REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Problème hyperbolique semi linéaire pour les équations de lamé

Présenté par :
M^{elle} CHICOUCHE HAMINA SAMIRA

Membres du jury :

NOUIRI Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
BENABDERRAHMANE Benyattou	Prof,	Université de M'sila	**Encadreur**.
SAADI Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

AU NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX

Je tiens tout d'abord á remercies Dieu le tout puissant
qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation
de ce modeste mémoire .
Je remercie profondément Monsieur
BENABERRAHMANE Benyattou mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour
terminer ce travaille
il m'a qui de durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseile.
Mes sincéres remerciements à monsieur
NOUIRI Brahim, qui ma fait l'honneur d'accepter
de présider ce jury de ce mémoire
je remercie vivement Monsieur
SAADI Abderachid, qu'a accepté d'examiné mon travail .
je voudrais également remercier tous mes enseignants,
tous mes coulégues de Master EDP et applications, en particulier
B.Amroune je leur souhaite
une bonne continuation.
De tous mon coeur je remercie mes parents,
et mes priéres que Dien les protége et les accorde santé et longue vie.
enfin, j'adresse un grand remerciement à tous ma grande Famille Chikouche
Hamina.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire

Á mes trés chèrs parents et ma grande mére.

Á mes chères soeurs : Hanan, Souhila , Sara et Aya.

Á mon frére : Elyamin .

Á mes ondes , et tout ces membres de ma famille .

Á mon amis Khayra .

Á tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude .

Á tout ces gents qui m'ont aimé.

Samira

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة؛ نعتبر مسالة حدودية شبه خطية من اجل معادلات المرونة الخطية (جملة لامي) بإدراج حد غير خطي بقوة. نبدأ بالبرهان على وجود و وحدانية حل ضعيف بالاعتماد على تقنيات فاودو قلاركين و طريقة التراص. بعد ذلك؛ نتحصل على نتيجة خاصة بنظامية الحل باستعمال طريقة التراص و تقنيات فاودو قلاركين باعتبار قاعدة خاصة.

الكلمات المفتاحية: تقريبات فاودو قلاركين؛ معادلة قطعية؛ طريقة التراص؛ الوجود و الوحدانية؛ مسالة حدودية.

Dans ce mémoire, un problème aux limites semi linéaire pour les équations de l'élasticité linéaire (système de Lamé) avec terme source fortement non linéaire est considéré. On commence par démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de Compacité. En suite, un résultat de régularité est obtenu en utilisant la méthode de Compacité et les techniques de Faedo-Galerkin avec une base spéciale.

Mots-Clés : Approximations de Faedo-Galerkin, Equation hyperbolique, Méthode de Compacité, Existence et unicité, Problème aux limites.

In this work, a semi-linear boundary problem for the linear elasticity equations (Lamé system) with strongly nonlinear source term is considered. We start by showing the existence and uniqueness of a weak solution by basing on the Faedo-Galerkin approximations combined with the compactness method. Next, a regularity result is obtained by using the compactness methode and the Faedo-Galerkin techniques with special basis.

Keywords : Boundary value problem, Compactness method, Existence and uniqueness, Faedo-Galerkin approximations, Hyperbolic equation.

Table des matières

Introduction générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrège EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP non linéaires - pensez au désormais célèbre effet papillon : une petite variation des conditions initiales peut en temps très long conduire à des très grandes variations. D'un autre côté, on a aussi appris à "entendre la forme d'un tambour" : on a démontré mathématiquement que les fréquences émises par un tambour lors de la vibration de la membrane - un phénomène d'écrit par une EDP, permettent de reconstituer parfaitement la forme du tambour. L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et d'écrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

Notre objectif dans ce travail consiste à analyser la question d'existence, d'unicité et la régularité des solutions pour un problème aux limites hyperbolique semi linéaire pour les équations de Lamé décrivant l'évolution d'un corps élastique linéaire en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de Compacité. Ces techniques sont utilisées par Lions [9] pour des problèmes particuliers.
Ce mémoire est structuré en trois chapitres, dans le premier chapitre on rappelle de quelques résultats fondamentaux sur les espaces de sobolev, topologie faible, application trace, ainsi que les résultats de compacité.

Dans le second chapitre, on considère un problème aux limites hyperbolique semi linéaire gouverné par les équations de Lamé qui modilisent l'évolutions des matériaux élastiques. Plus précisément, on désigne par Ω un ouvert de R^n, à frontière assez régulières Γ, $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ. On suppose que $mes\,\Gamma_1 > 0$. Soit Q le cylindre de $R_x^n \times R_t$: $Q = \Omega \times]0, T[$ fini, de frontière Σ ; on dénote par L le système de lamé défini, au moyen des coefficients de lamé, par

$$Lu = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla divu;$$

où λ et μ sont les coefficients de lamé. u_0, u_1, f sont des fonctions données, $\rho > 0$ (on pourrait supposer seulement $\rho > -1$).

On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une fonction $u = u(x,t), x \in \Omega, t \in]0, T[$ solution du problème (1)-(3) ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u'|^\rho \, u' = f; \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \;\; \frac{\partial u}{\partial \eta_L} = \mu \nabla u.\eta + (\lambda + \mu) divu.\eta = h \quad \text{sur } \Sigma_2, \tag{2}$$

et les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \;\; x \in \Omega, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \;\; x \in \Omega. \tag{3}$$

Sous certaines hypothèses sur les données, en se basant sur la méthode de Compacité et les approximations de Faedo-Galerkin on démontre que le problème considéré admet une solution faible unique ayant certaine régularité.

Dans le dernier chapitre, on considère le même problème qui a été considéré dans le chapitre précédent. Sous certaines hypothèses plus fortes, en utilisant les approximations de Faedo-Galerkin, pour une base spéciale, combinées avec la méthode de Compacité, on analyse la question de la régularité des solutions.

Notations

si Ω est un domaine ouvert de R^n on a :

$\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω.

$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{2} \Gamma_i$: La frontière de Ω supposée souvent régulière.

$\Gamma_i (i = \overline{1,2})$: Une partie mesurable de la frontière Γ.

$Q = \Omega \times]0, T[$: cylindre de $R_x^n \times R_+$.

η : La normale unitaire sortante à Γ .

$D(\Omega)$: L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.

$D'(\Omega)$: L'espace des distributions sur Ω .

$D(0, T; X)$: L'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.

$D'(0, T; X)$: L'espace des distributions des fonctions $U : [0, T] \longrightarrow X$.

$C^{'}, C_i^{'}, i = 1, 2, ..., n$: des constants génériques strictement positifs .

$C, C_i, i = 1, 2, ..., n$: des constants génériques strictement positifs .

$K, K_i, i = 1, 2, ..., n$: des constants génériques strictement positifs .

μ, λ : sont des constantes de lamé.

$\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla Div$: Le système de lamé.

$\frac{\partial u}{\partial \eta_L} := (\mu \nabla u.\eta + (\lambda + \mu) divu.\eta)$ La dérivée normale de u sur Γ_2.

$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = div\,(\nabla u)$ le laplacien de la fonction $u : R^n \longrightarrow R$.

$u^{'}, u^{''}$: Les dérivées premières et secondes de u par rapport aux temps .

$\gamma_i, i = 0, 1, 2$: sont des applications de trace .

$\gamma_0(u) = u_{/\Gamma}$: Trace de u sur Γ .

$\gamma_2(u^{'}) = u^{'}_{/\Gamma_2}$: Trace de $u^{'}$ sur Γ_2 .

$\gamma_2(u^{''}) = u^{''}_{/\Gamma_2}$: Trace de $u^{''}$ sur Γ_2 .

$u_{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u$: La convergente faible étoile de la suite (u_{m_k}) vers l'élément

u dans V.

u_n, u_m, w_n : Suites.

u_{m_k} : sous-suite de u_m.

$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ Le gradient.

f', f'' : Les dérivées premières et secondes de f par rapport aux temps .

$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^t$ Le gradiant de la fonction $f : R^n \longrightarrow R$.

$div f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ La divergence de f.

$\Im(D(0,T); X)$: L'espace des applications linéaires et continues de $D(0,T)$ dans X .

H : L'espace de Hilbert .

$\langle .,. \rangle_H$: Le produit scalaire d'une espace de Hilbert H .

$(.,.)_{X' \times X}$: Le produit dualité entre $X' \times X$.

$d\Gamma$: La mesure superficielle sur Γ induite par dx.

$mes\Gamma_1$: La mesure de Lebesgue $(n-1)$ dimensionnelle de Γ_1.

$\epsilon(u) = \epsilon(u_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$: Le tenseur des déformations linéarisé.

$|.|$: La norme euclidienne sur R^n.

$C(0,T;R)$: L'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans R .

$\Im(V; H^{-1}(\Omega))$: L'espace des applications linéaires et continues de V dans $H^{-1}(\Omega)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: $\left\{u \in L^2(\Gamma), \text{ tel que } \int\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\, d\Gamma(x)\; d\Gamma(y) < \infty\right\}$.

$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$: $\left(\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\, d\Gamma(x)\; d\Gamma(y)\right)^{\frac{1}{2}}$.

$H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$: $\left\{u \in H^1(\Gamma), \forall\alpha \in N^n, |\alpha| = 1, \frac{\partial u}{\partial x} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right\}$.

CHAPITRE 1

QUELQUES RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle que nous allons utiliser dans les chapitres suivants. Plus précisément, nous commençons par donner quelques notions sur la topologie faible (convergence faible, convergence faible étoile) et sur les espaces fonctionnels, ainsi que leurs propriétés, en suite nous présentons quelques techniques d'analyse fonctionnelle permettant la démonstration des résultats souhaités.

Contenu :

1. Topologie faible ;
2. Espace des Distributions ;
3. Les espaces L^p ;
4. Espace de Sobolev ;
   (a) Espace de Sobolev d'ordre entier ;
   (b) Injection de Sobolev ;
5. Théorèmes fondamentaux ;
   (a) Théorème de Rellich ;
   (b) Théorème de Traces ;
   (c) Théorème de Compacité ;
6. Inégalités ;

7. Lemmes de Granwall ;
8. Méthode de Compacité ;

1.1 Topologie faible

Soient $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, $X^{'}$ son dual (topologique) et $(.,.)$ le crochet de dualité entre $X^{'}$ et X.

1.1.1 Convergence faible

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de X et u un élément de X. On dit que; (u_n) converge faiblement vers u dans X si :

$$f(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(u), \forall f \in X^{'},$$

ou encore :

$$(f, u_n)_{X^{'}\times X} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f, u)_{X^{'}\times X},$$

et on écrit :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X.$$

La convergence forte (i.e. la convergence au sens de la norme $\|u_n - u\|_X \longrightarrow 0$) sera notée :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } X.$$

Proposition 1.1. *([4]) Si la limite faible d'une suite de X existe, elle est unique.*

1.1.2 Convergence faible *

([5] , [11]) Soit X un espace de Banach, $X^{'}$ son dual, $X^{''}$ son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f\in X', \|f\|_{X'} \leq 1} |\xi(f)|.$$

En effet, pour tout élément $x \in X$, on définit $J_x \in X^{''}$ par :

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur $X^{'}$ puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}.$$

Définition 1.2. Soient $(u_n)_{n\in\aleph} \in X'$ et $u \in X'$. On dit que ; (u_n) converge vers u dans X' faible * si :

$$u_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x), \forall x \in X,$$

ou encore :

$$(u_n, x)_{X'\times X} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, x)_{X'\times X}\,,$$

et on écrit :

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } X'.$$

Remarque 1.1. ([4]) Si la limite faible * d'une suite de X existe, elle est unique.

Soit H un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$ et H' son dual topologique.

Proposition 1.2. *([1]) Une suite $(u_n)_{n\in N}$ de H converge faiblement vers u dans H si et seulement si :*

$$Lim_{n\to\infty} \langle u_n, y\rangle_H = \langle u, y\rangle_H\,, \ \ \forall y \in H.$$

1.1.3 Espace réflexif , espace séparable

Soit X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow X''$ l'injection canonique de X dans X'', définie par :

$$J_x(f) = f(x) \text{ pour tout : } x \in X, f \in X'.$$

Définition 1.3. (**Espace réflexif**)([11])
L'espace X est dit réflexif, si : $J(X) = X''$. On a le résultat :

Théorème 1.1. *([11]) Toute suite bornée d'un espace de Banach réflexif X, admet au moins une sous-suite faiblement convergence dans X .*

Preuve :
Une démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans le livre de H.Brezis ([5]), analyse fonctionnelle théorie et applications (Théorème III.27, page 50).

Définition 1.4. (**Espace séparable**)([11])
Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble $D \subset X$ dense et dénomblable. On donne le résultat :

Théorème 1.2. *([11]) Si X est un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée de $X^{'}$ on peut extraire une sous-suite faiblement-* convergente dans $X^{'}$.*

Preuve :
La démonstration de ce théorème est détaillée dans le livre de H.Brezis ([5]), analyse fonctionnelle théorie et applications (Corollaire III.26, page 50).

Corollaire 1.1. *([5], page45) Soit X est un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si $X^{'}$ est réflexif .*

Preuve (voire à [5] page46).

