



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

**Résolution des formes intégrales de Volterra des
problèmes de Lane-Emden**

Présentée par : *AMMARI Hamza*

Soutenu publiquement le : 14/06/2025

Devant le jury composé:

Mr. GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila
Mr. DILMI Mustapha	M.C.B	Université de M'sila
Mr. LAKHAL Aissa	M.C.B	Université de M'sila

**Président.
Encadreur.
Examinateur.**

Année universitaire 2024/2025

Remerciement

Tout d'abord, je remercie **Allah** pour la volonté, la force, la santé et la patience qu'il m'a donné an de réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au **Dr. Mustapha DILMI**, pour la qualité exceptionnelle de sa encadrement, il m'a en effet guidé pendant tout l'année.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury ; **Dr. Aissa LAKHAL** et, **Dr. Bachir GAGUI**, qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Merci enfin à ma famille, notamment à mes parents dont l'affection et les encouragements m'ont rendue la vie vraiment plus agréable et tous mes amis chacun avec son nom.

المخلص

في هذه المذكرة، تناولنا دراسة المعادلات التفاضلية من نوع لان-إمدان من خلال تحويلها إلى معادلات تكاملية-تفاضلية، بهدف إيجاد حلول تقريبية لها. وقد اعتمدنا في ذلك على طريقة التجميع-توشارد، وقمنا بمقارنة النتائج المتحصّل عليها مع الحلول الدقيقة من أجل تقييم مدى فعالية ودقة هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: معادلات تكاملية-تفاضلية، معادلة لان-أمدان، طرق عددية.

Abstract

In this work, we investigate the Lane-Emden differential equations by transforming them into integro-differential equations, aiming to obtain approximate solutions. We employ the Collocation-Touchard method and compare the results with exact solutions to assess the accuracy and effectiveness of the proposed approach.

Keywords : integro-differential equations, Lane-Emden equation, numerical methods

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les équations différentielles de Lane-Emden en les transformant en équations intégral-différentielles afin d'obtenir des solutions approchées. Nous utilisons la méthode de Collocation-Touchard et comparons les résultats avec des solutions exactes pour évaluer la précision et l'efficacité de l'approche proposée.

Mots-clés : équations intégral-différentielles, équation de Lane-Emden, méthodes numériques

Table des matières

Liste des tableaux	1
Notations	2
Introduction	3
1 Notions sur les équations intégrales et les équations différentielles	4
1.1 Espaces fonctionnelles	4
1.2 Les équation intégrales	6
1.3 Classification des équations intégrales	6
1.4 Classification des équations intégro-différentielles	8
1.5 Equation de Lane-Emden	10
1.6 Equation d'Emden-Fowler	10
2 Existence et unicité de la solution des équation intégro-différentielle	12
2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D	12
2.2 Méthodes de résolution des (E.I-D)	14
2.2.1 Méthodes analytiques	14
2.2.2 Méthodes numériques	19
3 Collocation-Touchard pour résoudre les équations de Lane-Emden sous forme IDV	22
3.1 Méthode de collocation-Touchard	23
Conclusion	28

Références

30

Liste des tableaux

1	solutions exactes et approximatives des E.I.D form E.L-E Exemple 3.1	...25
3	solutions exactes et approximatives des E.I.D form E.L-E Exemple 3.2	...27

Notations

$\ \cdot\ $	norme
f	terme libre dans l'équation intégrale
$\langle \cdot \rangle$	le produit scalaire
$(H, \ \cdot\)$	espace de Hilbert
$E.I$	equation integraie
$E.I.D$	Equation integro-differentielle
$k(x, t)$	noyau
$L.E$	Equation de Lane-Emden
$E.F$	Equation de Emden-Fowler
\int	signe intégral
$y^{(n)}$	la dérivée n -ième
T	polynôme de Touchard,
y	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
y_n	solution approchée

Introduction

L'équation de Lane-Emden, souvent appelée l'équation d'Emden-Fowler dans sa forme généralisée, constitue une équation différentielle non linéaire classique qui joue un rôle central dans la modélisation du comportement thermique de nuages sphériques de gaz. Ces systèmes sont soumis à l'attraction gravitationnelle mutuelle de leurs molécules et évoluent conformément aux lois classiques de la thermodynamique. Cette équation a été initialement développée dans le contexte de la physique stellaire et a été étudiée en profondeur par Chandrasekhar (1958) et d'autres chercheurs tels que Nagle et al. (2011).

