



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Par

ABDELOUAHAB Taieb

Sujet

Approximation d'une solution, par les polynômes de Bernstein pour une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Devant le jury :

Mr. BENSALOUA Cheniti	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr. LAKEHALI Belkacem	MCB. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. GAGUI Bachir	MCB. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2016 / 2017

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mes frères,

-A mes soeures,

-A toute ma famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Premièrement, je tiens à remercier mon promoteur **M^r. LAKEHALI. BELKACEM** pour sa guidance et son soutien indéfectible durant la préparation de ce projet, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion qui m'est offerte, l'enseignant **GUAGUI. B**, pour son encouragement et son aide fidèle. Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail. Finalement, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien exemplaire et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir.

Table des matières

Introduction	1
1 Les équations intégrales	2
1.1 Introduction	2
1.1.1 Classification des équations intégrales	2
1.1.2 Equations intégrales de Volterra	2
1.1.3 Equations intégrales de Fredholm	4
1.1.4 Equation intégrale singulière	6
1.1.5 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale	7
1.2 Résolution numérique des équations intégrales	11
1.2.1 Méthodes de projection	11
1.2.2 Méthode de collocation	20
2 Les Polynômes de Bernstein	22
2.1 Les Polynômes de Bernstein	22
2.1.1 Apperçu général	22
2.1.2 Polynômes de Bernstein	23
2.1.3 La relation de récursivité des polyômes de Bernstein	28
2.1.4 Les polynômes de Bernstein sont tous non négatifs	28
2.1.5 Les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité	29
2.1.6 Elévation du degré	30
2.1.7 Converssion de la base de Bernstein à la base des monômes	33
2.1.8 Dérivation des polynômes de Bernstein	34

2.1.9	Les polynômes de Bernstein forment une base	35
2.2	Représentation matricielle des polynômes de Bernstein	36
2.3	Approximation uniforme d'une fonction	42
3	Application	45
4	Exemples numériques	48
	Conclusion	57
	Bibliographie	58

Introduction

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Les équations intégrales sont l'un des principaux outils dans divers domaines de la mathématique appliquée, de la physique et de l'ingénierie.

Les équations intégrales de Fredholm sont l'une des équations intégrales les plus importantes.

Comme pour les équations différentielles ordinaires ou les équations aux dérivées partielles, il n'est pas connu de méthode universelle pour la résolution des équations intégrales dites exactes. Il arrive très souvent que même celles qui présentent des formes apparemment simples ne se laissent pas résoudre avec ces méthodes dites exactes.

Des méthodes numériques de résolution avec des schémas algorithmiques pour leur implémentation sur ordinateur quand la méthode s'y adapte sont alors proposées.

Dans ce mémoire, nous présentons un algorithme basé sur la modification de la bases de l'espace des polynômes, la base de Bernstein. Nous discutons de la nouvelle forme des polynômes, les polynômes de Bernstein ont de nombreuses propriétés utiles.

L'ensemble des polynômes Bernstein de degré n sur un intervalle $[a, b]$, il constitue une base complète pour $(n + 1)$ polynômes continus.

Nous présentons la solution aux équations intégrales de Fredholm comme des combinaisons linéaires de ces polynômes $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x)$ et les coefficients c_i seront déterminés à l'aide de la méthode de collocation.

Chapitre 1

Les équations intégrales

1.1 Introduction

En mathématiques, une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît sous le signe intégral. Il existe un lien étroit entre équations différentielles et intégrales. Voir, par

exemple, la théorie de Fredholm.

1.1.1 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et de Fredholm. qui consistent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types, à savoir Les équations intéro-différentielles et les équations intégrales singulières

1.1.2 Equations intégrales de Volterra

Définition 1.1.1 *On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel

1. Une équation de la forme

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce .

2. On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la form

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

3. si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit.

$$\lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = \varphi(x)$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

4. Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$-\lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemple 1.1.1 *exemple des équations intégrale de Volerra*

Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda \int_0^x (x^2 - 1) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1 \\ -\lambda \int_0^x (x^2 - 1) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1\end{aligned}$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^x (x^2 - 1) \varphi(t) dt &= \varphi(x) \\ \lambda \int_0^x (x^2 - 1) \varphi(t) dt &= 0\end{aligned}$$

1.1.3 Equations intégrales de Fredholm

On appelle une équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = \varphi(x), \quad x \in [a, b]$$

elle dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène, si dans le cas contraire

Si $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce

non homogène.

1. On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \varphi(x), \quad x \in [a, b]$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde non homogène.

2. Une équation de la forme

$$-\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Exemple 1.1.2 *exemples des équations intégrales de Fredholm*

Equations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1, \quad x \in [-1, 1] \\ -\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1, \quad x \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= \varphi(x), \quad x \in [-1, 1] \\ \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= 0, \quad x \in [-1, 1]\end{aligned}$$

1.1.4 Equation intégrale singulière

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégrale.

Par exemple si le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale de Fredholm est de la forme

$$K(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Avec $M(x, t)$ une fonction bornée sur $[a, b] \times [a, b]$. ou encore un noyau $K(x, t)$ logarithmique

$$K(x, t) = M(x, t) \ln |x - t|$$

Si $\alpha = 1$ dans l'exemple précédent alors $K(x, t)$ est appelé noyau de Cauchy.

$$K(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|}$$

1.1.5 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale

Opérateurs à noyau

L'équation qui va nous intéresser dans la suite est l'équation de Fredholm

$$\lambda\varphi(x) - \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

On désigne par Ω un ensemble compact inclu dans \mathbb{R}^N et soit $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω , cet espace est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire

Définition 1.1.2 Soit $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle opérateur intégral à noyau $K(.,.)$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{K} : \varphi \in C(\Omega) \mapsto \mathcal{K}(\varphi) \in C(\Omega)$$

$$\mathcal{K}(\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)dt$$

Cet opérateur est continue, de norme

$$\|\mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(C(\Omega),C(\Omega))} = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x,t)|dt$$

Théorème 1.1.1 (de la série géométrique de Neumann)

Soit V un espace de Banach, L un opérateur linéaire borné, $L \in \mathcal{L}(V)$ et I opérateur

identique. Supposons que

$$\|L\| < 1 \quad (1.1)$$

Alors l'opérateur $(I - L)$ est inversible dans V et $(I - L)^{-1}$ est borné tel que

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|} \quad (1.2)$$

Preuve. soit (M_n) la suite définie par

$$M_n = \sum_{i=0}^n L^i \quad n \geq 0$$

On a

$$\|M_{n+p} - M_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L\|^i$$

d'où

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|L\|^{n+1}}{1 - \|L\|}$$

Par conséquent on a

$$\sup_{p \geq 1} \|M_{n+p} - M_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

donc la suite (M_n) est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{L}(V)$ donc il existe $M \in \mathcal{L}(V)$ tel que

$$\|M_n - M\| \rightarrow 0$$

On remarque aussi

$$(I - L)M_n = M_n(I - L) = I - L^{n+1}$$

Si $n \rightarrow \infty$ on obtient

$$(I - L)M = M(I - L) = I$$

Ce qui permet de dire que l'opérateur $(I - L)$ est inversible et on a

$$M = (I - L)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n L^i = \sum_{i=0}^{+\infty} L^i$$