1.2 Espace de Distributions

1.2.1 Distributions sur Ω

Soit Ω un ouvert de $\Re^n$.

Définition 1.5. On note par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles ou complexes sur Ω, indéfiniment dérivables à support compact inclus dans Ω .
C'est à dire :

$$D(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow K; u \in C^{\infty}(\Omega) \text{ et Supp}u \text{ est compact} \subset \Omega\},$$

où :

$$\text{Supp}u = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.6. L'espace des distributions sur Ω est l'ensemble des formes linéaires et continues sur Ω, c'est à dire les éléménts de $D^{'}(\Omega)$, où :

$$D^{'}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow K; \text{ Linéaire et Continue }\}.$$

1.2.2 Distributions sur $(0, T)$ à valeurs dans X

Définition 1.7. $D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X, c'est à dire :

$$D(0, T; X) = \{u :]0, T[\longrightarrow X; u \in C^{\infty}(0, T), \text{ Supp}u = X \text{ compact } \subset]0, T[\}.$$

Définition 1.8. L'espace des distributions sur $(0,T)$ à valeurs dans X, noté par $D^{'}(0,T;X)$, est défini par :

$$D^{'}(0,T;X) = \Im(D(0,T);X) = \{u : D(0,T) \longrightarrow X; \text{Linéaire et Continue}\},$$

muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $D(0,T)$.

1.3 Les espaces L^p

1.3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

([4]) Soit Ω un ouvert de R^n avec $n \geq 1$.

Pour : $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, R)$, l'espace vectoriel des (classes des) fonctions $u : \Omega \longrightarrow R$ mesurables de p-ième puissance intégrable (au sens de Lebesgue) sur Ω, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \; dx \; < \infty,$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on désigne par $L^{\infty}(\Omega) = L^{\infty}(\Omega, R)$ l'espace vectoriel des (classes des) fonctions $u : \Omega \longrightarrow R$ mesurables et essentiellement bornées dans Ω, i.e.

$$\exists M \geq 0, \text{ telle que : } |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

muni de sa norme :

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \text{Sup}ess_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M \geq 0; |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Propriétés 1.1. .

1. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\left(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach;
2. Pour : $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable;
3. Pour : $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif, et le dual de $L^p(\Omega)$ s'indentifie avec $L^{p^{'}}(\Omega)$, où : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$.

Pour : $p = 2$, on obtient l'espace $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)\, dx,$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.2 Les espaces $L^p(\Gamma)$

Définition 1.9. Si on note $d\Gamma$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue dx, alors on définit $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$ comme l'ensemble des fonctions $u : \Gamma \longrightarrow \Re$ telles que, $|u|^p$ soit intégrable sur Γ ; muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^p \, d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3.3 Les espaces $L^p(0, T; X)$

Soit X un espace de Banach, avec ; $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.10. On désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes des) fonctions u mesurables sur $[0, T]$ à valeurs dans X et telles que :

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = \infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \text{Sup}ess_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Définition 1.11. ([1]) Soit X un espace de Banach. On dit que ; la suite (u_n) converge vers u dans l'espace $L^p(0, T; X)$ **faible étoile** si :

$$\int_0^T (u_n(t), g(t)) \, dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), g(t)) \, dt\ , \ \ \forall g \in L^q(0, T; X),$$

où : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Propriétés 1.2. Si $1 \leq p \leq \infty$ on a :

1. Pour : $1 \leq p < \infty$, Si X est séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est séparable.
2. Pour : $1 < p < \infty$, Si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif.
3. Pour : $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
4. Pour : $1 \leq q \leq r \leq \infty$:

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow_{Continue} L^q(0, T; X). \tag{1.1}$$

5. L'espace dual de $L^p(0,T;X)$ est $L^{p'}(0,T;X')$, pour $1 < p < \infty$; où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

6. Si X et Y sont deux espaces de Banach tels que : $X \hookrightarrow_{Continue} Y$, alors :

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow_{Continue} L^p(0,T;Y) \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty. \tag{1.2}$$

7. $D(0,T;X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$, c'est à dire $L^p(0,T;X) = \overline{D(0,T;X)}$. On peut identifier le dual $L^{p'}(0,T;X)$ de $L^p(0,T;X)$ à un espace des distributions sur $(0,T)$ á valeurs dans X,

$$\text{pour : } 1 < p \leq \infty, D(0,T;X) \hookrightarrow \overline{D(0,T;X)} = L^p(0,T;X) \subset L^{p'}(0,T;X) \subset D'(0,T;X). \tag{1.3}$$

8. Si $L^1(0,T;X)$, alors la fonction; $t \longmapsto \int_0^T u(s)\,ds$ est continue et :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^T u(s)\,ds\right) = \int_0^T u'(s)\,ds = u(t)-u(0). \tag{1.4}$$

Lemme 1.1. *([9], page7) Soit X un espace de Banach. Si :*

$$\begin{cases} f \in L^p(0,T;X), \\ et \\ f' \in L^p(0,T;X),\ 1 \leq p \leq \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Alors : f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \to X$, $(f : [0,T] \to X)$.

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de sobolev sont les espaces fonctionnels dont les dérivée au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre entier

Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.12. Soit $m \in N (m \geq 1)$, l'espace de Sobolev d'ordre m, noté $H^m(\Omega)$ est l'ensemble défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{u/u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall \alpha \in N^n; |\alpha| \leq m\right\},$$

où :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}.....\partial x_n^{\alpha_n}}, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n,$$

et sont au sens des distributions.

Proposition 1.3. *Les espace $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou la norme équivalente :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. L'espace $H^m(\Omega)$ est séparable.

1.4.2 Injection de Sobolev

Soit E, F deux espaces de Banach tels que $E \subset F$.

Définition 1.13. On dit que E s'injecte dans F de manière continue.

Si l'application :

$$I : E \longmapsto F$$

$$x \longmapsto I(x) = x,$$

est continue, et on note :

$$E \hookrightarrow_{continue} F,$$

de manière équivalent ; $E \hookrightarrow_{continue} F$ Si :

$$\exists C > 0 : \|I(x)\|_F = \|x\|_F \leq C \|x\|_E.$$

Définition 1.14. On dit que E s'injecte dans F de manière compacte.

Si l'application :

$$I : E \longmapsto F$$

$$x \longmapsto I(x) = x,$$

est compacte, et on note :

$$E \hookrightarrow_{compacte} F.$$

C'est à dire : de toute suite bornée $(x_n)_n$ de E on peut extraire une sous-suite convergente dans F.

1.5 Théorèmes fandamentaux

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire.

1.5.1 Théorème de Rellich

On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1, on a :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega), \forall m \in N^*, \tag{1.6}$$

où :

$$\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}, \forall u \in H^m(\Omega).$$

En particulièr, on a toujours :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} L^2(\Omega), \tag{1.7}$$

c'est-à-dire :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}, \forall u \in L^2(\Omega),$$

et de toute suite bornée de $H^m(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergence dans $L^2(\Omega)$.

1.5.2 Théorème de trace

On supposons que Ω est de classe C^1, alors; $D(\overline{\Omega}) \left(or : C^\infty(\overline{\Omega})\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application, $\gamma_0 : D(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\Gamma)$, définie par : $\gamma_0(u) = u_{/\Gamma}$,
c'est à dire :

$$D(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\Gamma)$$

$$u \longrightarrow \gamma_0(u) = u_{/\Gamma},$$

se prolonge par un application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, encore notée par γ_0.
En générale, se prolange par une application continue de H^m dans $H^{m-j-\frac{1}{2}}$,

$$H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$u \longrightarrow \gamma_0(u) = u_{/\Gamma}.$$

En particuliére pour $m = 1$ et $j = 0$:

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$

$$u \longrightarrow \gamma_0(u) = u_{/\Gamma},$$

et la norme définie par :

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

pour $m = 2$ et $j = 1$:

$$\gamma_0 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$
$$u \longrightarrow \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

et la norme définie par :

$$\exists C > 0 : \left\|\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_{H^2(\Omega)}\,.$$

Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.15. ([1]) $H_0^1(\Omega)$ est l'adérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.4. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions " **nulles** " sur Γ.*
C'est à dire :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); \gamma_0(u) = 0\right\},$$

et dont la norme est définie par :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2_{L^2(\Omega)} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou la norme équivalente :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Proposition 1.5. *L'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ est $H^{-1}(\Omega)$, c'est à dire :*

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

Espace V

On note par V le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, défini par :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

L'espace V est séparable .

Proposition 1.6. *$D(\Omega)$ est dense dans V, c'est à dire :*

$$V = \overline{D(\Omega)};\ \textit{telle que} : \forall v \in V; \exists v_n \in D(\Omega) : v_n \longrightarrow v \textit{ dans } V. \tag{1.8}$$

On peut identifier le dual V' de V à un espace des ditributions sur Ω :

$$D(\Omega) \hookrightarrow \overline{D(\Omega)} = V \subset L^2(\Omega) \subset V' \subset D'(\Omega). \tag{1.9}$$

1.5.3 Théorème de Compacité

Les résultats de compacité faible et faible * énoncés ci-dessous sont largement utilisés pour " passage à la limite " dans la plupart des méthodes constructives de résolution des problèmes aux limites.

Théorème 1.3. *(**Compacité faible * des bornés du dual d'un espace séparable)***

Soit X un espace de Banach séparable et soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite bornée de X' (C'est à dire; il existe $C \in R_+$ tq : $\|u_n\|_{X'} \leq C$ pour tout $n \in N$). Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_{n_k}) et $u \in X'$ telle que :

$$u_{n_k} \longrightarrow u \textit{ dans } X' \textit{faible*}.$$

Une application importante de ce théorème est la suivante :
si Ω est un ouvert de R^n et $(u_n)_{n\in N}$ est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée (u_{n_k}) et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que :

$$\int_\Omega u_{n_k} \varphi \, dx \ \longrightarrow \int_\Omega u \varphi \, dx \ \textit{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Théorème 1.4. *(**Compacité faible des bornés d'un espace réflexif)***

Soit X un espace de Banach réflexif, et soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite borneé de X. Alors il existe une sous-suite encore notée (u_{n_k}) , et $u \in X$ telle que :

$$u_{n_k} \longrightarrow u \textit{ dans } X \textit{ faiblement}.$$

Remarque 1.3. Noter qu'un espace de Hilbert est toujours un espace de Banach réflexif.

Définition 1.16. ([15]) On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : V \times V \longrightarrow R$ est :

1. continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \qquad \forall u, v \in V, \tag{1.10}$$

2. coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \qquad \forall u \in V, \tag{1.11}$$

alors, de (1.10) et (1.11), il résulte que :

$$a(u, u) \approx \|u\|_V^2.$$

1.6 Inégalités

1.6.1 Inégalité de Young

Soit $1 < p, q < \infty$. Si $a, b \in R$, alors :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Démonstration

Cette inégalité provient facilement du fait que la fonction logarithme est concave. En effet, on a :

$$Ln(ab) = \frac{1}{p} Ln(a^p) + \frac{1}{q} Ln(b^q) \leq Ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}).$$

Il suffit ensuite d'appliquer la fonction exponentielle à l'inégalité précédente pour obtenir le résultat voulu.

Une des conséquences classique de l'inégalité de Young est l'inégalité de Holder.

1.6.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Si $u, v \in L^2(\Omega)$ alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left| \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.12}$$

1.6.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné à frontière de R^n ; alors, il existe une constante (dépendant seulement de Ω) $C = C(\Omega) > 0$, telle que :

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \ , \ \forall u_m \in H_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Autrement dit, sur $H_0^1(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$:

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \approx \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.4. L'inégalité de Poincaré réste valable dans tout sous espace de $H^1(\Omega)$, dont $u = 0$ sur une partié de la frontiére.

1.6.4 Inégalité de Korn

([1]) Soit Ω un ouvert borné de R^n, à frontière Γ C^1 par morceaux. Supposons que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$ est une partition de Γ. Si $mes\Gamma_1 > 0$, alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :

$$|\epsilon(u)|_H = \sum_{i,j=1}^{n} |\epsilon_{ij}(u)|^2 \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \ , \ \forall u \in V, \tag{1.14}$$

où $H = L^2(\Omega)^{n \times n}$ et $\epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^T u\right)$.

Preuve (voir à [6]).