En astrophysique, l'équation d'Emden permet de décrire le potentiel gravitationnel d'un fluide autogravitant, ayant une symétrie sphérique et suivant une relation polytropique entre la pression et la densité. Elle s'applique particulièrement aux modèles d'étoiles où l'équilibre hydrostatique est atteint, c'est-à-dire lorsque les forces de pression interne compensent exactement la force gravitationnelle. Ce type d'équation est fondamental pour comprendre la structure interne des étoiles, des planètes, ou encore des nuages moléculaires interstellaires.

L'équation s'écrit généralement sous la forme :

$$y'' + \frac{k}{x}y' + f(y) = 0, k > 1$$

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre traite des notions de facteurs, en plus de la définition et de la classification des équations intégrales et intégral-différentielles, en plus des équations de Lane-Emden.

Le deuxième chapitre dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des équations intégral-différentielles, et nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques importantes pour résoudre des équations intégral-différentielles.

Le troisième chapitre contient l'utilisation des polynômes de Touchard avec la méthode de collocation pour résoudre des équations intégral-différentielles sous la forme d'équations de Lane-Emden et les compare avec des solutions exactes.

Chapitre 1

Notions sur les équations intégrales et les équations différentielles

Dans ce chapitre, on donne les concepts de base des équations intégrales et intégrales différentielles sont présentés, en plus des équations différentielles, notamment les équations de Lane-Emden et Emden-Fowler.

1.1 Espaces fonctionnelles

Définition 1.1 (*espace vectoriel normé*)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit qu'une application notée $\|\cdot\|$ de E dans \mathbb{R}^+ est une norme sur E si et seulement si pour tout $(x, y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ les conditions suivantes sont satisfaites

(i) $\|x\| = 0$ implique que $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2 (*Suite de Cauchy*)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit que la suite (u_n) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \text{ on a } d(u_m, u_n) < \varepsilon$$

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fautive en général

Lemme 1.3 *Soit u_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite u_{n_k} convergente vers u alors la suite u_n est aussi convergente vers le meme élément u .*

Définition 1.4 (*Espace métrique complet*)

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy u_n d'éléments de E est une suite convergente dans E . Un tel espace est aussi appelé espace de Banach

Proposition 1.5 *Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet*

Définition 1.6 (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.7 (*Produit scalaire*)

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un produit scalaire sur H est une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{k}$, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que :

pour tout x, y, z dans H et α, β dans \mathbb{R}

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Définition 1.8 (*Espace de Hilbert*)

Un espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{C} (ou \mathbb{R}) est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet

Définition 1.9 (*Espace $L^2([a, b])$*)

On dit qu'une fonction f est de carrée intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2([a, b])$

Définition 1.10 (Espace $\mathbb{C}^\ell([a, b])$)

les éléments de cet espace sont tous les fonctions définies sur $[a, b]$ et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre ℓ .

La norme d'une élément $f(x) \in \mathbb{C}^\ell([a, b])$ est défini par

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\ell} \max_{a \leq x \leq b} |f^k(x)|$$

1.2 Les équation intégrales

Définition 1.11 Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration \int . La forme générale d'une équation intégrale est :

$$\alpha(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)y(t) dt, \quad (1.2)$$

où $\alpha(x)$, $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions données, la fonction $y(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro, et Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie.

1.3 Classification des équations intégrales

Equation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.2) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

i) Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt, \quad (1.3)$$

et elle est dite de seconde espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = 0,$$

et elle est dite de première espèce.

iii) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt,$$

et elle est dite homogène.

Equation intégrale de Volterra

La forme la plus classique de Volterra est de la forme :

$$\alpha(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt, \quad (1.4)$$

où les bornes de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue $y(x)$ apparaît linéairement sous le signe intégral.

i) Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt.$$

Cet équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt = 0,$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

iii) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt,$$

et elle dite homogène.

Équations intégrales singulier

Une équation intégrale singulier est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devienne non lié à un certain moment dans l'intervalle. Comme pour obtenir des exemples

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} y(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.5)$$

1.4 Classification des équations intégro-différentielles

Equation intégro-différentielle de Fredholm

L'équation de la forme (1.2) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm.

$L'(E.I-D)$ de Fredholm s'écrit sous la forme :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt, \quad (1.6)$$

où $y^{(n)}(x)$ indique la dérivée nième de $y(x)$. Autre dérivés de l'ordre moins peuvent apparaitre avec $u^{(n)}$ sur le coté gauche. Des exemples de Fredholm intégro-différentielles :

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xy(t) dt, \quad y(0) = 0,$$

et

$$y''(x) + y'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xty(t) dt, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Equation intégro-différentielle de Volterra

Les équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce , de seconde espèce ou ho-mogéne sont définies de la même manière précédente sauf que le borne d'intégration supérieure est variable, i.e $b = x$.

