UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Nora Djadja

Sujet

Sur quelques conditions pour résoudre des équation Intégro-Différentielles

Devant le jury :

Gasmi Abdel Kader	Prof. Univ de M'sila	Président
Gagui Bachir	M.C.A. Univ de M'sila	Encadreur
Dilmi Mustapha	M .C.B. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2019 / 2020

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant pour m'avoir donné toute cette force et ce courage pour faire aboutir ce travail.

Je tiens à remercier ma encadreur de mémoire Mr Bachir GAGUI. pour m'avoir soutenue et encouragée tout au long de la préparation de cette mémoire. et pour m'avoir inspirée et guidée durant le cheminement de ce travail. Cette mémoire n'aurait pas vu le jour sans sa détermination à mener à bien ce projet.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mr : Gasmi Abdel Kader

Mr : Dilmi Mustapha

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mon mari qui m'a accompagné et soutenu durant ces années, ma famille qui m'a vraiment encouragé pour terminer ce travail, mes collègues.

Je les remercie pour leurs encouragements durant toute la période d'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

Notations **2**

1 Introduction à la théorie des équations différentielles ordinaires, intégrales et intégro-différentielles **3**

1.1 Equations différentielles ordinaires 3

1.2 Équations intégrales 5

1.2.1 Équations intégrales et leurs classifications 5

1.2.2 Relation entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires linéaires 7

1.2.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales 8

1.3 Équations intégro-différentielles 10

1.3.1 Introduction 10

1.3.2 Classification des équations intégro-différentielles 10

1.3.3 conversion d'une équation intégro-différentielle de Fredholm à une équation intégrale de Fredholm 12

2 La théorie d'existence et d'unicité de quelques types d'EID **14**

2.1 Existence d'une solution locale et globale 14

2.2 Inégalité intégro-différentielle 17

2.3 Existance d'une solution 18

2.4 Comparaison des Résultats 21

2.5 La convergence d'approximation successive 23
2.6 La dépendence continue 24
2.7 Variation linéaire 25
2.8 Variation non linéaire 25
2.9 Existance et unicité de l'EID de type Volterra 26

Conclusion **29**

Introduction

Les équations intégro-différentielles sont des modèles mathématiques qui apparaissent fréquemment dans d'autres disciplines l'étude des intégrales et des équations intégro- différentielles remontent aux travaux d'Abel, Lokta, Fredhorm et Voltéra à propos de problèmes de mécanique, biologie, mathématiques et d'économie. Les travaux de Volterra sur les espèces concurrentes sont d'une importance fondamentale pour le développement d'un modèle mathématique adapté aux problèmes du monde réel. Les théories et applications des équations intégro-différentielles de Volterra (équations avec retard borné où à retard illimité sont depuis devenues des domaines d'étude). Ce développement continu pendant les dernières décennies se ressent dans le large nombre de publications et livres partants c'est sujet.

Cependant, aucun de ces livres est exclusivement déviré à la théorie et l'application des équations intégro-différentielles comme sujet propre. La monographie suivante a pour but de couler ce manque elle apporte la théorie basique et les propriétés qualitatives des solutions des équations intégro-différentielles de Volterra avec un large nombre d'applications et découpée en 2 chapitres:

chapitre 1: est un rappel sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles linéaire et non linéaire.

chapitre 2: traite de la théorie basique notamment l'existence l'unicité, la théorie des inégalités, la comparaison des résultats, la dépendance continue, variation linéaire et non linéaire, et Existance et unicité de l'EID de type Volterra.

Notations

$\|.\|_X$	Une norme sur X.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^k(K)$	Espace des fonctions k fois continûment dérivables de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
X	Espace normé.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire
A	Opérateur linéaire.
A^{-1}	Inverse de l'opérateur linéaire.
I	Opérateur identité
$k(x,t)$	Noyau de l'intégrale.
φ	Fonction inconnue.
$E.I.D$	Equations intégro-différentielles.
PVI	Problème a valeur initaile.

.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des équations différentielles ordinaires, intégrales et intégro-différentielles

Dans ce chapitre, on va faire un rappel de quelques notions sur les équations différentielles ordinaires, intégrales et intégro-différentielles.

1.1 Equations différentielles ordinaires

Equation différentielle

Définition 1.1.1 *On appelle équation différentielle une équation établissement une solution entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = \varphi(x)$ et ses dérivées $y, y', ..., y^{(n)}$. c'est à dire*

$$f(x, y, y', y''..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

ou

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^n}) = 0, \tag{1.1.2}$$

si la fonction $y = \varphi(x)$ est d'une seule variable indépendante x, l'équation est dit ordinaire.

On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation.

Solution d'une équation différentielle

Définition 1.1.2 *On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction $y = \varphi(x)$ de la variable indépendante x,définie sur l'intervalle $]x_1, x_2[$ et vérifiant identiquement cette équation en tout point de cet intervalle.*
l' interval $]x_1, x_2[$ est dite intervalle de définition de la solution $y = \varphi(x)$
(le cas $x = +\infty, x = -\infty$ ne sont pas exclus)

Condition initiale

Définition 1.1.3 *Soit l'équation différentielle du premier ordre est de la forme*

$$y' = f(x, y), \tag{1.1.3}$$

avec la solution $y = \varphi(x)$ satisfait la condition

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{1.1.4}$$

*la solution (1.1.4) est dite condition initiale de l'équation différentielle (1.1.3) et les éléments x_0, y_0 sont appellés les valeurs initiales de la solution $y = \varphi(x)$.***voir**[**05**]

Solution générale d'une équation différentielle

Définition 1.1.4 *On appelle solution générale d'une équation différentielle (1.1.3) la fonction $y = \varphi(x, c)$ dépendant de variable indépendante x et une constante c et satisfaisant aux conditions suivantes:*
1) la solution $y = \varphi(x)$ satisfait l'équation différentielle pour tout les valeurs de la constante c.
2) pour tout valeurs initiales (x_0, y_0) on peut trouver une valeur canstante $c = c_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, c_0)$ vérifie la condition initiale donnée (1.1.4) autrement dit $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

Solution particulière d'une équation différentielle

Définition 1.1.5 *On appelle solution particulière d'une équation différentielle (1.1.3) une solution de cette équation doit la quelle l'unicité a lieu en particulier toute fonction* $y = \varphi(x, c_0)$ *déduit de la solution générale* $y = \varphi(x, c)$ *en posant* $c = c_0$ *est une solution particulière.***voir**[**06**]

1.2 Équations intégrales

Définition 1.2.1 *Soit* $k : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur* $C[a, b]$ *définit par* $\varphi : C[a, b] \to A\varphi \in C[a, b]$, *tel que*

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \tag{1.2.1}$$

où la fonction $k(x, t)$ *s'appelle le noyau de l'opérateur intégral* A.