1.6.5 Formule de Green

Cette formule est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coincide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné à frontiére lipschitzienne de R^n. Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.v \, dx = \int_\Gamma (u.\eta_i)\, v \, ds - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \ , \ 1 \leq i \leq n \text{ avec : } u.\eta_i = \frac{\partial u}{\partial \eta_i}.$$

De plus, si : $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta u.v \, dx = \int_\Gamma (\nabla u.\eta)\, v \, ds - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\eta \right) v \, ds - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \ . \tag{1.15}$$

1.7 Lemme de Granwall

Lemme 1.2. *([15]) Soit* $n \in C(0,T;R)$ *telle que* $n(t) \geq 0$. *Pour tout* $t \in [0,T]$, *si,* $\varphi \in C(0,T;R)$ *est une fonction telle que :*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)\,ds \quad, \forall t \in [0,T], a \geq 0, \tag{1.16}$$

alors :

$$\varphi(t) \leq a\exp(\int_0^t n(s)\,ds\,)) \quad, \forall t \in [0,T].$$

1.8 Fonction convexe

Soit X un ensemble convexe. La fonction réelle F définie sur X est dite convexe si :

$$F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v), \forall u, v \in X, \forall t \in]0,1[.$$

1.9 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode trés générale et trés robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérèt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE SOLUTION FAIBLE

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème aux limites hyperbolique semi linéaire pour les équations de lamé avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann. Après avoir montré que ce problème, sous certaines conditions, est équivalent au problème variationnel, en utilisant les techniques de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de Compacité on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Contenu :

1. Position du problème ;
2. Formulation variationnelle ;
3. Existence et unicité ;
   (a) Existence ;
   (b) unicité ;

2.1 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert borné de R^n à frontière assez régulière Γ et par U un vecteur $(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ tel que :

$$u_i : Q = \Omega \times]0, T[\longrightarrow R^n.$$

Soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \textbf{ et } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi.$$

On note par Q le cylindre de $R_x^n \times R_+$ défini par :

$$Q = \Omega \times (0, T),$$

où T est un nombre réel fini, et par Σ la frontière de Q défini par :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

On pose :

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[\text{ et } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[.$$

On s'intéresse à la recherche d'une fonction $U = u(x, t)$, $t \in (0, T)$ solution du problème (2.1)-(2.3) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u'|^\rho u' = f; \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T); \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} u = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1; \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_L} = \mu \nabla u.\eta + (\lambda + \mu) divu.\eta = h, \quad \text{sur } \Sigma_2; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Où L est l'opérateur de Lamé défini au moyen des coefficients de Lamé λ et μ $(\lambda + \mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu \geq 0)$ par :

$$Lu = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla divu, \tag{2.4}$$

et u_0, u_1, f sont des fonctions données, ρ est un entier naturel > -1.

Nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = \left(u_1^{'}, u_2^{'}, u_3^{'}, ..., u_n^{'} \right) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t}, ..., \frac{\partial u_n}{\partial t} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'' = \left(u_1^{''}, u_2^{''}, u_3^{''}, ..., u_n^{''} \right) = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, ..., \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right);$$

$$|u'|^\rho = (u_1^{'2} + u_2^{'2} + u_3{'}2 + ... + u_n^{'2})^{\frac{\rho}{2}}.$$

Le système (2.1) est un système hyperbolique non linéaire pour les équations de Lamé.

2.1.1 Hypothéses

Pour l'étude de ce problème précédent on aurra besoin des hypothèses suivantes :

$$f \in L^2(Q), (L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))); \tag{2.5}$$

$$u_0 \in V, (u_0 \in L^\infty(0, T; V)); \tag{2.6}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega), (u_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))), p = \rho + 2; \tag{2.7}$$

$$h \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T)), \ \left(L^2(\Gamma_2 \times (0, T)) = L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))\right). \tag{2.8}$$

2.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe on démontre que sous les hypothèses qu'on a considérées, le probléme (2.1)-(2.3) est équivalent à un probléme variationnel.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses* (2.5)-(2.8), *le problème* (2.1)-(2.3) *est équivalent au problème variationnel noté* $(P.V)$, *suivant :*

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ (u'', v) + a(u, v) + (|u'|^\rho \, u', v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hv \, d\Gamma \ , & , \forall v \in V. \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \\ u'(x, 0) = u_1(x), \ x \in \Omega, \end{cases}$$

Où :

$$a(u, v) = \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \ + (\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)(divv) \, dx \ ,$$

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \right\}.$$

Démonstration

Soit u une solution du problème (2.1)-(2.3), en multipliant l'équation (2.1) par $v \in H^1(\Omega)$, on obtient :

$$(u'', v) + (-Lu, v) + (|u'|^\rho u', v) = (f, v). \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.4) dans (2.9), on trouve :

$$(u'', v) - (\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla.divu, v) + (|u'|^\rho u', v) = (f, v),\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

ou encore sous la forme :

$$(u'', v) - \mu \int_\Omega \Delta uv\, dx\ - (\lambda + \mu) \int_\Omega \nabla.divu.v\, dx\ + (|u'|^\rho u', v) = (f, v),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, (voir à (1.15)), on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$(u'', v) - \mu \int_\Gamma (\nabla u.\eta)\, v\, d\Gamma\ + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx\ - (\lambda + \mu) \int_\Gamma (divu.\eta)\, v\, d\Gamma\ + (\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)\,(divv)\ dx$$
$$+ \left(|u'|^\rho u', v\right) = (f, v)\,.$$

En utilisant le fait que Γ_1, Γ_2 est une partition de Γ, il vient :

$$\begin{cases} (u'', v) - \int_{\Gamma_1} (\mu\nabla u.\eta + (\lambda + \mu)divu.\eta)\, v\, ds\ - \int_{\Gamma_2} (\mu\nabla u.\eta + (\lambda + \mu)divu.\eta) v\, ds\ + \mu \int_\Omega \nabla u\nabla v\, dx \\ \\ +(\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)(divv)\, dx\ + (|u'|^\rho u', v) = (f, v) \quad , \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

En posant $v = 0$ sur Γ_1 et en utilisant le fait que $(\mu\nabla u.\eta + (\lambda + \mu)divu.\eta) = h$ sur Γ_2, on obtient :

$$(u'', v) + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx\ + (\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)(divv)\, dx + (|u'|^\rho u', v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hv\, ds \quad , \quad \forall v \in V.$$

D'où la formulation variationnelle :

$$(P.V) : \begin{cases} (u'', v) + a(u, v) + (|u'|^\rho u', v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hv\, ds\ , \quad \forall v \in V; \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega; \\ u'(x, 0) = u_1(x),\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Reste à montrer que toute solution de $(P.V)$ est une solution de probléme (2.1)-(2.3).

Soit u une solution de $(P.V)$, on a :

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u'|^\rho u', v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hv\, d\Gamma \quad , \quad \forall v \in V,$$

ou encore :

$$(u'',v)+\mu\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,dx\ +(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx\ +(|u'|^{\rho}u',v)=(f,v)+\int_{\Gamma_2}hv\,d\Gamma\quad,\ \forall v\in V.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$(u'',v)-\mu\int_{\Omega}\Delta uv\,dx\ -(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla.divuv\,dx\ +\int_{\Gamma_1}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)divu.\eta)v\,ds$$
$$+\int_{\Gamma_2}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)divu.\eta)v\,d\Gamma\ +(|u'|^{\rho}u',v)=(f,v)+\int_{\Gamma_2}hv\,d\Gamma\quad,\ \forall v\in V\ .$$

Comme $v\in V$, donc $v=0$ sur Γ_1, alors :

$$(u'',v)-\int_{\Omega}(\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\nabla.divu)v\,dx\ +\int_{\Gamma_2}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)divu.\eta)v\,d\Gamma$$
$$+(|u'|^{\rho}u',v)=(f,v)+\int_{\Gamma_2}hv\,d\Gamma\quad,\ \forall v\in V. \tag{2.10}$$

En utilisant le fait que $D(\Omega)$ est dense dans V (voir à proposition [1.6]), alors de (2.10), on tire :

$$(u^{''},\Psi)-\int_{\Omega}(\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\nabla.divu)\Psi\,dx\ +(\left|u^{'}\right|^{\rho}u^{'},\Psi)=(f,\Psi),\ \forall\Psi\in D(\Omega),$$

ou sous forme équivalente :

$$\int_{\Omega}\left(u^{''}-Lu+\left|u^{'}\right|^{\rho}u^{'}\right)\Psi\,dx\ =\int_{\Omega}f\Psi\,dx,\ \forall\Psi\in D(\Omega). \tag{2.11}$$

D'après (l'égalité p.p.), nous avons :

$$u^{''}-Lu+\left|u^{'}\right|^{\rho}u^{'}=f\quad\text{p.p. dans }\ \Omega.$$

D'autre part en remplaçant (2.11) dans (2.10), on obtient :

$$\int_{\Gamma_2}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)divu.\eta)\,v\,d\Gamma\ =\int_{\Gamma_2}hv\,d\Gamma\ ,\quad\forall v\in V.$$

Donc :

$$h=(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)divu.\eta)\quad\text{dans }\ \Gamma_2.$$

Alors, le problème (2.1)-(2.3) est formellement équivalent au problème variationnel $(P.V)$.

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses* (2.5)-(2.8), $a\,(u,v)$ *est une forme bilinéaire, continue et coercive sur* V, *et par conséquent* $a\,(u,u)$ *une semi norme équivalente à la norme de* V

$$a\,(u,u)\approx\|u\|_V^2\,.$$

Démonstration

1. Bilinéairité : Elle est évidente.

2. La contunuité : Pour tout $u, v \in V$, on a :

$$|a(u,v)| = \left|\mu \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \ + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)(divv) \, dx \ \right|$$

$$\leq \mu \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \ dx \ + (\lambda+\mu) \int_\Omega |divu| \, |divv| \ dx$$

$$= \mu \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \ dx \ + (\lambda+\mu) \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right| \ dx \ .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.12), il vient :

$$|a(u,v)| \leq \mu \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx \ \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \ dx \ \right)^{\frac{1}{2}} + (\lambda+\mu) \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|^2 \ dx \ \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right|^2 \ dx \ \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \mu \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} + (\lambda+\mu) \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= (2\mu+\lambda) \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} .$$

En posant $C = (2\mu + \lambda)$, il en découle :

$$|a(u,v)| \leq C \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V . \tag{2.12}$$

D'où la continuité .

3. Coercivité : Pour tout $u \in V$ on a :

$$a(u,u) = \mu \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx \ + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)(divu) \, dx \ = \mu \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx \ + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 \, dx$$

$$= \mu \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda+\mu) \left\|divu\right\|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{2.13}$$

En utilisant l'inégalité de Korn (1.14) :

$$\int_\Omega (divu)^2 \, dx \ = \left\|divu\right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \left\|u\right\|^2_V . \tag{2.14}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (1.13) :

$$\int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx \ = \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_2 \left\|u\right\|^2_V , \tag{2.15}$$

il vient :

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 . \tag{2.16}$$

D'où la coercivité .

Dans l'équation (2.12), on pose $v = u$, on obtient :

$$|a(u,u)| \leq C \|u\|_V |u\|_V = C \|u\|_V^2 .$$

En utilisant la continuité (l'équation (2.12)) et la coercivité (l'équation (2.16)) de $a(.,.)$, on trouve :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u,u) \leq C \|u\|_V^2 .$$

D'où, on déduit que $a(u,u)$ est une semi linéaire équivalente à la norme $\|u\|$ de V ($\|u\|_V$)

$$a(u,u) \approx \|u\|_V^2 . \tag{2.17}$$

2.3 Existence et unicité d'une solution faible

2.3.1 Existence de la solution

En se basant sur les approximations de Feado-Galerkin combinées avec la méthode de Compacité, on arrive à démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (2.5)-(2.8)*, il existe au moins une fonction* u *solution de problème* (2.1)-(2.3) *ayant la régularité suivante :*

$$u \in L^{\infty}(0,T;V), \tag{2.18}$$

$$u' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.19}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{2.20}$$

Lemme 2.3. *([15]) L'inclusion de* $(V, \|.\|_V)$ *dans* $(L^2(\Omega), |.|_{L^2(\Omega)})$ *est continue et* V *est dense dans* $L^2(\Omega)$.

Nous notons par V' l'espace de dual de V, V est identifié avec $L^2(\Omega)$ *et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand .*

$$V \hookrightarrow_{Continue} L^2(\Omega) \hookrightarrow_{Continue} V', \tag{2.21}$$

où :

$$\|.\|_{V'} \leq \|.\|_{L^2(\Omega)} \leq \|.\|_V .$$

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses* (2.5)-(2.8)*, les conditions initiales* (2.3) *ont un sens.*

Preuve du Lemme (2.4) :

On montre que u_0 a un sens :

De (2.18) et (2.19) et (2.21) et de propriété (1.2) et de lemme (1.1), il résulte en particulier que $u, u^{'}$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, et par conséquent u est continue de $[0,T] \to L^2(\Omega)$, de sorte que u_0 a un sens.

On montre que u_1 a un sens :

pour vérifier que u_1 a un sens, on doit utiliser l'équation (2.1), qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + Lu - \left|u^{'}\right|^\rho u^{'}. \tag{2.22}$$

Comme :

$$L \in \Im(V; H^{-1}(\Omega)),$$

on a :

$$Lu \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

De (2.19)-(2.20) et des propriétés (1.1)-(1.2), on déduit que :

$$|u'|^\rho u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ avec } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De sorte que (2.22) entraine :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

De propriété (1.1), on déduit que :

$$u^{''} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega)).$$

En particulier $u^{'}$, $u^{''}$ apprtient à $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega))$, et par conséquent grace au lemme (1.1) $u^{'}$ est continue de $[0,T] \to H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega)$, de sorte que u_1 a un sens.

Démonstration du Théorème (2.1)

La démonstration se fera en quatre étapes :

- Etape (1) : Solutions approchées : on construit des solutions **approchées** par la méthode de Faedo-Galerkin.