L'équation intégro-différentielle de Volterra s'écrit sous la forme :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt. \quad (1.8)$$

Exemples d'équations l'intégro-différentielle de Volterra sont :

$$y'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - x \exp x - \int_0^x ty(t) dt, y(0) = 0,$$

et

$$y''(x) + y'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x ty(t) dt, y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

Equation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm

Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l'(E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra ou Volterra-Fredholm.

L'équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm s'écrit sous la forme :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t) y(t) dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) y(t) dt, \quad (1.9)$$

où λ_1 et λ_2 sont des paramètres numériques, $K_1(x, t)$ et $K_2(x, t)$ les noyaux de l'équation intégrale (1.8), $f(x)$ est la fonction donnée et $y(t)$ est la fonction inconnue. Et la forme mixte :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b K(x, t) y(t) dt.$$

Un exemple de Volterra-Fredholm intégral-différentielles :

$$y'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t) y(t) dt - \int_0^1 ty(t) dt, y(0) = 0.$$

1.5 Equation de Lane-Emden

Les équations de Lane-Emden sont des problèmes à valeurs initiales singuliers relatifs aux équations différentielles ordinaires (EDO) du second ordre qui ont été utilisées pour modéliser plusieurs phénomènes en physique mathématique et en astrophysique tels que les explosions thermiques, la structure stellaire, le comportement thermique d'un nuage sphérique de gaz, de sphères de gaz isothermes et de courants thermoioniques [5]. Les équations de Lane-Emden ont la forme suivante :

$$y'' + \frac{k}{x} y' + f(x, y) = g(x), \quad k \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.10)$$

avec des conditions supplémentaires :

$$y(0) = A, y'(0) = B \quad (1.11)$$

où A et B sont des constantes, $f(x, y)$ est une fonction continue à valeur réelle et $g(x) \in [0, 1]$.

1.6 Equation d'Emden-Fowler

Les équations de Lane-Emden ont été étudiées par Ralph H. Fowler [15] qui a développé un nouvel ensemble de solution pour différents valeurs de n et pour tous les types de condition aux limites. Celles-ci sont devenues connues sous le nom d'équation différentielle de type Emden-Fowler. Récemment, beaucoup d'attention s'est portée sur l'étude des problèmes de valeurs initiales singulières dans les équations différentielles ordinaires du second ordre

(EDO). De nombreux problèmes de physique mathématique et d'astrophysique peuvent être modélisés par les problèmes dits de valeur initiale de l'équation de type Emden-Fowler, l'équation d'Emden-Fowler est de la forme :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + af(y)g(y) = 0, \quad x \succ 1 \quad (1.12)$$

$$y(0) = \alpha, y'(0) = 0 \quad (1.13)$$

Où α est une constante et $f(x)$ et $g(y)$ sont des fonctions données de x et y respectivement. Lorsque $f(x) = 1$ et $a = 1$, l'équation (1.12) se réduit à l'équation de Lane-Emden.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution des équation intégral-différentielle

Dans ce chapitre nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégral-différentielles de la deuxième espèce.

2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D

Définition 2.1 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $x \in E$,

tel que :

$$f(x) = x.$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2 (Picard) Soient (E, d) un espace métrique complet et, $\varphi \in E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e Lipschitzienne par rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a .

Théorème 2.3 Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach X , tel que T^n est contractant sur X , pour un entier positif n , alors T a un point fixe unique.

Lemme 2.4 Soit l'opérateur T tel que $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$, u et $v \in C([a, b])$, et $L \in \mathbb{R}_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction K au troisième variable,

$$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty,$$

et l'équation intégral-différentielle de Fredholm :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, y(t)) dt, & x \in [a, b] \\ y(a) = a, & a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2,1)$$

Admet une seule solution point fixe.

Théorème 2.5 Supposons que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ tel que :

$$\int_{t_0}^t k(r, s, y(s)) dr \leq N,$$

pour

$$t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha,$$

avec

$$y \in H_0 = \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : y(t_0) = u_0 \text{ et } |y(t) - u_0| \leq b\},$$

pour certain $0 < \alpha \leq a$. Alors l'équation intégral-différentielle de Volterra .

$$\begin{cases} y'(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t k(t, s, y(t)) dt \\ y(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Admet une solution unique.

2.2 Méthodes de résolution des (E.I-D)

2.2.1 Méthodes analytiques

Définition 2.6 Le noyau $K(x, t)$ d'une équation intégrale-différentielle de Fredholm est dite dégénérée s'il est la somme d'un nombre finie de produit des fonctions de variable x seul par des fonctions de variable t seul i.e il est de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t).$$

Les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes.

Remarque 2.7 Le noyau non dégénéré peut réduire à noyau dégénérée par développement de Taylor.