1.2.1 Équations intégrales et leurs classifications

Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégrale est dite équation intégrale.
La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \, \Omega = [a, b] \tag{1.2.2}$$

où $\alpha(x)$, $f(x)$ et $k(x, t)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe de l'intégrale est inconnue à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro.

Équations intégrales de Fredholm

Une équation de la forme (1.2.2) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

1. si $\alpha(x) = 0$, l'équation (1.2.2) s'écrite

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.2.3}$$

et elle est dite de première espèce.

2. si $\alpha(x) = 1$, l'équation (1.2.2) s'écrite

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.2.4}$$

et elle est dite de seconde espèce.

3. si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a,b]$ elle est dite de Troisième espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

et elle est dite homogène.

L'équation intégrale de Fredholm non linéaire du seconde espèce est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt.$$

Équations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt.$$

Une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt$$

est appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

Équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{1.2.5}$$

Si $f(x) = 0$ l'équation (1.2.5) s'écrite

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

est dite équation intégrale de Volterra linéaire homogène de seconde espèce.

Une équation a une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.**voir**[**08**]

1.2.2 Relation entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires linéaires

Il y a une relation fondamentale entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires.

Soit léquation différentielle du type

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\alpha_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+\alpha_n(x)y=F(x) \tag{1.2.6}$$

avec les coefficients sont continus, et les conditions initiales

$$y(\alpha)=q_0,\ y'(\alpha)=q_1,\ y''(\alpha)=q_2,...,\ y^{(n-1)}(\alpha)=q_{n-1}.$$

L'équation (1.2.6) peut-être réduire à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x)+\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt=f(x).$$

pour arriver à cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\varphi(x)$$

ou par intégration par rapport à t de a à x, on obtient

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int_a^x \varphi(t)dt+q_{n-1}$$

et les intégrales successives sont

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int_a^x\int_a^{x_1}\varphi(x)dxdx_1+q_{n-1}x+q_{n-2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_a^x\int_a^{x_1}\int_a^{x_2}\varphi(x)dxdx_1dx_2+\frac{1}{2}q_{n-1}x^2+q_{n-2}x+q_{n-3}\\ &= \frac{1}{2}\int_a^x(x-t)^2\varphi(x)dx+\frac{1}{2}q_{n-1}x^2+q_{n-2}x+q_{n-3}\end{aligned}$$

et on procédent de la même manière, on obtient

$$y(x)=\int_a^x\int_a^{x_n}\int_a^{x_{n-1}}...\int_a^{x_2}\int_a^{x_1}\varphi(x_1)dx_1...dx_n+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

on retournent à l'équation différentielle (1.2.6) on voit qu'on peut ecrire comme suit

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

où

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!},$$

et

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & F(x) - q_{n-1}a_1(x) - [(x-a)q_{n-1} + q_{n-2}]\, a_2(x) - ... \\ & - \left[q_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + ... + (x-a)q_1 + q_0\right] a_n(x) \end{aligned}$$

1.2.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales

Contraction de l'opérateur

Définition 1.2.2 *Soit l'équation à opérateur intégral du seconde ordre,* **voir**[**07**]

$$\varphi - A\varphi = f$$

l'existence et l'unicité de la solution peut être données par la série de neumann pour vu que l'opérateur A soit une contraction $\| A \| \leq 1$.

Théorème 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-même, avec $\| A \| \leq 1$, et soit I l'opérateur identique dans X, alors $(I - A)$ admet un opérateur inverse borné dans X par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\| I - A \|^{-1} \leq \frac{1}{1 - \| A \|}$$

Théorème 1.2.2 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-même, avec $\| A \| \leq 1$, et soit I l'opérateur identique dans X, alors pour tout $f \in X$ l'approximation successive*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f$$

avec φ_0 un vecteur arbitaire de X, converge vers une unique solution de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

Corollaire 1.2.1 *Soit k un noyau continu vérifiant la relation max*

$$\max \int_G \mid k(x,y) \mid dy < 1.$$

Alors pour tout $f \in X$, l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_G k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

admet une solution unique $\varphi \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_G k(x,y)\varphi_n(y)dy + f(x)$$

converge uniformément vers la solution φ pour tout vecteur arbitraire $\varphi_0 \in C(G)$.

Théorème 1.2.3 *Soit A un opérateur compact d' un espace normé X dans lui-même. Alors pour que l'équation non homogène*

$$\Gamma\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ pour tout $f \in X$, il suffit que l'équation homogène

$$\Gamma\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale

$$\varphi = 0.$$

Théorème 1.2.4 *Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact et k un noyau continu sur I. Alors l'équation intégrale de Volterra*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

admet une unique solution.

Théorème 1.2.5 *Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact $k : I \times I \to \mathbb{R}$ où k est une fonction continue sur $I \times I$ et $E = C(I)$ et soit $f \in E$ si*

$$(b-a) \parallel k \parallel_\infty \leq 1.$$

Alors l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in I$$

admet une unique solution.

1.3 Équations intégro-différentielles

1.3.1 Introduction

Les équations intégro-différentielles (E.I.D) est une branche importante en mathématique moderne et suivient fréquement dans beaucoup de domaine appliqués, qui incluent mécanique de l'ingénieur, physique, chemie, astronomée, biologie, économie, théorie potentielle et électrostatique.

Une (E.I.D) est une équation composée de deux opérateurs intégral et différentiel qui impliquent la fonction φ.**Voir**([**01**], [**02**]).

La forme générale d'une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_E k(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))dt \qquad (1.3.1)$$

avec les conditions initiales

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \varphi'(\alpha) = \beta_1, ..., \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

tel que $\alpha \in \Gamma$ et ($\beta_i \quad 0 \leq i \leq n-1$) nombres données,

$\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n)}$ sont des fonctions inconnues,

k : noyau de l'(E.I.D),

E : une ensemle fermé, borné et mesurable,

λ : paramètre.

La forme linéaire d'une (E.I.D) d'ordre n est

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_\Gamma k(x, t) M_t(\varphi) dt + f(x). \qquad (1.3.2)$$

1.3.2 Classification des équations intégro-différentielles

Une importance classification de (E.I.D) existe, et sont classées par leur caractéristiques **voir**[**04**]

1. Les limites de l'intégration

   on distingue trois types majeurs de l'(E.I.D)

a. si les limites de l'intégration sont fixées, alors l'(E.I.D) est dite de Fredholm

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^b k(x,t) M_t(\varphi) dt + f(x).$$

b. si $b = x$, alors l'(E.I.D) est dite de Volterra

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^x k(x,t) M_t(\varphi) dt + f(x).$$

c. si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent, alors l'(E.I.D) est dite de Fredholm-Volterra

$$L_x(\varphi) = \lambda_1 \int_a^b k_1(x,t) \eta_t(\varphi) dt + \lambda_2 \int_a^x k_2(x,t) M_t(\varphi) dt + f(x).$$

2. Ordre de (E.I.D)

   L'ordre d'une (E.I.D) est l'ordre de plus elévé dérivée qu'apparait dans l'opérateur différentiel.