- Etape (2) : Estimation a priori : on établit sur ces solutions approchées, des estimations (majorations) a priori.

- Etape (3) : Passage à la limite : en utilisant la propriété de compacité (pour passer à la limite dans les termes non linéaires).

- Etape (4) : Vérifications des conditions initiales.

Premiére étape : on cherche des solutions approchées.

L'espace V est séparable (i.e. admet un ensemble dénombrable dense) donc, il existe une suite $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m, ...$ des fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \omega_i \in V \ , \ \ \forall i; i = 1, 2, ..., m, \\ \forall m, \omega_1, ..., \omega_m \quad \text{sont linéairement indépendants,} \\ V_m = \langle \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\} \rangle \ \ \text{l'éspace engendré par la famille } \{\omega_i\}_{i=1}^{m} \ \ \text{est dense dans V.} \end{cases}$$

On cherche alors ; $u_m = u_m(t)$ solution **"approchée"** du probléme sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{i=m} g_{i,m}(t)\omega_i(x),$$

qui doit vérifier :

$$(P_m) : \begin{cases} (u''_m(t), \omega_j) + a(u_m(t), \omega_j) + (\left|u'_m(t)\right|^{\rho} u'_m(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j) + \int_{\Gamma_2} h\omega_j \, ds \ , \quad 1 \le j \le m; \\ u_m(0) = u_{0m}; \\ {u_m}'(0) = u_{1m}; \end{cases} \tag{2.23}$$

et telle que :

$$u_m(0) = u_{0m} \ ; \ \ u_{0m} = \sum_{i=1}^{i=m} g_{im}(0)\omega_i \to u_0 \qquad \text{, lorsque } m \to \infty \text{ dans } V. \tag{2.24}$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \ ; \ \ u_{1m} = \sum_{i=1}^{i=m} g'_{im}(0)\omega_i \to u_1 \qquad \text{, lorsque } m \to \infty \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.25}$$

Il est clair que P_m est un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires et comme la famille $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ est linéairement indépendantes, alors le système composé de (2.23), (2.24) et (2.25) admet au moins une solution défine sur $[0, t_m]$ et telle que :

$$U_m(t) \in L^2(0, t_m, V_m) \ , \ U'_m(t) \in L^2(0, t_m, V_m) \ , \ U''_m(t) \in L^2(0, t_m, V_m).$$

Les estimations à priori qui suivent montreront que t_m est indépendant de m (i.e. $t_m = T$).

Deuxième étape : les estimations a priori.

On multiplie l'équation (2.23) d'indice j par $g_{j,m}^{'}(t)$ et l'on somme en j, on obtient :

$$\left(u_m^{''}(t), u_m^{'}(t)\right) + a\left(u_m(t), u_m^{'}(t)\right) + \left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho} u_m^{'}(t), u_m^{'}(t)\right) = \left(f(t), u_m^{'}(t)\right) + \int_{\Gamma_2} h(s) u_m^{'}(s)\, ds\,. \tag{2.26}$$

En utilisant la bilinéairité de a(.,.) :

$$a\left(u_m(t), u_m^{'}(t)\right) = \frac{d}{dt} a\left(u_m(t), u_m(t)\right) = a\left(u_m^{'}(t), u_m(t)\right) + a\left(u_m(t), u_m^{'}(t)\right) = 2a\left(u_m(t), u_m^{'}(t)\right).$$

Donc, on peut écrire :

$$a\left(u_m(t), u_m^{'}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a\left(u_m(t), u_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2. \tag{2.27}$$

On a :

$$\left(u_m^{''}(t), u_m^{'}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(u_m^{'}(t), u_m^{'}(t)\right) = \left(u_m^{''}(t), u_m^{'}(t)\right) + \left(u_m^{'}(t), u_m^{''}(t)\right) = 2\left(u_m^{''}(t), u_m^{'}(t)\right).$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(u_m^{''}(t), u_m^{'}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u_m^{'}(t), u_m^{'}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m^{'}(t)\right|^2. \tag{2.28}$$

On a :

$$\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho} u_m^{'}(t), u_m^{'}(t)\right) = \int_{\Omega}\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho}\left|u_m^{'}(t)\right|\left|u_m^{'}(t)\right|\, dx = \int_{\Omega}\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2} dx = \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}. \tag{2.29}$$

En remplaçent (2.27)-(2.29) dans (2.26), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right] + \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = \left(f(t), u_m^{'}(t)\right) + \int_{\Gamma_2} h(s) u_m^{'}(s)\, d\Gamma\,.$$

Ce qui donne, en valeur absolue :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right] + \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \left|\left(f(t), u_m^{'}(t)\right)\right| + \int_{\Gamma_2}\left|h(s)\right|\left|u_m^{'}(s)\right|\, d\Gamma\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Shwartz (1.12), on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right] + \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \left|f(t)\right|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{'}(t)\right|_{L^2(\Omega)} + \left|h(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\left|u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}.$$

Donc ; on intégre entre $0, t$ (voir à propriété (1.4)), on déduit que :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right) + \int_0^t \int_{\Omega}\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2} dx\;\; dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u_{1m}\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_{0m}\right\|^2+\int_0^t |f(s)|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Omega)}\, ds\ +\int_0^t |h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\left|u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\, ds\ . \tag{2.30}$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace :

$$\left|\gamma_2(u_m^{'})\right|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_1^{'}\left\|u_m\right\|_V , \tag{2.31}$$

et par conséquent de (2.30) il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2\right)+\int_0^t\int_\Omega\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2}\,dx\ dt$$

$$\leq \int_0^t |f(s)|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Omega)}\, ds\ +C_1^{'}\int_0^t |h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\left\|u_m(s)\right\|_V\, ds\ +\frac{1}{2}\left|u_{1m}\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_{0m}\right\|^2 .$$

En utilisant l'inégalité ; $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, il résulte :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2\right)+\int_0^t\int_\Omega\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2}\,dx\ dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|u_{1m}\right|^2+\left\|u_{0m}\right\|^2+\int_0^t |f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\ +C_1^{'}\int_0^t |h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\, ds\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^t \left|u_m^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\ +\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2_V\, ds\right).$$

D'après (2.5)-(2.8), nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2\right)+\int_0^t\int_\Omega\left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2}\,dx\ dt\\ &\leq \frac{1}{2}C_2^{'}\left(1+\int_0^t\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_m(s)\right\|^2_V\, ds\right)\right),\end{aligned} \tag{2.32}$$

où

$$C_2^{'} = Max\left(\left|u_{1m}\right|^2+\left\|u_{0m}\right\|^2+\int_0^t |f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\ +C_1^{'}\int_0^t |h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\, ds\ ,1\right).$$

On déduit donc, en particulier de (2.32) que :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2\right)\leq \frac{1}{2}C_2^{'}\left(1+\int_0^t\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_m(s)\right\|^2_V\, ds\right)\right),$$

ou encore :

$$\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2\right)\leq C_2^{'}+C_2^{'}\int_0^t\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_m(s)\right\|^2_V\, ds\right).$$

En utilisant le lemme de Granwall $\left(\text{De : (1.16) pour :}\varphi = \left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2 \text{ et } n = C_2^{'} \text{ et } a = C_2^{'}\right)$, il découle :

$$\left|u_m^{'}(t)\right|^2+\left\|u_m(t)\right\|^2 \leq C_2^{'}\exp\left(\int_0^t C_2^{'}\,ds\right) = C_2^{'}\exp\left(t\right)\leq C_3^{'}\ \text{(indépandent de m)}. \tag{2.33}$$

Et de (2.32) ; on déduit que :

$$\int_0^t \int_\Omega \left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho+2} dx\ dt = \int_0^t \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \le \frac{1}{2}C_2^{'}\left(1+\int_0^t \left(\left|u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(s)\|_V^2\ ds\right)\right)$$
$$\le \frac{1}{2}C_2^{'} + \frac{1}{2}C_2^{'}\int_0^t C_3^{'}\,ds\ .$$

Ce qui implique :

$$\int_0^t \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \le \frac{1}{2}C_2^{'} + \frac{1}{2}C_2^{'}C_3^{'}t \le K^{''} \text{ (indépandent de m)}. \tag{2.34}$$

Alors :

$$\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \|u_m(t)\|^2 + \int_0^t \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \le K.$$

D'où l'indépendance de t_m par rapprt à m. De (2.33) et (2.34) on conclut :

$$(u_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V). \tag{2.35}$$

$$(u_m^{'}) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.36}$$

$$(u_m^{'}) \text{ demeure dans un borné de } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{2.37}$$

Troisième étape : passage à la limite .

De (2.35) et (2.36) ; on déduit qu'on peut extraire un sous-suite (u_{m_k}), de (u_m) telle que :

$$\begin{cases} u_{m_k} \to u \ \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \ \text{ faible étoile.} \\ u_{m_k}^{'} \to u^{'} \ \text{ dans } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

De (1.2) ; pour : $X = V$, $Y = L^2(\Omega)$, $p = \infty$ et d'après (2.21), on obtient :

$$L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow_{Continue} L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.38}$$

De (1.1) ; pour : $X = L^2(\Omega)$, $r = \infty$, $q = 2$, on obtient :

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow_{Continue} L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.39}$$

alors : de (2.39) (u_m) est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$.

Comme $L^\infty(0,T;V)$ $\{$resp. $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}$ est le dual de $L^1(0,T;V^{'})$ $\{$resp. $L^1(0,T;L^2(\Omega))\}$, alors il existe une sous-suite (u_{m_k}) telle que :

$$\forall g \in L^1(0,T;V^{'}) : \int_0^T (u_{m_k}(t), g(t))\ dt \overset{m_k\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), g(t))\ dt.$$

Ce qui implique :

$$u_{m_k} \longrightarrow u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;V) \text{ et dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \text{ fort et p.p.} \tag{2.40}$$

D'après l'injection suivante :

$$L^2(Q) \hookrightarrow D^{'}(Q). \tag{2.41}$$

On déduit que :

$$u_{m_k} \longrightarrow u \text{ dans } D^{'}(Q) = D^{'}(0,T;D^{'}(\Omega)).$$

Donc :

$$\exists u^{'}_{m_k} \longrightarrow u^{'} \text{ dans } D^{'}(0,T;D^{'}(\Omega)),$$

ce qui implique que :

$$u^{'}_{m_k} \longrightarrow u^{'} \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.42}$$

Alors en particulier (u_m) est bornée dans $H^1(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compacte :

$$H^1(Q) \hookrightarrow_{Compacte} L^2(Q),$$

et d'après la définition de l'injection compacte, on peut supposer que la suite (u_{m_k}) extraite de (u_m) vérifie (2.40) et (2.42), donc $u, u^{'}$ existent et dans $L^2(Q)$ alors :

$$\begin{cases} u_{m_k} \to u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans } Q. \\ u^{'}_{m_k} \to u^{'} \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans } Q. \end{cases} \tag{2.43}$$

Etudions la convergence de $(\left|u^{'}_m\right|^\rho u^{'}_m)$:

Soit $(u^{'}_m) \in L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))$, alors on a :

$$\left\|\left|u^{'}_m\right|^\rho u^{'}_m\right\|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))} = \int_0^t \int_\Omega \left|\left|u^{'}_m(t)\right|^\rho u^{'}_m(t)\right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx\ dt \ \leq \int_0^t \int_\Omega \left|\left|u^{'}_m(t)\right|^{\rho+1}\right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx\ dt$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega \left|u^{'}_m(t)\right|^{\rho+2} dx\ dt \ = \int_0^t \left\|u^{'}_m(t)\right\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} dt \overset{de(2.34)}{\leq} K^{''} < \infty.$$

D'où, il vient :

$$\left(\left|u^{'}_m\right|^\rho u^{'}_m\right) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)). \tag{2.44}$$

Ce qui implique que :

$$\left(\left|u_m^{'}\right|^{\rho} u_m^{'}\right) \text{ demeure dans un borné de } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T,L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)),$$

et par conséquent :

$$\left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'} \longrightarrow W \text{ dans } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)) \text{ faible.} \tag{2.45}$$

On doit montrer que :

$$W = \left|u^{'}\right|^{\rho} u^{'}. \tag{2.46}$$

Pour cela on aurra besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.5. *([9], page12) Soit θ un ouvert borné de $R_x^n \times R_t$, g_{m_k} et g des fonctions de $L^q(\theta), 1 < q < \infty$ telles que :*

$$\|g_{m_k}\|_{L^q(\theta)} \leq C, g_{m_k} \longrightarrow g \;\; p.p. \text{ dans } \theta.$$

Alors :

$$g_{m_k} \longrightarrow g \;\; \text{dans } L^q \text{ faible.}$$

En posant $\theta = Q, g_{m_k} = \left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'}; q = \frac{\rho+2}{\rho+1} = p^{'}$, d'après (2.44), il résulte :

$$\|g_{m_k}\|_{L^q(\theta)} = \left\|\left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'}\right\|_{L^q(\theta)} = \left\|\left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'}\right\|_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q)} = \left\|\left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'}\right\|_{L^{p'}(Q)} \leq C.$$

et d'après (2.43) :

$$u_{m_k}^{'} \longrightarrow u^{'} \text{ dans } L^2(Q) \text{ (p.p.) },$$

donc :

$$g_{m_k} = \left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'} \rightharpoonup \left|u^{'}\right|^{\rho} u^{'} = g \text{ (p.p.) dans } L^{p^{'}}(Q).$$

Telle que : $p^{'} = \frac{\rho+2}{\rho+1} = q$ (car : $p = \rho + 2$), et d'après (2.45) :

$$\left|u_{m_k}^{'}\right|^{\rho} u_{m_k}^{'} \rightharpoonup W \text{ dans } L^{p^{'}}(Q). \tag{2.47}$$

Puisque la limite est unique donc :

$$g = \left|u^{'}\right|^{\rho} u^{'} = W.$$

On montre que cette solution vérifie l'équation (2.23) donc quand on pose ; $m = m_k$ et on fixe j tel que $m_k > j$, alors :

$$\left(u''_{m_k}(t), w_j\right) + a\left(u_{m_k}(t), w_j\right) + \left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^\rho u'_{m_k}(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h(s).w_j \, d\Gamma \; . \quad (2.48)$$

D'après (2.42) :

$$\left(u'_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow \left(u'(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

D'où :

$$\left(u'_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow \left(u'(t), w_j\right) \text{ dans } D'(0,T).$$

Donc :

$$\left(u''_{m_k}(t), w_j\right) = \frac{d}{dt}\left(u'_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(u'(t), w_j\right) = \left(u''(t), w_j\right) \text{ dans } D'(0,T).$$

D'après (2.40) :

$$a\left(u_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow a\left(u(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$

et d'après (2.45)-(2.46) :

$$\left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^\rho u'_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

On déduit donc de (2.48) que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), w_j\right) + a\left(u(t), w_j\right) + \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h.w_j \, d\Gamma \; .$$

Pour tout $w_j \in V_m$ et tout $1 \leq j \leq m$.

