F}_q)|}{|Aut(\omega_{6,i})|}, \text{ d'où on a}$$

$$|O(\omega_{6,1})| = \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q - 1)$$

$$|O(\omega_{6,1,d_1d_2})| = \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$$

$$|O(\omega_{6,2})| = q^4(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)$$

Les cardinaux d'orbites des trivecteurs de rang ≤ 6 sont :

$$|O(\omega_3^6)| = (q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)$$

$$|O(\omega_5^6)| = q^2(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + q + 1)$$

$$|O(\omega_{6,1})| = \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q - 1) \tag{2.6}$$

$$|O(\omega_{6,1,d_1d_2})| = \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$$

$$|O(\omega_{6,2})| = q^4(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)$$

2.1.1 Spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 6

Rappelons les principaux résultats déjà connus sur les spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 6 cité dans [15].

Théorème 5. Les poids des codes des trivecteurs de rang ≤ 6 sur \mathbb{F}_q , ω_i , $3 \leq i \leq 6, 2$ sont :

$$\begin{aligned} \text{wt}(\omega_3) &= q^9 \\ \text{wt}(\omega_5) &= q^9 + q^7 \\ \text{wt}(\omega_{6,1}) &= q^9 + q^7 + q^6 - q^4 \\ \text{wt}(\omega_{6,1,d}) &= q^9 + q^7 + q^6 + q^4 \\ \text{wt}(\omega_{6,2}) &= q^9 + q^7 + q^6 \end{aligned}$$

Théorème 6. Les spectres des $[(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1), 20, q^9]$ -codes des trivecteurs associés à la variété grassmannienne $G(3, 6)$ sont :

$$\begin{aligned} A(\omega_3) &= (q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1) \\ A(\omega_5) &= q^2(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + q + 1) \\ A(\omega_{6,1}) &= \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q - 1) \\ A(\omega_{6,1,d_1d_2}) &= \frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1) \\ A(\omega_{6,2}) &= q^4(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $A(\omega_i)$ désigne le nombre des mots de code de poids $\text{wt}(\omega_i)$.

Remarque 2. Remarquons que les poids $\text{wt}(\omega_3)$, $\text{wt}(\omega_5)$, $\text{wt}(\omega_{6,1})$, $\text{wt}(\omega_{6,1,d_1d_2})$, $\text{wt}(\omega_{6,2})$ sont différent deux à deux, en plus si $\omega \sim \omega_i$ alors $\text{wt}(\omega) = \text{wt}(\omega_i)$.

Dans ce cas, le nombre des mots sont exactement les cardinaux d'orbites des trivecteurs, c'est à dire

$$A(\omega_i) = |O(\omega_i^6)|, \quad 3 \leq i \leq 6, 2.$$

2.2 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en dimension 7

2.2.1 Classification des trivecteurs en dimension 7

Théorème 7. [4] Soit V un espace vectoriel de dimension 7, sur un corps fini \mathbb{F}_q , et soit (e_i) , $1 \leq i \leq 7$ une base de V . Tout trivecteur de $\wedge^3 V$ de rang ≤ 7 équivalent à l'un des trivecteurs

dans le tableau suivant :

Nome	Trivecteur
ω_3	$e_1e_2e_3$
ω_5	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$
$\omega_{6,1}$	$e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$
$\omega_{6,1,d_1}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - d_1e_4e_5)$ <i>si car $\mathbb{F}_q \neq 2$</i>
$\omega_{6,1,d_2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_4 - d_2e_3e_5 + e_4e_5)$ <i>si car $\mathbb{F}_q = 2$</i>
$\omega_{6,2}$	$e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$
$\omega_{7,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$
$\omega_{7,2}$	$\omega_{7,1} + e_2e_4e_6$
$\omega_{7,3}$	$e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_2e_6e_7$
$\omega_{7,3,d_1}$	$e_1(e_2e_5 + e_3e_7) + e_4(e_2e_3 + d_1e_5e_7) + e_6e_5e_3$ <i>si car $\mathbb{F}_q \neq 2$</i>
$\omega_{7,3,d_2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_4 - d_2e_3e_5 + e_4e_5) + e_1e_6e_7$ <i>si car $\mathbb{F}_q = 2$</i>
$\omega_{7,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$
$\omega_{7,5}$	$\omega_{7,2} + e_3e_5e_7$

TABLE 2.2 – Trivecteurs de rang ≤ 7 sur \mathbb{F}_q .

où $d_1 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^2, d_2 \in (\mathbb{F}_{q^*})^2$.

Les groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang ≤ 7 sur \mathbb{F}_q sont dans le tableau suivante :

ω_i	$Aut(\omega_i^7)$
ω_3	$\mathbb{F}_q^{12} \cdot (SL(3, q) \cdot GL(4, q))$
ω_5	$\mathbb{F}_q^{14} \cdot (GL(2, q) \cdot (Sp(4, q) \cdot \mathbb{F}_q^*))$
$\omega_{6,1}$	$(\mathbb{F}_q^6 \cdot (SL(3, q) \cdot SL(3, q) \cdot \mathbb{F}_q^*)) \cdot \mathbb{Z}_2$
$\omega_{6,1,d}$	$(\mathbb{F}_q^6 \cdot \mathbb{F}_q^* \cdot SL(3, \mathbb{F}_{q^2})) \cdot \mathbb{Z}_2$ si $\text{car } \mathbb{F}_q \neq 2$
$\omega_{6,2}$	$\mathbb{F}_q^{14} \cdot (GL(3, q) \cdot \mathbb{F}_q^*)$
$\omega_{7,1}$	$\mathbb{F}_q^6 \cdot (Sp(6, q) \cdot \mathbb{F}_q^*)$
$\omega_{7,2}$	$\mathbb{F}_q^{12} \cdot (GL(3, q) \cdot \mathbb{F}_q^*)$
$\omega_{7,3}$	$(\mathbb{F}_q^{10} \cdot (GL(2, q) \cdot GL(2, q))) \cdot \mathbb{Z}_2$
$\omega_{7,3,d}$	$(\mathbb{F}_q^{10} \cdot (GL(2, \mathbb{F}_{q^2}))) \cdot \mathbb{Z}_2$ si $\text{car } \mathbb{F}_q \neq 2$
$\omega_{7,4}$	$\mathbb{F}_q^8 \cdot ((GL(2, q) \cdot GL(2, q)) / \mathbb{F}_q^*)$
$\omega_{7,5}$	$G_2(\mathbb{F}_q) \cdot \mu_3$

TABLE 2.3 – Groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang ≤ 7 .

$$\text{Où } \mu_3(\mathbb{F}_q) = \{x \in \mathbb{F}_q^*, x^3 = 1\}.$$

On calcule le cardinal de chaque groupe en suite on déduit le cardinal de chaque orbite.

Le tableau suivante donne les cardinaux $|Aut(\omega_i^7)|$, des trivecteurs de rang ≤ 7 :

ω_i	$ Aut(\omega_i^7) $
ω_3	$q^{21}(q^4 - 1)(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^2(q - 1)$
ω_5	$q^{19}(q^4 - 1)(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{6,1}$	$2q^{12}(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^2(q - 1)$
$\omega_{6,1,d}$	$2q^{12}(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q - 1)$
$\omega_{6,2}$	$q^{17}(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{7,1}$	$q^{15}(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{7,2}$	$q^{15}(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{7,3}$	$2q^{12}(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{7,3,d}$	$2q^{12}(q^2 - 1)(q^4 - 1)$
$\omega_{7,4}$	$q^{10}(q^2 - 1)^2(q - 1)$
$\omega_{7,5}$	$\varepsilon q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1)$

TABLE 2.4 – Cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang ≤ 7 .

$$\text{Où } \varepsilon \text{ est défini par } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{pgcd}(q - 1, 3) = 1 \\ 3 & \text{si non} \end{cases}$$

Puis nous calculons les cardinaux $O(\omega_i^7)$, $i \leq 7$, tel que $|O(\omega_i^7)| = \frac{|GL_7(\mathbb{F}_q)|}{|Aut(\omega_i^7)|}$:

ω_i	$ O(\omega_i^7) $
ω_3	$(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)/(q^2 - 1)$
ω_5	$q^2(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{6,1}$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)$
$\omega_{6,1,d}$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$\omega_{6,2}$	$q^4(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)/(q - 1)$
$\omega_{7,1}$	$q^6(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{7,2}$	$q^6(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)$
$\omega_{7,3}$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{7,3,d}$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)$
$\omega_{7,4}$	$q^{11}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 + 1)$
$\omega_{7,5}$	$\frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)$

TABLE 2.5 – Cardinaux d'orbites des trivecteurs de rang ≤ 7 .

2.3 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs en dimension 8

Théorème 8. [18] *Sur un corps fini de caractéristique différent 2 et 3, il existe 20 orbites des trivecteurs de rang 8. Dans une base e_i , $1 \leq i \leq 8$, de V , le représentant de chaque orbite dans le tableau suivante :*

Nome	Trivecteur
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_5 + e_3e_6) + e_4(e_7e_2 + e_8e_3)$
$\omega_{8,4,d_1}$	$e_5(e_1e_2 + e_3e_4) + e_6(e_1e_3 + d_1e_2e_4) + e_7(e_1e_4) + e_8(e_2e_3)$
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$
$\omega_{8,5,d_1}$	$e_1(e_5e_4 + e_7e_8 + e_6e_3) + e_2(e_5e_3 - d_1e_4e_6)$
$\omega_{8,5,d_3}$	$e_1(d_3e_3e_4 + d_3e_5e_6 + e_7e_8) + e_2(e_3e_5 + e_4e_7 + e_6e_8)$
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$
$\omega_{8,9,d_1}$	$e_3(e_5e_1 + d_1e_6e_2) + e_4(e_5e_2 + e_6e_1) + e_7(e_1e_2 + e_8e_6)$
$\omega_{8,9,d_3}$	$e_2[(e_3 + e_4)e_1 + e_7e_6] + e_8[a(e_6 + e_7)e_1 + e_3e_4] +$ $e_5(e_3e_7 + e_6e_4)$
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$
$\omega_{8,10,d_1}$	$e_5(e_1e_2) + e_6[e_2e_3 + (e_1 - e_8)e_4] + e_7[e_2e_4 + (d_1e_1 - e_8)e_3]$
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 + e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,13,d_1}$	$e_8[(e_2 - e_1)e_7 + d_1e_3e_6 + d_1e_4e_5] + e_3(e_4e_1 + e_5e_7) +$ $e_6(e_2e_5 + d_1e_7e_4)$

où $d_1 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^2, d_3 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^3$.

TABLE 2.6 – Les trivecteurs de rang 8 sur un corps fini de caractéristique différent 2 et 3.

Le tableau suivante donne les trois (3) invariants $Aut(\omega), C(\omega)$ et $p(\omega)$ des trivecteurs de rang 8.

ω	$Aut(\omega)$ (Midoune et Noui)	$C(\omega)$ (Noui)	$p(\omega)$ (sur $K = \mathbb{F}_2$) (Hora et Pudlák)
$\omega_{8,1}$	$(SL_3(K) \times SP_4(K) \times K^*) \cdot K^4$	$K \times K$	$(y^5 + 15x^2y^3 + 16x^4y)(y^3 + 7x^2y)$
$\omega_{8,2}$	$((SL_2(K))^2 \times (K^*)^2) \cdot U(16)$	$K[\varepsilon]$	$y^8 + 19x^2y^6 + 108x^4y^4 + 128x^6y^2$
$\omega_{8,3}$	$((SL_2(K))^2 \times (K^*)^2) \cdot K^9$	$K[\varepsilon]$	$y^8 + 6x^2y^6 + 89x^4y^4 + 160x^6y^2$
$\omega_{8,4}$	$((SL_2(K))^2 \times (K^*)^2) \cdot K^{12} \cdot \mathbb{Z}_2$	K	$y^8 + 9x^2y^6 + 102x^4y^4 + 144x^6y^2$
$\omega_{8,5}$	$((SL_2(K))^3 \times K^*) \cdot K^6 \cdot S_3$	K	$y^8 + 9x^2y^6 + 102x^4y^4 + 144x^6y^2$
$\omega_{8,6}$	$(SL_2(K) \times (K^*)^2) \cdot U(13)$	K	$y^8 + 3x^2y^6 + 76x^4y^4 + 176x^6y^2$
$\omega_{8,7}$	$(SL_2(K) \times (K^*)^2) \cdot U(16)$	K	$y^8 + 7x^2y^6 + 56x^4y^4 + 192x^6y^2$
$\omega_{8,8}$	$(SL_2(K) \times (K^*)^2) \cdot U(9)$	K	$y^8 + 2x^2y^6 + 53x^4y^4 + 200x^6y^2$
$\omega_{8,9}$	$((K^*)^3 \cdot U(9)) \cdot S_3$	K	$y^8 + 3x^2y^6 + 76x^4y^4 + 176x^6y^2$
$\omega_{8,10}$	$((SL_2(K) \times (K^*)^2) \cdot K^6) \cdot \mathbb{Z}_2$	K	$y^8 + x^2y^6 + 58x^4y^4 + 196x^6y^2$
$\omega_{8,11}$	$((SL_2(K) \times K^*) \cdot U(12)) \cdot \mu_3(K)$	K	$y^8 + x^2y^6 + 30x^4y^4 + 224x^6y^2$
$\omega_{8,12}$	$(PGL_2(K) \times K^*) \cdot K^5$	K	$y^8 + 35x^4y^4 + 220x^6y^2$
$\omega_{8,13}$	$(PGL_3(K) \times \mathbb{Z}_2) \cdot \mu_3(K)$	K	$y^8 + 49x^4y^4 + 206x^6y^2$

TABLE 2.7 – Les invariants des trivecteurs de rang 8 sur un corps fini.