3. Linéaire ou non linéaire

   L'(E.I.D) est dite non linéaire sous la forme (1.3.1) ou linéaire sous la forme (1.3.2).

4. Première ou deuxième espèce

   L'(E.I.D) est dite de Première espèce si le partie différentielle est nul, sinon est dite de deuxième espèce.

5. Nombre de variable de la fonction inconnue φ

   Une (E.I.D) est dite ordinaire si la fonction inconnue φ dépende d'une seule variable indépendante, alors si dépende de deux ou plusieurs variables indépendante l'(E.I.D) est dite partielle.

1.3.3 conversion d'une équation intégro-différentielle de Fredholm à une équation intégrale de Fredholm

Soit l'équation intégro-différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(x) = & \alpha(x)y(x) + b(x) + \int_0^1 k(x,t)y(t)dt \\ y(0) = & \alpha, \qquad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

ou $\alpha(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$.

Si on pose $y'(x) = z(x)$, on obtient

$$y(x) = \alpha + \int_0^x z(t)dt, \tag{1.3.4}$$

substituons (1.3.4) dans (1.3.3) on trouve

$$z(x) = \alpha(x)\left[\alpha + \int_0^x z(t)dt\right] + b(x) + \int_0^1 k(x,t)\left[\alpha + \int_0^t z(u)du\right]dt,$$

alors on obtient

$$z(x) = g(x) + \alpha(x)\int_0^x z(t)dt + \int_0^1 k(x,t)\int_0^t z(t)dt,$$

on pose

$$z(x) = g(x) + h(x),$$

telle que

$$g(x) = \alpha(x) + b(x) + \alpha\int_0^1 k(x,t)z(t)dt$$

$$h(x) = \alpha(x)\int_0^x z(t)dt + \int_0^1 k(x,t)\left(\int_0^t z(u)du\right)dt,$$

on a

$$\int_0^1 k(x,t)\left(\int_0^t z(u)du\right)dt = \int_0^1\left(\int_0^t k(x,u)du\right)z(t)dt,$$

on pose

$$k'(x,t) = \int_0^t k(x,u)du$$

$$h(x) = \alpha(x)\int_0^x z(t)dt + \int_0^1 k'(x,t)z(t)dt$$

$$h(x) = \int_0^1 \left(\alpha(x)H(x-t) + k'(x,t)\right)z(t)dt$$

tel que

$$H(x-t) = \begin{cases} 1 & ,\text{si} \quad x-t \geq 0 \\ 0 & ,\text{si} \quad x-t < 0 \end{cases}$$

on pose

$$\alpha(x)H(x-t) + k'(x,t) = \eta(x,t)$$

on obtient l'équation intégrale de Fredholm

$$z(x) = g(x) + \int_0^1 \eta(x,t)z(t)dt.$$

Chapitre 2

La théorie d'existence et d'unicité de quelques types d'EID

Dans ce chapitre on va essayer de prouver quelques théories d'existence et d'unicité pour certains types d'EID.

2.1 Existence d'une solution locale et globale

Cette section est consacrée à l'étude du problème de la valeur initiale pour le système intégro-différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))ds, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1.1}$$

où $f \in C\left[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$, $k \in C\left[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$ et $J = \left[t_0, t_0 + \alpha\right]$.

La valeur principale du problème (2.1.1) de t_0 à t a équivalant à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x(s)) + \int_{s}^{t} k(\sigma, s, x(s))d\sigma \right] ds, \tag{2.1.2}$$

qui peut-être vu en intégrant (2.1.1) de t_0 à t et en changeant l'ordre d'intégration puisque f et k sont des fonctions continus, sur la différenciation (2.1.2) nous obtenons (2.1.1), Commençons par prouver le résultat d'existence locale suivant en appliquant le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 2.1.1 *(Schauder)*
Soit X un espace de Banach et $E \subset X$, E convexe et fermé et $T : E \to E$ avec T complètement continu, alors T admet un point fixé.

Théorème 2.1.2 *Supposons que $f \in C\left[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$, $k \in C\left[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$ et*
$\int_s^t \mid k(\sigma, s, x(s)) \mid d\sigma \leq N$, pour $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$,
$x \in \Omega = \{\phi \in C\left[J, \mathbb{R}^n\right], \phi(t_0) = x_0$ et $\mid \phi(t) - x_0 \mid \leq b\}$.
Pour certain $0 \leq a \leq \alpha$ alors la valeur initial principale (2.1.1) admet une solution unique.

Preuve. considérons l'ensemble D=$\{(t,x) : t \in J$ et $\mid x - x_0 \mid \leq b\}$ et soit $\mid f(t,x) \mid \leq M$ choisir $\alpha = \min\left[a, b/M + N\right]$ et soit $\Omega_0 = \{\phi \in C\left[J_0, \mathbb{R}^n\right], \phi(t_0) = x_0$ et $\mid \phi - x_0 \mid \leq b\}$ où $\mid \phi \mid_0 = \max\limits_{t_0 \leq t \leq t_0+\alpha} \mid \phi(t) \mid$ et $J_0 = [t_0, t_0 + \alpha]$ il est clair que l'ensemble Ω_0 est fermé,convexe et borné pour tout $\phi \in \Omega_0$ définie une fonction $\Gamma\phi$ avec

$$\Gamma\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left[f(s, \phi(s)) + \int_s^t k(\sigma, s, \phi(s)) d\sigma\right] ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

nous pouvons appliquer le théorème de point fixe de Schaulder's pour prouver l'existance d'un point fixe de Γ en Ω_0 ce qui équivant à résoudre l'équation (2.1.1) clairement $\Gamma\phi(t_0) = x_0$ et pour $t \in J_0$

$$\begin{aligned} \mid \Gamma\phi(t) - x_0 \mid \quad &\leq \int_{t_0}^t \left[\mid f(s, \phi(s)) \mid + \int_s^t \mid k(\sigma, s, \phi(s)) \mid d\sigma\right] ds \\ &\leq (M + N)\alpha \leq b \end{aligned}$$

ce qu'implique que $\Gamma\Omega_0 \subset \Omega_0$, de plus pouur $t_1, t_2 \in J_0$ tel que $t_2 > t_1$ en changeant l'ordre d'intégration on obtient

$$\begin{aligned} \mid \Gamma\phi(t_2) - \Gamma\phi(t_1) \mid \quad &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\mid f(s, \phi(s)) \mid + \int_{t_0}^s \mid k(s, \delta, x(\sigma)) \mid d\sigma\right] ds \\ &\leq (M + N) \mid t_2 - t_1 \mid \end{aligned}$$

cela montre que l'ensemble $\Gamma(\Omega_0)$ est une famille équicontinu et par conséquent la fermeture de $\Gamma(\Omega_0)$ est compact, pour tout ϕ, ψ de Ω_0. En utilisant la continuité uniforme de f et k que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mid \Gamma\phi(t) - \Gamma\psi(t) \mid \quad &\leq \int_{t_0}^t \left[\mid f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)) \mid + \int_s^t \mid k(\sigma, s, \phi(s)) \mid d\sigma\right] ds \\ &\leq \varepsilon(\alpha + \frac{\alpha^2}{\frac{1}{2}}) \ \text{ pour tout } t \in J_0 \end{aligned}$$