En utilisant la densité de V_m dans l'espace séparable V, on trouve que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), v\right) + a\left(u(t), v\right) + \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), v\right) = \left(f(t), v\right) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma \; , \quad \forall v \in V.$$

Alors la solution u satisfait (2.1)-(2.3).

Quatrième étape : vérifications des conditions initiales.

Reste à montrer que la solution u vérifie les conditions initiales (2.3) :

$$u(0) = u_0; \;\; u'(0) = u_1.$$

D'après (2.40) et (2.42) on a :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ et dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$u'_{m_k} \rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Donc (u_{m_k}) est continue sur [0,T] alors continue en 0 et ona :

$$u_{0m_k} = u_{m_k}(0) \longrightarrow u(0) = u_0 \text{ dans } V.$$

D'ou (2.6) .

Par la mème technique on vérifie que :

$$u'(0) = u_1.$$

Et encore :

$$\left(u'_{m_k}, w_j\right) \rightharpoonup \left(u', w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$
$$\left(u''_{m_k}, w_j\right) \rightharpoonup \left(u'', w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

Alors :

$$\left(u'_{m_k}(0), w_j\right) \rightharpoonup \left(u', w_j\right)_{t=0} = \left(u'(0), w_j\right),$$

et d'après (2.25) :

$$\left(u'_{m_k}(0), w_j\right) \rightharpoonup (u_1, w_j).$$

On a :

$$\left(u'(0), w_j\right) = (u_1, w_j), \forall j.$$

Alors :

$$u'(0) = u_1.$$

D'ou (2.7).

2.3.2 Unicité de la solution

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses* (2.5)-(2.8) *du Théorème* (2.1)*, la solution obtenue dans le théorème* (2.1) *est unique.*

Démonstration du Théorème (2.2) :

Soient u, v deux solutions de (2.1)-(2.3); alors $w = u - v$ vérifie $w \in L^\infty(0,T;V), w' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et

$$w'' - Lw + \left|u'\right|^\rho u' - \left|v'\right|^\rho v' = 0, \text{ dans } Q = \Omega \times (0,T);$$

$$w = 0, \text{ sur } \Sigma_1; \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta_L} = 0, \text{ sur } \Sigma_2; \tag{2.50}$$

$$w(x,0) = 0, \text{ dans } \Omega; \tag{2.51}$$

$$w'(x,0) = 0, \text{ dans } \Omega. \tag{2.52}$$

On a :

$$\left(w''(t), w'(t)\right) - \left(Lw(t), w'(t)\right) = -\left(\left|u'\right|^\rho u' - \left|v'\right|^\rho v', w'(t)\right),$$

ou encore sous la forme :

$$\left(w''(t), w'(t)\right) + a\left(w(t), w'(t)\right) = -\left(\left|u'\right|^\rho u' - \left|v'\right|^\rho v', w'(t)\right), \tag{2.53}$$

d'où il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w(t)\right\|^2 = -\int_\Omega \left(\left|u'\right|^{p-2} u' - \left|v'\right|^{p-2} v'\right)\left(u' - v'\right) dx\,, \tag{2.54}$$

on va démontrer que :

$$\left(\left|u'\right|^{p-2} u' - \left|v'\right|^{p-2} v', u' - v'\right) \geq 0. \tag{2.55}$$

D'après les équations (2.53) et (2.54) , on remarque que :

$$\left(\left|u'\right|^\rho u' - \left|v'\right|^\rho v', u' - v'\right) = \int_\Omega \left(\left|u'\right|^\rho u' - \left|v'\right|^\rho v'\right)\left(u' - v'\right) dx\,.$$

Pour cela, on doit vérifier que :

$$\left|u'\right|^{p-2} u'\left(u' - v'\right) \geq \frac{1}{p}\left(\left|u'\right|^p - \left|v'\right|^p\right). \tag{2.56}$$

On pose $f(t) = \left|(1-t)u' + tv'\right|^p = \left|u' + t(v' - u')\right|^p, p > 1$, alors la fonction f est dérivable et on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{p}{2}\left|u' + t\left(v' - u'\right)\right|^{p-2} 2.\left(u' + t(v' - u')\right)\left(v' - u'\right) \\ &= p\left|u' + t\left(v' - u'\right)\right|^{p-2}\left(u' + t(v' - u')\right)\left(v' - u'\right). \end{aligned}$$

Aussi f est convexe, car pour $t \in [0,1]$, on a :

$$f(t) = \left|(1-t)u' + tv'\right|^p \leq (1-t)\left|u'\right|^p + t\left|v'\right|^p = \left|u'\right|^p + t\left(\left|v'\right|^p - \left|u'\right|^p\right). \tag{2.57}$$

D'après la formule de Taylor on a :

$$f(t) = f(0) + f^{'}(0)(t-0) + t\epsilon(t), \text{où } \ \epsilon(t) \to 0.$$

Ce qui applique :

$$f(t) = \left|u^{'}\right|^{p} + pt\left|u^{'}\right|^{p-2} u^{'}(v^{'} - u^{'}) + t\epsilon(t). \tag{2.58}$$

D'après (2.57) et (2.58), on déduit que :

$$\left|u^{'}\right|^{p} + pt\left|u^{'}\right|^{p-2} u^{'}(v^{'} - u^{'}) + t\epsilon(t) \leq \left|u^{'}\right|^{p} + t\left(\left|v^{'}\right|^{p} - \left|u^{'}\right|^{p}\right),$$

donc :

$$p\left|u^{'}\right|^{p-2} u^{'}(v^{'} - u^{'}) + \epsilon(t) \leq \left(\left|v^{'}\right|^{p} - \left|u^{'}\right|^{p}\right).$$

En faisant tendre $t \to 0$, il vient :

$$\left|u^{'}\right|^{p-2} u^{'}(v^{'} - u^{'}) \leq \frac{1}{p}\left(\left|v^{'}\right|^{p} - \left|u^{'}\right|^{p}\right),$$

d'où : (2.56) .

En permuttant les notations,

$$\left|v^{'}\right|^{p-2} v^{'}(v^{'} - u^{'}) \geq \frac{1}{p}\left(\left|v^{'}\right|^{p} - \left|u^{'}\right|^{p}\right). \tag{2.59}$$

En utilisant (2.56) et (2.59), on obtient :

$$\left|u^{'}\right|^{p-2} u^{'}(u^{'} - v^{'}) + \left|v^{'}\right|^{p-2} v^{'}(v^{'} - u^{'}) \geq \frac{1}{p}\left(\left|u^{'}\right|^{p} - \left|v^{'}\right|^{p}\right) + \frac{1}{p}\left(\left|v^{'}\right|^{p} - \left|u^{'}\right|^{p}\right) = 0.$$

C 'est à dire

$$\int_{\Omega}\left(\left|u^{'}\right|^{\rho} u^{'} - \left|v^{'}\right|^{\rho} v^{'}\right)\left(u^{'} - v^{'}\right) dx \ \geq 0.$$

D'où (2.55) .

Alors, de l'équation (2.54), on déduit que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w^{'}(t)\right|^{2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w(t)\right\|^{2} = -\int_{\Omega}\left(\left|u^{'}\right|^{\rho} u^{'} - \left|v^{'}\right|^{\rho} v^{'}\right)\left(u^{'}(t) - v^{'}(t)\right) dx \ \leq 0.$$

Par intégration sur $[0, t]$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\left|w^{'}(t)\right|^{2} + \left\|w(t)\right\|^{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\left|w^{'}(0)\right|^{2} + \left\|w(0)\right\|^{2}\right) \leq 0.$$

D'après (2.51) et (2.52), il vient :

$$0 \leq \frac{1}{2}\left(\left|w^{'}(t)\right|^{2} + \left\|w(t)\right\|^{2}\right) \leq 0,$$

ce qui implique l'unicité.

CHAPITRE 3

RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION

Dans ce chapitre, on va considérer le même problème que dans le chapitre précédent. Sous certaines hypothèses plus fortes, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, avec une base propre spéciale, ainsi que la méthode de Compacité on arrive à montrer la régularité de la solution.

Contenu :

(a) Régularité de la solution;

   i. Théorème;

   ii. Démostration du Théorème;

3.1 Régularité de la solution

On s'intéresse dans cette section à la démonstration de la régularité de solution pour le méme problème considéré auparavant. Les techniques utilisées sont les approximations de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de Compacité.

Théorème 3.1. *On suppose que Ω est un ouvert borné, de frontière régulière, on donne f, u_0, u_1 avec :*

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.1}$$

$$f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.2}$$

$$u_0 \in (V \cap H^2(\Omega)); \tag{3.3}$$

$$u_1 \in V \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega); \tag{3.4}$$

$$h \in L^2(\Gamma_2 \times (0,T)); \tag{3.5}$$

$$h' \in L^2(\Gamma_2 \times (0,T)); \tag{3.6}$$

alors, il existe une fonction u et une seule solution de (2.1)-(2.3)*, avec :*

$$u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2(\Omega)); \tag{3.7}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;V); \tag{3.8}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.9}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.10}$$

Démonstration du Théorème (3.1) :

Première étape : on cherche des solutions approchées.

On va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin avec une base spéciale.

Soient w_j les fonctions propres de $-L$ pour le problème :

$$\begin{cases} -Lw_j = \delta_j w_j, j = 1,2,...... \\ \frac{\partial w_j}{\partial \eta_L} = \mu \nabla w_j.\eta + (\lambda+\mu) div w_j.\eta = h, \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Où la famille $\{w_j\}$ est une base de l'espace spéciale de :

$$V \cap H^2(\Omega).$$

On suppose que la frontière Γ de Ω assez régulière pour que :

$$w_j \in H^2(\Omega) \cap V \text{ et } w_j \in L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

On choisit $u_{0m}, u_{1m} \in [w_1, ..., w_m]$ de façon que :

$$u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H^2(\Omega) \cap V. \tag{3.11}$$

$$u_{1m} \to u_1 \text{ dans } V \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.12}$$

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution de problème sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{i=m} g_{im}(t) w_i(x), \tag{3.13}$$

qui doit vérifier :

$$\left(P_m^{'}\right) : \begin{cases} \left(u_m^{''}(t), w_j\right) + a\left(u_m(t), w_j\right) + \left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h w_j \, d\Gamma \\ 1 \leq j \leq m \ , \ u_m(t) \in [w_1, ..., w_m] \, ; \\ u_m(0) = u_{0m}; \\ u_m^{'}(0) = u_{1m}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Le système $\left(P_m^{'}\right)$ admet une solution locale dans [0 , t_m].

Les estimations à priori qui suivent montreront que t_m est indépendant de m (i.e. $t_m = T$).

Deuxième étape : les estimations a priori.

Estimation a priori (1).

De (3.14) on a :

$$\left(u_m^{''}(t), \omega_j\right) + a\left(u_m(t), \omega_j\right) + \left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t), \omega_j\right) = \left(f(t), \omega_j\right) + \int_{\Gamma_2} h\omega_j \, d\Gamma \ .$$

D'après le chapitre précédent, on conclut :

$$\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2 \leq C_3^{'}, \ \text{(independant de m)}, \tag{3.15}$$

et :

$$\int_0^t \left\|u_m^{'}(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \ \leq K^{''}, \ \text{(independant de m)}. \tag{3.16}$$

D'ou l'indépendance de t_m par rapport à m. De (3.15) et (3.16), on conclut :

$$(u_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V). \tag{3.17}$$

$$(u_m^{'}) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.18}$$

$$(u_m^{'}) \text{ demeure dans un borné de } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.19}$$

Estimation a priori (2).