2.3.1 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs dégénérées

Les cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang inférieur à 8 est donné par la table :

ω_i	$ Aut(\omega_i^8) $
ω_3	$q^{28}(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^2(q - 1)$
ω_5	$q^{26}(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{6,1}$	$2q^{19}(q^3 - 1)^2(q^2 - 1)^3(q - 1)$
$\omega_{6,1,d_1d_2}$	$2q^{19}(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{6,2}$	$q^{24}(q^3 - 1)(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{7,1}$	$q^{22}(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{7,2}$	$q^{22}(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{7,3}$	$2q^{19}(q^2 - 1)^2(q - 1)^3$
$\omega_{7,3,d_1d_2}$	$2q^{19}(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{7,4}$	$q^{17}(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{7,5}$	$\varepsilon q^{13}(q^6 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$

TABLE 2.8 – Cardinaux des groupes d’automorphismes des trivecteurs de rang < 8 .

Puis, pour calculer le cardinal $O(\omega_i^8)$, $i < 8$, nous utilisons la formule (2.3) pour $n = 8$ et $p = 7$ donc,

$$|O(\omega_i^8)| = \frac{q^8 - 1}{q^{8-i} - 1} \times |O(\omega_i^7)|, \quad 3 \leq i \leq 7.$$

Nous obtenons le tableau suivante :

ω_i	$ O(\omega_i^8) $
ω_3	$(q^7 - 1)(q^4 + 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)$
ω_5	$q^2(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{6,1}$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)^2$
$\omega_{6,1,d_1d_2}$	$\frac{1}{2}q^9(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{6,2}$	$q^4(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{7,1}$	$q^6(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{7,2}$	$q^6(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q + 1)$
$\omega_{7,3}$	$\frac{1}{2}q^9(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)^2$
$\omega_{7,3,d_1d_2}$	$\frac{1}{2}q^9(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{7,4}$	$q^{11}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{7,5}$	$\frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)$

TABLE 2.9 – Cardinaux d’orbites des trivecteurs de rang < 8 .

2.3.2 Cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites des trivecteurs non dégénérées

Dans [18], on trouve la classification des trivecteurs de rang 8 sur un corps fini de caractéristique différent de 2 et 3. Les tableaux suivantes donne les cardinaux des groupes d'automorphismes et d'orbites :

$\omega_{8,i}$	$ Aut(\omega_{8,i}^8) $
$\omega_{8,1}$	$q^{11}(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)^2(q - 1)$
$\omega_{8,2}$	$q^{18}(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{8,3}$	$q^{11}(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{8,4}$	$2q^{14}(q^2 - 1)^2(q - 1)^2$
$\omega_{8,4,d_1}$	$2q^{14}(q^4 - 1)(q^2 - 1)$
$\omega_{8,5}$	$6q^9(q^2 - 1)^3(q - 1)$
$\omega_{8,5,d_1}$	$2q^9(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,5,d_3}$	$3q^9(q^6 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,6}$	$q^{14}(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{8,7}$	$q^{17}(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{8,8}$	$q^{10}(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{8,9}$	$6q^9(q - 1)^3$
$\omega_{8,9,d_1}$	$2q^9(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,9,d_3}$	$3q^9(q^3 - 1)$
$\omega_{8,10}$	$2q^7(q^2 - 1)(q - 1)^2$
$\omega_{8,10,d_1}$	$2q^7(q^2 - 1)^2$
$\omega_{8,11}$	$\varepsilon q^{13}(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,12}$	$q^6(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,13}$	$2\varepsilon q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$\omega_{8,13,d_1}$	$2q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1)$

TABLE 2.10 – Cardinaux des groupes d'automorphismes des trivecteurs de rang 8 de caractéristique différent 2 et 3.

$\omega_{8,i}$	$ O(\omega_{8,i}^8) $
$\omega_{8,1}$	$q^{17}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + 1)(q^2 + 1)$
$\omega_{8,2}$	$q^{10}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,3}$	$q^{17}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,4}$	$\frac{1}{2}q^{14}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,4,d_1}$	$\frac{1}{2}q^{14}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,5}$	$\frac{1}{6}q^{19}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^4 + 1)(q^2 + 1)^2$
$\omega_{8,5,d_1}$	$\frac{1}{2}q^{19}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{8,5,d_3}$	$\frac{1}{3}q^{19}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$\omega_{8,6}$	$q^{14}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,7}$	$q^{11}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,8}$	$q^{18}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,9}$	$\frac{1}{6}q^{19}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 + q + 1)(q + 1)$
$\omega_{8,9,d_1}$	$\frac{1}{2}q^{19}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{8,9,d_3}$	$\frac{1}{3}q^{19}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,10}$	$\frac{1}{2}q^{21}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^2 + q + 1)$
$\omega_{8,10,d_1}$	$\frac{1}{2}q^{21}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 + 1)(q - 1)$
$\omega_{8,11}$	$\frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{8,12}$	$q^{22}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)$
$\omega_{8,13}$	$\frac{1}{2\varepsilon}q^{25}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q - 1)$
$\omega_{8,13,d_1}$	$\frac{1}{2}q^{25}(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)^2(q - 1)$

TABLE 2.11 – Cardinaux d’orbites des trivecteurs de rang 8 de caractéristique différent 2 et 3.

Comme la somme des cardinaux d’orbites est égal au cardinal de l’espace $\wedge^3 \mathbb{F}_q^8$. Ceci signifie que la classification est complète sur un corps finis de caractéristique différent 2 et 3.

SPECTRE DES CODES ASSOCIÉS À LA VARIÉTÉ GRASSMANNIENNE $G(3, 7)$

Dans ce chapitre , nous reprendrons les résultats des spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 7 déterminé par K.V.Kaipa et H.K.Pillai [20].

Les paramètres des codes associés à la variété grassmannienne $G(3, 7)$ sont :

$$m = |G(3, 7)| = \frac{(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)}{(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)}, \quad k = 35 \text{ et } d = q^{12}.$$

3.1 Poids des codes des trivecteurs en dimension 7

Définition 11. *Considérons l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \phi_\omega : V &\rightarrow \wedge^2 V^* \\ v &\mapsto \iota_v \omega \end{aligned}$$

où ι_v est l'opération de multiplication intérieure est défini par :

$$\langle \iota_v \omega, \beta \rangle = \langle \omega, v \wedge \beta \rangle, \quad \forall \beta \in \wedge^2 V,$$

où \langle, \rangle c'est l'appariement entre $\wedge^j V^*$ et $\wedge^j V$ pour j .

Soit $\lambda \in \wedge^2 V^*$ une bivecteur, pour tout $k \geq 1$, le k -Pfaffian de λ noté $\text{Pf}_k(\lambda) \in \wedge^{2k} V^*$ définie par :

$$\iota_v \lambda \wedge \text{Pf}_{k-1}(\lambda) = \iota_v \text{Pf}_k(\lambda), \quad \forall v \in V. \tag{3.1}$$

Où $\text{Pf}_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{k!}(\lambda \wedge \cdots \wedge \lambda)$ et $\text{Pf}_0(\lambda) = 1$.

Proposition 3. (*k-Pfaffian des bivecteurs*)

1) Soit $\lambda \in \wedge^2 V^*$ un bivecteur, $\lambda \neq 0$, pour tout $k \geq 1$ il y a un unique élément $\text{Pf}_k(\lambda) \in \wedge^{2k} V^*$, vérifier (3.1)

2)

$$\text{Pf}_k(\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{j=0}^k \text{Pf}_j(\lambda_1) \wedge \text{Pf}_{k-j}(\lambda_2). \quad (3.2)$$

3) Si $\text{Pf}_r(\lambda) \neq 0$ et $\text{Pf}_{r+1}(\lambda) = 0$ alors le rang de λ , $\text{rg}(\lambda) = 2r$.

Proposition 4. Soit $\lambda_i \in \wedge^2 V$ $i = 1, \dots, n$, n bivecteurs, alors

1) Pour $n \geq 2$

$$\text{Pf}_2\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Pf}_2(\lambda_i) + \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j \quad (3.3)$$

2) Pour $n \geq 3$

$$\text{Pf}_3\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Pf}_3(\lambda_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [\lambda_i \text{Pf}_2(\lambda_j) + \text{Pf}_2(\lambda_i) \lambda_j] + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \quad (3.4)$$

Preuve.

1) Pour $n \geq 2$, on utilise la formule (3.2), soit $\lambda_i \in \wedge^2 V$:

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) &= \text{Pf}_2(\lambda_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)) \\ &= \text{Pf}_2(\lambda_1) + \text{Pf}_2(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \lambda_1(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \\ &= \text{Pf}_2(\lambda_1) + [\text{Pf}_2(\lambda_2) + \text{Pf}_2(\lambda_3 + \dots + \lambda_n) + \lambda_2(\lambda_3 + \dots + \lambda_n)] \\ &\quad + \lambda_1(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \text{Pf}_2(\lambda_i) + \text{Pf}_2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \sum_{i<j}^{n-2} \lambda_i \lambda_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \text{Pf}_2(\lambda_i) + [\text{Pf}_2(\lambda_{n-1}) + \text{Pf}_2(\lambda_n) + \lambda_{n-1} \lambda_n] + \sum_{i<j}^{n-2} \lambda_i \lambda_j \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Pf}_2(\lambda_i) + \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j. \end{aligned}$$

2) D'après (3.2), Pour $n = 2$, on a :

$$\text{Pf}_3(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{Pf}_3(\lambda_1) + \text{Pf}_3(\lambda_2) + \lambda_1 \text{Pf}_2(\lambda_2) + \text{Pf}_2(\lambda_1) \lambda_2.$$

Pour $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\text{Pf}_3\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) &= \text{Pf}_3(\lambda_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)) \\
&= \text{Pf}_3(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \lambda_1 \text{Pf}_2(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \text{Pf}_2(\lambda_1)(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\
&\quad + \text{Pf}_3(\lambda_1) \\
&= \text{Pf}_3(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \lambda_1 \left(\sum_{j=2}^n \text{Pf}_2(\lambda_j) + \sum_{j<k}^n \lambda_j \lambda_k \right) + \sum_{j=2}^n \text{Pf}_2(\lambda_1) \lambda_j \\
&\quad + \text{Pf}_3(\lambda_1) \\
&= \text{Pf}_3(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \sum_{j=2}^n \lambda_1 \text{Pf}_2(\lambda_j) + \sum_{j<k}^n \lambda_1 \lambda_j \lambda_k + \sum_{j=2}^n \text{Pf}_2(\lambda_1) \lambda_j \\
&\quad + \text{Pf}_3(\lambda_1) \\
&\quad \vdots \\
&= \text{Pf}_3(\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \sum_{i<j}^{n-2} \lambda_i \text{Pf}_2(\lambda_j) + \sum_{i<j<k}^{n-2} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i<j}^{n-2} \text{Pf}_2(\lambda_i) \lambda_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \text{Pf}_3(\lambda_i) \\
&= [\text{Pf}_3(\lambda_{n-1}) + \text{Pf}_3(\lambda_n) + \lambda_{n-1} \text{Pf}_2(\lambda_n) + \text{Pf}_2(\lambda_{n-1}) \lambda_n] \\
&\quad + \sum_{i<j}^{n-2} \lambda_i \text{Pf}_2(\lambda_j) + \sum_{i<j<k}^{n-2} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i<j}^{n-2} \text{Pf}_2(\lambda_i) \lambda_j + \sum_{i=1}^{n-2} \text{Pf}_3(\lambda_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Pf}_3(\lambda_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [\lambda_i \text{Pf}_2(\lambda_j) + \text{Pf}_2(\lambda_i) \lambda_j] + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k
\end{aligned}$$

□

Remarque 3. Si $\lambda_i \in \wedge^2 V$ $i = 1, \dots, n$, n bivecteurs décomposables, alors

1) Pour $n \geq 2$

$$\text{Pf}_2\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j$$

2) Pour $n \geq 3$

$$\text{Pf}_3\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k.$$

3.1.1 Poids des codes des trivecteurs dégénérées

Soit V un espace vectoriel de dimension n .