Méthode de calcul direct

Cette méthode peut être utilisée pour résoudre l'équation intégrale-différentielle de Fredholm de deuxième espèce directement au lieu d'une forme série.

Pour l'application de cette méthode, nous considérons le noyau séparable de la forme :

$$K(x, t) = g(x)h(t). \quad (2.3)$$

Nous considérons l'équation intégrale-différentielle de Fredholm de la forme générale :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt, \quad (2.4)$$

aux conditions initiales

$$y^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n - 1.$$

En substituant (2.3) dans (2.4), on trouve :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)y(t)dt. \quad (2.5)$$

Puisque l'intégrale dans l'équation (2.5) est une intégrale bornée et ne dépend que d'une seule variable t , alors nous pouvons assigner cet intégrale par une constante β c'est-à-dire :

$$\int_a^b h(t) y(t) dt = \beta. \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) devient :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \beta g(x). \quad (2.7)$$

En intégrant les deux cotés de (2.7) n fois de 0 à x , en utilisant également les condition initiales, nous pouvons trouver une formule pour $y(x)$ qui dépend de β et x . Cela signifie que nous pouvons écrire :

$$y(x) = y(x, \beta). \quad (2.8)$$

En substituant (2.8) dans le coté droit de (2.6), en calculant l'intégrale, en résolvant également résultante. Quand on a déterminé β , nous obtenons la solution exacte $y(x)$ après avoir substitué β dans (2.8).

Considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm :

$$y'(x) = 12x + \int_0^1 y(t) dt \quad \text{avec } y(0) = 0. \quad (2.9)$$

Cet équation peut s'écrire :

$$y'(x) = 12x + \beta, \quad y(0) = 0. \quad (2.10)$$

On pose :

$$\int_0^1 y(t) dt = \beta. \quad (2.11)$$

En intégrant les deux cotés de (2.10) de 0 à x , et en utilisant la condition initiale, nous obtenons :

$$y(x) = 6x^2 + \beta x. \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.12) dans (2.11) et évaluer le rendement intégral :

$$\beta = \int_0^1 y(t) dt = 2 + \frac{1}{2}\beta.$$

On trouve :

$$\beta = 4.$$

La solution exacte est donnée par :

$$y(x) = 6x^2 + 4x.$$

La méthode de décomposition Adomian

La méthode de décomposition Adomian (MDA) a été introduite et développée par George Adomian. (MDA) donne la solution dans un infini série de composants. L'idée de la méthode de décomposition Adomian transforme l'équation intégral-différentielle de Fredholm en une équation intégrale.

Nous considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm du second ordre et du second type :

$$y''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t) dt, \quad (2.13)$$

avec les conditions initiales $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$.

Intégrant les deux cotés de (2.13) de 0 à x deux fois, nous obtenons :

$$y(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)y(t)dt\right), \quad (2.14)$$

où les conditions initiales sont utilisées et L^{-1} et un opérateur intégral double .

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x). \quad (2.15)$$

Nous utilisons la série de décomposition (2.15) dans les cotés de (2.14), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)dt\right),$$

ou de façon équivalent :

$$\begin{aligned} y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots &= b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)y_0(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)y_1(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)y_2(t)dt\right) + \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, pour déterminer les composant $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., de la solution $y(x)$, nous définissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) \\ y_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} y_k(t)dt\right), k \geq 0. \end{aligned}$$

Notons que $y_0(x)$ est défini par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral, c'est -à-dire :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= b_0 + b_1(x) + L^{-1}(f(x)) \\ y_{n+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) y_k(t) dt, k \geq 0\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

En utilisant (2.16), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Utilisez la méthode de décomposition d'Adomain pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm :

$$y'''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty(t) dt \quad \text{avec } y(0) = y'(0) = y''(0) = 1. \quad (2.17)$$

Intégrant les deux cotés de l'équation (2.17) trois fois de 0 à x, nous obtenons :

$$y(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}x^3 \left(\int_0^1 ty(t) dt \right).$$

D'après la procédure, nous définissons les relations de récurrence :

$$y_0(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3, y_{k+1}(x) = \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 ty_k(t) dt, \quad k \geq 0.$$

Cela on donne :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= e^x - \frac{1}{3!}x^3 \\ y_1(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 ty_0(t) dt = \frac{29}{180}x^3 \\ y_2(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 ty_1(t) dt = \frac{29}{5400}x^3 \\ y_3(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 ty_2(t) dt = \frac{29}{162000}x^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution sous forme de série est donnée par :

$$y(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{29}{180}x^3 \left(1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots \right).$$

La somme de série géométrique infinie

$$S = 1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots = \frac{30}{29}$$

L'utilisation de se résultat donne la solution exacte $y(x) = e^x$.