Ici $M = (I - L)^{-1}$ est la somme de la série de Neumann $\sum L^i$. Il reste à montrer (1.2), puisque

$$\|M_n\| = \left\| \sum_{i=0}^n L^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|L\|^i \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n\| &= \|M\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|} \\ \|(I - L)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|L\|} \end{aligned}$$

■

Résultat 1.1.1 *Sous les hypothèses du théorème (1.1.1) pour tout $f \in V$ l'équation*

$$(I - L)\varphi = f$$

admet une solution unique dans V telle que

$$\varphi = (I - L)^{-1} \cdot f \in V$$

Exemple 1.1.3 *Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type*

$$\lambda\varphi(x) - \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t) dt = f(x), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

On suppose que $\lambda \neq 0$ la fonction $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\Omega \times \Omega$ de plus $V = C(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ symboliquement l'équation (1.3) s'écrit sous la forme

$$(\lambda I - \mathcal{K}) \varphi = f \tag{1.4}$$

En remarquant que

$$(I - L) \varphi = \frac{1}{\lambda} f \quad \text{avec} \quad L = \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}$$

et en appliquant le résultat du théorème (1.1.1)

$$\|L\| = \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\| < 1$$

Ou bien

$$\|\mathcal{K}\| = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)| dt < |\lambda| \tag{1.5}$$

dans ce cas l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{K})^{-1}$ existe et on a

$$\left\| (\lambda I - \mathcal{K})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|\mathcal{K}\|}$$

Ainsi sous l'hypothèse (1.5) et pour tout $f \in C(\Omega)$ l'équation intégrale de Fredholm du second type (1.3) admet une solution unique $\varphi \in C(\Omega)$ et on a

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq \left\| (\lambda I - \mathcal{K})^{-1} \right\| \cdot \|f\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{|\lambda| - \|\mathcal{K}\|}.$$

1.2 Résolution numérique des équations intégrales

1.2.1 Méthodes de projection

Définition 1.2.1 (*définition des opérateurs de projection*)

Soit V un espace vectoriel, V_1 et V_2 deux sous espace vectoriel de V . On dit que V est une somme directe de V_1 et V_2 et on écrit $V = V_1 \oplus V_2$ si tout $v \in V$ peut être décomposé de la manière unique

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$$

En outre, si V est muni d'un produit scalaire et que

$$\forall v_1 \in V_1, \quad \forall v_2 \in V_2 : \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Alors V est appelé la somme directe orthogonale de V_1 et V_2 .

Proposition 1.2.1 *Soit V un espace vectoriel, puis $V = V_1 \oplus V_2$ si et seulement si s'il existe un opérateur linéaire $P : V \rightarrow V$ tel que $P^2 = P$ avec $v_1 = P(v)$ et $v_2 = (I - P)(v)$ et aussi $V_1 = P(V)$ et $V_2 = (I - P)(V)$.*

Définition 1.2.2 *Soit V un espace de Banach ; un opérateur $P \in \mathcal{L}(V)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection.*

Si V est un espace d'Hilbert l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si

$$\langle Pv, (I - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V$$

Exemple 1.2.1 *Soit $V = C([a, b])$, et $V_1 = \mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , et soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ dans ce cas pour $v \in C([a, b])$ on définit $Pv \in \mathcal{P}_n$ comme l'interpolation de Lagrange de v*

relativement à Δ (i.e) $Pv(x_i) = v(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ l'interpolation Pv est unique et l'unicité de cette interpolation donne

$$Pv(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) v(x_i)$$

Exemple 1.2.2 En générale, soit V_n est une sous espace de dimension n de l'espace d'Hilbert V . Supposons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormal de V_n dans ce cas pour tout $v \in V$ la formule

$$Pv = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v \rangle u_i$$

définie un opérateur de projection de V dans V_n .

Principe des méthodes de projection

On étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (1.6)$$

où Ω est une fermé et borné et V un espace complet de fonctions; tel que $V = C(\Omega)$ ou bien $V = L^2(\Omega)$ presque partout. On choisit une suite finie d'approximation de sous espaces V_n , tel que $V_n \subset V$, $n \geq 1$ et V_n de dimension k_n . Soit une base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_n}\}$ de V_n le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions $u_n \in V_n$ tels que

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j \phi_j(x), \quad \forall x \in \Omega$$

On introduit le résidu $r_n(x)$ pour approcher la solution de l'équation intégrale (1.6) :

$$r_n(x) = \lambda u_n(x) - \int_{\Omega} K(x, t) u_n(t) dt - f(x)$$

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x) - \int_{\Omega} K(x,t) \phi_j(t) dt \right\} - f(x)$$

dans ce cas u_n est une approximation de la solution u de l'équation intégrale (1.6) on note

$$u \approx u_n$$

On remarque aussi que l'équation intégrale (1.6) qui peut être écrite sous la forme notation d'opérateurs, tel que

$$(\lambda - \mathcal{K}) u = f$$

dans ce cas le résidu $r_n(x)$ est écrit sous la forme

$$r_n = (\lambda - \mathcal{K}) u_n - f$$

Les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$ doivent être choisis de telle sorte que

$$r_n(x) \longrightarrow 0$$

Estimation de la convergence

Soit V un espace de Banach et soit $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite finie de sous espace, on note par k_n la dimension de V_n et on suppose que $k_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$

Soit $P_n : V \longrightarrow V_n$ un opérateur linéaire borné tel que

$$P_n u(x) = w_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x) , \quad \forall x \in \Omega$$

$$P_n u = u, \quad \forall u \in V_n$$

Ceci implique que $P_n^2 = P$, donc

$$\|P_n\| = \|P_n^2\| \leq \|P_n^2\|^2$$

Par conséquent

$$\|P_n\| \geq 1$$

Pour résoudre l'équation

$$(\lambda - \mathcal{K}) u = f \tag{1.7}$$

Il suffit de résoudre le problème

$$P_n (\lambda - \mathcal{K}) u_n = P_n f \quad u_n \in V_n \tag{1.8}$$

en effet si u_n est une solution de (1.8), et en tenant compte que $P_n u_n = u_n$ il vient

$$\begin{aligned} P_n (\lambda - \mathcal{K}) u_n &= \lambda P_n u_n - P_n \mathcal{K} u_n \\ &= \lambda u_n - P_n \mathcal{K} u_n = (\lambda - P_n \mathcal{K}) u_n \end{aligned}$$

donc l'équation (1.8) peut être écrite sous la forme

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) u_n = P_n f \quad u_n \in V_n \tag{1.9}$$

toute solution de (1.8) est une solution de l'équation (1.9).

On note si (1.8) a une solution $u_n \in V_n$ alors elle vérifie

$$u_n = \frac{1}{\lambda} [P_n f + P_n \mathcal{K} u_n] \in V_n$$

et comme $P_n u = u_n$ alors :

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) u_n = P_n (\lambda - \mathcal{K}) u_n$$

et donc l'équation (1.9) implique l'équation (1.8).