à condition que $| \phi(t) - \psi(t) |< \sigma$ pour tout $s \in J_0$, cela implique que Γ est une certographie continue, par le théorème de point fixe de shaulder's, il y a un point fixe de Γ dans Ω_0, qui complète la preuve. ■

Parfois il faut considérer PVI d'équation intégro-différentielle de la forme

$$x' = f(t, x, kx), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1.3}$$

où

$$(kx)(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, s)x(s)ds,$$

$k(t, s)$ est une matrice continue $n \times n$ sur $J \times J$ et $f \in [J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, le resultat d'existance locale par l'PVI (2.1.3) peut etre preuvé en utilisant des arguments similaires à le théorème (2.1.1).

Théorème 2.1.3 Voir[03]. *Supposons que* $| K(t, s) |\leq k$, $(t, s) \in J \times J$ *et* $| f(t, x, y) |\leq M$ *pour tout* $t \in J$, $x, y \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n :| x - x_0 |\leq b\}$, *alors il existe une solution* $x(t)$ *de* (2.1.3) *sur* $[t_0, t_0 + \alpha]$ *pour certain* $\alpha > 0$.
Nous discutons ensuite d'un resultat d'existence globale pour PVI (2.1.1) en utilisant le théorème du point fixe de Tychonoff.

Théorème 2.1.4 *Voir[03]. (Tychonoff)*
Soit B *un espace complet, localement convexe et* B_0 *un sous ensemble convexe fermé de* B, *soit l'opérateur* $T : B \to B$ *cotinue et* $T(B_0) \subset B_0$, *si la fermeture de* $T(B_0)$ *est compact alors* T *a un point fixe dans* B_0.

Théorème 2.1.5 *supposons que*
i) $f \in c[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}]$, $g \in [\mathbb{R}^2, \mathbb{R}]$, $g(t, u)$ *est monotone non décroissante dans* u *pour chaque* $T \in J$ *et* $| f(t, x) |\leq g(t, | x |) \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$;
ii) $K \in C\left[\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$, $G \in C\left[\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R}_+\right]$, $G(t, s, u)$ *est monotone non décroissant dans* u *pour tout* $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ *et* $| K(t, s, x) |\leq G(t, s, | x |)$, $(t, s, x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n$;
iii) Pour chaque $u_0 > 0$ *l'équation intégro-différetielle*

$$u'(t) = g(t, u(t)) + \int_{t_0}^{t} G(t, s, u(s))ds, \; u(t_0) = u_0 \tag{2.1.4}$$

admet une solution $u(t)$ *pour* $t > t_0$.

iv)

$$\int_s^t \mid K(\sigma, s, x(s)) \mid d\sigma \leq N \text{ pour } t, s \in \mathbb{R}_+, \ x \in c\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n\right],$$

pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $\mid x_0 \mid \leq u_0$, *alors il existe une solution* $x(t)$ *de* (2.1.1) *pour* $t \geq t_0$ *satisfait* $\mid x(t) \mid \leq \mid u(t) \mid$, $t \geq t_0$.

Preuve. Voir[03] ■

2.2 Inégalité intégro-différentielle

Dans cette section, nous considérons les inégalités intégro-différentielle de base qui sont nécessaire pour une utilisation ulterieur.

Théorème 2.2.1 *supposons que:*
(A1) $g \in C\left[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $H \in C\left[\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ *et* $H(t,s,u)$ *est monotone non décroissante dans* u *pour tout* $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ *fixé.*
(A2) $v' \leq g(t,v) + \int_{t_0}^t H(t,s,v(s))ds$, *et* $\omega' \geq g(t,\omega) + \int_{t_0}^t H(t,s,\omega(s))ds$.
(A3) Pour $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$, $x \geq y$ *et* $L \geq 0$

$$g(t,x) - g(t,y) \leq L(x-y), \ H(t,s,x) - H(t,s,y) \leq L^2(x,y)$$

ensuite nous avons

$$v(t) \leq \omega(t) \text{ pour } t \geq t_0 \text{ à condition } v(t_0) \leq \omega(t_0) \tag{2.2.1}$$

Théorème 2.2.2 *Supposons que:*
i) $F \in C\left[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right]$ *et* $F(t,x,y,z)$ *est non décroissant dans* x *pour chaque* (t,y,z) *et non croissant dans* z *pour chaque* (t,x,y).
ii) T *plan (carte)* $\subset [\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ *dans* $C\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right]$ *et pour* $u_1, u_2 \in C\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right]$, *l'inégalité* $u_1(t) \leq u_2(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $t_0 \geq 0$ *implique* $Tu_1 \leq Tu_2$ *pour* $t = t_1$.
iii) $v, \omega \in C^1\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right]$ *et* $F(t, v', v, Tv) \leq 0$, $F(t, \omega', \omega, T\omega) \geq 0$ $t \geq t_0$ *l'une des inégalités étant stricte alors*

$$v(t) < \omega(t), \quad t \geq t_0 \tag{2.2.2}$$

Corollaire 2.2.1 *Soit* $v, \lambda \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ *et suppose que*

$$v(t) \leq v_0 + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)v(s)ds, \quad v_0 \geq 0$$

alors

$$v(t) \leq v_0 \ exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right]$$

2.3 Existance d'une solution

Ayant l'existance et la théorie de l'inégalité à notre disposition nous discutons maintenant de l'existance d'une solution et des résultas associés.