2.2.2 Méthodes numériques

Rappel Integration Numérique

Le but de ce rappel est donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale .

$$\int_a^b f(t)dt. \quad (2.18)$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de f ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction f est de classe C^n sur l'intervalle réel $I = [a, b]$, on note : $M_i = \max |f^{(i)}| ; x \in [a, b], i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $n \in \mathbb{N}^*$ de même longueur $h = (b - a)/n$ que l'on appelle le pas de la subdivision. Et pour tout $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, on note $x_i = a + ih$.

Méthode des trapèzes

Principe des méthodes On remplace la courbe représentative de f , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ a $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cela revient donc a interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1} .

Proposition 2.8 la valeur approchée de l'intégrale f sur I par le méthode des trapèzes est alor donnée par :

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left(\frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (2.19)$$

Preuve. L'aire de trapèzes en baze $[x_i, x_{i+1}]$ est $\frac{(x_{i+1}-x_i)(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2} = \frac{h(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2}$

On déduit que :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h (f(x_i) + f(x_{i+1})) / 2 = h \left(\frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (2.20)$$

■

La méthode des fonctions de Haar rationalisées

Définition 2.9 Pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 < k \leq 2^n$, les fonctions de Haar est définie comme :

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \Psi(2^n t - k + 1).$$

Une autre façon :

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right] \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[\end{cases}$$

pour $n \geq 0$ et, $k = 1, 2, \dots, 2^n$

De manière analogue, définir la famille de l'extension des fonctions.

Les fonctions de Haar rationalisées

Définition 2.10 Les fonctions de Haar rationalisées sont composées seulement de trois valeurs $+1$, -1 et 0 et peuvent être définie sur l'intervalle $[0, 1)$ comme :

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right] \\ -1 & \text{si } t \in \left[\frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right[\end{cases}$$

Méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

La méthode de perturbation homotopique a été introduite et développée par Jihvan He [11]. La méthode de perturbation homotopique couple une homotopie technique de topologie et technique de perturbation.

Considérer l'équation integro-différentielle de Fredholm suivante de la deuxième type de formulaire.

$$v'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t)v(t)dt. \quad (2.21)$$

Nous définissons l'opérateur :

$$L(u) = u'(x) - \lambda \int_0^1 k(x, t)u(t)dt - f(x) = 0. \quad (2.22)$$

Où $u'(x) = v'(x)$. En suite, nous définissons l'homotopie $H(u, m)$, $m \in [0, 1]$ par :

$$H(u, 0) = F(u) \quad , \quad H(u, 1) = L(u) . \quad (2.23)$$

Où $F(u)$ est un opérateur fonctionnel. Nous construisons une homotopie convexe de la forme :

$$H(u, m) = (1 - m)F(u) + mL(u). \quad (2.24)$$

Cette homotopie satisfait (2.23) pour $m = 0$ et $m = 1$ respectivement. Le paramètre d'intégration m augmente monotone de zéro à l'unité comme le problème trivial $F(u) = 0$ est continuellement déformé au problème d'origine $L(u) = 0$. HPM utilise le paramètre Homotopy m comme paramètre d'extension pour obtenir :

$$u = w_0 + mw_1 + m^2w_2 + m^3w_3 + \dots, \quad (2.25)$$

quand $m \rightarrow 1$, (2.25) correspond à (2.24) et devient le solution de (2.22), c.-à-d.

$$v = \lim_{m \rightarrow 1} u = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (2.26)$$

La série (2.33) est convergente pour la plupart des cas et le taux de convergence dépend de $L(u)$.

Supposons que $F(u) = u(x) - f(x)$, et substituant (2.25) dans (2.22) et assimilant les termes avec la puissance identique de m , nous avons :

$$m^0 : w_0'(x) = f(x) \quad (2.27)$$

$$m^n : w_n'(x) = \int_0^1 k(x, t)w_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Chapitre 3

Collocation-Touchard pour résoudre les équations de Lane-Emden sous forme IDV

Dans ce section, la série de Touchard est introduite par la méthode d'agrégation et son utilisation pour résoudre le type Lane-Emden [9]. Les propriétés du polynôme de Touchard sont ensuite exploitées via la méthode d'agrégation pour réduire les équations intégrales en un système d'équations algébriques résolubles numériquement grâce au logiciel MATLAB. Enfin, quelques exemples sont présentés pour vérifier l'efficacité de la méthode et la comparer à ceux étudiés par des auteurs précédents.