Calculons $(\lambda - P_n \mathcal{K})$, on a

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) = (\lambda - \mathcal{K}) + (\lambda - P_n \mathcal{K})$$

donc

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) = (\lambda - \mathcal{K}) \left[I + (\lambda - \mathcal{K})^{-1} (\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}) \right] \quad (1.10)$$

Nous utilisons (1.10) dans le théorème suivant

Théorème 1.2.1 [10]. *Soit $\mathcal{K} : V \longrightarrow V$, un opérateur borné et V un espace de Banach, tel que*

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) : V \longrightarrow V$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}\| = 0$$

Dans ce cas, pour tout n assez grand, par exemple, $n \geq N$, l'opérateur $(\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1} : V \longrightarrow V$, existe et borné en outre, il est uniformément borné c'est à dire

$$\sup_{n \geq N} \left\| (\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1} \right\| < \infty \quad (1.11)$$

Pour les solutions u_n (pour n assez grand) les équations (1.9) et (1.7) respectivement, nous avons

$$u - u_n = \lambda (\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1} (u - P_n u) \quad (1.12)$$

et on l'estimation de l'erreur $u - u_n$ donnée par

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - P_n \mathcal{K}\|} \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\| \leq |\lambda| \left\| (\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1} \right\| \|u - P_n u\|$$

Cela conduit à la conclusion que $\|u - u_n\|$ converge vers zéro exactement à la même vitesse que $\|u - P_n u\|$.

Preuve. Voir (Ref. [10] p.45).

1. Montrons tout d'abord la relation (1.11) pour cela choisissons N tel que

$$\epsilon_N = \sup_{n \geq N} \|\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}\| < \frac{1}{\|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\|}$$

dans ce cas l'inverse $\left[I + (\lambda - \mathcal{K})^{-1} (\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}) \right]^{-1}$ existe et uniformément borné tel que

$$\left\| \left[I + (\lambda - \mathcal{K})^{-1} (\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \epsilon_N \|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\|}$$

et d'après la relation (1.10) on a $(\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1}$ existe tel que

$$(\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1} = \left[I + (\lambda - \mathcal{K})^{-1} (\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}) \right]^{-1} (\lambda - \mathcal{K})^{-1}$$

donc

$$\|(\lambda - P_n \mathcal{K})^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\|}{1 - \epsilon_N \|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\|} = M$$

ce qui prouve la relation (1.11).

2. pour montrer la formule de l'estimation (1.12) il suffit d'appliquer P_n à l'équation

$$(\lambda - \mathcal{K}) u = f$$

on obtient

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) u = P_n f + \lambda(u - P_n u) \tag{1.13}$$

et comme

$$(\lambda - P_n \mathcal{K}) u_n = P_n f$$

donc

$$(\lambda - P_n \mathcal{K})(u - u_n) = \lambda(u - P_n u)$$

par conséquent on a

$$u - u_n = \lambda(\lambda - P_n\mathcal{K})^{-1}(u - P_nu).$$

et de plus

$$\|u - u_n\| \leq |\lambda| M \|u - P_nu\|$$

ce qui montre inégalité à droite de l'erreur de plus si $P_nu \rightarrow u$, alors $u_n \rightarrow u$, quand $n \rightarrow \infty$. Il reste à vérifier l'inégalité à gauche de l'erreur. Donc d'après la relation (1.12)

$$\|u - u_n\| = \left\| \lambda(\lambda - P_n\mathcal{K})^{-1}(u - P_nu) \right\| \leq |\lambda| \left\| (\lambda - P_n\mathcal{K})^{-1} \right\| \|u - P_nu\|$$

et quelque soit $n \geq N$,

$$\|(\lambda - P_n\mathcal{K})\| \leq \|\lambda - \mathcal{K}\| + \|\mathcal{K} - P_nu\| \leq \|\lambda - \mathcal{K}\| + \epsilon_N$$

donc

$$\frac{1}{\|\lambda - \mathcal{K}\| + \epsilon_N} \leq \frac{1}{\|\lambda - P_n\mathcal{K}\|}$$

par suite

$$\frac{|\lambda| \|u - P_nu\|}{\|\lambda - \mathcal{K}\| + \epsilon_N} \leq \frac{|\lambda| \|u - P_nu\|}{\|\lambda - P_n\mathcal{K}\|}$$

d'après la relation (1.13), on a

$$\|\lambda(u - P_nu)\| = |\lambda| \|u - P_nu\| = \|(\lambda - P_n\mathcal{K})(u - u_n)\|$$

$$\|\lambda(u - P_nu)\| \leq \|\lambda - P_n\mathcal{K}\| \|u - u_n\|$$

donc

$$\frac{|\lambda| \|u - P_nu\|}{\|\lambda - P_n\mathcal{K}\|} \leq \|u - u_n\|$$

Ainsi

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - \mathcal{K}\| + \epsilon_N} \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\|$$

■

Lemme 1.2.1 Voir (Ref. [10] p.46). Soit V et W deux espace de Banach et $A_n : V \longrightarrow W$ ($n \geq 1$) une suite d'opérateurs linéaire bornés. Supposons que $A_n u \longrightarrow u \in V$. Alors la convergence est uniforme sur les sous ensemble compacts de V .

Preuve. Puisque les opérations sont uniformément bornés

$$M = \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty$$

Les opérateurs A_n sont equicontinus

$$\|A_n u - A_n f\| \leq M \|u - f\|$$

si S est un compact de V , alors la suite d'opérateurs $(A_n)_{n \geq 1}$ est une famille uniformément bornée et équicontinue sur S , et selon le théorème d'Ascoli alors $(A_n u)$ converge uniformément vers $u \in S$. ■

Lemme 1.2.2 Voir (Ref. [10] p.47). Soit V un espace de Banach et soit $(P_n)_{n \geq 1}$ une famille de projection bornées sur V avec

$$P_n u \longrightarrow u \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad u \in V$$

Si l'opérateur $\mathcal{K} : V \longrightarrow V$ est compact, alors :

$$\|\mathcal{K} - P_n \mathcal{K}\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Preuve. Par la définition de la norme de l'opérateur

$$\|\mathcal{K} - P_n\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\mathcal{K}u - P_n\mathcal{K}u\| = \sup_{z \in \mathcal{K}(U)} \|z - P_n z\|$$

avec : $\mathcal{K}(U) = \{\mathcal{K}u / \|u\| \leq 1\}$, l'ensemble $\overline{\mathcal{K}(U)}$ est compact et d'après le lemme (1.2.1),

on a $\sup_{z \in \mathcal{K}(U)} \|z - P_n z\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ ■

1.2.2 Méthode de collocation

Application de la méthode de projection

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce (1.6), on va choisir un ensemble de points distincts dites des points de collocation $x_1, \dots, x_{k_n} \in \Omega$ telle que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x_i) - \int_{\Omega} K(x_i, t) \phi_j(t) dt \right\} = f(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

Nous introduisons un opérateur de projection $P_n : V \longrightarrow V_n$ avec $V = C(\Omega)$.

Soit $u \in C(\Omega)$, on définit $P_n u$ comme élément de V_n l'interpolation de u aux points $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x)$$

Les coefficients $\{\alpha_j\}$ sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n$$

ce système admet une solution unique si

$$\det [\phi_j(x_i)] \neq 0$$

cette condition signifie que les fonctions $\{\phi_1, \dots, \phi_{k_n}\}$ constituent un système linéairement indépendant.