On a :

$$\left(u_m^{''}(t),\omega_j\right)+a\left(u_m(t),\omega_j\right)+\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t),\omega_j\right)=\left(f(t),\omega_j\right)+\int_{\Gamma_2} h\omega_j\, d\Gamma. \tag{3.20}$$

En multipliant (3.20) par δ_j, on obtient :

$$\left(u_m^{''}(t),\delta_j\omega_j\right)+a\left(u_m(t),\delta_j\omega_j\right)+\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t),\delta_j\omega_j\right)=\left(f(t),\delta_j\omega_j\right)+\int_{\Gamma_2} h\delta_j\omega_j\, d\Gamma. \tag{3.21}$$

On remplace dans (3.21), $\delta_j\omega_j$ par $-L\omega_j$, on obtient :

$$\left(u_m^{''}(t),-L\omega_j\right)+a\left(u_m(t),-L\omega_j\right)+\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t),-L\omega_j\right)=\left(f(t),-L\omega_j\right)+\int_{\Gamma_2} h.(-L\omega_j)\, d\Gamma. \tag{3.22}$$

En multipliant (3.22) par $g_{jm}^{'}(t)$ et sommant en j, il vient :

$$\left(u_m^{''}(t),-Lu_m^{'}(t)\right)+a\left(u_m(t),-Lu_m^{'}(t)\right)+\int_{\Gamma_2} h(s).(Lu_m^{'}(s))\, d\Gamma+\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{'}(t),-Lu_m^{'}(t)\right) \tag{3.23}$$

$$=\left(f(t),-Lu_m^{'}(t)\right).$$

En utilisant la formule de Green pour $\left(u_m^{''}(t),-Lu_m^{'}(t)\right)$:

$$\left(u_m^{''}(t),-Lu_m^{'}(t)\right)=-\int_\Omega u_m^{''}(t)\left(\mu\Delta u_m^{'}(t)+(\lambda+\mu)\nabla div u_m^{'}(t)\right)\, dx\;=\mu\int_\Omega \nabla u_m^{''}(t)\nabla u_m^{'}(t)\, dx$$

$$+(\lambda+\mu)\int_\Omega (div u_m^{''}(t))(div u_m^{'}(t))\, dx\;-\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(t)\left(\mu\nabla u_m^{'}(t).\eta+(\lambda+\mu)div u_m^{'}(t).\eta\right)\, d\Gamma$$

$$=a\left(u_m^{''}(t),u_m^{'}(t)\right)-\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(s).h(s)\, d\Gamma\,.$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(u_m^{''}(t),-Lu_m^{'}(t)\right)=a\left(u_m^{''}(t),u_m^{'}(t)\right)-\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(s).h(s)\, d\Gamma\,. \tag{3.24}$$

En utilisant la formule de Green pour $\left(f(t), -Lu_m'(t)\right)$:

$$\left(f(t), -Lu_m'(t)\right) = -\int_\Omega f(t)\left(\mu\Delta u_m'(t) + (\lambda+\mu)\nabla div u_m'(t)\right)\,dx \;= \mu\int_\Omega \nabla f(t)\nabla u_m'(t)\,dx$$

$$+(\lambda+\mu)\int_\Omega (div f(t))(div u_m'(t))\,dx \;-\int_{\Gamma_2} f(t)\left(\mu\nabla u_m'(t).\eta + (\lambda+\mu)div u_m'(t).\eta\right)\,d\Gamma$$

$$= a\left(f(t), u_m'(t)\right) - \int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\,d\Gamma\,.$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(f(t), -Lu_m'(t)\right) = a\left(f(t), u_m'(t)\right) - \int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\,d\Gamma\,. \tag{3.25}$$

En utilisant la formule de Green pour $a\left(u_m(t), -Lu_m'(t)\right)$:

$$a\left(u_m(t), -Lu_m'(t)\right) = \mu\int_\Omega \nabla u_m\nabla(-Lu_m'(t))\,dx \;+(\lambda+\mu)\int_\Omega (div u_m(t))\left(div(-Lu_m'(t))\right)\,dx$$

$$= \int_\Omega (\mu\Delta u_m(t) + (\lambda+\mu)\nabla div u_m(t))\left(\mu\Delta u_m'(t) + (\lambda+\mu)\nabla div u_m'(t)\right)\,dx$$

$$-\int_{\Gamma_2} (\mu(\nabla u_m(t).\eta) + (\lambda+\mu)(div u_m(t).\eta))\,(\mu\Delta u_m(t) + (\lambda+\mu)\nabla div u_m(t))\,d\Gamma$$

$$= \left(Lu_m(t), Lu_m'(t)\right) - \int_{\Gamma_2} h(s)(Lu_m'(t))\,d\Gamma\,.$$

Donc, on obtient :

$$a\left(u_m(t), -Lu_m'(t)\right) + \int_{\Gamma_2} h(s)(Lu_m'(t))\,d\Gamma \;= \left(Lu_m(t), Lu_m'(t)\right). \tag{3.26}$$

En utilisant la formule de Green pour $\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t), -Lu_m'(t)\right)$:

$$\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t), -Lu_m'(t)\right) = -\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\left(Lu_m'(t)\right)\,dx$$

$$= -\mu\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\left(\Delta u_m'(t)\right)\,dx \;-(\lambda+\mu)\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\left(\nabla div u_m'(t)\right)\,dx$$

$$= \mu\int_\Omega \left(\nabla\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\right)\left(\nabla u_m'(t)\right)\,dx \;+(\lambda+\mu)\int_\Omega \left(div\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\right)\left(div u_m'(t)\right)\,dx$$

$$-\int_\Gamma \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\left(\mu\left(\nabla u_m'(t).\eta\right) + (\lambda+\mu)\left(div u_m'(t).\eta\right)\right)\,d\Gamma \;= a\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t), u_m'(t)\right)$$

$$-\int_{\Gamma_2} \left(\left|u_m'(s)\right|^\rho u_m'(s)\right)h(s)\,d\Gamma \;= \mu\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_m'(t)\right)\,dx$$

$$+(\lambda+\mu)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)_i \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_m'(t)\right)_j\,dx \;-\int_{\Gamma_2} \left(\left|u_m'(s)\right|^\rho u_m'(s)\right)h(s)\,d\Gamma\,.$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t), -Lu'_m(t)\right) = \mu \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx$$
$$+(\lambda+\mu)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)_i \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'_m(t)\right)_j dx \; - \int_{\Gamma_2}\left(\left|u'_m(s)\right|^\rho u'_m(s)\right) h(s)\, d\Gamma\ . \tag{3.27}$$

D'après (3.24)-(3.27), de (3.23) on obtient :

$$a\left(u''_m(t), u'_m(t)\right) + \left(Lu_m(t), Lu'_m(t)\right) + \mu \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx$$
$$+(\lambda+\mu)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)_i \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'_m(t)\right)_j dx$$
$$= a\left(f(t), u'_m(t)\right) - \int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\, d\Gamma \; + \int_{\Gamma_2} u''_m(s).h(s)\, d\Gamma \; + \int_{\Gamma_2}\left(\left|u'_m(s)\right|^\rho u'_m(s)\right) h(s)\, d\Gamma\ . \tag{3.28}$$

On a :

$$\mu \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx$$
$$= \mu \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\frac{\rho}{2}\left|u'_m(t)\right|^{\rho-2} 2.u'_m(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(u'_m(t))u'_m(t) + \left|u'_m(t)\right|^\rho \frac{\partial}{\partial x_i}(u'_m(t))\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx$$
$$= \mu(\rho+1) \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho \frac{\partial}{\partial x_i}(u'_m(t))\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx$$
$$= \mu(\rho+1) \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\left|u'_m(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}(u'_m(t))\right)^2 dx\ .$$

D'une part, nous avons :

$$\mu \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u'_m(t)\right) dx \; = \mu(\rho+1) \sum_{i=1}^{i=n} \int_\Omega \left(\left|u'_m(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}(u'_m(t))\right)^2 dx\ . \tag{3.29}$$

D'autre part, nous avons :

$$(\lambda+\mu)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho u'_m(t)\right)_i \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'_m(t)\right)_j dx$$
$$= (\lambda+\mu)(\rho+1)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n}\left(\left|u'_m(t)\right|^\rho \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_m(t)\right)_i\right)\sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'_m(t)\right)_j\right) dx$$

$$= (\lambda+\mu)(\rho+1)\int_\Omega \left|u_m'(t)\right|^\rho \left(divu_m'(t)\right)^2 \, dx$$
$$= (\lambda+\mu)(\rho+1)\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} (divu_m'(t))\right)^2 \, dx \, .$$

Donc, on peut écrire :

$$(\lambda+\mu)\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t)\right)_i \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_m'(t)\right)_j \, dx \; = (\lambda+\mu)(\rho+1)\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} (divu_m'(t))\right)^2 \, dx \tag{3.30}$$

En remplaçent (3.29) et (3.30) dans (3.28), on obtient :

$$\begin{aligned} a\left(u_m''(t), u_m'(t)\right) + \left(Lu_m(t), Lu_m'(t)\right) + \mu(\rho+1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_m'(t))\right)^2 \, dx \\ +(\lambda+\mu)(\rho+1)\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} (divu_m'(t))\right)^2 \, dx \\ = a\left(f(t), u_m'(t)\right) - \int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\, d\Gamma \; + \int_{\Gamma_2} u_m''(s).h(s)\, d\Gamma \; + \int_{\Gamma_2} \left(\left|u_m'(s)\right|^\rho u_m'(s)\right) h(s)\, d\Gamma \, . \end{aligned} \tag{3.31}$$

On a :

$$\begin{aligned} &(\rho+1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'(t)\right)\right)^2 dx \\ &= (\rho+1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\frac{\rho}{4}\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho-4}{2}} 2.u_m'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)u_m'(t) + \left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)\right)^2 dx \\ &= (\rho+1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)\right)\right)^2 dx \\ &= (\rho+1)\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2 \sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)\right)^2 dx \, . \end{aligned} \tag{3.32}$$

On déduit donc de (3.32) :

$$(\rho+1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)\right)^2 dx \; = \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'(t)\right)\right)^2 dx \, . \tag{3.33}$$

D'après (3.32) :

$$(\rho{+}1)\sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'(t)\right)_i\right)^2 dx \; = (\rho{+}1)\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2 \sum_{i=1}^{i=n}\int_\Omega \left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_m'(t)\right)_i\right)^2 dx \, .$$

Donc, on peut écrire :

$$(\rho+1)\int_{\Omega}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} div\left(u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx \; = \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_{\Omega}\left(div\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx\,. \tag{3.34}$$

En remplaçent (3.33)-(3.34) dans (3.31), on obtient :

$$a\left(u_m^{''}(t),u_m^{'}(t)\right)+\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right)+\mu\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\sum_{i=1}^{i=n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx$$

$$+(\lambda+\mu)\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_{\Omega}\left(div\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx$$

$$=a\left(f(t),u_m^{'}(t)\right)-\int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(s).h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho} u_m^{'}(s)\right)h(s)\,d\Gamma\,.$$

D'où il vient :

$$a\left(u_m^{''}(t),u_m^{'}(t)\right)+\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right)+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}a\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t),\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)$$

$$\leq a\left(f(t),u_m^{'}(t)\right)-\int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(s).h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho} u_m^{'}(s)\right)h(s)\,d\Gamma\,. \tag{3.35}$$

On a :

$$\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(Lu_m(t),Lu_m(t)\right)=\left(Lu_m^{'}(t),Lu_m(t)\right)+\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right)$$

$$=2\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right).$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(Lu_m(t),Lu_m^{'}(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Lu_m(t)\right|^2. \tag{3.36}$$

En utilisant (3.36) et le $\left(a\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t),\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)=\left\|\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right\|^2\right)$, de (3.35), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Lu_m(t)\right|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\left\|\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right\|^2$$

$$\leq a\left(f(t),u_m^{'}(t)\right)-\int_{\Gamma_2} f(s)h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2} u_m^{''}(s).h(s)\,d\Gamma\;+\int_{\Gamma_2}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho} u_m^{'}(s)\right)h(s)\,d\Gamma\,. \tag{3.37}$$

En valeur absolue (3.37) devient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Lu_m(t)\right|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\left\|\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(t)\right\|^2$$

$$\leq\left|a\left(f(t),u_m^{'}(t)\right)\right|+\int_{\Gamma_2}|f(s)|\,|h(s)|\;d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\left|u_m^{''}(s)\right|\,|h(s)|\;d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|\,|h(s)|\;d\Gamma\,.$$