L'équation généralisée de Lane-Emden du facteur de forme de $k > 1$ est de la forme

$$y'' + \frac{k}{x}y' + f(y) = 0, k > 1 \quad (3.1)$$

Avec les conditions initiales suivantes

$$y(0) = \alpha, y'(0) = 0$$

où $f(y)$ peut prendre plusieurs formes linéaires ou non linéaires.

Pour convertir (3.1) en une forme intégrale, nous définissons d'abord

$$y(x) = \alpha - \frac{1}{k-1} \int_0^x t \left(1 - \frac{t^{k-1}}{x^{k-1}}\right) f(y(t)) dt \quad (3.2)$$

En différenciant (3.2) deux fois, en utilisant la règle de Leibniz, on obtient

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^k}{x^k}\right) f(y(t)) dt \quad (3.3)$$

$$y''(x) = -f(y(x)) + \int_0^x k \left(\frac{t^k}{x^{k+1}}\right) f(y(t)) dt$$

Propriétés des polynômes de Touchard

Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Touchard $T_n(x)$ est défini par $T_0(x) = 1$ et la relation suivante

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)^k.$$

Notant que le polynôme de Touchard $T_n(x)$ est un polynôme à coefficients rationnels

n	T_n
0	1
1	$1 + x$
2	$1 + 2x + x^2$
3	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$
4	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

3.1 Méthode de collocation-Touchard

on va résoudre numériquement des équations intégro-différentielles de Volterra en utilisant les méthodes de collocation- Touchard [9].

On considère l'équation intégro-différentielle de Volterra (3.3), et on applique la technique de la méthode de collocation-Touchard collocation. Pour ceci, nous estimons la fonction

inconnue $y(x)$ comme suit

$$y(x) \simeq y_n(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x) \quad (3.4)$$

alors

$$y'(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k'(x) \quad (3.5)$$

où T_k sont les polynôme de Touchard de degré k ($k = 0, 1, \dots, n$), et, a_k , sont des paramètres inconnus, à déterminer.

On remplace (3.4) et (3.5) dans l'équation(3.3), nous obtenons

$$\sum_{k=0}^n a_k T_k'(x_j) = - \int_0^{x_j} \left(\frac{t^k}{x_j^k}\right) f\left(\sum_{k=0}^n a_k T_k(t)\right) dt, j = 0, 1, \dots, n$$

ou

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[T_k'(x_j) - \int_0^{x_j} \left(\frac{t^k}{x_j^k}\right) f(T_k(t)) dt \right] = 0 \quad (3.6)$$

les conditions initiales de problème(3.3) sont donné

$$y(0) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(0) = \alpha \quad (3.7)$$

Les inconnus a_k ($k = 0, 1, \dots, n$), sont déterminés en résolvant le système d'équations (3.6) et (3.7). La substitution de ces valeurs dans (3.4) donne la solution approximative.

Analyse de l'erreur

Pour illustrer les idées sous-jacentes, la validité, l'efficacité, la précision et la performance de la technique proposée, nous analysons plusieurs équations linéaires de Lane–Emden–Fowler. Tout au long des calculs, l'erreur absolue est définie par $e = |y(x) - y_{ex}(x)|$ où $y_{ex}(x)$ désigne la solution exacte.

Exemples illustratifs

Exemple 1. Considérez l'équation homogène linéaire de Lane-Emden suivante [4, 9].

$$y'' + \frac{k}{x} y' + y(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1$$

les conditions initiales

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

La solution exacte à ce problème est

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

L'équation considérée est équivalente à la forme intégral-différentielle suivante.

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) y^m(t) dt, \quad 0 < x \leq 1$$

x	Exact solution y	Approx solution y_n	Error for $n = 3$	Error for $n = 6$
0.0	1	1	4.440892e-16	0.000000e+00
0.1	0.998 3	0.9985	1.417858e-04	4.736365e-09
0.2	0.993 4	0.9943	9.693085e-04	2.284724e-07
0.3	0.985 1	0.9879	2.806885e-03	1.985339e-06
0.4	0.973 5	0.9793	5.728431e-03	8.597233e-06
0.5	0.958 8	0.9685	9.660725e-03	2.549619e-05
0.6	0.941 1	0.9555	1.444737e-02	5.962280e-05
0.7	0.920 3	0.9402	1.988864e-02	1.184792e-04
0.8	0.896 7	0.9225	2.576646e-02	2.091261e-04
0.9	0.870 4	0.9022	3.186045e-02	3.373001e-04
1	0.841 47	0.8794	3.795823e-02	5.067347e-04