Exemple 1.2.3 Si par exemple $\phi_j(x) = x^j$ alors

$$\det [\phi_j(x_i)] = \det [x_i^j] \neq 0$$

Ce déterminant est le déterminant de Vandermonde il n'est pas nul. Pour tout i , ($1 \leq i \leq k_n$), soit $l_i \in V_n$, avec

$$V_n = \text{vect} \{1, x, \dots, x^n\}$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x), \quad x \in \Omega$$

Le système (l_i) est le système de polynôme d'interpolation de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{k_n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, k_n.$$

Chapitre 2

Les Polynômes de Bernstein

2.1 Les Polynômes de Bernstein

2.1.1 Aperçu général

Les polynômes sont des outils mathématiques incroyablement utiles car ils sont simplement définis, peuvent être calculés rapidement sur des systèmes informatiques et représentent une variété énorme de fonctions. Ils peuvent être différenciés et intégrés facilement. La plupart des étudiants sont initiés à des polynômes à un stade très précoce dans leurs études de mathématiques, et les rappellera probablement sous la forme ci-dessous

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Ce qui représente un polynôme en tant que combinaison linéaire de certains polynômes élémentaires

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

En générale, toute fonction polynômiale qui a un degré inférieur ou égal à n , peut être écrite de cette façon, et les raisons sont simples.

- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n forme un espace vectoriel : les polynômes peuvent être ajoutés ensemble, peuvent être multipliés par un scalaire et toutes les propriétés de l'espace vectoriel sont maintenues
- L'ensemble des fonctions $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ forme une base pour cet espace vectoriel-c'est-à-dire, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut être écrit uniquement comme

une combinaison linéaire de ces fonctions

Cette base, communément appelée base des monômes, n'est que l'un d'un nombre fini de bases pour l'espace des polynômes.

Dans ces notes, nous discutons une autre base utilisée pour l'espace des polynômes, et discutons de ses nombreuses propriétés utiles.

2.1.2 Polynômes de Bernstein

Soit l'identité

$$t + (1 - t) = 1$$

On a

$$1 = (1)^n = [t + (1 - t)]^n$$

On applique la formule de binôme de Newton sur l'expression $[t + (1 - t)]^n$, on obtient

$$[t + (1 - t)]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = 1$$

Où

$$\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

et la formule de binôme de Newton est

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$$

Dans la somme apparaissent des polynômes linéairement indépendants, ils forment la base de Bernstein pour les polynômes de degré n sur $[0, 1]$

Donc, les polynômes de Bernstein de degré n sont définis par

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

tel que $B_{i,n} = 0$, si $i < 0$ ou $i > n$.

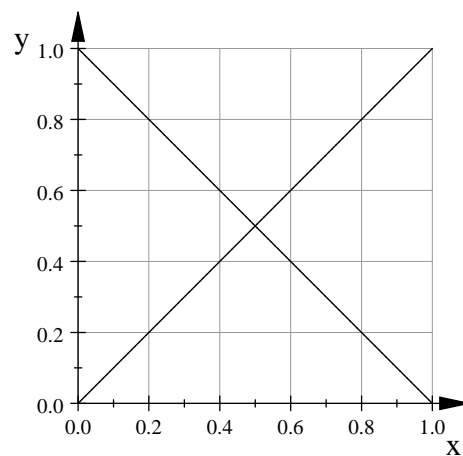
Ces polynômes sont assez faciles à écrire. les exposants sur le terme t augmentent d'un à mesure que i augmente et les exposants sur le terme $(1-t)$ décroissent d'un comme i augmente. Dans les cas simples, on obtient

Les polynômes de Bernstein de degré 1 sont

$$B_{0,1}(t) = 1 - t$$

$$B_{1,1}(t) = t$$

et peuvent être tracé pour $0 \leq t \leq 1$ comme



Polynômes de Bernstein de degré 1

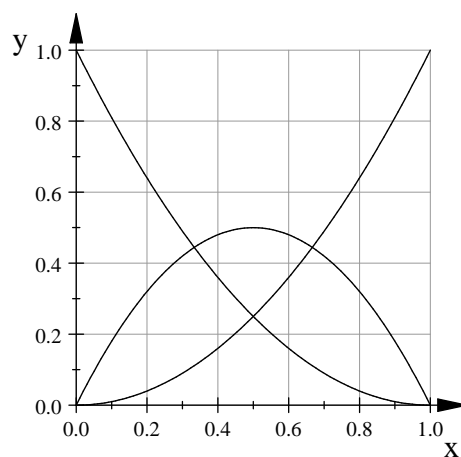
Les polynômes de Bernstein de degré 2 sont

$$B_{0,2}(t) = (1 - t)^2$$

$$B_{1,2}(t) = 2t(1 - t)$$

$$B_{2,2}(t) = t^2$$

et peuvent être tracés pour $0 \leq t \leq 1$ comme



Polynômes de Bernstein de degré **2**

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont

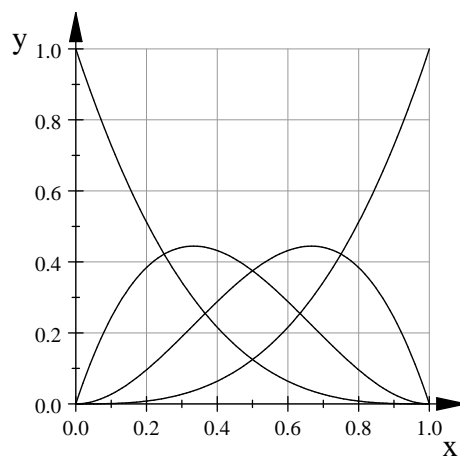
$$B_{0,3}(t) = (1 - t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1 - t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1 - t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

et peuvent être tracés pour $0 \leq t \leq 1$ comme



Polynômes de Bernstein de degré **3**

2.1.3 La relation de récursivité des polyômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein de degré n peuvent être définis comme somme de deux polynômes de Bernstein de degré $n - 1$, c'est-à-dire que les polynômes de Bernstein de degré n peuvent être écrits comme

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$$

Pour montrer cela, il suffit d'utiliser la définition des polynômes de Bernstein et quelques opérations algébriques simples.

$$\begin{aligned}(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) &= (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= B_{i,n}(t)\end{aligned}$$

2.1.4 Les polynômes de Bernstein sont tous non négatifs

Une fonction $f(t)$ est non négative sur un intervalle $[a, b]$ si $f(t) \geq 0$ pour $t \in [a, b]$. Dans le cas des polynômes de Bernstein de degré n , chacun est non négatif sur l'intervalle $[a, b]$. Pour montrer cela, nous utilisons la propriété de définition récursive ci-dessus.

On voit facilement que les fonctions

$B_{0,1}(t) = 1 - t$ et $B_{1,1}(t) = t$ sont à la fois non négatives pour $0 \leq t \leq 1$. Si l'on suppose que tous les polynômes de Bernstein de degré inférieur à n sont non négatifs, alors en utilisant la définition récursive des polynômes de Bernstein, on peut écrire

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$$

et $B_{i,n}(t)$ est également non négatif pour $0 \leq t \leq 1$. Puisque tous les composantes du côté droit de l'équation sont des composantes non négatives pour $0 \leq t \leq 1$. Par induction, tous les polynômes de Bernstein sont non négatifs pour $0 \leq t \leq 1$.