Proposition 5. [20] Soit $\omega \in \wedge^3 V$ un trivecteur de rang $< n$, alors le poids d' un code C est

donné par :

$$wt(\omega) = q^{3r} wt(\tilde{\omega}),$$

où $\tilde{\omega}$ est un trivecteur d'un espace de dimension $n - r$.

Preuve. Nous avons

$$[3]_q \cdot wt(\omega) = |\{[v_1, v_2, v_3], \langle \omega, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \rangle \neq 0\}|$$

où $[v_1, v_2, v_3]$ désigne une matrice $n \times 3$ avec des colonnes v_1, v_2 et v_3 . Pour un trivecteur ω en termes dans la base duale $\{e_1, \dots, e_n\}$ est indépendant de e_{n-r+1}, \dots, e_n , les dernières lignes de la matrice sont arbitraires. De plus, si la sous-matrice $[u_1, u_2, u_3]$ formé par les premières $n - r$ lignes, alors

$$\begin{aligned} [3]_q \cdot wt(\omega) &= q^{3r} |\{[u_1, u_2, u_3], \langle \tilde{\omega}, u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \rangle \neq 0\}| \\ &= q^{3r} [3]_q \cdot wt(\tilde{\omega}) \\ &= q^{3r} \cdot wt(\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

□

La proposition 5 montre que pour calculer les poids des mots des codes de $C(3, n)$, il suffit de connaître les poids des mots des codes non dégénérées de $C(3, \tilde{n})$, $\tilde{n} \leq n$.

Théorème 9. Les poids des codes des trivecteurs sur \mathbb{F}_q^7 , ω_i , $3 \leq i \leq 6$ sont :

$$\begin{aligned} wt(\omega_3) &= q^{12} \\ wt(\omega_5) &= q^{12} + q^{10} \\ wt(\omega_{6,1}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 - q^7 \\ wt(\omega_{6,1,d}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^7 \\ wt(\omega_{6,2}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Preuve. D'après la proposition 5, le poids d'un trivecteur dégénérée ω est q^3 fois le poids de ω considéré comme un trivecteur sur \mathbb{F}_q^6 de base $\{e_1, \dots, e_6\}$. On obtient le poids de ω :

$$wt(\omega_i^7) = q^3 wt(\omega_i), \quad 3 \leq i \leq 6, 2.$$

□

3.1.2 Poids des codes des trivecteurs non dégénérées

Définition 12. Soit ω un trivecteur non dégénéré de $\wedge^3 V$ sur \mathbb{F}_q , la k -variété de poids de ω est la sous-variété de \mathbb{P}^{n-1} donnée par :

$$X_k(\omega) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_{k+1}(\iota_x \omega) = 0\}.$$

On a

$$\emptyset = X_0(\omega) \subset X_1(\omega) \subset \cdots \subset X_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(\omega) = \mathbb{P}^{n-1}.$$

Théorème 10. Le rang de ω est $2r$, où $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, alors le poids d'un mot de code de $C(2, n)$ est :

$$wt(\omega) = q^{2(n-r-1)} \frac{q^{2r} - 1}{q^2 - 1}.$$

Théorème 11. Soit ω un trivecteur non dégénéré sur \mathbb{F}_q^n alors

Le poids $wt(\omega)$ est donné par :

$$wt(\omega) = \frac{q^{2n-4}}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n_i (1 - q^{-2i}) \quad (3.6)$$

avec

$$n_i := |X_i(\omega)| - |X_{i-1}(\omega)|.$$

Preuve. Pour tout $v_1 \neq 0$, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V tel que $e_1 = v_1$. Soit W le sous-espace engendré par $\{e_2, \dots, e_n\}$ et soit $\pi : V \rightarrow W$ la projection sur les dernières $n - 1$ coordonnées. Soit ω_{v_1} un bivecteur sur W obtenu par restriction à W . Une paire de vecteurs $v_1, v_2 \in V$, vérifie $\langle \iota_{v_1} \omega, v_2 \wedge v_3 \rangle \neq 0$ si et seulement si $\langle \omega_{v_1}, \pi(v_2) \wedge \pi(v_3) \rangle \neq 0$. Puisque les premiers composants sont arbitraires, le cardinal de telles paires $\{v_2, v_3\}$ est

$$q^2 [2]_q wt(\omega_{v_1}).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
[3]_q \cdot wt(\omega) &= |\{[v_1, v_2, v_3], \langle \omega, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \rangle \neq 0\}| \\
&= \sum_{v_1 \neq 0} |\{[v_2, v_3], \langle \iota_{v_1} \omega, v_2 \wedge v_3 \rangle \neq 0\}| \\
&= q^2 [2]_q \sum_{v_1 \neq 0} wt(\omega_{v_1}).
\end{aligned}$$

Dans la somme de tous les v_1 , il y a $(q-1)n_i$ termes pour lesquelles la ligne passant par v_1 est $X_i(\omega) \setminus X_{i-1}(\omega)$. Pour v_1 , le rang de ω_{v_1} est $2i$ en tant que bivecteur sur W . Par le théorème [10](#), on a

$$wt(\omega_{v_1}) = q^{2(n-1-i-1)} \frac{q^{2i} - 1}{q^2 - 1},$$

et nous avons

$$[3]_q \cdot wt(\omega) = q^2 [2]_q \sum_{v_1 \neq 0} wt(\omega_{v_1}),$$

donc

$$\begin{aligned}
wt(\omega) &= \frac{q^2 [2]_q (q-1)}{[3]_q} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n_i \frac{q^{2i} - 1}{q^2 - 1} q^{2n-4-2i} \\
&= \frac{q^{2n-4}}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n_i (1 - q^{-2i}).
\end{aligned}$$

□

Exemple 5. Pour $n = 6$, on utilise la formule [\(3.6\)](#), avec $n_1 + n_2 = |\mathbb{P}^5|$, nous obtenons les poids des codes des trivecteurs de rang 6 :

$$wt(\omega_{6,i}) = q^4 \left[(q^5 + q^3 + q^2 + 1) - \frac{n_1}{1 + q + q^2} \right]. \quad (3.7)$$

Remarque 4. En utilisant la formule [\(3.7\)](#), nous pouvons facilement calculer les poids des codes des trivecteurs non dégénérées dans la table [2.1](#).

Pour $n = 7$ et $n_1 + n_2 + n_3 = |\mathbb{P}^6|$, par la formule (3.6), on trouve

$$\begin{aligned} \text{wt}(\omega_{7,i}) &= q^4 \left[(q^8 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 1) - \frac{n_2 + n_1(1 + q^2)}{1 + q + q^2} \right] \\ &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^4 - q^4 \left(\frac{|X_2(\omega_{7,i})| + q^2 |X_1(\omega_{7,i})|}{1 + q + q^2} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Où, $\omega_{7,i}$ le trivecteur non dégénérée dans la table 2.2.

Les variétés $X_1(\omega)$ des trivecteurs non dégénérées sur \mathbb{F}_q^7

Calculons $X_1(\omega_{7,i})$, $1 \leq i \leq 5$, où

$$X_1(\omega_{7,i}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,i}) = 0\}.$$

Proposition 6. *Les variétés $X_1(\omega_{7,i})$, $1 \leq i \leq 5$ et leurs cardinaux sont :*

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{7,1}) &= \mathbb{P}^5, & n_1(\omega_{7,1}) &= |\mathbb{P}^5| \\ X_1(\omega_{7,2}) &= \mathbb{P}^2, & n_1(\omega_{7,2}) &= 1 + q + q^2 \\ X_1(\omega_{7,3}) &= \mathbb{P}^2 \cup_{\mathbb{P}^0} \mathbb{P}^2, & n_1(\omega_{7,3}) &= 1 + 2q + 2q^2 \\ X_1(\omega_{7,3,d}) &= \mathbb{P}^0, & n_1(\omega_{7,3,d}) &= 1 \\ X_1(\omega_{7,4}) &= \mathbb{P}^1, & n_1(\omega_{7,4}) &= 1 + q \\ X_1(\omega_{7,5}) &= \emptyset, & n_1(\omega_{7,5}) &= 0 \end{aligned}$$

où $d \in \mathbb{F}_q^*$.

Preuve. Pour $\omega_{7,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$: nous avons

$$X_1(\omega_{7,1}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,1}) = 0\}.$$

Soit $x = \sum_{i=1}^7 x_i e_i$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \iota_{e_1}\omega_{7,1} = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \\ \iota_{e_2}\omega_{7,1} = e_3e_1 \\ \iota_{e_3}\omega_{7,1} = e_1e_2 \\ \iota_{e_4}\omega_{7,1} = e_5e_1 \\ \iota_{e_5}\omega_{7,1} = e_1e_4 \\ \iota_{e_6}\omega_{7,1} = e_7e_1 \\ \iota_{e_7}\omega_{7,1} = e_1e_6 \end{array} \right.$$

$$\text{Pf}_2(\iota_{e_j}\omega_{7,1}) = \begin{cases} e_2e_3e_4e_5 + e_2e_3e_6e_7 + e_4e_5e_6e_7 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Remplaçons dans la formule (3.3), on trouve

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2(\iota_x\omega_{7,1}) &= \sum_{j=1}^7 x_j^2 \text{Pf}_2(\iota_{e_j}\omega_{7,1}) + \sum_{i<j} x_i x_j (\iota_{e_i}\omega_{7,1}) \wedge (\iota_{e_j}\omega_{7,1}) \\ &= x_1^2 (e_2e_3e_4e_5 + e_2e_3e_6e_7 + e_4e_5e_6e_7) + x_1 [x_2 (e_4e_5e_3e_1 + e_6e_7e_3e_1) \\ &\quad + x_3 (e_4e_5e_1e_2 + e_6e_7e_1e_2) + x_4 (e_2e_3e_5e_1 + e_6e_7e_5e_1) \\ &\quad + x_5 (e_2e_3e_1e_4 + e_6e_7e_1e_4) + x_6 (e_2e_3e_7e_1 + e_4e_5e_7e_1) \\ &\quad + x_7 (e_2e_3e_1e_6 + e_4e_5e_1e_6)] = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$X_1(\omega_{7,1}) = \{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{P}^5.$$

Pour $\omega_{7,2}$: calculons $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{7,2})$, on trouve les coefficients de $e_2e_3e_4e_5 + e_2e_3e_6e_7 + e_4e_5e_6e_7$, $e_1e_3e_4e_6$, $e_1e_2e_5e_6$ et $e_1e_2e_4e_7$, sont x_1^2 , $-x_2^2$, $-x_4^2$ et $-x_6^2$, respectivement.

Si $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{7,2}) = 0$, alors

$$X_1(\omega_{7,2}) = \{x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0\} \simeq \mathbb{P}^2.$$

Ensuite, considérons $\omega_{7,3}$: calculons $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3})$, on trouve

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3}) &= x_1^2 e_2 e_3 e_4 e_5 + x_2^2 e_3 e_1 e_6 e_7 + x_1 [x_2 (e_2 e_3 e_6 e_7 + e_4 e_5 e_3 e_1 + e_4 e_5 e_6 e_7) \\ &\quad + x_3 e_4 e_5 e_1 e_2 + x_4 e_2 e_3 e_5 e_1 + x_5 e_2 e_3 e_1 e_4 + x_6 e_4 e_5 e_7 e_2 + x_7 e_4 e_5 e_2 e_6] \\ &\quad + x_2 (x_3 e_6 e_7 e_1 e_2 + x_4 e_6 e_7 e_5 e_1 + x_5 e_6 e_7 e_1 e_4 + x_6 e_3 e_1 e_7 e_2 + x_7 e_3 e_1 e_2 e_6) \\ &\quad + x_4 (x_6 e_5 e_1 e_7 e_2 + x_7 e_5 e_1 e_2 e_6) + x_5 (x_6 e_1 e_4 e_7 e_2 + x_7 e_1 e_4 e_2 e_6). \end{aligned}$$

Les coefficients de $e_2 e_3 e_4 e_5$ et $e_3 e_1 e_6 e_7$ sont x_1^2 et x_2^2 respectivement.