Théorème 2.3.1 *Suppossons que*
i) $g \in c[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $H \in c[J \times J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $H(t,s,u)$ *est non décroissant dans* u *pour chaque* (t,s) *et*

$$\int_{s}^{t} H(\delta, s, u(s))d\delta \leq N \ pour \ t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + a, \ u \in \Omega_0$$

où $J = [t_0, t_0 + a]$ *et* $\Omega_0 = \{u \in c[J, \mathbb{R}] : \mid u(t) - u_0 \mid \leq b\}$
Alors il existe une solution maximale et autre minimale de PVI

$$u' = g(t,u) + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds, \ u(t_0) = u_0 \ sur \ [t_0, t_0+\alpha] \ pour \ certain \ 0 < \alpha < a \quad (2.3.1)$$

Preuve. Nouus devons prouver l'existance de la solution maximale uniquement puisque le cas de la solution minimale est trés similaire.
Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}b$ et on considère l'PVI

$$u'(t) = g(t, u(t)) + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds, \ u(t_0) = u_0 + \varepsilon \quad (2.3.2)$$

en observant que la fonction $g_\varepsilon(t,x) = g(t,x) + \varepsilon$ est continue dans

$$D_\varepsilon = \left\{(t,x) : t \in J \text{ et } \mid u - (u_0 + \varepsilon) \mid \leq \frac{1}{2}b\right\} \text{ et}$$
$$D_\varepsilon \subset D \text{ où a } \mid g_\varepsilon(t,x) \mid \leq M + \frac{1}{2}b \text{ dans } D_\varepsilon$$

par conséquent, nous déduisons de théorème 2.1.2 que l'PVI (2.3.2) a une solution $u(t,\varepsilon)$ dans l'intervalle $[t_0, t_0+\alpha]$ où $\alpha = \min(a, \dfrac{b}{2M+2N+b})$ pour $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, nous avons

$$u(t_0, \varepsilon_2) < u(t_0, \varepsilon_1)$$

$$u'(t,\varepsilon_2) \le g(t,u(t,\varepsilon_2)) + \varepsilon_2 + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s,\varepsilon_2))ds,$$

$$u'(t,\varepsilon_2) > g(t,u(t,\varepsilon_1)) + \varepsilon_2 + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s,u_1))ds, \ t \in [t_0, t_0+\alpha]$$

par conséquent le théorème 2.2.1 nous s'ensuit que $u(t,\varepsilon_2) < u(t,\varepsilon_1)$, $t \in [t_0,t_0+\alpha]$, puisque la famille des foctions $\{u(t,\varepsilon)\}$ est equicontinue uniformément bornée sur $[t_0,t_0+\alpha]$, et par le théorème d'Arzela-Arsoli il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ décroissante tel que $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et la limite uniforme $\gamma(t) = \lim\limits_{n\to\infty} u(t,\varepsilon_n)$ existe dans $[t_0,t_0+\alpha]$ clairement $\gamma(t_0) = x_0$ la continuté uniforme de g et H implique que $g(t,u(t,\varepsilon_n))$ tend uniformément vers $H(\delta,s,\gamma(s))$ quand $n \to \infty$ respectivement, et donc l'intégration terme par terme est applicable

$$u(t,\varepsilon_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t}\left[g(s,u(s,\varepsilon_n)) + \int_{s}^{t} H(\delta,s,u(s,\varepsilon_n))d\delta\right]ds + \varepsilon_n$$

qui à son tour cette limite $\gamma(t)$ est une solution de (2.3.1) dans $[t_0,t_0+\alpha]$.

Nous allons maitenant montre que $\gamma(t)$ est la solution maximale souhaitée de (2.3.1) dans $[t_0,t_0+\alpha]$ satisfait $u(t) \le \gamma(t)$ dans $[t_0,t_0+\alpha]$ pour chaque sotution $u(t)$ de (2.3.1)Soit $u(t)$ une solution existante de (2.3.1) dans $[t_0,t_0+\alpha]$

$$\begin{aligned}
u(t_0) = &\quad u_0 < u_0 + \varepsilon = u(t_0,\varepsilon) \\
u'(t) < &\quad g(t,u(t)) + \varepsilon + \textstyle\int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds \\
u'(t,\varepsilon) \ge &\quad g(t,u(t,\varepsilon)) + \varepsilon + \textstyle\int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s,\varepsilon))ds
\end{aligned}$$

pour $t \in [t_0,t_0+\alpha]$ et $\varepsilon \le \dfrac{1}{2}b$; par le téorème (2.2.1) on obtient $u(t) < u(t,\varepsilon)$ pour $t \in [t_0,t_0+\alpha]$ .L'unicité de la solution maximale montre que $u(t,\varepsilon)$ tend uniformément vers $\gamma(t)$ dans $[t_0,t_0+\alpha]$ quand $\varepsilon \to 0$ qui complète la preuve du théorème. ■

Lemme 2.3.1 *Avec même hypothése (i) pour du théorème* 2.3.1*, supposos que le plus grad intervalle d'existance de la solution maximale* $\gamma(t)$ *du (2.3.1) est* $[t_0,t_0+\alpha]$ *, alors il y a* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *la solution maximale* $\gamma(t,\varepsilon)$ *de* (2.3.2) *existe sur* $J_1 = [t_0,t_1] \subset [t_0,t_0+\alpha]$ *et* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(t,\varepsilon) \to \gamma(t)$ *uniformement dans* J_1.

Lemme 2.3.2 *Supposons que*

i) $g \in C[J\times[0,2b],\mathbb{R}]$, $g(t,0) \equiv 0$, *et* $g(t,u)$ *est non décroissante dans* u *pour certain* $t \in J$

où $j = [t_0, t_0 + \alpha]$.

ii) $u(t) \equiv 0$ *est une solution unique de*

$$u' = g(t,u) + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds, \;\; u(t_0) = 0 \;\; dans \;\; [t_0, t_0 + \alpha]$$

iii) $H \in c\,[J \times J \times [0, 2b]\,, \mathbb{R}]$, $H(t,s,0) \equiv 0$ *et* $H(t,s,u)$ *est non décroissante dans u pour chaque* $(t,s) \in J \times J$ *et*

$$\int_{s}^{t} \mid H(\delta, s, u(s)) \mid d\delta \leq N \;\; pour \; t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + a,$$

$$u \in \Omega_0 = \{u \in [J, \mathbb{R}] : \mid u(t) \mid \leq 2b\}$$

puis les approximations successives

$$u_0(t) = (M+N)\,(t - t_0)$$

$$u_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \left[g(s, u_n(s)) + \int_{s}^{t} H(\delta, s, u_n(s))d\delta \right] ds \tag{2.3.3}$$

sont bien définis, $0 \leq u_{n+1}(t) \leq u_n(t)$ *sur* $[t_0, t_0 + \alpha]\,$, *et*

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) \equiv 0 \;\; uniformement \; sur \;\; [t_0, t_0 + \alpha] \tag{2.3.4}$$

en autre, pour chaque $n \geq 1$, *la solution maximale* $\gamma_n(t)$ *de*

$$u' = g(t,u) + pg(t, u_{n-1}(t)) + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds + p\int_{t_0}^{t} H(t,s,u_{n-1}(s))ds \tag{2.3.5}$$

$$u_n(t_0) = 0, \;\; p > 0$$

existe sur J *et* $\lim_{n \to \infty} \gamma_n(t) = 0$ *uniformement sur* J.

Preuve. Une induction facile de prouver (2.3.3), puisque par $\mid g(t,u) \mid \leq M$ et (ii), $\mid u_n' \mid \leq (M+N)$, par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que $\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t)$ uniformement dans J.