Dans ce processus, nous avons également montré que chacun des polynômes de Bernstein positif quand $0 < t < 1$.

2.1.5 Les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité

Les $n+1$ polynômes de Bernstein de degré n forment une partition de l'unité, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$$

Pour montrer que ceci est vrai, en utilisant la définition récursive et en réorganisant les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) &= \sum_{i=0}^n [(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)] \\ &= (1-t) \left[\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + B_{n,n-1}(t) \right] + t \left[\sum_{i=1}^n B_{i-1,n-1}(t) + B_{-1,n-1}(t) \right] \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n B_{i-1,n-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \end{aligned}$$

tels que $B_{n,n-1}(t) = B_{-1,n-1}(t) = 0$.

Une fois que nous avons établi cette égalité, il est simple d'écrire

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \dots = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t) = (1-t) + t = 1$$

La partition de l'unité est une propriété très importante lors de l'utilisation des polynômes de Bernstein dans la modélisation géométrique et l'infographie. En particulier, pour tout ensemble de points P_0, P_1, \dots, P_n , dans un espace tridimensionnel, et pour tout t , l'expression

$$P(t) = P_0 B_{0,n}(t) + P_1 B_{1,n}(t) + \dots + P_n B_{n,n}(t)$$

est une combinaison affine de l'ensemble des points P_0, P_1, \dots, P_n et si $0 \leq t \leq 1$, c'est une combinaison convexe des points.

2.1.6 Elévation du degré

Tout polynômes de Bernstein de degré inférieur à n peut s'exprimé comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . En particulier, tout polynômes de Bernstein de degré $n - 1$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . Nous notons d'abord que

$$\begin{aligned}
tB_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{i+1,n+1}(t) \\
&= \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(1-t)B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_{i,n+1}(t) \\
&= \frac{n-i+1}{n+1} B_{i,n+1}(t)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) &= t^i (1-t)^{n-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-(i+1)} \\
&= t^i (1-t)^{n-i-1} [(1-t) + t] \\
&= t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_{i,n-1}(t)
\end{aligned}$$

En utilisant cette dernière équation, un polynôme de Bernstein de degré $n - 1$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres dont degré n .

$$\begin{aligned}
B_{i,n-1}(t) &= \binom{n-1}{i} \left[\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) \right] \\
&= \left(\frac{n-i}{n} \right) B_{i,n}(t) + \left(\frac{i+1}{n} \right) B_{i+1,n}(t)
\end{aligned}$$

Ce qui exprime le polynôme de Bernstein de degré $n - 1$ en termes d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . On peut facilement l'étendre pour montrer que tout polynôme de Bernstein de degré k (inférieur à n) peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n , par exemple, un polynôme de Bernstein de degré $n - 2$, peuvent être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de deux polynômes de Bernstein de degré $n - 1$, chacun d'eux peut être exprimé par une combinaison linéaire de deux polynômes de Bernstein de degré n , etc...

2.1.7 Conversion de la base de Bernstein à la base des monômes

Comme la base des monômes $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ forme une base de l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n , tout polynôme de degré n de Bernstein peut être écrit en termes de la base des monômes. Ceci peut être calculé directement en utilisant la définition des polynômes de Bernstein et le théorème de binomial comme suit :

$$\begin{aligned} B_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i \end{aligned}$$

Inversement

On peut écrire chaque monôme de la base canonique comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein

$$\begin{aligned}
t^k &= t \binom{t^{k-1}}{t} \\
&= t \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t B_{i-1,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(t)
\end{aligned}$$

2.1.8 Dérivation des polynômes de Bernstein

Les dérivés de $n - i$ ème degré des polynômes de Bernstein sont des polynômes de degré $n - 1$. En utilisant la définition du polynômes de Bernstein, nous pouvons montrer que cette dérivée peut être écrite comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein.

En particulier

$$\frac{d}{dt} B_{k,n}(t) = n(nB_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t))$$

pour $0 \leq k \leq n$. Cela peut être démontré par une différenciation directe

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} B_{k,n}(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
 &= \frac{kn!}{k!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} + \frac{(n-k)n!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \\
 &= n \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \right) \\
 &= n (B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t))
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la dérivée d'un polynôme de Bernstein peut être exprimée par le degré du polynôme multiplié par la différence de deux polynômes de Bernstein de degré $n-1$.

2.1.9 Les polynômes de Bernstein forment une base

Pourquoi les polynômes de Bernstein d'ordre n forment-ils une base de l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n ?

1. Ils couvrent l'espace des polynômes -tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut être écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein.

Ceci est facile à voir si l'on se rend compte que la base des monômes s'étend sur l'espace des polynômes de Bernstein et tout élément de la base des monômes peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein.

2. Ils sont linéairement indépendants-c'est-à-dire, s'il existe des constantes c_0, c_1, \dots, c_n pour que l'identité

$$0 = c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t)$$

Tel que pour tout t , alors tout c_i doit être nul.

Si cela était vrai, nous pourrions écrire

$$\begin{aligned}
 0 &= c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t) \\
 &= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} t^i + \\
 &\quad \dots + c_n \sum_{i=n}^n (-1)^{i-n} \binom{n}{i} \binom{i}{n} t^i \\
 &= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{i} \binom{i}{1} \right] t^1 + \dots + \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{i} \binom{i}{n} \right] t^n
 \end{aligned}$$

Puisque la base des monômes $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est un ensemble linéairement indépendant, il faut

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 0 \\
 \sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{i} \binom{i}{1} &= 0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{i} \binom{i}{n} &= 0
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$

2.2 Représentation matricielle des polynômes de Bernstein

Dans de nombreuses applications, une formule matricielle des polynômes de Bernstein est utile. Ceux-ci sont simples à développer si l'on ne regarde qu'une combinaison linéaire

en termes de produits.

Etant donné un polynôme écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de base de Bernstein.

$$B(t) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(t) = c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t)$$

Il est facile d'écrire ceci comme un produit de deux vecteurs

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & , & B_{1,n}(t) & , & \cdot & , & \cdot & , & \cdot & , & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \\ &= \binom{n}{i} t^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-t)^j \\ &= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} t^{i+j} \\ &= \binom{n}{i} \left[\binom{n-i}{0} t^i - \binom{n-i}{1} t^{i+1} + \dots + (-1)^{n-i} t^n \right] \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
B_{0,n}(t) &= \binom{n}{0} \left[\binom{n}{0} t^0 - \binom{n}{1} t^1 + \dots + (-1)^n t^n \right] \\
&= 1 - \binom{n}{1} t + \dots + (-1)^n t^n \\
B_{1,n}(t) &= \binom{n}{1} \left[\binom{n-1}{0} t - \binom{n-1}{1} t^2 + \dots + (-1)^{n-1} t^n \right] \\
&= \binom{n}{1} t - \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} t^2 + \dots + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} t^n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
B_{n,n}(t) &= \binom{n}{n} \left[\binom{n-n}{0} t^n - \binom{n-n}{1} t^{n+1} + \dots + (-1)^{n-n} t^n \right] \\
&= 0 + 0t + 0t^2 + \dots + t^n
\end{aligned}$$

On pose

$$B_{0,n}(t) = b_{0,0} + b_{1,0}t + b_{2,0}t^2 + \dots + b_{n,0}t^n$$

tel que

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 1 \\ b_{1,0} &= -\binom{n}{1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ b_{n,0} &= \binom{n}{1} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$B_{1,n}(t) = b_{0,1} + b_{1,1}t + b_{2,1}t^2 + \dots + b_{n,1}t^n$$

tel que

$$\begin{aligned} b_{0,1} &= 0 \\ b_{1,1} &= \binom{n}{1} \\ b_{2,1} &= -\binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ b_{n,1} &= \binom{n}{1} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

·
·
·

$$B_{n,n}(t) = b_{0,n} + b_{1,n}t + b_{2,n}t^2 + \dots + b_{n,n}t^n$$

tel que

$$b_{0,n} = 0$$

$$b_{1,n} = 0$$

$$b_{2,n} = 0$$

.