Si $x_1 = x_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3})|_{x_1=x_2=0} &= x_4 (x_6 e_5 e_1 e_7 e_2 + x_7 e_5 e_1 e_2 e_6) + x_5 (x_6 e_1 e_4 e_7 e_2 + x_7 e_1 e_4 e_2 e_6) \\ &= e_1 e_2 \wedge (x_4 e_5 - x_5 e_4) \wedge (x_7 e_6 - x_6 e_7). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{7,3}) &= \{x_1 = x_2 = 0\} \cap (\{x_4 = x_5 = 0\} \cup \{x_6 = x_7 = 0\}) \\ &= \mathbb{P}\{e_3, e_6, e_7\} \cup_{\mathbb{P}\{e_3\}} \mathbb{P}\{e_3, e_4, e_5\} \simeq \mathbb{P}^2 \cup_{\mathbb{P}^0} \mathbb{P}^2. \end{aligned}$$

Les coefficients dans $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3,d_1})$ de $e_7 e_1 e_4 e_2 + e_7 e_1 e_6 e_5 + e_4 e_2 e_6 e_5$ et $d_1 e_1 e_2 e_7 e_4 + e_1 e_2 e_3 e_6 + d_1 e_7 e_4 e_3 e_6$ sont x_3^2 et x_5^2 . Ainsi, x_3, x_5 doit être nulles. Les coefficients de $e_2 e_5 e_3 e_7$ et $e_5 e_1 e_3 e_4$ sont $x_1^2 + d_1 x_4^2$ et $x_2^2 + d_1 x_7^2$, alors x_1, x_2, x_4 et x_7 devient tous être nulles pour $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3,d_1})$ est nulle. Alors

$$X_1(\omega_{7,3,d_1}) = \{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0\} \simeq \mathbb{P}^0,$$

de même pour $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3,d_2})$. Les coefficients de $e_2 e_3 e_4 e_5 + e_2 e_3 e_6 e_7 + e_4 e_5 e_6 e_7$ et $e_2 e_4 e_7 e_1 - d_2 e_2 e_4 e_3 e_5 - d_2 e_3 e_5 e_7 e_1 + e_4 e_5 e_7 e_1$ sont x_1^2 et x_6^2 respectivement, Ainsi, x_1 et x_6 doit être nulles. Les coefficients de $e_5 e_1 e_6 e_2$ et $e_3 e_1 e_4 e_6$ sont $d_2 x_3^2 + x_4^2 - x_3 x_4$ et $x_2^2 + d_2 x_5^2 - x_2 x_5$ respectivement. Les deux dernières formes quadratiques sont irréductibles et donc x_2, x_3, x_4 et x_5 et doivent toutes être nulles pour que $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,3,d_2}) = 0$. Donc

$$X_1(\omega_{7,3,d_2}) = \{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0\} \simeq \mathbb{P}^0.$$

C'est-à-dire

$$X_1(\omega_{7,3,d}) = \mathbb{P}^0.$$

Pour $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,4})$: les coefficients de $e_3 e_1 e_4 e_6$, $e_1 e_2 e_5 e_7$, $e_6 e_2 e_5 e_1$ et $e_1 e_4 e_7 e_3$ sont x_2^2 , x_3^2 , x_4^2 et x_5^2 , respectivement. Comme x_2 , x_3 , x_4 et x_5 sont zéro, donc

$$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,4}) = (x_1^2 - x_6 x_7) e_2 e_3 e_4 e_5 = 0.$$

Alors

$$X_1(\omega_{7,4}) = \{x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_1^2 - x_6 x_7 = 0\} \simeq \mathbb{P}^1,$$

et l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow X_1(\omega_{7,4}) \\ (t, s) &\mapsto (ts, 0, 0, 0, 0, t^2, s^2) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, donc $X_1(\omega_{7,4}) \simeq \mathbb{P}^1$.

Et enfin pour $\omega_{7,5}$: on a

$$\begin{aligned} \iota_x \omega_{7,5} &= x_1(e_1 e_3 + e_4 e_5 + e_6 e_7) + x_2(e_3 e_1 + e_4 e_6) + x_3(e_1 e_2 + e_5 e_7) + x_4(e_5 e_1 + e_6 e_2) \\ &+ x_5(e_1 e_4 + e_7 e_3) + x_6(e_7 e_1 + e_2 e_4) + x_7(e_1 e_6 + e_3 e_5). \end{aligned}$$

Si $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{7,5}) = 0$, alors les coefficients de $e_1 e_3 e_4 e_5 + e_1 e_3 e_6 e_7 + e_4 e_5 e_6 e_7$, $e_3 e_1 e_4 e_6$, $e_1 e_2 e_5 e_7$, $e_5 e_1 e_6 e_2$, $e_1 e_4 e_7 e_3$, $e_7 e_1 e_2 e_4$, et $e_1 e_6 e_3 e_5$ sont x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 , x_4^2 , x_5^2 , x_6^2 et x_7^2 , respectivement, donc il suffit que les x_i sont égal à 0, pour $i = 1, \dots, 7$.

C'est-à-dire

$$X_1(\omega_{7,5}) = \emptyset.$$

□

Les variétés $X_2(\omega)$ des trivecteurs non dégénérées sur \mathbb{F}_q^7

La variété $X_2(\omega)$ est une hypersurface quadrique donné par l'annulation d'une forme quadratique Q_ω , la forme Q_ω est définie par :

$$H_\eta(\text{Pf}_3(\iota_x \omega)) = Q_\omega(x) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{F}_q^7. \quad (3.9)$$

Où $H_\eta : \wedge^6(\mathbb{F}_q^7)^* \rightarrow \mathbb{F}_q^7$ est l'isomorphisme définie par :

$$\alpha \wedge \beta = \langle \beta, H_\eta(\alpha) \rangle \eta, \quad \forall \alpha = \text{Pf}_3(\iota_x \omega) \in \wedge^6(\mathbb{F}_q^7)^*, \quad \beta \in (\mathbb{F}_q^7)^*,$$

et Soit η une base de 1-D espace $\wedge^6(\mathbb{F}_q^7)^*$.

Appliquer H_η à l'équation :

$$6\text{Pf}_3(\iota_x \omega) = (\iota_x \omega)^3 = \iota_x(\omega \wedge \iota_x \omega \wedge \iota_x \omega).$$

Nous trouvons $6Q_\omega(x)\eta = \omega \wedge \iota_x \omega \wedge \iota_x \omega$. Si $\text{car}(\mathbb{F}_q) \neq 2, 3$ cette relation définit $Q(x)$. Si $\text{car}(\mathbb{F}_q) = 2, 3$, nous avons utilisé (3.9) et défini $Q(x)$.

Nous commençons par le calcul de $X_2(\omega_{7,i})$, $1 \leq i \leq 5$ où

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{7,i}) &= \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,i}) = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\} \mid Q_{\omega_{7,i}}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Remarque 5. Nous avons $x = \sum_{i=1}^7 x_i e_i$.

Soit $*$: $\wedge^6(\mathbb{F}_q^7)^* \rightarrow \mathbb{F}_q^7$ est l'isomorphisme définie par :

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_7 = (-1)^{i-1} e_i.$$

Il existe une forme quadratique $Q_{\omega_{7,i}}$ unique sur \mathbb{F}_q^7 , tel que ,

$$*(\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,i})) = Q_{\omega_{7,i}}(x) \cdot x.$$

Proposition 7. Les variétés $X_2(\omega_{7,i})$, $1 \leq i \leq 5$ et leurs cardinaux sont :

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{7,1}) &= \mathbb{P}^5, & |X_2(\omega_{7,1})| &= |\mathbb{P}^5| \\ X_2(\omega_{7,2}) &= \mathbb{P}^5, & |X_2(\omega_{7,2})| &= |\mathbb{P}^5| \\ X_2(\omega_{7,3}) &= \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^4} \mathbb{P}^5, & |X_2(\omega_{7,3})| &= 2|\mathbb{P}^5| - |\mathbb{P}^4| \\ X_2(\omega_{7,3,d}) &= \mathbb{P}^4, & |X_2(\omega_{7,3,d})| &= |\mathbb{P}^4| \\ X_2(\omega_{7,4}) &= (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_q^3) \cup \mathbb{P}^2, & |X_2(\omega_{7,4})| &= q^3 |\mathbb{P}^1|^2 + |\mathbb{P}^2| \\ & & |X_2(\omega_{7,5})| &= |\mathbb{P}^5|, \end{aligned}$$

où $d \in \mathbb{F}_q^*$.

Preuve. Nous avons $x = \sum_{i=1}^7 x_i e_i$.

Commençons pour $X_2(\omega_{7,1})$: nous avons

$$X_2(\omega_{7,1}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,1}) = 0\}.$$

On a

$$\text{Pf}_3(\iota_{e_j} \omega_{7,1}) = \begin{cases} e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Utilisons $\iota_{e_j} \omega_{7,1}$ et $\text{Pf}_2(\iota_{e_j} \omega_{7,1})$ des précédents et lorsque remplaçons dans la formule (3.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,1}) &= x_1^3 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 + x_1^2 [x_2 e_4 e_5 e_6 e_7 e_3 e_1 + x_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_1 e_2 + x_4 e_2 e_3 e_6 e_7 e_5 e_1 \\ &\quad + x_5 e_2 e_3 e_6 e_7 e_1 e_4 + x_6 e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_1 + x_7 e_2 e_3 e_4 e_5 e_1 e_6] = 0. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} *(\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,1})) &= x_1^3 e_1 + x_1^2 x_2 e_2 + x_1^2 x_3 e_3 + x_1^2 x_4 e_4 + x_1^2 x_5 e_5 + x_1^2 x_6 e_6 + x_1^2 x_7 e_7 \\ &= x_1^2 \sum_{i=1}^7 x_i e_i = x_1^2 \cdot x = Q_{\omega_{7,1}}(x) \cdot x = 0 \\ &\Rightarrow Q_{\omega_{7,1}}(x) = x_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$X_2(\omega_{7,1}) = \{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{P}^5.$$

Ensuite, considérons $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,2})$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \iota_{e_1}\omega_{7,2} = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7, & \text{Pf}_2(\iota_{e_1}\omega_{7,2}) = e_2e_3e_4e_5 + e_2e_3e_6e_7 + e_4e_5e_6e_7 \\ \iota_{e_2}\omega_{7,2} = e_3e_1 + e_4e_6, & \text{Pf}_2(\iota_{e_2}\omega_{7,2}) = e_3e_1e_4e_6 \\ \iota_{e_3}\omega_{7,2} = e_1e_2, & \text{Pf}_2(\iota_{e_3}\omega_{7,2}) = 0 \\ \iota_{e_4}\omega_{7,2} = e_5e_1 + e_6e_2, & \text{Pf}_2(\iota_{e_4}\omega_{7,2}) = e_5e_1e_6e_2 \\ \iota_{e_5}\omega_{7,2} = e_1e_4, & \text{Pf}_2(\iota_{e_5}\omega_{7,2}) = 0 \\ \iota_{e_6}\omega_{7,2} = e_7e_1 + e_2e_4, & \text{Pf}_2(\iota_{e_6}\omega_{7,2}) = e_7e_1e_2e_4 \\ \iota_{e_7}\omega_{7,2} = e_1e_6, & \text{Pf}_2(\iota_{e_7}\omega_{7,2}) = 0, \end{array} \right.$$

et on a

$$\text{Pf}_3(\iota_{e_j}\omega_{7,2}) = \begin{cases} e_2e_3e_4e_5e_6e_7 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Remplaçons dans la formule (3.4), on obtient : $\text{Pf}_3(\iota_x\omega_{7,2}) = \text{Pf}_3(\iota_x\omega_{7,1}) = 0$,
et par la suite,

$$*(\text{Pf}_3(\iota_x\omega_{7,2})) = Q_{\omega_{7,2}}(x) \cdot x = 0$$

implique que $x_1 = 0$, d'où

$$X_2(\omega_{7,2}) = \{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{P}^5.$$

Pour $\omega_{7,3}$: nous avons

$$\text{Pf}_3(\iota_x\omega_{7,3}) = x_1^2x_2e_2e_3e_4e_5e_6e_7 + x_1x_2^2e_4e_5e_3e_1e_6e_7 = 0$$

