

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة



ميدان: علوم المادة

فرع: الفيزياء

تخصص: فيزياء نظرية - فيزياء الجسيمات
عالية الطاقة

كلية: العلوم

قسم: الفيزياء

رقم:

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمي

إعداد الطالب(ة): بن سعدي يوسف

تحت عنوان

الغازات الكوانتية فائقة البرودة: تكثف بوز-اينشتاين

Gaz Quantiques Ultra-Froid : Condensat de Bose-Einstein

تمت المناقشة يوم 04 / 06 / 2017 أمام اللجنة المكونة من:

رئيسا	جامعة محمد بوضياف- المسيلة	د. ا. رضوان
مشرفا و مقررا	جامعة محمد بوضياف- المسيلة	د. م. صهيب
مناقشا	جامعة محمد بوضياف- المسيلة	د. س. قالي

السنة الجامعية: 2017/2016

كلمة شكر وتقدير

حمدا وثناءنا أولا وأخيرا لله عز وجل على كرم فضله وجزيل نعمه على أن وفقنا

في انجاز هذا العمل

وانه لواجب علينا الاعتراف بالجميل نبادر ونتقدم بخالص شكرنا وامتناننا لأستاذي

المشرف : مجدل صهيب الذي لم يبخل علينا بنصائحه وتوجيهاته القيمة

كما نتوجه بالشكر والتقدير للأساتذة المناقشين : أ.رضوان رئيسا – س.قالي مناقشا

لقبولهم مناقشة مذكرتي

كما نتقدم بالشكر إلى جميع ساهم معنا في انجاز هذا العمل ولو بكلمة طيبة

والى كل أساتذة قسم الفيزياء

إهداء

بعد إتمام هذا العمل المتواضع لا يسعنا إلا أن نحمد الله عز وجل فاتح الأبواب
وميسر الصعاب والهادي إلى الصواب نحمده ونشكره .

اهدي هذا العمل إلى من كانوا سببا في وجودنا . أرواحهم لا تفارق أرواحنا
ودعائهم سر نجاحنا . الذي يعجز اللسان في وصف فضلهم وجميلهم .

إلى الذين اعتزوا بالانتساب إليهم

** الــــوالدين بارك الله فيهما وأطال في عمرهما **

إلى أخواتي العزيزات وأخي وإلى كل العائلة

إلى كل أصدقائي

إلى كل أساتذة وطلبة الفيزياء

** على كل هؤلاء اهدي ثمرة هذا الجهد **

الفهرس :

- 1..... المقدمة
- 5..... الفصل الأول : تكثيف بوز-اينشتاين
- 6..... 1 - مقدمة
- 6..... 2 - الدراسة الإحصائية لغاز من البوزونات
- 8..... 3- درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين
- 8..... 3-1 عدد الجسيمات في مستويات الطاقة
- 10..... 3-2 درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين
- 11..... 3-3 رتبة مقدار درجة حرارة التكتف
- 12..... 4 - تفسير السلوك الكوانتي لتكاثف بوز-اينشتاين
- 15..... الفصل الثاني : الأسس النظرية والعملية لتبريد وحصر الذرات
- 16..... 1 - مقدمة
- 17..... 2 - الضغط الاشعاعي
- 19..... 3- التبريد باليزر
- 19..... 3-1 الليزر
- 19..... 3-2 المبدأ النظري لتبريد دوبلر
- 21..... 3-3 حدود درجة حرارة تبريد دوبلر
- 22..... 3-4 الأسر الضوئي-المغناطيسي
- 22..... 4- الأسر المغناطيسي
- 25..... 5- الفخ المغناطيسي التوافقي
- 26..... 6- الحصر الضوئي ثنائي القطب

28.....7- التبريد عن طريق التبخير

الفصل الثالث : دراسة درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين لغاز محصور في كمون

30.....توافقي

31.....1- مقدمة

31.....2- كثافة الحالات لهزاز توافقي

33.....3- درجة حرارة التكثف

35.....4- عدد الجسيمات في مستويات الطاقة المثارة والأساسية

36.....الخاتمة

38.....قائمة المراجع

مقدمة عامة

Introduction Générale

مقدمة

منذ القدم كانت حالات المادة ثلاثة وهي الحالة الصلبة والحالة السائلة والحالة الغازية، فقد ظل الإنسان قرونا طوال لا يعرف سواها، وذلك بسبب قصور البحث العلمي أثناء تلك الفترات وقلة الإمكانيات وعدم كفاية وكفاءة الأجهزة المستخدمة في البحث لكن مع تطور العلوم وتوفر الوسائل تم اكتشاف حالات أخرى للمادة وهي البلازما (plasma) والسيولة الفائقة (Superfluidité) و كثافة بوز-اينشتاين (Condensation de Bose-Einstein) وهذه الحالة الأخيرة هي التي سنهتم بدراستها في هذه المقدمة .