.

.

$$b_{n,n} = 1$$

Alors

$$\left[B_{0,n}(t) \ , \ B_{1,n}(t) \ , \ \dots \ , \ \dots \ , \ \dots \ , \ B_{n,n}(t) \right]$$

=

$$\left[b_{0,0} + b_{1,0}t + b_{2,0}t^2 + \dots + b_{n,0}t^n, b_{0,1} + b_{1,1}t + b_{2,1}t^2 + \dots + b_{n,1}t^n, \dots, b_{0,n} + b_{1,n}t + b_{2,n}t^2 + \dots + b_{n,n}t^n \right]$$

=

$$\left[1 \ , \ t \ , \ t^2 \ , \ \dots \ , \ \dots \ , \ \dots \ , \ t^n \right] \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Donc

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & , & t & , & t^2 & , & \dots & , & \dots & , & \dots & , & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Les $b_{i,i}$ sont les coefficients de la base des monômes qui sont utilisés pour déterminer les polynômes de Bernstein respectifs. On note que la matrice dans ce cas est triangulaire inférieure.

Dans le cas quadratique ($n = 2$), la représentation matricielle est

On a

$$\begin{aligned} B(t) &= c_0 B_{0,2}(t) + c_1 B_{1,2}(t) + c_2 B_{2,2}(t) \\ &= \begin{bmatrix} B_{0,2}(t) & , & B_{1,2}(t) & , & B_{2,2}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2t + t^2 & , & 2t - 2t^2 & , & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & , & t & , & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

2.3 Approximation uniforme d'une fonction

Le problème que nous explorons maintenant est celui de l'approximation uniforme d'une fonction continue par un polynôme. Etant donné $f \in C[a, b]$ et un nombre $\epsilon > 0$, existe-t-il un polynôme $p \in \mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ (l'ensemble des polynômes définis sur \mathbb{R}) qui satisfasse

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } x \in [a, b] ?$$

On peut formuler cette question différemment. l'espace des fonctions continues $C[a, b]$ est un espace de Banach pour la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Est-ce que $\mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ est dense dans cet espace ? Autrement dit, toute fonction continue elle est la limite, au sens de la convergence uniforme d'une suite de polynômes ? La réponse à cette question est donné par le théorème de Weierstrass qui est l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème 2.3.1 (théorème de Weierstrass). *Voir (Ref. [3] p.111). Pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une suite (B_n) de polynômes qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$.*

La démonstration que nous allons en donner est due à Sergei Bernstein (1911) un mathématicien russe. L'intérêt essentiel de cette preuve est de fournir un procédé constructif d'une telle suite : ce sont les fameux polynômes de Bernstein.

Par un changement de variable affine, nous pouvons ramener notre étude à l'intervalle $[0, 1]$. Ce que nous ferons désormais.

Théorème 2.3.2 Voir (Ref. [3] p.112). Notons

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ces polynômes constituent une base de $\mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ et vérifient, pour tout $x \in [0, 1]$, les identités suivantes :

1. $B_{n,k}(x) \geq 0$.
2. $\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1$.
3. $\sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx$.
4. $\sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$.
5. $\sum_{k=0}^n (nx-k)^2 B_{n,k}(x) = nx(1-x)$.

Définition 2.3.1 Le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est égal à

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$

Théorème 2.3.3 (Bernstein). Voir (Ref. [3] p.113). Pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la suite de $(B_n(f))$ converge vers f uniformément sur $[0, 1]$.

Preuve. Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée sur cet intervalle : il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. Puisque f est continue sur $[0, 1]$. Elle est uniformément continue (théorème de Heine) autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x et $y \in [0, 1]$, $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Donnons-nous $\epsilon > 0$ et le $\delta > 0$ correspondant. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \leq \\ \sum_{|(x-k)n| > \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{|(x-k)n| > \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x)$$

la première somme est majorée par $\sum_{k=0}^n \epsilon B_{n,k}(x) = \epsilon$ et la seconde somme par

$$\sum_{|(x-k)n| > \delta} 2MB_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{|(x-k)n| > \delta} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

en utilisant le théorème (2.3.2) et l'inégalité $x(1-x) \leq 1/4$. On obtient donc

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \epsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \leq 2\epsilon$$

dès que $n \geq \left\lceil \frac{M}{2\epsilon\delta^2} \right\rceil + 1$ (les crochets indiquent la partie entière). Comme cette dernière quantité est indépendante de $x \in [0, 1]$. On a bien prouvé que la convergence est uniforme sur cet intervalle. ■

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, on utilise les polynômes de Bernstein pour trouver une solution approximative de l'équation intégrale de Fredholm.

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est donné par :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.1)$$

Tels que, $\varphi(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x, t)$ est le noyau et f est une fonction connue.

Pour trouver une solution approchée de l'équation (3.1), on utilise la méthode des polynômes de Bernstein

Où $\varphi(x)$ est approximée dans les polynômes de Bernstein sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) = c.B(x) \quad (3.2)$$

Tels que, c est un vecteur et $B(x)$ est une matrices données par

$$\begin{aligned} c &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \\ B(x) &= [B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)] \end{aligned}$$

Et $B_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n et $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, définis sur $[a, b]$

par

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

et c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sont des coefficients inconnus à déterminer.

La substitution de la relation (3.2) en (3.1) nous donne l'équation suivante

$$\sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i ($i = 0, 1, \dots, n$), nous choisissons des points collocation

$$x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b \tag{3.3}$$

Tels que

$$\begin{aligned} A &= \left[B_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j, t) B_{i,n}(t) dt \right]_{(n+1)(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, n \text{ et } i = 0, 1, \dots, n. \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ x &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire (3.3) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour trouver les c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Ces c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) lorsqu'ils remplacés dans (3.2) produisent $\varphi(x)$ approximativement.

Chapitre 4

Exemples numériques

Dans ce chapitre, on donne deux exemples numériques pour comparer entre la solution exacte et une solution approchée. En utilisant le logiciel MATLAB pour calculer et illustrer les graphes.