Puis

$$\begin{aligned} *(\text{Pf}_3(\iota_x\omega_{7,3})) &= x_1^2x_2e_1 + x_1x_2^2e_2 \\ &= x_1x_2 \sum_{i=1}^2 x_i e_i = x_1x_2x = 0 \\ &\Rightarrow Q_{\omega_{7,3}}(x) = x_1x_2 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
X_2(\omega_{7,3}) &= \{x_1x_2 = 0\} \\
\Rightarrow X_2(\omega_{7,3}) &= \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \\
&= \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \cup_{\mathbb{P}\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}} \mathbb{P}\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \\
&\simeq \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^4} \mathbb{P}^5.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\omega_{7,3,d_1}$:

$$\begin{aligned}
\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,3,d_1}) &= x_3^3 e_7 e_1 e_4 e_2 e_6 e_5 + d_1 x_5^3 e_1 e_2 e_7 e_4 e_3 e_5 + x_3^2 [x_4 e_7 e_1 e_6 e_5 e_2 e_3 + x_5 e_7 e_1 e_4 e_2 e_3 e_6 \\
&\quad + x_6 e_7 e_1 e_4 e_2 e_5 e_3 + x_7 e_4 e_2 e_6 e_5 e_1 e_3] + d_1 x_5^2 [x_6 e_1 e_2 e_7 e_4 e_5 e_3 + x_7 e_1 e_2 e_3 e_6 e_4 e_5] \\
&\quad + x_1 [x_3^2 e_3 e_7 e_4 e_2 e_6 e_5 + d_1 x_5^2 e_2 e_5 e_7 e_4 e_3 e_6] + x_2 [x_3^2 e_3 e_4 e_7 e_1 e_6 e_5 \\
&\quad + d_1 x_5^2 e_5 e_1 e_7 e_4 e_3 e_6] + d_1 x_3 x_5^2 e_6 e_5 e_1 e_2 e_7 e_4 + d_1 x_4 x_5^2 e_5 e_7 e_1 e_2 e_3 e_6 = 0.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
*(\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,3,d_1})) &= (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_1 e_1 + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_2 e_2 + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_3 e_3 \\
&\quad + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_4 e_4 + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_5 e_5 + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_6 e_6 \\
&\quad + (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x_7 e_7 = 0 \\
&= (-x_3^2 + d_1 x_5^2) \sum_{i=1}^7 x_i e_i = (-x_3^2 + d_1 x_5^2) x = 0 \\
\Rightarrow Q_{\omega_{7,3,d_1}}(x) &= -x_3^2 + d_1 x_5^2 = 0 \Rightarrow x_3 = x_5 = 0.
\end{aligned}$$

Où $d_1 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^2$.

Donc

$$X_2(\omega_{7,3,d_1}) = \{x_3 = x_5 = 0\} \simeq \mathbb{P}^4.$$

Considérons $\omega_{7,3,d_2}$, par le calcul de $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,3,d_2})$, on trouve

$$Q_{\omega_{7,3,d_2}}(x) = x_1^2 + d_2 x_6^2 + x_1 x_6,$$

où $d_2 \in (\mathbb{F}_{q^*})^2$, la forme quadratique est irréductible. Donc $Q_{\omega_{7,3,d_2}}(x)$ est nulle si et seulement si $x_1 = x_6 = 0$. Ce qui on donne :

$$X_2(\omega_{7,3,d_2}) = \{x_1 = x_6 = 0\} \simeq \mathbb{P}^4.$$

Alors

$$X_2(\omega_{7,3,d}) = X_2(\omega_{7,3,d_1}) = X_2(\omega_{7,3,d_2}) = \mathbb{P}^4.$$

Pour $\omega_{7,4}$: nous avons

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,4}) &= x_2^2 x_3 e_3 e_1 e_4 e_6 e_5 e_7 + x_4^2 x_5 e_5 e_1 e_6 e_2 e_7 e_3 + x_2 x_3^2 e_4 e_6 e_1 e_2 e_5 e_7 \\ &+ x_4 x_5^2 e_6 e_2 e_1 e_4 e_7 e_3. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} *(\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,4})) &= -x_2^2 x_3 e_2 - x_4^2 x_5 e_4 - x_2 x_3^2 e_3 + x_4 x_5^2 e_5 \\ &= -x_2 x_3 (x_2 e_2 + x_3 e_3) + x_4 x_5 (-x_4 e_4 + x_5 e_5) \\ &\Rightarrow Q_{\omega_{7,4}}(x) = -x_2 x_3 + x_4 x_5. \end{aligned}$$

La variété $X_2(\omega_{7,4})$ est l'union disjointe de la sous-variété pour la quelle au moins l'un de x_2, x_3, x_4, x_5 est différent de zéro, puis la sous-variété pour x_2, x_3, x_4, x_5 sont tous nulles. La première sous-variété est immédiatement considéré comme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_q^3$ par le plongement de Segre, et la deuxième sous-variété est \mathbb{P}^2 .

Donc

$$X_2(\omega_{7,4}) = \{-x_2 x_3 + x_4 x_5 = 0\} \simeq (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_q^3) \cup \mathbb{P}^2.$$

Finalement pour $\omega_{7,5}$: nous avons

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,5}) &= x_1^3 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 + x_1^2 [x_2 e_4 e_5 e_6 e_7 e_3 e_1 + x_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_1 e_2 + x_4 e_2 e_3 e_6 e_7 e_5 e_1 \\ &+ x_5 e_2 e_3 e_6 e_7 e_1 e_4 + x_6 e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_1 + x_7 e_2 e_3 e_4 e_5 e_1 e_6] + x_2^2 x_3 e_3 e_1 e_4 e_6 e_5 e_7 \\ &+ x_4^2 x_5 e_5 e_1 e_6 e_2 e_7 e_3 + x_6^2 x_7 e_7 e_1 e_2 e_4 e_3 e_5 + x_2 x_3^2 e_4 e_6 e_1 e_2 e_5 e_7 \\ &+ x_4 x_5^2 e_6 e_2 e_1 e_4 e_7 e_3 + x_6 x_7^2 e_2 e_4 e_1 e_6 e_3 e_5. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} *(\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{7,4})) &= x_1^2 \left(\sum_{i=1}^7 x_i e_i \right) - x_2 x_3 (x_2 e_2 + x_3 e_3) - x_4 x_5 (x_4 e_4 + x_5 e_5) \\ &- x_6 x_7 (x_6 e_6 + x_7 e_7) = 0 \\ &\Rightarrow Q_{\omega_{7,5}}(x) = x_1^2 - x_2 x_3 - x_4 x_5 - x_6 x_7 = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$X_2(\omega_{7,5}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^7 \setminus \{0\}, x_1^2 - x_2x_3 - x_4x_5 - x_6x_7 = 0\}.$$

On utilise le théorème 5.2.6 dans [Z], on trouve

$$|X_2(\omega_{7,5})| = \frac{q^6 - 1}{q - 1} = |\mathbb{P}^5|.$$

□

Théorème 12. *Les poids des codes des trivecteurs non dégénérées $\omega_{7,i}$ sont :*

$$\begin{aligned} \text{wt}(\omega_{7,1}) &= q^{12} + q^{10} + q^8 \\ \text{wt}(\omega_{7,2}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 \\ \text{wt}(\omega_{7,3}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 - q^7 \\ \text{wt}(\omega_{7,3,d}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 \\ \text{wt}(\omega_{7,4}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 \\ \text{wt}(\omega_{7,5}) &= q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^6 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. On remplace $X_1(\omega_{7,i})$ et $X_2(\omega_{7,i})$ pour $1 \leq i \leq 5$ dans la formule (3.8) nous obtenons :

$$\text{wt}(\omega_{7,1}), \text{wt}(\omega_{7,2}), \text{wt}(\omega_{7,3}), \text{wt}(\omega_{7,3,d}), \text{wt}(\omega_{7,4}), \text{wt}(\omega_{7,5}).$$

□

Théorème 13. Les spectres des trivecteurs des codes de Grassmann $C(3, 7)$ sont :

$$\begin{aligned}
A(\omega_3) &= (q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)/(q^2 - 1) \\
A(\omega_5) &= q^2(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + q^2 + 1)(q^2 + q + 1) \\
A(\omega_{6,1}) &= \frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1) \\
A(\omega_{6,1,d}) &= \frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1) \\
A(\omega_{6,2}) &= q^4(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)/(q - 1) \\
A(\omega_{7,1}) &= q^6(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1) \\
A(\omega_{7,2}) &= q^6(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1) \\
&\quad + q^{11}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 + 1) \\
A(\omega_{7,3}) &= \frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1) \\
A(\omega_{7,3,d}) &= \frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q - 1) \\
A(\omega_{7,5}) &= \frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)
\end{aligned}$$

Preuve. Les quantités $A(\omega_3), \dots, A(\omega_{7,1}), A(\omega_{7,2}), \dots, A(\omega_{7,5})$ sont respectivement égales à $|O(\omega_3^7)|, \dots, |O(\omega_{7,1}^7)|, |O(\omega_{7,2}^7)| + |O(\omega_{7,4}^7)|, \dots, |O(\omega_{7,5}^7)|$, où $|O(\omega_i^7)|$ es le cardinal de l'orbite d'un trivecteurs ω_i de rang ≤ 7 . □

POIDS DES CODES DES TRIVECTEURS 2-SCINDABLES DE RANG 8 SUR UN CORPS FINI

LE but de ce chapitre, est de présente un résultat nouveau concernant la détermination des poids des codes des trivecteurs 2-scindable de rang 8 [22], Ces poids sont utiles pour déterminer les spectres du code.

Les paramètres m, k et d des codes associés à la variété grassmannienne $G(3, 8)$ sont :

$$m = |G(3, 8)| = \frac{(q^8 - 1)(q^7 - 1)(q^6 - 1)}{(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)}, \quad k = 56 \text{ et } d = q^{15}.$$

4.1 Poids des code des trivecteurs dégénérées (trivecteurs de rang < 8)

Détermination des poids des codes des trivecteurs dégénérées sur \mathbb{F}_q^8 .

Théorème 14. Les poids des codes des trivecteurs sur \mathbb{F}_q^8 , ω_i , $3 \leq i \leq 7, 5$ sont :

$$\begin{aligned}
wt(\omega_3) &= q^{15} \\
wt(\omega_5) &= q^{15} + q^{13} \\
wt(\omega_{6,1}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} - q^{10} \\
wt(\omega_{6,1,d}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{10} \\
wt(\omega_{6,2}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} \\
wt(\omega_{7,1}) &= q^{15} + q^{13} + q^{11} \\
wt(\omega_{7,2}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} \\
wt(\omega_{7,3}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} - q^{10} \\
wt(\omega_{7,3,d}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} \\
wt(\omega_{7,4}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} \\
wt(\omega_{7,5}) &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^9.
\end{aligned}$$

Preuve. Selon la proposition [5](#), le poids d'un trivecteur dégénérée $wt(\omega_i^8)$ est q^3 fois le poids de ω considéré comme un trivecteur sur \mathbb{F}_q^7 engendré par $\{e_1, \dots, e_7\}$. Des poids $wt(\omega_i^7)$ sont déterminés dans [\(3.5\)](#) et [\(3.10\)](#), on obtient :

$$wt(\omega_i^8) = q^3 wt(\omega_i^7), \quad 3 \leq i \leq 7, 5.$$

□

4.2 Poids des codes des trivecteurs 2-scindables non dégénérées (trivecteurs de rang 8)

Nous déterminons les poids des code des trivecteurs 2-scindables de rang 8, pour ce faire, on utilise $X_1(\omega_{8,i})$ et $X_2(\omega_{8,i})$.

Lemme 3. Soit $\omega_{8,i}$ un trivecteur non dégénérée sur \mathbb{F}_q^8 .