D'après la continuité (2.12) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.12), on déduit que :

$$\left|a\left(f(t),u_m^{'}(t)\right)\right|\leq(\lambda+2\mu)\,|f|_{L^2(\Omega)}\left\|u_m^{'}\right\|_V. \tag{3.38}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en utilisant (3.38), on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Lu_m(t)\right|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\left\|\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(t)\right\|^2$$

$$\leq(\lambda+2\mu)\,|f|_{L^2(\Omega)}\left\|u_m^{'}\right\|_V+|f(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\,|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}+\left|u_m^{''}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.39}$$
$$+\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\,.$$

Par intégration sur [0,t] (voir à propriété (1.4)), de (3.39) on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\left|Lu_m(t)\right|^2\right)+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\left\|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right\|^2ds$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\left\|u_m^{'}(0)\right\|^2+\left|Lu_m(0)\right|^2\right)+(\lambda+2\mu)\int_0^t|f(s)|_{L^2(\Omega)}\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V\,ds\;+\int_0^t|f(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\,|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds \tag{3.40}$$
$$+\int_0^t\left|u_m^{''}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds\;+\int_0^t\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds\,.$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace :

$$\left|\gamma_2(u_m^{''})\right|_{L^2(\Gamma_2)}\leq C_6\left\|u_m\right\|_V. \tag{3.41}$$

Par la majoration de (3.41), (3.40) devient :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\left|Lu_m(t)\right|^2\right)+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\left\|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right\|^2\;ds$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\left\|u_m^{'}(0)\right\|^2+\left|Lu_m(0)\right|^2\right)+(\lambda+2\mu)\int_0^t|f(s)|_{L^2(\Omega)}\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V\;ds+C_7\int_0^t|f(s)|_{L^2(\Omega)}\,|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds$$
$$+C_6\int_0^t\left\|u_m(s)\right\|_V|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds\;+C_8\int_0^t\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}|h(s)|_{L^2(\Gamma_2)}\;ds\,.$$

En utilisant les inégalités ; $a.b \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$ et $-a.b \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, il résulte :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+|Lu_m(t)|^2\right)+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\left\|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right\|^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{2}(\left\|u_m^{'}(0)\right\|^2+|Lu_m(0)|^2+(\lambda+2\mu)^2\int_0^t|f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\;+C_7\int_0^t|f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

$$+\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds\;+\int_0^t\|u_m(s)\|_V^2\,ds\;+C_6\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds\;+\int_0^t\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|^2_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}ds \tag{3.42}$$

$$+C_8\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds\;)+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V^2 ds\,.$$

De (3.42), il vient :

$$\frac{1}{2}\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}|Lu_m(t)|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\left\|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right\|^2 ds\;\leq\frac{1}{2}K_5\left(1+\int_0^t\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V^2 ds\right), \tag{3.43}$$

où :

$$K_5=Max(\left\|u_m^{'}(0)\right\|^2+|Lu_m(0)|^2+(\lambda+2\mu)^2\int_0^t|f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\;+C_7\int_0^t|f(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

$$+\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds+\int_0^t\|u_m(s)\|_V^2\,ds+C_6\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds+\int_0^t\left|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\rho}u_m^{'}(s)\right|^2_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}ds$$

$$+C_8\int_0^t|h(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,ds\;,1).$$

On déduit donc, en particulier de (3.43) que :

$$\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\leq K_5+K_5\int_0^t\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V^2 ds\,.$$

En utilisant le lemme de Granwall $\Big($De : (1.16) pour :$\varphi=\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2$ et $n=K_5$et $a=K_5\Big)$, il en découle :

$$\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\leq K_5exp\left(\int_0^t K_5\,ds\right)=K_5exp\left(K_5t\right)\leq K^{''}(\text{indépandent de } m), \tag{3.44}$$

et de (3.44) ; on obtient :

$$\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+|Lu_m(t)|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\left\|\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right\|^2 ds$$

$$\leq K_5+K_5\int_0^t\left\|u_m^{'}(s)\right\|_V^2 ds\;\leq K_5+K_5\int_0^t K^{''}\,ds\;\leq K_5+K_5K^{''}t\leq K^{'''}\;(\text{indépandent de } m).$$

On conclut :

$$\left\|u_m'(t)\right\|^2 + |Lu_m(t)|^2 + 2\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t \left\|\left|u_m'(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'(s)\right\|^2 ds \ \leq K''' \text{ (indépandent de } m). \tag{3.45}$$

Alors, de (3.45) on déduit que :

$$|Lu_m(t)|^2 \leq K'''. \tag{3.46}$$

Donc :

$$Lu_m(t) \in L^2(\Omega). \tag{3.47}$$

En utilisant l'inégalité (voir à Lions ([9]), page41), il vient :

$$C\,\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq |Lu_m(t)| \text{ pour } u_m(t) \in V,\ Lu_m(t) \in L^2(\Omega). \tag{3.48}$$

De (3.46) et (3.48), on remarque que :

$$C\,\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq |Lu_m(t)|^2 \leq K''' \text{ (indépandent de } m).$$

D'où, on conclut :

$$\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq K_9 \text{ avec } K_9 = \frac{K'''}{C} \text{ (indépandent de } m). \tag{3.49}$$

De (3.45), il en résulte :

$$\int_0^t \left\|\left|u_m'(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'(s)\right\|^2 ds \ \leq K''' \text{ (indépandent de } m). \tag{3.50}$$

D'où l'indépandance de t_m par rapport à m. De (3.49) et (3.44) et (3.50), et par conséquent :

$$(u_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.51}$$

$$(u_m') \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V). \tag{3.52}$$

$$\left(\left|u_m'\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m'\right) \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.53}$$

Estimation a priori (3).

On montre que :

$$\left|u_m''(0)\right| \leq C.$$

De $\left(P_m'\right)$, il vient :

$$\left(u_m''(0), \omega_j\right) = \left(f(0) + Lu_{0m} - |u_{1m}|^\rho u_{1m}, \omega_j\right), \quad 1 \leq j \leq m. \tag{3.54}$$

D'après le lemme (1.1) ; on a :

$$f(0) \in L^2(\Omega),$$

où :

$$|f(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C_1. \tag{3.55}$$

De (3.3) et (3.47), il en découle :

$$|Lu_{0m}| \leq C_2. \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} \left||u_{1m}|^\rho u_{1m}\right|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left||u_{1m}|^\rho u_{1m}\right|^2 dx \ \leq \int_\Omega \left||u_{1m}|^{\rho+1}\right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |u_{1m}|^{2(\rho+1)} dx \ = \|u_{1m}\|^{2(\rho+1)}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} \overset{D'après (3.4)}{\leq} C_3. \end{aligned}$$

Donc :

$$\left||u_{1m}|^\rho u_{1m}\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3. \tag{3.57}$$

D 'où on conclut :

$$\left(|u_{1m}|^\rho u_{1m}\right) \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega).$$

En multipliant (3.54) par $g_{jm}''(0)$ et sommant en j, il vient :

$$\left|u_m''(0)\right|^2 \leq \left(|f(0)| + |Lu_{0m}| + \left||u_{1m}|^\rho u_{1m}\right|\right)\left|u_m''(0)\right|.$$

Ce qui implique :

$$\left|u_m''(0)\right| \leq \left(|f(0)| + |Lu_{0m}| + \left||u_{1m}|^\rho u_{1m}\right|\right).$$

D'après (3.55)-(3.57), on conclut :

$$\left|u_m''(0)\right| \leq C_4. \tag{3.58}$$

On a :

$$\left(u_m''(t), \omega_j\right) + a\left(u_m(t), \omega_j\right) + \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t), \omega_j\right) = \left(f(t), \omega_j\right) + \int_{\Gamma_2} h\omega_j \, d\Gamma. \tag{3.59}$$

Dérivons (3.59) en t, il vient :

$$\left(u_m'''(t),\omega_j\right)+a\left(u_m'(t),\omega_j\right)+(\rho+1)\left(\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''(t),\omega_j\right)=\left(f'(t),\omega_j\right)+\int_{\Gamma_2}h'(s)\omega_j\,d\Gamma. \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m'(t)&=\frac{\rho}{2}\left|u_m'(t)\right|^{\rho-2}.2u_m'(t)u_m''(t)u_m'(t)+\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''(t)\\&=(\rho+1)\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''(t)\ ;\ \text{avec : }\rho=p-2.\end{aligned}$$

En multipliant (3.60) par $g_{jm}''(t)$ et sommant en j, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(u_m'''(t),u_m''(t)\right)+a\left(u_m'(t),u_m''(t)\right)+(\rho+1)\left(\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''(t),u_m''(t)\right)&=\left(f'(t),u_m''(t)\right)\\&+\int_{\Gamma_2}h'(s)u_m''(t)\,d\Gamma.\end{aligned} \tag{3.61}$$

On a

$$\left(u_m'''(t),u_m''(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(u_m''(t),u_m''(t)\right)=\left(u_m'''(t),u_m''(t)\right)+\left(u_m''(t),u_m'''(t)\right)=2\left(u_m'''(t),u_m''(t)\right).$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(u_m'''(t),u_m''(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u_m''(t),u_m''(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m''(t)\right|^2. \tag{3.62}$$

On a

$$a\left(u_m'(t),u_m''(t)\right)=\frac{d}{dt}a\left(u_m'(t),u_m'(t)\right)=a\left(u_m''(t),u_m'(t)\right)+a\left(u_m'(t),u_m''(t)\right)=2a\left(u_m'(t),u_m''(t)\right).$$

Donc, on peut écrire :

$$a\left(u_m'(t),u_m''(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a\left(u_m'(t),u_m'(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m'(t)\right\|^2. \tag{3.63}$$

En utilisant (3.62) et (3.63) et le ($a\left(u_m'(t),u_m'(t)\right)=\left\|u_m'(t)\right\|^2$); (3.61) de vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m''(t)\right|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m'(t)\right\|^2+(\rho+1)\int_{\Omega}\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''^2(t)\,dx\ =\left(f'(t),u_m''(t)\right)+\int_{\Gamma_2}h'(s)u_m''(s)\,d\Gamma. \tag{3.64}$$

On a :

$$\begin{aligned}(\rho+1)\int_{\Omega}\left|u_m'(t)\right|^{\rho}u_m''^2(t)\,dx\ &=(\rho+1)\int_{\Omega}\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m''(t)\right)^2dx\\&=(\rho+1)\int_{\Omega}\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m'(t)\right)\right)^2dx\end{aligned}$$

$$= (\rho+1)\int_\Omega \left(\frac{\rho}{4}\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho-4}{2}} 2.u_m^{'}(t)u_m^{''}(t)u_m^{'}(t) + \left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{''}(t)\right)^2 dx$$

$$= (\rho+1)\int_\Omega \left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2 \left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{''}(t)\right)^2 dx\ .$$

Donc, on peut écrire :

$$(\rho+1)\int_\Omega \left|u_m^{'}(t)\right|^{\rho} u_m^{''2}(t)\,dx \ = \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx\ . \tag{3.65}$$

En remplaçent (3.65) dans (3.64), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right) + \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx$$

$$= \left(f^{'}(t), u_m^{''}(t)\right) + \int_{\Gamma_2} h^{'}(s)u_m^{''}(t)\,d\Gamma\ .$$

Ce qui donne, en valeur absolue ;

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right) + \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx$$

$$\leq \left|\left(f^{'}(t), u_m^{''}(t)\right)\right| + \int_{\Gamma_2} \left|h^{'}(s)\right|\left|u_m^{''}(t)\right|\,d\Gamma\ .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right) + \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(t)\right)\right)^2 dx\\ &\qquad \leq \left|f^{'}(t)\right|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{''}(t)\right|_{L^2(\Omega)} + \left|h^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\left|u_m^{''}(t)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\ .\end{aligned} \tag{3.66}$$

Par intégration sur $[0,t]$ de (3.66), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right) + \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(0)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(0)\right\|^2\right) + \int_0^t \left|f^{'}(s)\right|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{''}(s)\right|_{L^2(\Omega)} ds\ + \int_0^t \left|h^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\left|u_m^{''}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)} ds\ .\end{aligned} \tag{3.67}$$

Par la majoration de (3.41), (3.67) devient :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2 + \left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right) + \frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(0)\right|^2 + \left\|u_{1m}\right\|^2\right) + \int_0^t \left|f^{'}(s)\right|_{L^2(\Omega)}\left|u_m^{''}(s)\right|_{L^2(\Omega)} ds\ + C_6\int_0^t \left|h^{'}(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\left\|u_m(s)\right\|_V\ ds\ .$$

En utilisant l'inégalité ; $a.b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, il résulte :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(t)\right|^2+\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2\right)+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|u_m^{''}(0)\right|^2+\|u_{1m}\|^2+\int_0^t\left|f^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\ +\int_0^t\left|h^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Gamma_2)}ds\ +C_6\int_0^t\|u_m(s)\|_V^2\ ds\right) \tag{3.68}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left|u_m^{''}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\ .$$

De (3.68), on a :

$$\frac{1}{2}\left|u_m^{''}(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_m^{'}(t)\right\|^2+\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds \leq \frac{1}{2}K_1\left(1+\int_0^t\left|u_m^{''}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\right), \tag{3.69}$$

où :

$$K_1=Max\left(\left|u_m^{''}(0)\right|^2+\|u_{1m}\|^2+\int_0^t\left|f^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\ +\int_0^t\left|h^{'}(s)\right|^2_{L^2(\Gamma_2)}ds\ +C_6\int_0^t\|u_m(s)\|_V^2\ ds\ ,1\right).$$

On déduit donc, en particulier de (3.69) que :

$$\left|u_m^{''}(t)\right|^2\leq K_1+K_1\int_0^t\left|u_m^{''}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\ .$$

En utilisant le lemme de Granwall $\Big($De : (1.16) pour :$\varphi=\left|u_m^{''}(t)\right|^2$ et $n=K_1$ et $a=K_1\Big)$, il en découle :

$$\left|u_m^{''}(t)\right|^2\leq K_1exp\left(\int_0^t K_1\,ds\right)=K_1exp\left(K_1t\right)\leq K^{'}(\text{indépandent de m}). \tag{3.70}$$

De (3.69), on remarque que :

$$\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds\ \leq\frac{1}{2}K_1\left(1+\int_0^t\left|u_m^{''}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds\right).$$

D'après (3.70), on déduit que :

$$\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right)\right)^2 dx\ ds\ \leq K_{10}. \tag{3.71}$$

D'où l'indépandance de t_m par rapport à m. De (3.70) et (3.71), et par conséquent :

$$(u_m^{''})\text{ demeure dans un borné de }L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.72}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}}u_m^{'}(s)\right)\right)\text{ demeure dans un borné de }L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.73}$$

De (3.17) et (3.51), on conclut :

$$(u_m)\text{ demeure dans un borné de }L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega)). \tag{3.74}$$

Troisième étape : passage à la limite.