Exemple 4.0.1 *On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce par :*

$$\varphi(x) - \int_0^1 xe^t \varphi(t) dt = e^{-x} \quad (4.1)$$

de la solution exacte

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$$

Tel que

$$f(x) = e^{-x}$$

$$\lambda = 1$$

$$k(x, t) = xe^t$$

Si on prend $n = 2$. Alors, d'après Bernstein on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^2 c_i B_{i,2}(x)$$

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \int_0^1 x e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} dt = e^{-x}$$

Et après le calcul, on trouve l'équation suivante

$$c_0(1-x)^2 + 2c_1x(1-x) + c_2x^2 - xc_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - 2xc_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - xc_2 \int_0^1 t^2 e^t dt = e^{-x}$$

Maintenant pour trouver toute l'intégrale. Il faut déterminer c_0, c_1 et c_2 . Alors nous avons besoin de trois équations. Donc, on choisisse x_j (**méthode de collocation**), tel que $j = 0, 1, 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$, qui donne trois équations, on prend

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1/2$$

$$x_2 = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 && \text{pour } x_1 = 0 \\ \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{2}c_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - c_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - \frac{c_2}{2} \int_0^1 t^2 e^t dt &= e^{-1/2} && \text{pour } x_2 = 1/2 \\ c_2 - c_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - 2c_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - c_2 \int_0^1 t^2 e^t dt &= e^{-1} && \text{pour } x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1 - 2t + t^2) e^t dt = 2e - 5$$

$$\int_0^1 (t - t^2) e^t dt = 3 - e$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2$$

Alors, on va résoudre ce système

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \left(\frac{7}{2} - e\right) c_1 + \left(\frac{e}{2} - \frac{3}{4}\right) c_2 = e^{1/2} - e + \frac{9}{4} \\ (6 - 2e) c_1 + (e - 1) c_2 = e^{-1} - 2e + 5 \end{cases}$$

On obtient

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0.2794$$

$$c_2 = -0.1316$$

On a

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^2 c_i B_{i,2}(x) = c_0 B_{0,2}(x) + c_1 B_{1,2}(x) + c_2 B_{2,2}(x)$$

Où

$$B_{0,2}(x) = (1 - x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = 2x(1 - x)$$

$$B_{2,2}(x) = x^2$$

Donc, la solution approchée est un polynôme de deuxième degré

$$\varphi(x) = 0.3096x^2 - 1.4412x + 1$$

Le graphe et le tableau ci-dessous illustrent la précision de la solution approchée

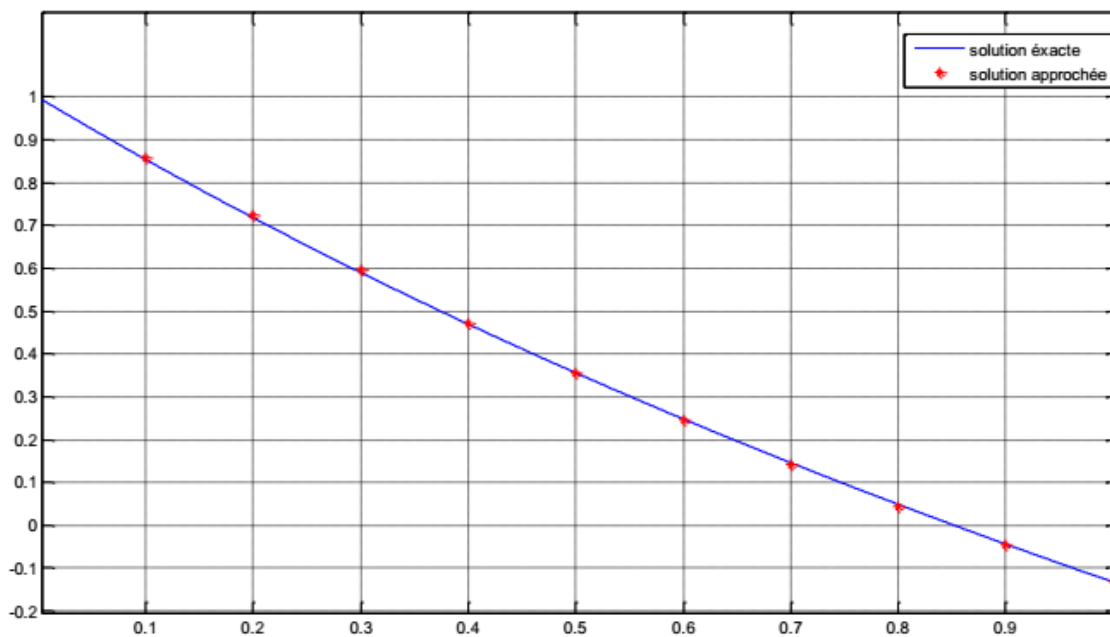


Fig. 4.1: approximation de la solution de l'équation intégrale de Fredholm
 $\varphi(x) - \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt = e^{-x}$

Table 4.1 : résultat de l'exemple 4.0.1

x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>erreur</i> $ x_{\text{éxac}} - x_{\text{app}} _{\infty}$
0	1	1	0
0.1	0.8548	0.8590	0.0042
0.2	0.7187	0.7241	0.0052
0.3	0.5908	0.5955	0.0047
0.4	0.4703	0.4730	0.0027
0.5	0.3565	0.3568	3×10^{-4}
0.6	0.2488	0.2467	0.0021
0.7	0.1466	0.1428	0.0038
0.8	0.04993	0.0452	0.0041
0.9	-0.0434	-0.0463	0.0021
1	-0.1321	-0.1316	5×10^{-4}

Exemple 4.0.2 On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce par :

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2) \varphi(t) dt = 1 \quad (4.2)$$

de la solution exacte

$$\varphi(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$$

Tel que

$$f(x) = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$k(x, t) = (xt + x^2t^2)$$

On prend $n = 4$, alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^4 c_i B_{i,4}(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

et on a

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Donc, (4.2) devient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 c_i \binom{4}{i} \frac{(x+1)^i (1-x)^{4-i}}{2^4} - \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \left[\sum_{i=0}^4 c_i \binom{4}{i} \frac{(t+1)^i (1-t)^{4-i}}{2^4} \right] dt &= 1 \\ &= \\ \frac{3}{2} \sum_{i=0}^4 c_i \frac{1}{i!(4-i)!} (x+1)^i (1-x)^{4-i} - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \left[\sum_{i=0}^4 c_i \frac{1}{i!(4-i)!} (t+1)^i (1-t)^{4-i} \right] dt &= 1 \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), nous choisissons les points collocation

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -0.5, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.5, \quad x_4 = 1.$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b$$

tel que

$$\begin{aligned} A &= [a_{ji}]_{5 \times 5}, \quad j = 0, 1, \dots, 4 \text{ et } i = 0, 1, \dots, 4. \\ A &= \left[B_{i,4}(x_j) - \int_{-1}^1 k(x_j, t) B_{i,4}(t) dt \right]_{5 \times 5}, \quad j = 0, 1, \dots, 4 \text{ et } i = 0, 1, \dots, 4. \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_5)]^t \\ x &= [c_0, c_1, \dots, c_4]^t \end{aligned}$$

Et après calculer toutes les intégrales, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0.523809 & -0.228571 & -0.057142 & 0.038095 & 0.057142 \\ 0.130691 & 0.331398 & 0.196651 & 0.089732 & 0.084858 \\ 0.062500 & 0.250000 & 0.375000 & 0.250000 & 0.062500 \\ 0.084858 & 0.089732 & 0.196651 & 0.331398 & 0.130691 \\ 0.057142 & 0.038095 & -0.057142 & -0.228571 & 0.523809 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Après résoudre ce système, on obtient

$$x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1111111111111111e^{+000} \\ 9.999999999999999e^{-001} \\ 6.296296296296299e^{-001} \\ 1.000000000000000e^{000} \\ 2.1111111111111112e^{+000} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_0 B_{0,4}(x) + c_1 B_{1,4}(x) + c_2 B_{2,4}(x) + c_3 B_{3,4}(x) + c_4 B_{4,4}(x) \\ &= \frac{c_0}{16} (1-x)^4 + \frac{c_1}{4} (x+1)(1-x)^3 + \frac{3c_2}{8} (x+1)^2 (1-x)^2 + \frac{c_3}{4} (x+1)^3 (1-x) + \frac{c_4}{16} (x+1)^4 \end{aligned}$$