Tableau 1 : Solutions approximatives et exactes pour l'exemple 1

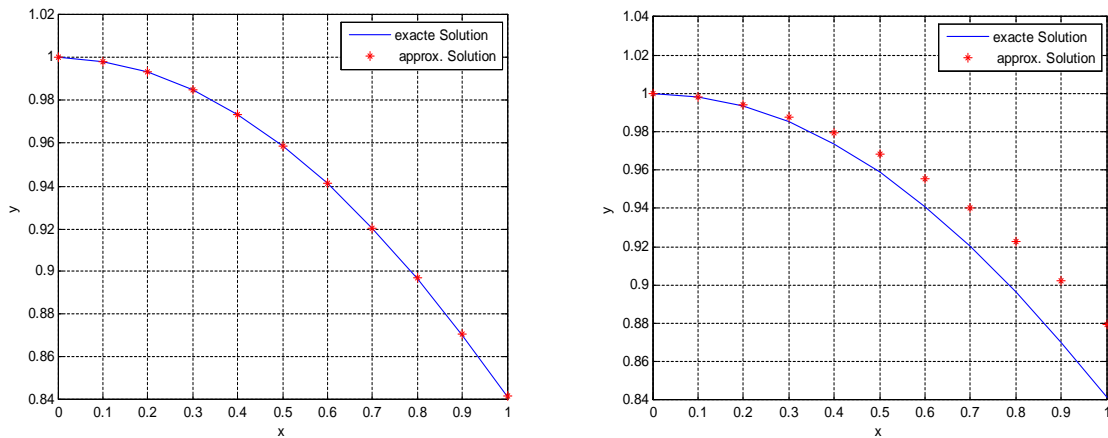


Figure 1. Comparaison entre la solution approximative et exacte de l'exemple1, n=3, n=6

example2 Consider the following Lane-Emden-Fowler equation

$$y'' + \frac{2}{x}y' - 2(2x^2 + 3)y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, \quad 0 < x \leq 1$$

subject to the initial conditions

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

avec la solution exacte $y(x) = e^{x^2}$

de cette équation peut être transformée en une forme intégro-différentielle comme suit :

$$y'(x) = 2 \int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) (2t^2 + 3) y(t) dt, \quad y(0) = 1$$

x	Exact solution y	Approx solution y_8	Error for $n = 8$
0.0	1.0000	1.0000	1.421085e-14
0.1	1.0101	1.0101	1.303713e-11
0.2	1.0408	1.0408	2.375549e-09
0.3	1.0942	1.0942	4.558485e-08
0.4	1.1735	1.1735	3.565202e-07
0.5	1.2840	1.2840	1.744087e-06
0.6	1.4333	1.4333	6.487693e-06
0.7	1.6323	1.6323	2.049910e-05
0.8	1.8965	1.8965	5.924052e-05
0.9	2.2479	2.2481	1.653550e-04
1	2.7183	2.7187	4.636227e-04

Tableau 2 : Solutions approximatives et exactes pour l'exemple 2

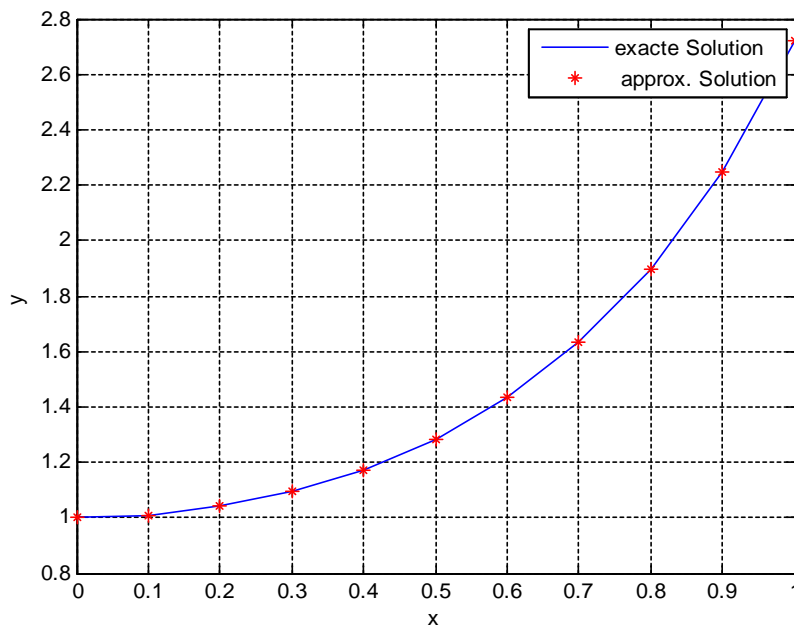


Figure 2. Comparaison entre la solution approximative et exacte de l'exemple2, $n=8$

Conclusion

Dans ce mémoire, la méthode de collocation a été utilisée avec les polynômes de Touchard pour résoudre les équations de Lane-Emden sous différentes formes, notamment sous forme d'équations intégral-différentielles de Volterra. Nous avons également confirmé l'efficacité de cette méthode, en particulier grâce à l'utilisation des polynômes de type Touchard. Plus le degré N du polynôme est élevé, plus les résultats obtenus sont précis. Plusieurs exemples ont été présentés afin de démontrer la performance et la précision de la méthode.