Les poids $wt(\omega_{8,i})$ est donné par :

$$wt(\omega_{8,i}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^6 - q^6 \left(\frac{|X_2(\omega_{8,i})| + q^2 |X_1(\omega_{8,i})|}{1 + q + q^2} \right), \quad (4.1)$$

Preuve. Pour $n = 8$, nous avons :

$$\emptyset = X_0(\omega_{8,i}) \subset X_1(\omega_{8,i}) \subset X_2(\omega_{8,i}) \subset X_3(\omega_{8,i}) = \mathbb{P}^7.$$

Nous utilisons le théorème [11](#), on a :

$$\begin{aligned} n_1 &= |X_1(\omega_{8,i})| \\ n_2 &= |X_2(\omega_{8,i})| - n_1 \\ n_3 &= |\mathbb{P}^7| - (n_1 + n_2), \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} wt(\omega_{8,i}) &= \frac{q^{12}}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} \sum_{i=1}^3 n_i(1 - q^{-2i}) \\ &= \frac{q^{12}}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} [n_1(1 - q^{-2}) + n_2(1 - q^{-4}) + n_3(1 - q^{-6})] \\ &= \frac{q^{12}}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} [n_1(1 - q^{-2}) + n_2(1 - q^{-4}) + (|\mathbb{P}^7| - (n_1 + n_2))(1 - q^{-6})] \\ &= \frac{n_1(q^{12} - q^{10}) + n_2(q^{12} - q^8) - (n_1 + n_2)(q^{12} - q^6)}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} + \frac{|\mathbb{P}^7|(q^{12} - q^6)}{(q^2 - 1)(1 + q + q^2)} \\ &= \frac{n_1q^{10} + n_2q^8(q^2 + 1) - (n_1 + n_2)q^6(q^4 + q^2 + 1)}{1 + q + q^2} + \frac{|\mathbb{P}^7|q^6(q^4 + q^2 + 1)}{1 + q + q^2} \\ &= q^6 \left[|\mathbb{P}^7|(q^2 - q + 1) + \frac{n_1q^4 + n_2q^2(q^2 + 1) - (n_1 + n_2)(q^4 + q^2 + 1)}{1 + q + q^2} \right] \\ &= q^6 \left[q^9 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 1 - \frac{n_1q^2 + n_1 + n_2}{1 + q + q^2} \right] \\ &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^6 - q^6 \left(\frac{|X_2(\omega_{8,i})| + q^2|X_1(\omega_{8,i})|}{1 + q + q^2} \right). \end{aligned}$$

□

Théorème 15. Soit V un espace vectoriel de dimension 8 sur un corps fini \mathbb{F}_q , il existe 11 orbites des trivecteurs 2-scindable de rang 8 qui sont :

Name	Trivecteur
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_5 + e_3e_6) + e_4(e_7e_2 + e_8e_3)$
$\omega_{8,4,d_1}$	$e_5(e_1e_2 + e_3e_4) + e_6(e_1e_3 + d_1e_2e_4) + e_7(e_1e_4) + e_8(e_2e_3)$ si $\text{car } \mathbb{F}_q \neq 2$
$\omega_{8,4,d_2}$	$e_8(e_1e_4 + e_3e_2) + e_7(e_1e_4 + e_4e_2 + d_2e_1e_3) + e_6e_1e_2 + e_5e_3e_4$ si $\text{car } \mathbb{F}_q = 2$
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$
$\omega_{8,5,d_1}$	$e_7(e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6) + e_8[e_1(e_4 + d_1e_5) + e_2e_6 + \frac{1}{d_1}e_3e_5]$ si $\text{car } \mathbb{F}_q \neq 2$
$\omega_{8,5,d_2}$	$e_3(e_1e_2 + e_4e_7 + e_6e_8) + e_5(e_1e_4 + e_8e_2 + d_2e_6e_7)$ si $\text{car } \mathbb{F}_q = 2$
$\omega_{8,5,d_3}$	$e_1(d_3e_3e_4 + d_3e_5e_6 + e_7e_8) + e_2(e_3e_5 + e_4e_7 + e_6e_8)$ si $\text{car } \mathbb{F}_q \neq 3$
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$

TABLE 4.1 – Trivecteurs 2-scindables de rang 8 sur un corps fini de caractéristique différent de 3 .

Où $d_1 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^2, d_2 \in (\mathbb{F}_{q^*})^2, d_3 \notin (\mathbb{F}_{q^*})^3$.

Preuve. La classification des trivecteurs 2-scindables de rang 8 où \mathbb{F}_q est un corps fini de caractéristique différente de 2 et 3 a été fait dans [12], en la caractéristique 2, il suffit d'étudier les orbites de type $\omega_{8,i}, i = 4, 5$.

Si L est l'extension quadratique de K , il existe un trivecteur $\omega_L \in \wedge^3 V$ tel que $\omega_L \not\sim \omega_{8,4}$ et $\omega_L \otimes L \in \wedge^3(V \otimes_K L)$ est L -isomorphe à $\omega_{8,4}$. nous pouvons construire ω_L comme suit :

$\omega_{8,4} = e_1(e_2e_5 + e_3e_6) + e_4(e_7e_2 + e_8e_3)$ est 4-scindable et s'écrit :

$\omega_{8,4} = e_5u_1 + e_6u_2 + e_7u_3 + e_8u_4$ où $u_1 = e_1e_2, u_2 = e_1e_3, u_3 = e_2e_4$ et $u_4 = e_3e_4$, ainsi $E = \text{vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est un sous-espace de dimension 4 de $\wedge^4 K^4$.

Posons, $\omega_L = \omega_{8,4,d_2} = e_5v_1 + e_6v_2 + e_7v_3 + e_8v_4$, avec $v_1 = e_3e_4, v_2 = e_1e_2, v_3 = e_1e_4 + e_4e_2 + d_2e_1e_3$, et $v_4 = e_1e_4 + e_3e_2$, où $K' = K(\alpha), \alpha^2 + \alpha = d_2, \alpha \in K$.

A chacune des formes $\omega_{8,4}, \omega_{8,4,d_2}$, nous associons une forme quadratique sur E [12] : $\gamma_2(xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4)$, alors nous obtenons :

$$\gamma_2(xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4) = (xt - yz),$$

et

$$\gamma_2(xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4) = (y^2d_2 - x^2 + zt)$$

respectivement.

Les deux formes ne sont pas équivalentes sur K mais ils devient équivalents sur une clôture algébrique \bar{K} . Nous pouvons aussi prouver que $\omega_{8,4}$ n'est pas équivalent à $\omega_{8,4,d_2}$ en utilisant l'invariant arithmétique $d_1(\omega)$ défini dans [12]. Où nous remarquons que $d_1(\omega_{8,4}) = 5$ mais $d_1(\omega_{8,4,d_2}) = 6$.

De même, pour $\omega_{8,5}$. □

4.2.1 Poids des codes sur \mathbb{F}_q^8

Pour déterminer les poids des codes des trivecteurs non dégénérées, on doit trouver d'abord les variétés $X_1(\omega_{8,i})$ et $X_2(\omega_{8,i})$.

Les variétés $X_1(\omega_{8,i})$ des trivecteurs non dégénérées sur \mathbb{F}_q^8

Commençons d'abord par le calcul de $X_1(\omega_{8,i})$, où $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 6$ les trivecteurs non dégénérées, elle est définie par :

$$X_1(\omega_{8,i}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^8 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,i}) = 0\}.$$

Proposition 8. La variété $X_1(\omega_{8,i})$, $1 \leq i \leq 6$ avec leur cardinal est donné par la Table :

$\omega_{8,i}$	$X_1(\omega_{8,i})$	$n_1(\omega_{8,i})$
$\omega_{8,1}$	$\mathbb{P}^2 \cup \mathbb{P}^3$	$q^3 + 2q^2 + 2q + 2$
$\omega_{8,2}$	$\mathbb{P}^2 \cup_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^3$	$q^3 + 2q^2 + q + 1$
$\omega_{8,3}$	$\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$	$2q + 2$
$\omega_{8,4}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$q^2 + 2q + 1$
$\omega_{8,4,d_1d_2}$	$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2})$	$q^2 + 1$
$\omega_{8,5}$	$\mathbb{P}^1 \cup_{\mathbb{P}^0} \mathbb{P}^1$	$2q + 1$
$\omega_{8,5,d}$	\emptyset	0
$\omega_{8,6}$	\mathbb{P}^1	$q + 1$

TABLE 4.2 – La variété $X_1(\omega_{8,i})$.

Preuve. Soit $x = \sum_{i=1}^8 x_i e_i$, d'après la formule (3.3).

Nous commençons d'abord par $\omega_{8,1}$, nous calculons :

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,1}) &= x_1^2 e_2 e_3 e_4 e_5 + x_1 [x_2 e_4 e_5 e_3 e_1 + x_3 e_4 e_5 e_1 e_2 + x_4 e_2 e_3 e_5 e_1 + x_5 e_2 e_3 e_1 e_4 \\ &\quad + x_6 (e_2 e_3 e_7 e_8 + e_4 e_5 e_7 e_8) + x_7 (e_2 e_3 e_8 e_6 + e_4 e_5 e_8 e_6 + x_8 (e_2 e_3 e_6 e_7 \\ &\quad + e_4 e_5 e_6 e_7))] + x_2 (x_6 e_3 e_1 e_7 e_8 + x_7 e_3 e_1 e_8 e_6 + x_8 e_3 e_1 e_6 e_7) + x_3 (x_6 e_1 e_2 e_7 e_8 \\ &\quad + x_7 e_1 e_2 e_8 e_6 + x_8 e_1 e_2 e_6 e_7) + x_4 (x_6 e_5 e_1 e_7 e_8 + x_7 e_5 e_1 e_8 e_6 + x_8 e_5 e_1 e_6 e_7) \\ &\quad + x_5 (x_6 e_1 e_4 e_7 e_8 + x_7 e_1 e_4 e_8 e_6 + x_8 e_1 e_4 e_6 e_7) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de $e_2 e_3 e_4 e_5$ est x_1^2 , $x_1 = 0$ est nécessaire pour que $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,1}) = 0$. On prend $x_1 = 0$ dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,1})_{x_1=0} &= x_2 (x_6 e_3 e_1 e_7 e_8 + x_7 e_3 e_1 e_8 e_6 + x_8 e_3 e_1 e_6 e_7) + x_3 (x_6 e_1 e_2 e_7 e_8 \\ &\quad + x_7 e_1 e_2 e_8 e_6 + x_8 e_1 e_2 e_6 e_7) + x_4 (x_6 e_5 e_1 e_7 e_8 + x_7 e_5 e_1 e_8 e_6 + x_8 e_5 e_1 e_6 e_7) \\ &\quad + x_5 (x_6 e_1 e_4 e_7 e_8 + x_7 e_1 e_4 e_8 e_6 + x_8 e_1 e_4 e_6 e_7) \\ &= e_1 \wedge (x_3 e_2 - x_2 e_3 + x_5 e_4 - x_4 e_5) \wedge (x_6 e_7 e_8 + x_7 e_8 e_6 + x_8 e_6 e_7). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{8,1}) &= \{x_1 = 0\} \cap [\{x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0\} \cup \{x_6 = x_7 = x_8 = 0\}] \\ &= \mathbb{P}\{e_6, e_7, e_8\} \cup \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5\} \simeq \mathbb{P}^2 \cup \mathbb{P}^3. \end{aligned}$$

Pour $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,2})$: les coefficients de $e_2 e_3 e_4 e_5 + e_2 e_3 e_6 e_7 + e_4 e_5 e_6 e_7$, $e_1 e_4 e_6 e_8$ et $e_7 e_1 e_8 e_5$ sont x_1^2 , x_5^2 et x_6^2 respectivement, $x_1 = x_5 = x_6 = 0$ est nécessaire pour que $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,2}) = 0$.

On prend $x_1 = x_5 = x_6 = 0$ dans l'équation $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,2}) = 0$, on obtient :

$$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,2})_{x_1=x_5=x_6=0} = e_1 \wedge (x_3 e_2 - x_2 e_3) \wedge x_8 e_5 e_6.$$

Donc

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{8,2}) &= \{x_1 = x_5 = x_6 = 0\} \cap [\{x_2 = x_3 = 0\} \cup \{x_8 = 0\}] \\ &= \mathbb{P}\{e_4, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_4, e_7\}} \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_7\} \simeq \mathbb{P}^2 \cup_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^3. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,3})$: les coefficients de $e_3 e_4 e_5 e_6$, $e_3 e_5 e_7 e_8$, $e_4 e_1 e_5 e_2$ et $e_6 e_1 e_2 e_3$ sont x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 et x_5^2 , respectivement, donc au cas x_1, x_2, x_3 et x_5 tous égal à zéro,

$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,3})$ est réduit à

$$e_1 e_2 \wedge (x_4 e_3 + x_6 e_5) \wedge (x_8 e_7 - x_7 e_8).$$

Alors

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{8,3}) &= \{x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0\} \cap [\{x_4 = x_6 = 0\} \cup \{x_7 = x_8 = 0\}] \\ &\simeq \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

De même pour $\omega_{8,4}$, et après calcul on trouve

$$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,4})_{x_1=x_2=x_3=x_4=0} = (x_5 x_8 - x_6 x_7) e_1 e_2 e_3 e_4 = 0,$$

i.e.

$$X_1(\omega_{8,4}) = \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ \text{et} \\ x_5 x_8 - x_6 x_7 = 0 \end{cases}$$