Le graphe et le tableau ci-dessous illustrent la précision de la solution approchée

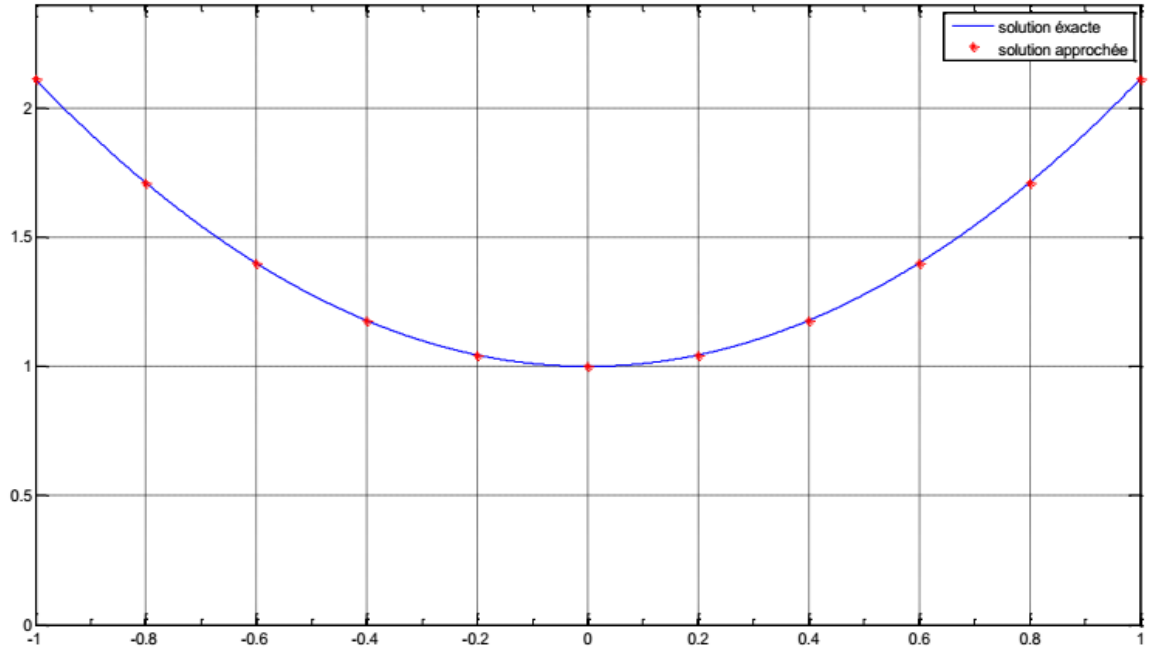


Fig. 4.2: approximation de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2) \varphi(t) dt = 1$$

Table 4.2 : résultat de l'exemple 4.0.2

x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>erreur</i> $ x_{\acute{e}xac} - x_{app} _{\infty}$
-1	2.1111111111111111	2.1111111111111111	0
-0.8	1.7111111111111111	1.7111111111111111	0
-0.6	1.4000000000000000	1.4000000000000000	$4.440892098 \times 10^{-16}$
-0.4	1.1777777777777778	1.1777777777777777	$4.440892098 \times 10^{-16}$
-0.2	1.0444444444444445	1.0444444444444445	0
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0
0.2	1.0444444444444445	1.0444444444444445	0
0.4	1.1777777777777778	1.1777777777777778	$2.220446049 \times 10^{-16}$
0.6	1.4000000000000000	1.4000000000000001	$8.881784197 \times 10^{-16}$
0.8	1.7111111111111111	1.7111111111111112	$6.661338147 \times 10^{-16}$
1	2.1111111111111111	2.1111111111111112	$8.881784197 \times 10^{-16}$

Conclusion

Dans ce travail, on a résolu équation intégrale de Fredholm par les polynômes de Bernstein et la méthode de collocation.

Un avantage considérable de cette méthode est que les coefficients de la solution sont trouvés facilement en utilisant les programmes d'ordinateurs comme MATLAB, Qbasic, C++, ..., etc...

Cette méthode peut être étendue et appliquée au système d'équations intégrales linéaires et non linéaires, équations intégro-différentielles linéaires et non linéaires, mais certaines modifications sont nécessaires.

Bibliographie

- [1] Abdul.J.Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, Clarkson University, Second Edition.
- [2] Abdul-Majid.W, A First Course in Integral Equations, Saint Xavier University USA, Second Edition 2015.
- [3] Alain.Y et Jacques-Arther.W, Mathématiques L3 Appliquées, Pearson Education.
- [4] Amina.K.AL-Juburee, Approximate Solution for Linear Fredholm Integro-Differential Equation and Integral Equation By Using Bernstein Polynomials Method, AL-Mustaniriyah University 2010.
- [5] Jianhua Hou, Chanyqing Yang and Shunxv Wang, Numerical solutions of Fredholm Integral Equations Using Bernstein Polynomials, The National Science Foundation of China 2010.
- [6] Kendal.E.Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of Second Kind, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [7] Kenneth Joy.I, Bernstein polynomials, Departement of Computer Science University of California, Davis 1996-2000.
- [8] Polyanin.A.D and Mazhиров.A.V, Handbook of Integral Equations, Second Edition 2008.
- [9] Rahman.M, Integral Equations and Their Applications, Dalhousie University Canada, WIT Press 2007.
- [10] Remili Omar EL-Haouari, Equations Intégrales de Frontières Exemples de Résolutions Numériques, Mémoire de MAGISTER, University d'Oran.
- [11] Shirin.A and Islam.M.S, Numerical solutions of Fredholm Integral Equations Using Bernstein Polynomials, Article in Journal of Scientific Research, September 2013.

Abstract

In this thesis we present a numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind. The method is based on the use of Bernstein polynomials with collocation method.

Some numerical examples are presented to illustrate the accuracy of this method.

Key words

- Integral Equation of Fredholm
- Projection Method
- Collocation Method
- Polynomials Bernstein

Résumé

Dans ce mémoire on a traité numériquement l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, moyennant les polynômes de Bernstein et méthode de collocation.

Des exemples numériques sont présentés pour vérifier cette méthode en indiquant sa précision ainsi que la convergence.

Mots clés

- Equation Intégrale de Fredholm
- Méthode de Projection
- Méthode de Collocation
- Polynômes de Bernstein

ملخص

في هذه المذكرة، إستخدمنا كثيرات حدود برنشتاين لتقريب حلول معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام طريقة التجميع.

وقدّمنا أمثلة عددية للتحقق من دقة هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية

- معادلة فريدهولم التكاملية
- طريقة الإسقاط
- طريقة التجميع
- كثيرات حدود برنشتاين