Bibliographie

- [1] A. M. Wazwaz, The variational iteration method for analytic treatment for linear and nonlinear ODEs, *Applied Mathematics and Computation*, 212, 2009, 120-134.
- [2] A. M. Wazwaz, The Variational Iteration Method for Solving New Fourth-Order Emden-Fowler Type Equations, *Chemical Engineering Communications*, DOI :10.1080/00986445.2014.952814.
- [3] A. M. Wazwaz, The variational iteration method for solving nonlinear singular boundary value problems arising in various physical models, *Commun. Nonlinear Sci. Numer.Simulat.* 16 (2011) 3881-3886.
- [4] A. M. Wazwaz, Suheil A. Khuri, The Variational Iteration method for solving the Voltera Integro-differential forms of the Lane-Emden and the Emden-Fowler problems with intial value conditions, *Open Engineering*, 5, (2015), 31-41.
- [5] C. M. Khalique, F. M. Mahomed, B. Muatjetjeja, Lagrangian formulation of a generalized Lane-Emden equation and double reduction, *J. Nonlinear Math. Phys.* 15 (2008)152-161.
- [6] D. Mustapha, Gegenbauer Series for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *Communications in Mathematics and Applications*, Vol. 14, No. 1, (2023) pp. 167–173.
- [7] D. Mustapha, Numerical solution of fractional integro-differential equations using ultraspherical polynomials, *Studies in Engineering and Exact Sciences*, Curitiba, v.5, n.2, (2024) pp.01-21.

-
- [8] D. Mustapha, Comparison between Touchard and Bernstein polynomials solutions of integral equations, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, Vol.13 No.03 (2022), 736-745.
- [9] D. Mustapha, Touchard Series for Solving Volterra Integral Equations Form of the Lane-Emdan Equations, TEHNIČKI GLASNIK 17, 4(2023), 493-496.
- [10] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, Appl.Math. Comput. 165 (2005) 223–227.
- [11] J. H. He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Appl. math. Comput., 114(2/3) (2000) 115-123.
- [12] H. Aminikhah, S. Moradian, Numerical solution of singular Lane-Emden equation, ISRN Mathematical Physics, 2013, (2013), 1-9.
- [13] H. Demir, I. C. Sungu, Numerical solution of a class of nonlinear Emden-Fowler equations by using differential transform method, Journal of Arts and Sciences, 12, (2009),75-82.
- [14] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations, AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.
- [15] R. H. Fowler, Further studies of Emdens and similar differential equations, Quarterly Journal of Mathematics, 2(1)(1931) 259-288.
- [16] S. Asadpour, H. Hosseinzadeh, A. Yazdani, Numerical Solution of the Lane-Emden Equations with Moving Least Squares Method, Applications and Applied Mathematics., Vol. 14, Issue 2 (2019), pp. 762 – 776.
- [17] W. Al-Hayani, L. Alzubaidy, Ahmed Entesar, Solutions of Singular IVP's of Lane-Emden type by Homotopy analysis method with Genetic Algorithm, Appl. Math. Inf. Sci. 11, No. 2, 407-416 (2017).

المخلص

في هذا العمل، ندرس معادلات لان-إمدن التفاضلية من خلال تحويلها إلى معادلات تكاملية-تفاضلية بهدف الحصول على حلول تقريبية. نستخدم طريقة التجميع-توشار ونقارن النتائج مع الحلول الدقيقة لتقييم دقة وكفاءة النهج المقترح.

الكلمات المفتاحية: معادلات تكاملية-تفاضلية، معادلة لان-إمدن، طرق العددية.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les équations différentielles de Lane-Emden en les transformant en équations intégro-différentielles afin d'obtenir des solutions approchées. Nous utilisons la méthode de Collocation-Touchard et comparons les résultats avec des solutions exactes pour évaluer la précision et l'efficacité de l'approche proposée.

Mots-clés: équations intégro-différentielles, équation de Lane-Emden, méthodes numériques.

Abstract

In this work, we investigate the Lane-Emden differential equations by transforming them into integro-differential equations, aiming to obtain approximate solutions. We employ the Collocation-Touchard method and compare the results with exact solutions to assess the accuracy and effectiveness of the proposed approach.

Keywords: integro-differential equations, Lane-Emden equation, numerical methods