Comme x_1, x_2, x_3 et x_4 sont tous nuls, nécessaire il existe au moins l'un des $x_i, i = 5, \dots, 8$ différent de zéro, ce qui donne

$$X_1(\omega_{8,4}) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Pour $\omega_{8,4,d_1 d_2}$, nous avons :

$$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,4,d_1})_{x_1=x_2=x_3=x_4=0} = (x_5^2 - d_1 x_6^2 + x_7 x_8) e_1 e_2 e_3 e_4 = 0,$$

et

$$\text{Pf}_2(\iota_x \omega_{8,4,d_2})_{x_1=x_2=x_3=x_4=0} = (d_2 x_7^2 - x_8^2 - x_7 x_8 + x_5 x_6) e_1 e_2 e_3 e_4 = 0,$$

on trouve

$$X_1(\omega_{8,4,d_1}) = \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ \text{et} \\ x_5^2 - d_1 x_6^2 + x_7 x_8 = 0 \end{cases}$$

et

$$X_1(\omega_{8,4,d_2}) = \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ et \\ d_2x_7^2 - x_8^2 - x_7x_8 + x_5x_6 = 0, \end{cases}$$

par conséquent

$$X_1(\omega_{8,4,d_1d_2}) = X_1(\omega_{8,4,d_1}) = X_1(\omega_{8,4,d_2}) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2}).$$

Par le calcul de $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{8,5})$, nous trouvons :

$$X_1(\omega_{8,5}) = 2q + 1.$$

De la même manière, on peut calculer $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{8,5,d_1})$, $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{8,5,d_2})$, et $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{8,5,d_3})$, on trouve,

$$X_1(\omega_{8,5,d_1}) = X_1(\omega_{8,5,d_2}) = X_1(\omega_{8,5,d_3}) = \emptyset.$$

Enfin pour $\omega_{8,6}$:

Pour que $\text{Pf}_2(\iota_x\omega_{8,6}) = 0$, il suffit que

$$\begin{aligned} & x_1^2(e_2e_3e_4e_5 + e_2e_3e_6e_7 + e_4e_5e_6e_7) + x_3^2e_1e_2e_8e_4 + x_6^2e_7e_1e_8e_5 + x_8^2e_4e_3e_5e_6 \\ & + (x_4^2 + x_2x_6)e_5e_1e_3e_8 + (x_5^2 + x_3x_7)e_1e_4e_6e_8 = 0, \end{aligned}$$

implique

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = x_6 = x_8 = 0 \\ et \\ x_4^2 + x_2x_6 = x_5^2 + x_3x_7 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_1(\omega_{8,6}) &= \{x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_2, e_7\} \simeq \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

□

Les variétés $X_2(\omega_{8,i})$ des trivecteurs non dégénérées sur \mathbb{F}_q^8

Calculons $X_2(\omega_{8,i})$, $1 \leq i \leq 6$, où

$$X_2(\omega_{8,i}) = \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^8 \setminus \{0\} \mid \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,i}) = 0\}.$$

Proposition 9. La variété $X_2(\omega_{8,i})$, $1 \leq i \leq 6$ avec leur cardinal est donné par la Table :

$\omega_{8,i}$	$X_2(\omega_{8,i})$	$ X_2(\omega_{8,i}) $
$\omega_{8,1}$	$\mathbb{P}^6 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4$	$ \mathbb{P}^6 + \mathbb{P}^4 - \mathbb{P}^3 $
$\omega_{8,2}$	\mathbb{P}^6	$ \mathbb{P}^6 $
$\omega_{8,3}$	$\mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4$	$ \mathbb{P}^5 + 2 \mathbb{P}^4 - 2 \mathbb{P}^3 $
$\omega_{8,4}$	$\mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^5$	$2 \mathbb{P}^5 - \mathbb{P}^3 $
$\omega_{8,4,d_1 d_2}$	\mathbb{P}^3	$ \mathbb{P}^3 $
$\omega_{8,5}$	$(\mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4) \cup (\mathbb{F}_q)^2$	$ \mathbb{P}^5 + 2 \mathbb{P}^4 - 2 \mathbb{P}^3 + q^2$
$\omega_{8,5,d_1 d_2 d_3}$	\mathbb{P}^5	$ \mathbb{P}^5 $
$\omega_{8,6}$	$\mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4$	$ \mathbb{P}^5 + \mathbb{P}^4 - \mathbb{P}^3 $

TABLE 4.3 – La variété $X_2(\omega_{8,i})$.

Preuve. Soit $x = \sum_{i=1}^8 x_i e_i$, commençons par le calcul de $X_2(\omega_{8,1})$:

En utilisant la formule (3.4), on obtient :

$$\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,1}) = x_1^2 x_6 e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_8 + x_1^2 x_7 e_2 e_3 e_4 e_5 e_8 e_6 + x_1^2 x_8 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7.$$

Les coefficients de $e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_8$, $e_2 e_3 e_4 e_5 e_8 e_6$ et $e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7$ sont $x_1^2 x_6$, $x_1^2 x_7$ et $x_1^2 x_8$, respectivement, donc $x_1 = 0$ ou bien $x_6 = x_7 = x_8 = 0$. Si $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,1}) = 0$ donc

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,1}) &= \{x_1 = 0\} \cup \{x_6 = x_7 = x_8 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5\}} \mathbb{P}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \simeq \mathbb{P}^6 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

Pour $\omega_{8,2}$: calculons $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,2})$, on trouve le coefficient de $e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7$ est x_1^3 , en plus de cela x_1 divise $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,2})$, par la suite :

$$X_2(\omega_{8,2}) = \{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{P}^6.$$

Pour $\omega_{8,3}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,3}) &= x_1^2 x_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 + x_1^2 x_7 e_3 e_4 e_5 e_6 e_8 e_2 + x_1^2 x_8 e_3 e_4 e_5 e_6 e_2 e_7 \\ &\quad + x_2^2 x_3 e_3 e_5 e_7 e_8 e_4 e_1 + x_2^2 x_5 e_3 e_5 e_7 e_8 e_6 e_1 + x_2 x_3^2 e_7 e_8 e_4 e_1 e_5 e_2 \\ &\quad + x_2 x_5^2 e_7 e_8 e_6 e_1 e_2 e_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = 0 \\ x_1 x_7 = 0 \\ x_1 x_8 = 0 \\ x_2 x_3 = 0 \\ x_2 x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_2 = x_7 = x_8 = 0\} \cup \{x_1 = x_3 = x_5 = 0\}. \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,3}) &= \{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_2 = x_7 = x_8 = 0\} \cup \{x_1 = x_3 = x_5 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}} \mathbb{P}\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_6\} \cup_{\mathbb{P}\{e_4, e_6, e_7, e_8\}} \mathbb{P}\{e_2, e_4, e_6, e_7, e_8\} \\ &\simeq \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

Le même principe pour $\omega_{8,4}$, on trouve pour $\omega_{8,4}$:

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4}) &= x_1^2 x_2 e_2 e_5 e_3 e_6 e_4 e_7 + x_1^2 x_3 e_2 e_5 e_3 e_6 e_4 e_8 + x_2^2 x_4 e_5 e_1 e_4 e_7 e_8 e_3 \\ &\quad + x_3^2 x_4 e_6 e_1 e_4 e_8 e_7 e_2 + x_1 x_2^2 e_3 e_6 e_5 e_1 e_4 e_7 + x_1 x_3^2 e_2 e_5 e_6 e_1 e_4 e_8 \\ &\quad + x_2 x_4^2 e_5 e_1 e_7 e_2 e_8 e_3 + x_3 x_4^2 e_6 e_1 e_7 e_2 e_8 e_3 = 0 \\ &\Rightarrow \{x_1 = x_4 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,4}) &= \{x_1 = x_4 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_5, e_6, e_7, e_8\}} \mathbb{P}\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\ &\simeq \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^5. \end{aligned}$$

Pour $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_1})$ et $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_2})$, les coefficients de $e_2 e_5 e_3 e_6 e_4 e_7$, $d_1 e_5 e_1 e_4 e_6 e_3 e_8$, $e_4 e_5 e_6 e_1 e_8 e_2$ et $d_1 e_5 e_3 e_6 e_2 e_7 e_1$ pour $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_1})$, et $d_2 e_4 e_8 e_3 e_7 e_2 e_8$, $e_8 e_3 e_7 e_4 e_6 e_1$, $d_2 e_2 e_8 e_7 e_1 e_4 e_5$ et $e_8 e_1 e_2 e_7 e_5 e_3$ pour $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_2})$ sont x_1^3 , x_2^3 , x_3^3 et x_4^3 .

Si $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_1}) = \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,4,d_2}) = 0$ il suffit que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,4,d_1d_2}) &= X_2(\omega_{8,4,d_1}) = X_2(\omega_{8,4,d_2}) = \{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_5, e_6, e_7, e_8\} \simeq \mathbb{P}^3. \end{aligned}$$

De même pour $\omega_{8,5}$:

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,5}) &= (x_1^2 x_6 + x_1 x_6^2) e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_8 + x_1^2 x_7 e_2 e_3 e_4 e_5 e_8 e_6 + x_1^2 x_8 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \\ &\quad + x_4 x_6^2 e_5 e_1 e_2 e_3 e_7 e_8 + x_5 x_6^2 e_1 e_4 e_2 e_3 e_7 e_8 = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,5}) &= \mathbb{P}\{x \in \mathbb{F}_q^8 \setminus \{0\}, x_1 x_6 (x_1 + x_6) = 0, x_1^2 x_7 = 0, x_1^2 x_8 = 0, x_4 x_6^2 = 0, x_5 x_6^2 = 0\} = \\ &= \{x_1 x_6 = 0, x_1 x_7 = 0, x_1 x_8 = 0, x_4 x_6 = 0, x_5 x_6 = 0\} \\ &\cup \{x_1 + x_6 = 0, x_1 x_7 = 0, x_1 x_8 = 0, x_4 x_6 = 0, x_5 x_6 = 0\} \\ &= X_2(\omega_{8,5})_{\{x_1=0 \text{ ou } x_6=0\}} \cup X_2(\omega_{8,5})_{\{x_1 \neq 0 \text{ et } x_6 \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,5})_{\{x_1=0 \text{ ou } x_6=0\}} &= \{x_1 = x_6 = 0\} \cup \{x_1 = x_4 = x_5 = 0\} \cup \{x_6 = x_7 = x_8 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_2, e_3, e_7, e_8\}} \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_6, e_7, e_8\} \cup_{\mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5\}} \mathbb{P}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \\ &\simeq \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

Pour

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,5})_{\{x_1 \neq 0 \text{ et } x_6 \neq 0\}} &= \{x_1 + x_6 = 0, x_1 x_7 = 0, x_1 x_8 = 0, x_4 x_6 = 0, x_5 x_6 = 0\} \\ &= \{x_1 = (q-1)x_6 \neq 0, x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = 0\} \\ &\simeq \mathbb{F}_q^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$X_2(\omega_{8,5}) = (\mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4) \cup (\mathbb{F}_q^2)^2,$$

et

$$|X_2(\omega_{8,5})| = |\mathbb{P}^5| + 2|\mathbb{P}^4| - 2|\mathbb{P}^3| + q^2.$$

Maintenant, pour $\omega_{8,5,d_1}$, $\omega_{8,5,d_2}$ et $\omega_{8,5,d_3}$. On utilise $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,5,d_1})$, $\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,5,d_2})$ et

$\text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,5,d_3})$, on obtient,

$$X_2(\omega_{8,5,d_1}) = X_2(\omega_{8,5,d_2}) = X_2(\omega_{8,5,d_3}) = \mathbb{P}^5.$$

Enfin, pour $\omega_{8,6}$,

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,6}) &= x_1^3 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 + x_1^2 [x_2 e_4 e_5 e_6 e_7 e_3 e_1 + x_3 (e_2 e_3 e_6 e_7 e_8 e_4 + e_4 e_5 e_6 e_7 e_1 e_2) \\ &\quad + x_4 (e_2 e_3 e_6 e_7 e_5 e_1 + e_4 e_5 e_6 e_7 e_3 e_8) + x_5 (e_2 e_3 e_6 e_7 e_1 e_4 + e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_8) \\ &\quad + x_6 (e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_1 + e_2 e_3 e_6 e_7 e_8 e_5) + x_7 e_2 e_3 e_4 e_5 e_1 e_6] \\ &\quad + (x_3^2 e_1 e_2 e_8 e_4 e_5 e_6 + x_6^2 e_7 e_1 e_8 e_5 e_4 e_3) x_8 \\ &\quad + x_1 [x_3^2 e_6 e_7 e_1 e_2 e_8 e_4 + x_4^2 e_6 e_7 e_5 e_1 e_3 e_8 + x_5^2 e_2 e_3 e_1 e_4 e_6 e_8 + x_6^2 e_2 e_3 e_1 e_7 e_8 e_5] \\ &\quad + (x_3 e_1 e_2 e_4 e_3 e_5 e_6 + x_6 e_7 e_1 e_4 e_3 e_5 e_6) x_8^2 = 0. \end{aligned}$$

Si $x_1 = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \text{Pf}_3(\iota_x \omega_{8,6})_{x_1=0} &= (x_3^2 e_1 e_2 e_8 e_4 e_5 e_6 + x_6^2 e_7 e_1 e_8 e_5 e_4 e_3) x_8 + (x_3 e_1 e_2 e_4 e_3 e_5 e_6 \\ &\quad + x_6 e_7 e_1 e_4 e_3 e_5 e_6) x_8^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_2(\omega_{8,6}) &= \{x_1 = x_8 = 0\} \cup \{x_1 = x_3 = x_6 = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \cup_{\mathbb{P}\{e_2, e_4, e_5, e_7\}} \mathbb{P}\{e_2, e_4, e_5, e_7, e_8\} \\ &\simeq \mathbb{P}^5 \cup_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

□

Théorème 16. Soit V un espace vectoriel de dimension 8 sur un corps fini \mathbb{F}_q de caractéristique

différente de 3, les poids des codes des trivecteurs non dégénérées $\omega_{8,i}$ sont :

$$wt(\omega_{8,1}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} - q^8$$

$$wt(\omega_{8,2}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11}$$

$$wt(\omega_{8,3}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^8$$

$$wt(\omega_{8,4}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^9$$

$$wt(\omega_{8,4,d}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9$$

$$wt(\omega_{8,5}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^8$$

$$wt(\omega_{8,5,d}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^8$$

$$wt(\omega_{8,6}) = q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10}$$

Preuve. En utilisant la formule (4.1), dans lequel les quantités $|X_1(\omega_{8,i})|$ et $|X_2(\omega_{8,i})|$ ont été calculées dans la proposition 8 et 9.