Il est clair que $u(t)$ satisfait

$$u' = g(t,u) + \int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds \text{ et } u(t_0) = 0$$

par (ii), il s'ensuit que $u(t) \equiv 0$ et (2.3.4) est prouvé.

Etant donné ε, qu'il y a un $n \geq n(\varepsilon)$ tel que

$$\mid pg(t, u_{n-1}(t)) \mid < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ et } \mid p \int_{t_0}^{t} H(t, s, u_{n-1}(s))ds \mid < \frac{1}{2}\varepsilon$$

car pour $g(t, 0) \equiv 0$, $H(t, s, 0) \equiv 0$ et $(2.3.4)$.

Maintenant un argument similaire à celui de le lemme 2.3.1 prouve (2.3.5).D′où la preuve est complète. ■

2.4 Comparaison des Résultats

Une méthode importante dans le théorème des équations intégro-différenteilles consiste à estimer une fonction satisfaisant une inégalité intérgo-différentielle correspandante un des resultats de ce type est le théorème de comparaison suivant.

Théorème 2.4.1 *Supposons que $g \in C\left[\mathbb{R}_{+}^{2}, \mathbb{R}\right]$, $H \in C\left[\mathbb{R}_{+}^{3}, \mathbb{R}\right]$, $H(t, s, u)$ est non décroissante dans u pour chaque (t, s) et pour $t \geq t_0$*

$$D - m(t) \leq g(t, m(t)) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, m(s))ds \tag{2.4.1}$$

où $m \in C\left[\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}\right]$ et $D - m(t) = \lim \inf_{h \to 0} h^{-1}\left[m(t+h) - m(t)\right]$.
Supposer que $\gamma(t)$ est la solution maximal de

$$u'(t) = g(t, u(t)) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, u(s))ds \text{ et } u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{2.4.2}$$

existant sur $[t_0, +\infty[$, ensuite

$$m(t) \leq \gamma(t) \quad t \geq t_0 \tag{2.4.3}$$

à condition $m(t_0) \leq u_0$.

Corollaire 2.4.1 *Soit (2.4.1) tenir avec $g(t, u) = a(t)u$ et $H(t, s, u) = R(t, s)u$ alors $m(t) \leq R(t, t_0)u(t_0)$, $t \geq t_0$ où $R(t, s)$ est la solution de*

$$\frac{\partial R}{\partial s}(t, s) + R(t, s)a(s) + \int_{t_0}^{t} R(t, \delta)h(\delta, s)d\delta = 0, \; R(t, t) = I$$

dans l'interval $t_0 \leq s \leq t$.
Pour la preuve il suffit d'observer que

$$\gamma(t) = R(t, t_0)u(t_0)$$

est la solution de (2.4.2) .

Bein que le resultat de comparaison précédent joue un rôle important dans l'etude de la théorie qualitative des systèmes Intégro-différentielles il n'est pas fructueux dans de nombreux situation, car trouver une solution de l'équation Intégro-différentielle est plus difficile, il serait donc plus utile dans l'application, s'il était possible de réduire l'étude des inégalités intégro-différentielles scalaire à celle des inégalités différentielles, nous reprenons cette approche nous prouvons-ci dessous quelques resultats de comparaison.

Lemme 2.4.1 *Soit* $g_0, g \in C\left[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}\right]$ *satisfait*

$$g_0(t,u) \leq g(t,u),\ \ g(t,u) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{2.4.4}$$

alors la solution maximale droite $\gamma(t, t_0, u_0)$ *de*

$$u' = g(t,u), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{2.4.5}$$

et la solution maximal gauche $\eta(t, T, \vartheta_0)$ *de*

$$u' = g_0(t,u), \quad u(T) = \vartheta_0 \geq 0 \tag{2.4.6}$$

satisfaitl la relation

$$\gamma(t, t_0, u_0) \leq \eta(t, T, \vartheta_0),\ \ t \in [t_0, T] \tag{2.4.7}$$

n'importe quand $\gamma(T, t_0, u_0) \leq \vartheta_0$.

Théorème 2.4.2 *Soit* $m \in c\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\right],\ g \in c\left[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}\right],\ H \in c\left[\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R}\right]$ *et*

$$D - m(t) \leq g(t, m(t)) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, m(t))ds,\ \ t \in I_0 \tag{2.4.8}$$

où

$$I_0 = \left\{t \geq t_0 : m(s) \leq \eta(s, t, m(t)); t_0 \leq s \leq t\right\},$$

$\eta(t, \Gamma, \vartheta_0)$ *étant la solution maximal gauche* (2.4.6) *existe dans* $[t_0, \Gamma]$ *suppose que*

$$g_0(t,u) \leq F(t, u, t_0) \tag{2.4.9}$$

où

$$F(t, u, t_0) = g(t,u) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, u)ds \tag{2.4.10}$$

et $\gamma(t)$ *est la solution maximale de*

$$u' = F(t, u, t_0),\ \ u(t_0) = u_0 \tag{2.4.11}$$

existe dans $[t_0, \infty)$ *alors*

$$m(t_0) \leq u_0 \text{ implique } m(t) \leq \gamma(t), t \geq t_0. \tag{2.4.12}$$

2.5 La convergence d'approximation successive

Il est bien connu que l'on ne peut pas toujours obtenir une solution de (2.1.1) comme limite de la séquence d'approximation successive, mais si la fonction de comparaison n'est pas décroissante, nous pouvons montrer que l'approximation successive convergent vers la solution unique, C'est le contenu du resultat suivant.

Théorème 2.5.1 *Supposons que*
(A1) $f \in C\left[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right],\ k \in C\left[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$ *et*

$$\int_s^t \mid k(\delta, s, x(s)) \mid d\delta \leq N \text{ pour } t_0 \leq s \leq t_0 + a$$

$$x \in \Omega = \{\phi \in c\left[J, \mathbb{R}_+\right] : \phi(t_0) = x_0 \text{ et} \mid \phi(t) - x_0 \mid \leq b\}$$

(A2) $\mid f(t, x) - f(t, y) \mid \leq g(t, \mid x - y \mid)$ *et* $\mid k(t, s, x) - k(t, s, y) \mid \leq H(t, s, \mid x - y \mid)$ *où*

$$g \in C\left[J \times [0, 2b], \mathbb{R}_+\right],\ \ H \in C\left[J \times J \times [0, 2b], \mathbb{R}_+\right],\ \ g(t, 0) \equiv 0,\ \ H(t, s, 0) \equiv 0,$$

$g(t, u)$ *et* $H(t, s, u)$ *sont non décroissants dans* u *pour chaque* $(t, s) \in J \times J$ *et* $\int_s^t H(\delta, s, u(s))d\delta \leq N_0$ *pour* $t_0 \leq s \leq t_0 + a$, $u \in \Omega_0 = \{u \in C\left[J, \mathbb{R}_+\right] :\mid u(t) \mid \leq 2b\}$.
(A3) L'équaton de comparaison (2.4.2) *n'admit que la solution triviale, puis l'approximation successive définie par*

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left[f(s, x_n(s)) + \int_s^t k(\delta, s, x_n(s))d\delta\right] ds \tag{2.5.1}$$

existe sur $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, *où* $\alpha = \min(a, \dfrac{b}{M + N})$ *comme fonctions contunues et convergent uniformément sur cet interval vers la solution de* $x(t)$ *de* (2.1.1).