De (3.74) et (3.18) et (3.52) et (3.72); on déduit qu'on peut extraire un sous-suite (u_{m_k}), de (u_m) telle que :

$$\begin{cases} u_{m_k} \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \\ u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile.} \\ u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \\ u''_{m_k} \longrightarrow u'' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

De (1.2); pour : $X = V \cap H^2(\Omega)$,$Y = V$;$p = \infty$, on obtient :

$$L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;V), \tag{3.75}$$

alors : de (2.38) et (2.39) (u_m) est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$.

Comme : $L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega))$ {resp. $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$} est le dual de $L^1(0,T;V' + (H^2)')$ {resp. $L^1(0,T;L^2(\Omega))$}.

C'est à dire :

$$\left(L^1(0,T;V' + (H^2)')\right)' = L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega)),$$

$$\left(L^1(0,T;L^2(\Omega))\right)' = L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

Donc, il existe une sous-suite (u_{m_k}), de (u_m) telle que :

$$\forall g \in L^1(0,T;V' + (H^2(\Omega))') : \int_0^T (u_{m_k}(t), g(t))\ dt \overset{m_k\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), g(t))\ dt\ .$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} u_{m_k} \longrightarrow u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;V\cap H^2(\Omega)) \text{ et dans } L^\infty(0,T;V) \\ \text{et dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \text{ fort et p.p.} \end{aligned} \tag{3.76}$$

D'après les injections (3.75) et (2.38) et (2.39) et (2.41), on déduit que :

$$u_{m_k} \longrightarrow u \text{ dans } D'(Q).$$

Alors :

$$u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } D'(Q).$$

Donc :

$$u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans} L^2(Q) \text{et dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et dans } L^\infty(0,T;V). \tag{3.77}$$

D'après les injection (2.39) et (2.41), on déduit que :

$$u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } D'(Q).$$

Alors :

$$u''_{m_k} \longrightarrow u'' \text{ dans } D'(Q).$$

Donc :

$$u''_{m_k} \longrightarrow u'' \text{ dans } L^2(Q) \text{ et dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \quad (3.78)$$

Alors en particulier (u_m) est bornée dans $H^2(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compact :

$$H^2(Q) \hookrightarrow_{Compact} L^2(Q),$$

et d'après la définition de la l'injection compacte, on peut suppose que la suite (u_{m_k}) extraite de (u_m) vérifie (3.76) et (3.77) et (3.78), donc u, u', u'' existent et dans $L^2(Q)$ et par conséquent :

$$\begin{cases} u_{m_k} \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans} Q. \\ u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans} Q. \\ u''_{m_k} \longrightarrow u'' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans } Q. \end{cases} \quad (3.79)$$

Etudions la convergence de $\left(\left|u'_m\right|^\rho u'_m\right)$: Comme dans le chapitre précédent.
Etudions la convergence de $\left(\left|u'_m\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_m\right)$: De (3.53) et (3.73); on déduit qu'on peut extraire un sous-suite (u_{m_k}), de (u_m) telle que :

$$\begin{cases} \left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k} \longrightarrow \left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \\ \frac{d}{dt}\left(\left|u'_{m_k}(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}(s)\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|u'(s)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'(s)\right) \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \end{cases}$$

Donc, on pose :

$$\left|u'_{m_k}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}(t) \longrightarrow \Psi \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega) \text{ faible.} \quad (3.80)$$

On doit montrer que :

$$\Psi = \left|u'(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'(t),$$

en se basant sur le lemme (2.5).
En posant : $\theta = Q, g_{m_k} = \left|u'_{m_k}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}(t); q = 2$, d'après (3.50) il résulte :

$$\|g_{m_k}\|_{L^q(\theta)} = \left\|\left|u'_{m_k}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}(t)\right\|_{L^q(\theta)} = \left\|\left|u'_{m_k}(t)\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}(t)\right\|_{L^2(Q)} \leq C.$$

et d'après (3.79) :

$$u'_{m_k} \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(Q) \text{ (p.p.)},$$

Alors :

$$g_{m_k} = \left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k} \rightharpoonup \left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u' = g \text{ (p.p.) dans } L^2(Q).$$

Et d'après (3.80) :

$$\left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k} \rightharpoonup \Psi \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.81}$$

Puisque la limite est unique donc :

$$g = \left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u' = \Psi.$$

D'après l'injection (2.41), on déduit que :

$$\left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u_{m'_k} \longrightarrow \left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u' \text{ dans } D'(Q).$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u'\right) \text{ dans } D'(Q) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u'\right) \tag{3.82}$$

dans $L^2(Q)$.

Alors en particulier $\left(|u_m|^{\frac{\rho}{2}} u_m\right)$ est bornée dans $H^1(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compact :

$$H^1(Q) \hookrightarrow_{Compacte} L^2(Q),$$

et d'après la définition de la l'injection compacte, on peut supposer que la suite (u_{m_k}) extraite de (u_m) vérifie (3.81) et (3.82), donc $\left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u'$, $\frac{d}{dt}\left(\left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u'\right)$ existent et dans $L^2(Q)$ et on a :

$$\begin{cases} \left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k} \longrightarrow \left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u' \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p. dans } Q. \\ \frac{d}{dt}\left(\left|u'_{m_k}\right|^{\frac{\rho}{2}} u'_{m_k}\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|u'\right|^{\frac{\rho}{2}} u'\right) \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p. dans } Q. \end{cases}$$

On montre que cette solution vérifie l'équation (3.14), donc quand on pose ; $m = m_k$ et on fixe j tel que $m_k > j$, alors :

$$\left(u''_{m_k}(t), \omega_j\right) + a\left(u_{m_k}(t), \omega_j\right) + \left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^{\rho} u'_{m_k}(t), \omega_j\right) = (f(t), \omega_j) + \int_{\Gamma_2} h\omega_j \, d\Gamma \, . \tag{3.83}$$

De (3.78), on tire :

$$\left(u''_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow \left(u''(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T). \tag{3.84}$$

Et de (3.76), il résulte :

$$a\left(u_{m_k}(t), w_j\right) \longrightarrow a\left(u(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$

et d'après (2.45)-(2.46) on a :

$$\left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^\rho u'_{m_k}(t), \omega_j\right) \longrightarrow \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), \omega_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

On déduit donc de (3.83) que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), w_j\right) + a\left(u(t), w_j\right) + \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), \omega_j\right) = \left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h.w_j \, d\Gamma \, .$$

De (3.60), il vient :

$$\left(u'''_{m_k}(t), \omega_j\right) + a\left(u'_{m_k}(t), \omega_j\right) + (\rho+1)\left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^\rho u''_{m_k}(t), \omega_j\right) = \left(f'(t), \omega_j\right) + \int_{\Gamma_2} h'(s)\omega_j \, d\Gamma. \tag{3.85}$$

D'après (3.84) on a :

$$\left(u'''_{m_k}(t), \omega_j\right) = \frac{d}{dt}\left(u''_{m_k}(t), \omega_j\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(u''(t), \omega_j\right) = \left(u'''(t), \omega_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

D'après (3.77) :

$$a\left(u'_{m_k}(t), \omega_j\right) \longrightarrow a\left(u'(t), \omega_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

Grace à (3.82), on conclut :

$$(\rho+1)\left(\left|u'_{m_k}(t)\right|^\rho u''_{m_k}(t), \omega_j\right) \longrightarrow (\rho+1)\left(\left|u'(t)\right|^\rho u''(t), \omega_j\right).$$

On déduit donc de (3.85) que :

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(u(t), w_j\right) + \frac{d}{dt} a\left(u(t), w_j\right) + \frac{d}{dt}\left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), \omega_j\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h'.w_j \, d\Gamma \, .$$

Par intégration on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), w_j\right) + a\left(u(t), w_j\right) + \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), \omega_j\right) = \left(f(t), w_j\right) + \int_{\Gamma_2} h.w_j \, d\Gamma \, .$$

Pour tout $w_j \in V \cap H^2(\Omega)$ et tout $1 \leq j \leq m$.

En utilisant la densité de V_m dans $V \cap H^2(\Omega)$, on trouve que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), v\right) + a\left(u(t), v\right) + \left(\left|u'(t)\right|^\rho u'(t), v\right) = \left(f(t), v\right) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma \, , \quad \forall v \in V \cap H^2(\Omega).$$

D'où on conclut que u satisfait (2.1)-(2.3).

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites hyperbolique semi linéaire pour les équations de lamé avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann et des conditions initiales.

Dans ce mémoire, nous avons traité les deux points suivants :

✓ **Existence et Unicité** : Sous certaines conditions sur les données, nous avons analysé la question d'existence et d'unicité d'une solution d'un problème aux limites hyperboliques semi linéaires pour les équations de Lamé (Elasticité linéaire). Les techniques principales de la démonstration sont celles de Lions ([9]) bésées sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de Compacité.

✓ **Régularité** : Sous certaines conditions plus fortes, en se basant sur le approximations de Faedo-Galerkin, avec une base spéciale, combinées avec la méthode de Compacité, nous avons démontré la régularité de la solution obtenue au second chapitre.

☞ En suivant les mémes techniques appliquées aux EDP non linéaires, nous allons traiter d'autres problèmes plus compliquées en considérant des conditions aux limites de contact avec ou sans forttement. D'autre part, nous allons proposer une étude comparative entre la méthode de Compacité et celle de Monotonie pour une famille de problèmes particuliers.

Bibliographie

[1] R. Abita. Problème aux limite non linéaire, Mémoire de Magister, Université de Laghouat, Algérie, 2009.

[2] B. Benabderrahmane, Y. Boukhatem, and R. Abita. Méthode de faedo-galerkin pour un problème aux limites non linéaires. *Anal. Univ. Oradea, fasc. Matematica*, Tom XVI, (2009).

[3] H. Benserid, M. Dilmi, and B. Merouani. Nonlinear and oblique boundary value problems for the lamé equations. *Applied Mathematical Sciences*, Vol.1 :2517–2528, (2007).

[4] I. Boursas. Approximation de galerkin et méthode de compacité pour quelques problèmes elliptiques et paraboliques. Master's thesis, Université d'Oum El Bouaghi, Algérie, 2015.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1987.

[6] I. Hlavacek and J. Necas. *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An introduction*. Elsevier, Amsterdam, (1981).

[7] J.L. Lions. *Problème aux limites non homogène et applications, vol.1*. Dunod Paris, 1968.

[8] J.L. Lions. *Problème aux limites non homogène et applications, vol.2*. Dunod Paris, 1968.

[9] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problème aux limites non linéaires*. Dunod Paris, 1969.

[10] Marie-Thérèse. *Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-sonrier*. ellipses édition marketin S.A, Paris, 1998.

[11] M. Meftah. *Sur Une équation Hyperbolique Non Linéaire IntervenantEn Mécanique Quantique Relativiste Dans Un Domaine Non Borné*. PhD thesis, Université Farhat Abbas de Sétif, Algérie, 2009.

[12] B. Merouani, M. Meftah, and A. Boulaouad. The generalized and perturbed lamé system. *Applied Mathematical Sciences*, Vol.2(no.49) :2425–2430, (2008).

[13] A. Munnier. *Espace de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Institut Elie Cartan, université Henri Poincaré, (2007-2008).

[14] S. Nicaise. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, (2000).

[15] S. Smata. Etude mathématique de quelques problèmes aux limites en élasto-viscoplasticité, Mémoire de Magister, Université Farhat Abbas de Sétif, Algérie, 2012.

[16] S. Tarrafi. Techniques de faedo-galerkin pour un problème hyperbolique semi linéaire assosié à un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, 2014.