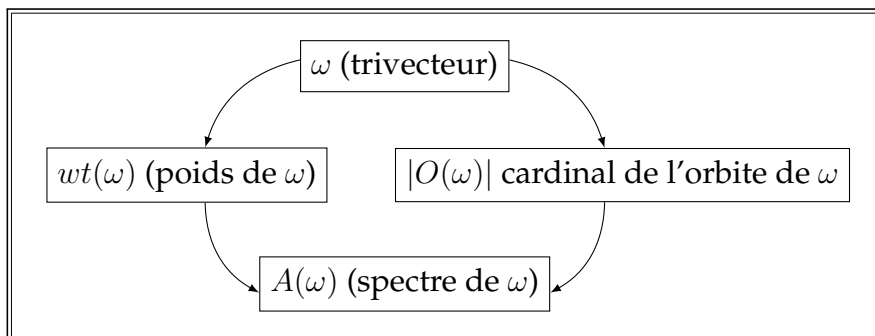
Pour $wt(\omega_{8,1})$, nous avons $|X_1(\omega_{8,1})| = q^3 + 2q^2 + 2q + 2$ et $|X_2(\omega_{8,1})| = |\mathbb{P}^6| + |\mathbb{P}^4| - |\mathbb{P}^3| = q^6 + q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, lorsque nous remplaçons dans cette formule (4.1), nous trouvons

$$\begin{aligned} wt(\omega_{8,1}) &= \\ q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^6 - q^6 &\left(\frac{|\mathbb{P}^6| + |\mathbb{P}^4| - |\mathbb{P}^3| + q^2(q^3 + 2q^2 + 2q + 2)}{1 + q + q^2} \right) \\ &= q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} - q^8. \end{aligned}$$

De la même manière pour $wt(\omega_{8,2}), \dots, wt(\omega_{8,6})$. □

Conclusions générales

- ☞ La classification des trivecteurs sur un corps fini joue un rôle important pour résoudre certains problèmes dans la théorie de codes et CCEG et BMC et les spectres des codes est très liée à celle aux poids des codes et aux cardinaux d'orbites des trivecteurs, comme le montre le diagramme suivante :



- ☞ Le tableau suivante résume tous les poids des codes et certain spectres des trivecteurs de rang ≤ 8 .

$\leq n$	ω_i	$wt(\omega_i)$	$A(\omega_i)$
6	ω_3	q^9	$(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)$
	ω_5	$q^9 + q^7$	$q^2(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + q + 1)$
	$\omega_{6,1}$	$q^9 + q^7 + q^6 - q^4$	$\frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q - 1)$
	$\omega_{6,1,d}$	$q^9 + q^7 + q^6 + q^4$	$\frac{1}{2}q^9(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$
	$\omega_{6,2}$	$q^9 + q^7 + q^6$	$q^4(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)$
7	ω_3	q^{12}	$(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)/(q^2 - 1)$
	ω_5	$q^{12} + q^{10}$	$q^2(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 + q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
	$\omega_{6,1}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 - q^7$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)$
	$\omega_{6,1,d}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^7$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
	$\omega_{6,2}$	$q^{12} + q^{10} + q^9$	$q^4(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)/(q - 1)$
	$\omega_{7,1}$	$q^{12} + q^{10} + q^8$	$q^6(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)$
	$\omega_{7,2}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8$	$q^6(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)$ $+ q^{11}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q^2 + 1)$
	$\omega_{7,3}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 - q^7$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
	$\omega_{7,3,d}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^7$	$\frac{1}{2}q^9(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)$
	$\omega_{7,4}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8$	
	$\omega_{7,5}$	$q^{12} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^6$	$\frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^7 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q - 1)$
8	ω_3	q^{15}	
	ω_5	$q^{15} + q^{13}$	
	$\omega_{6,1}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} - q^{10}$	
	$\omega_{6,1,d}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{10}$	
	$\omega_{6,2}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12}$	
	$\omega_{7,1}$	$q^{15} + q^{13} + q^{11}$	
	$\omega_{7,2}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11}$	
	$\omega_{7,3}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} - q^{10}$	
	$\omega_{7,3,d}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10}$	
	$\omega_{7,4}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11}$	
	$\omega_{7,5}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^9$	
	$\omega_{8,1}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} - q^8$	
	$\omega_{8,2}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11}$	
	$\omega_{8,3}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^8$	
	$\omega_{8,4}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^9$	
	$\omega_{8,4,d}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9$	
$\omega_{8,5}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} - q^8$		
$\omega_{8,5,d}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^8$		
$\omega_{8,6}$	$q^{15} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10}$		

TABLE 4.4 – Poids et spectres des codes des trivecteurs de rang ≤ 8 .

Bibliographie

- [1] M. Abou Hashish and L. Bénéteau. *An alternative way to classify some Generalized Elliptic Curves and their isotopic loops*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **45** (2004), 237–255.
- [2] N. Bourbaki. *Algèbre, chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.
- [3] M. Chelgham, M. Kerada and L. Noui. *On certain invariant of trivectors*. Communications in Applied Analysis **21** (2017), 595–606.
- [4] A.M. Cohen and A.G. Helminck. *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7*. Communications in algebra **16** (1988), 1–25.
- [5] D.Ž. Djoković. *Classification of trivectors of an eight-dimensional real vector space*. Linear and multilinear algebra **13** (1983), 3–39.
- [6] G. B. Gurevich. *Classification of trivectors of rank 8*. Doklady Akademii Nauk SSSR **2** (1935), 353–355.
- [7] J.W.P. Hirschfeld. *Projective geometries over finite field*. Oxford university press, New York, 1979.
- [8] W. Huffman, V.S. Pless and R.A. Brualdi. *Handbook of coding theory*. Elsevier Amsterdam **1**(1998).
- [9] B. Kahn. *Sommes de tenseurs décomposables*. Prépublication de l’université Paris VII (1991), page 28.
- [10] N. Midoune. *Groupes d’Automorphismes des formes Trilinéaires Alternées de Rang 8*. Thèse magister, Université de Constantine, 1998.
- [11] N. Midoune. *Classification des formes trilineaires alternees de rang 8 sur les corps finis*. Thèse de Doctorat, Batna, Algerie, 2009.
- [12] N. Midoune, L. Noui. *K-forms of 2-step splitting trivectors*. International Journal of Algebra **2** (2008), 369–382.
- [13] N. Midoune. *Quelques remarques sur les bivecteurs et les trivecteurs*. Annales des sciences mathématiques du Québec **36** (2012), 577–589.
- [14] D.Y. Nogin. *Codes associated to Grassmannians*. Arithmetic, geometry and coding theory (Luminy, 1993) (1996), 145–154.

- [15] D.Y. Nogin. *Spectrum of Codes associated with the Grassmannian $G(3, 6)$* . Problems of Information Transmission **33** (1997), 114–123.
- [16] L. Noui. *Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, France, 1995.
- [17] L. Noui. *Transvecteur de rang 8 sur un corps algébriquement clos*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics **324** (1997), 611–614.
- [18] L. Noui et N. Midoune. *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 8 over a finite field*. Linear and Multilinear Algebra **61** (2013), 15–21.
- [19] L. Noui et Ph. Revoy. *Formes multilinéaires alternées*. Linear and Multilinear Algebra **1** (1994), 43–69.
- [20] H.K. Pillai, K.V. Kaipa. *Weight spectrum of codes associated with the Grassmannian $G(3, 7)$* . IEEE transactions on information theory **59** (2012), 986–993.
- [21] P. Pudlák, J. Hora. *Classification of 8-dimensional trilinear alternating forms over $GF(2)$* . Communications in Algebra **43** (2015), 3459–3471.
- [22] M.A. Rakdi, N. Midoune. *Weights of the F_q -forms of 2-step splitting trivectors of rank 8 over a finite field*. Carpathian Mathematical Publications **11** (2019), 422–430.
- [23] Ph. Revoy. *Formes trilinéaires alternée et puissances divisées*. Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (1972-1973), 1–10.
- [24] Ph. Revoy. *Trivecteurs de rang 6*. in coll. Sur les formes quadratiques, Memoire SMF **59**(1979), 141–155.
- [25] Ph. Revoy. *Formes trilinéaires alternées de rang 7*. Bulletin des Sciences Mathématiques **112**(1988), 357–368.
- [26] C. Ryan. *An application of Grassmannian varieties to coding theory*. in Proc. 16th Manitoba Conf. Numerical Math. Comput **57**(1987), 257–271.
- [27] J. Schouten. *Klassifizierung der alternierenden Größen dritten Grades in 7 Dimensionen*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) **55**(1931), 137–156.
- [28] S. Vlădu, M. Tsfasman. *Algebraic-Geometric Codes*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [29] S. Vlădu, M. Tsfasman and D.Y. Nogin. *Algebraic Geometric Codes : Basic Notions*. American Mathematical Society **139** (2007).
- [30] P. Vojtěchovský, E.A. O'Brien. *Code loops in dimension at most 8*. Journal of Algebra **473**(2017), 607–626.

ملخص

ليكن V فضاء شعاعيا بعده n على حقل تبديلي K . تصنيف ثلاثيات الأشعة هو دراسة تأثير الزمرة الخطية $GL(V)$ على الفضاء $\wedge^3 V$ ، يلعب هذا التصنيف دورا مهما في حل بعض المشكلات في نظرية الترميز (نظرية التكويد)، منحنيات مكعبة ببيضاوية معممة وحلقات موفانج التبديلية. نقوم بدراسة فئات ثلاثيات الأشعة من الرتبة أقل أو يساوي 8 على حقل منتهي ونعطي عدد لزممر تذاكلات و مدارات ثلاثيات الأشعة. نحدد أوزان الترميز ثلاثيات الأشعة في فضاء بعده أقل أو يساوي 8 وبعض أطيف الترميز. الكلمات المفتاحية : ثلاثية الأشعة، حقل منتهي، تصنيف، مدار، وزن، الطيف.

Abstract

Let V be a finite dimensional vector space n over a commutative field K . The classification of trivectors is the study of the action of the linear group $GL(V)$ on the vector space $\wedge^3 V$, this classification plays an important role in solving some problems in code theory, CCEG and BMC. We study the classes of trivectors of rank ≤ 8 over a finite field and we give the cardinalities of groups of automorphisms and orbits of trivectors. we determine the weights of the codes of the trivectors in space of dimension ≤ 8 and some spectrums of the codes.

Keywords : trivector, finite field, classification, orbit, weight, spectrum.

Résumé

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K . La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 V$, cette classification joue un rôle important pour résoudre certains problèmes dans la théorie des codes, CCEGs et BMC. Nous étudions les classes des trivecteurs de rang ≤ 8 sur un corps fini et nous donnons les cardinaux des groupes d'automorphismes et les orbites des trivecteurs. Nous déterminons les poids des codes des trivecteurs sur un espace de dimension ≤ 8 et quelques spectres des codes.

Mot clés : trivecteur, corps fini, classification, orbite, poids, spectre.