2.6 La dépendence continue

Nous allons considérer le problème de condinuité de la solution (2.1.1) par rapport auxvaleurs initiales (t_0, x_0) nous avons bosoin du résultat suivant.

Lemme 2.6.1 *suppose que*
(A1) $f \in c\,[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ *, et soit* $G(t,\gamma) = \max\limits_{|x-x_0|\leq\gamma} \mid f(t,x) \mid$.
(A2) $k \in c\,[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ *et soit* $H(t,s,\gamma) = \max\limits_{|x-x_0|\leq\gamma} \mid k(t,s,x) \mid$.
(A3) $\gamma^*(t, t_0, 0)$ *est la solution maximale de*

$$u'(t) = G(t, u(t)) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, u(t))ds, \ \ u(t_0) = 0$$

si

$$x(t) = x(t, t_0, x_0)$$

est une solution (2.1.1) *alors*

$$\mid x(t, t_0, x_0) - x_0 \mid < \gamma^*(t, t_0, 0), \ \ t \geq t_0.$$

Preuve. Définie $v(t) =\mid x(t) - x_0 \mid$ alors

$$\begin{aligned} D^+ \ v(t) \ &\leq\mid x^{'}(t) \mid=\mid f(t, x(t) \mid + \textstyle\int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))ds \\ &\leq \max\limits_{|x-x_0|\leq v(t)} \mid f(t,x) \mid + \textstyle\int_{t_0}^{t} \max\limits_{|x-x_0|\leq v(s)} \mid k(t, s, x(s)) \mid ds \\ &= G(t, v(t)) + \textstyle\int_{t_0}^{t} H(t, s, v(t))ds \end{aligned}$$

cela implique par le théorème 2.4.1 que

$$v(t) =\mid x(t, t_0, x_0) - x_0 \mid\leq \gamma^*(t, t_0, 0), \ \ t \geq t_0$$

et cella prouve le lemme. ■

Nous sommes mantenant en mesure de prouver la dépendence continue de la solution $x(t, t_0, x_0)$ de (2.1.1) par rapport aux valeurs initiales.

Théorème 2.6.1 *Pour qu'elle soit l'hypothese du théorème* 2.5.1 *satisfaite supposons que la solution* $u(t, t_0, x_0)$ *de* (2.4.2) *à chaque point* (t_0, u_0) *soit continue par rapport à la condittion initaile* (t_0, u_0) *alors la solution* $x(t, t_0, x_0)$ *de* (2.1.1) *est unique et continue par rapport à la valeur initiale* (t_0, x_0).

Preuve. voir[03] ■

2.7 Variation linéaire

considere l'équation linéaire intégro-difféeinteille

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + F(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{2.7.1}$$

où $A(t)$ et $k(t,s)$ sont continues pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ respectivement et $F \in c\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n\right]$ définie pour $t_0 \leq s \leq t < \infty$

$$\Psi(t,s) = A(t) + \int_{s}^{t} k(t,\delta)d\delta. \tag{2.7.2}$$

et

$$R(t,s) = I + \int_{s}^{t} R(t,\delta)\Psi(\delta,s)d\delta \tag{2.7.3}$$

où I est la matrice identdité et

$$k(t,s) = \Psi(t,s) = R(t,s) = 0 \text{ si } \ s > t \geq t_0$$

Théorème 2.7.1 *Supposons que $A(t)$ et $k(t,s)$ sont continues pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $F \in c\left[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n\right]$ alors la solution $x(t)$ de (2.7.1) satisfait*

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)F(s)ds,\ x(t_0) = x_0 \tag{2.7.4}$$

où $R(t,s)$ est la solution unique de

$$\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) + R(t,s)A(s) + \int_{S}^{t} R(t,\delta)k(\delta,s)d\delta = 0,\ R(t,t) = I \tag{2.7.5}$$

Preuve. voir[03] ■

Remarque 2.7.1 *la formule (2.7.4) qui exprime la solution $x(t)$ de (2.7.1) en termes de résolvent différentable $R(t,s)$ et la fonction de source $F(t)$ est appelée la formule de variation linéaire des paramètres pour l'équation intégro-différentiellle (2.7.1).*

2.8 Variation non linéaire

Théorème 2.8.1 *Soit $f \in c\left[\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n\right]$, où D est un ensemble ouvert, convexe dans $\mathbb{R}^n$, et que f_x existe et soit continue sur $\mathbb{R}_+ \times D$. Alors*

$$f(t,x) - f(t,y) = \left[\int_0^1 f_x(t, sx + (1-s)yds\right](x-y)$$

considérons maintenant l'PVI pour l'équation intégro-différentielle non linéaire

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} g(t, s, x(s))ds, \ x(t_0) = x_0 \tag{2.8.1}$$

Théorème 2.8.2 *Supposons que*
$f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ et que f_x et g_x existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ respectivement.
Soit $x(t, t_0, x_0)$ la solution unique de (2.8.1) existant sur un certain intervalle $t_0 \leq t \leq \alpha < \infty$ et l'ensemble $J = [t_0, t_0 + T]$, $t_0 + T < \alpha$ définie $H(t, t_0, x_0) = f_x(t, x(t, t_0, x_0)$ et $G(t, s, t_0, x_0) = g_x(t, s, x(s, t_0, x_0)$, alors
i) $\phi(t, t_0, x_0) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\right)(t, t_0, x_0)$ existe et elle est la solution de

$$y'(t) = H(t, t_0, x_0)y(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, s; t_0, x_0)y(s)ds \tag{2.8.2}$$

te que $\phi(t_0, t_0, x_0) = I$.
ii) $\phi(t, t_0, x_0) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial t_0}\right)(t, t_0, x_0)$ existe et elle est la solution de

$$z'(t) = H(t, t_0, x_0)z(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, s; t_0, x_0)z(s)ds - g(t, t_0, x_0) \tag{2.8.3}$$

tel que $\Psi(t_0, t_0, x_0) = -f(t_0, x_0)$.
iii) les fonctions $\phi(t, t_0, x_0)$ et $\Psi(t, t_0, x_0)$ satisfait la relation

$$\Psi(t, t_0, x_0) + \phi(t, t_0, x_0)f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, \delta; t_0, x_0)g(\delta, t_0, x_0)d\delta = 0 \tag{2.8.4}$$

où $R(t, s; t_0, x_0)$ est la solution de l'PVI

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x_0}\right)(t, s; t_0, x_0) + R(t, s; t_0, x_0)\, H(s, t_0, x_0) + \int_{s}^{t} R(t, \delta; t_0, x_0)G(\delta, s; t_0, x_0)d\delta = 0 \tag{2.8.5}$$

$R(t, t, t_0, x_0) = I$ sur $t_0 \leq s \leq t$ et $R(t, t, t_0, x_0) = \phi(t, t_0, x_0)$.

2.9 Existance et unicité de l'EID de type Volterra

Dans cette section, nous étudions le problème de la valeur initaile du premeir ordre d'équation non linéaire intégro-différenteille de type volterra à savoir

$$x' = H(t, x, Tx), \ x(t_0) = x_0 \tag{2.9.1}$$

dans l'espace réel E de Banach, où

$$Tx(t) = \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds \tag{2.9.2}$$

$$k \in [J \times J, \mathbb{R}], \mid k(t,s) \leq k_1 \text{ sur } J \times J$$
$$H \in C[J \times \Omega \times \Omega, E]$$
$$J \in [t_0, t_0 + \alpha], \ t_0 \geq 0$$
$$\Omega = B(0,N) = \{\mid x \mid < N, x \in E\}$$
$$x_0 \in \Omega$$

le problème (2.9.1) est équivalent à l'équation intégrale suivant

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} H(s, x(s), (Tx)(s))ds \tag{2.9.3}$$

on obtient un théorème d'existance en utilisant le théorème de point fixe de Drbo, et un théorème d'existance et d'unicité de la méthode classique dapproximation successive commencons pour prouver le resultat d'existance suivant

Théorème 2.9.1 *Supposons que*
(A1) $k(t,s) \in C[J \times J, \mathbb{R}]$ *et* $\mid k(t,s) \mid \leq k_1$ $(k_1 a \geq 1)$ *pour* $(t,s) \in J \times J$.
(A2) $H(t,x,y) \in C(J \times \Omega \times \Omega_1, E)$, $\Omega_1 = B(0, k_1 aN) \subset E$.
(A3) $\alpha(H(I \times B_1 \times B_2) \leq \lambda, \max[\alpha(B_1), \alpha(B_2)]$ *pour chaque sous ensemble borné* $B_1 \subset \Omega$, $B_2 \subset \Omega_1$ *et chaque intervalle* $I \subset J$, *où* $\lambda > 0$ *et* $\alpha(.)$ *est le mesure de kuratowski de la non-compacité.*
Alors il existe $\gamma > 0$ *tel que (2.9.1) a une solution* $x(t)$ *pour* $t \in J = [t_0, t_0 + \gamma]$.

Preuve. voir[03] ■

Théorème 2.9.2 *Supposons que*
(A1)∗ $k(t,s) \in C[J \times J, \mathbb{R}]$, *et* $\mid k(t,s) \mid \leq k$ *pour* $(t,s) \in J \times J$.
(A2)∗ $H(t,x,y) \in C[J \times \Omega \times \Omega, E]$, *et* $\mid H(t,x,y) \mid \leq M_1$ *pour* $(t,x,y) \in .J \times \Omega \times \Omega$.
(A4) $g \in C[J \times [0,2N] \times [0,2N_1], \mathbb{R}_+]$, $N_1 = kaN$, $g(t,u,v) \leq M_0$ *sur* $J \times [0,2N] \times [0,2N_1]$, $g(t,0,0) \equiv 0$, $g(t,u,v)$ *est non décroissante, en* v *pour* u *et* t *fixes et non décroissante en* u *pour* t *et* v *fixes, et* $u \equiv 0$ *et une solution unique pour l'équation intégro-différentielle scalaire*

$$u' = g(t,u,Su), \ u(t_0) = 0 \ sur \ [t_0, t_0 + \alpha], \tag{2.9.4}$$

où

$$(Su)(t) = \int_{t_0}^{t} \mid k(t,s) \mid u(s)ds$$

(A5)

$$\mid H(t,x_1,y_1) - H(t,x_2,y_2) \mid \leq g(t, \mid x_1 - x_2 \mid, \mid y_1 - y_2 \mid)$$

sur $J \times \Omega \times \Omega$. *Alors il existe* $\gamma > 0$ *tel que le problème* (2.9.1) *a une unique solution pour* $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$.

Preuve. voir[03] ■

Corollaire 2.9.1 *On tient (A1)* et (A2)* et on suppose en autre que*
(A6)

$$\mid H(t,x_1,y_1) - H(t,x_2,y_2) \mid \leq L(\mid x_1 - x_2 \mid, \mid y_1 - y_2 \mid)$$

pour tout (t,x_1,y_1), $(t,x_2,y_2) \in J \times \Omega \times \Omega$ *où* L *est un constant lipschitzienne, alors il existe* $\gamma > 0$ *tel que le problème* (2.9.1) *a une unique solution dans* J_0.

Conclusion

En géneral la solution d'une E.I.D n'existe pas,car aucune théoire dite que la perturbation de deux opérateurs (équation à opérateur)

$$AQ - BQ = f$$

tel que:

A :opérateur différéntiel

B :opérateur intégral

Admet une solution

Donc,notre mémoire s'interesse sur un type non-linéaire de ces équation et en appliquant la théorie du point fixe.

Bibliographie

[1] S,Beusouf," résolutions numérique des éqautions intégro-différentielles deFredholm" mémoire magister université de M'sila (2009-2010).

[2] J,Biazar,M,Eshanii, Differential transform method for volterra integral equations of the second kind andcomparaaison with homotepy, penturbation method and Intg, Phys,sci.(2011)1207-1212

[3] V,Lakshamikanthan and M,Rana Mohana Rao, theory of intégro différential equations.Gordon Breach science publishers S.A.1995.

[4] M,Moussai, résolutions numérique des éqautions intégro-différentielles, université de M'sila.fev 2018.

[5] M,Nadir, Généralites sur les éqautions différentielles ordinaires, université de M'sila 2017.

[6] N,Piskounov, calcul différentiel et intégral Edition mir moscou 1970.

[7] M,H,Reihani,Z, Abadi, Rationlized Hear function method for solving Fredholm and volttera integral equations ,J,App.Math 200 (2007)12.20.

[8] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Springer 2011.

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحلول بالنسبة للمعادلات التفاضلية التكاملية والخاصة منها المعادلات الغير خطية التي تعتمد أساسا على نظريات النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التكاملية التفاضلية، المعادلات غير الخطية، نظريات النقطة الثابتة.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions des équations intégro-différentielles particulièrement des équations non linéaires qui se repose sur la théorie du point fixe.

Mots clés: équation integro-différentielle, équation non linéaire, théories du point fixe.

Abstract:

In this memory, we have studied the existence and the uniqueness of equations integro-differential especially these no-linear equation which rest particularly on of the fixed point theory.

Keywords: equation integro-differetial, no-linear equation, the fixed point theories.