خلال العشرينين الأخيرتين تزايد البحث حول الغازات الكوانتية المنحلة (أي التي تبلغ درجة حرارتها قيمة حرجة تسمح بظهور التأثيرات الكوانتية عليها). وبفضل التطور الكبير في تقنيات التبريد بالليزر والأسر piégeage بصفة عامة، تم التمكن من التحقيق التجريبي لظاهرة تكثف بوز-اينشتاين للذرات فائقة البرودة Condensation de Bose-Einstein سنة 1995 [1-3]. وهذا حقق حلما راود العلماء طيلة سبعين سنة، أي منذ تأسيس الإطار النظري لهذه الظاهرة التي يملها الإحصاء الكوانتي لبوز-اينشتاين statistique quantique de Bose-Einstein وذلك من طرف اينشتاين وبوز سنة 1925. في الحقيقة كانت البداية مع ورقة بحثية حول دراسة إحصائية للفوتونات قصد إعادة معالجة مسألة الجسم الأسود قام بإرسالها بوز N. Bose إلى اينشتاين ليتحقق منها ويقوم بنشرها وقد فعل ذلك إلا أن اينشتاين لم يكتف بمساعدة بوز في نشر أبحاثه فقط بل أضاف إليها شيئا آخر، فلقد رأى أن فرضيات بوز تسري أيضا على الذرات، ولكن باشرط الحرارة المنخفضة، كان هذا في عام 1924 . ورغم تسليط الضوء على هذه الظاهرة منذ هذه السنة إلا أنها بقية مجرد فرضية ولم يتم التحقق منها تجريبيا وذلك بسبب عدم توفر الوسائل والتقنيات الضرورية من اجل الوصول إلى درجة الحرارة المنخفضة اللازمة للحصول على التكتف. والمقصود بهذا التكتف هو ظهور حالة كوانتية عيانية Macroscopique، أين تكون جميع ذرات الغاز في نفس الحالة الكوانتية والتي هي الحالة الأساسية ذات الجسم الواحد état à une particule [4]. وهنا لا بد أن نشير

إلى أن هذا التكتف إنما يحدث في فضاء الاندفاعات وليس في الفضاء الحقيقي إذ هو يختلف عن التكتف الحقيقي لغاز ليتحول إلى سائل.

كانت البداية مع ذرات بخار الروبيديوم Rubidium، وذلك بتبريد حوالي ألفي ذرة روبيديوم إلى درجة حرارة تقل عن مئة جزء من مليار من الدرجة فوق الصفر المطلق مما أدى إلى فقد الهوية الفردية للذرات وأصبحت على شكل كائن كوانتي كبير، طبعاً بالنسبة لمقادير الأبعاد التي يعالجها الميكانيك الكهومي عادة، وذلك لمدة عشر ثواني . وبعد أشهر قليلة من هذه التجربة تمكن العلماء من الحصول على نفس هذه النتيجة مع ذرات الصوديوم Sodium والليثيوم Lithium فشكلت بذلك أول ثلاثة تكتفات تم الحصول عليها عملياً من طرف كارل فيمان Carl Wieman وإريك كورنال Eric cornelle وولفغانغ كيتارلي Wolfgang Kitterle والذين تحصلوا مقابل هذا العمل المذهل حول الحالة الجديدة للمادة على جائزة نوبل سنة 2001. بعد سنة 1995 تم الحصول على تكتفات لأبخرة (غازات) أخرى هي الهيدروجين Hydrogène سنة 1998، البوتاسيوم Potassium والهيليوم Hélium سنة 2001 ثم السيزيوم Césium والايتربيوم Ytterbium سنة 2003. من أجل التوسع في الموضوع أكثر نقتح المراجع الجيدة المرقمة هنا [5-6].

إن تكتف بوز-اينشتاين هو كينونة كمومية وهو أكثر أشكال الغاز برودة في الكون وعلى الرغم من أن الذرات لا تزال موجودة في داخله، وهي التي تشكله، إلا أنها فقدت شخصيتها الفردية. من أجل توليد تكتف بوز - اينشتاين (أي الوصول إلى درجة حرارة منخفضة جداً لا تزيد على جزء من مليار جزء من الدرجة فوق الصفر المطلق) يجب عزل الذرات وتعليقها بواسطة حقول مغناطيسية في فضاء حر شديد التفرغ ثم بعد ذلك تبريدها بمبردات ليزيرية و بتقنية أخرى تسمى التبريد التبخيري وهذا ما سنتطرق إليه في هذه المذكرة .

إن تنظيم هذه المذكرة هو كما يلي:

في الفصل الأول سنقدم الدراسة النظرية لظاهرة تكتف بوز-اينشتاين مع تحديد الكميات الفيزيائية التي لها أهمية خاصة في حصول مثل هذه الظاهرة، ونقصد بها كثافة الغاز ودرجة حرارته، وهذا من أجل غازات تعتبر مثالية محصورة في حجم معين.

في الفصل الثاني سنعرض الأسس النظرية والعملية لسلسلة من التقنيات التي ساهمت في التحقيق التجريبي لهذه الظاهرة مرفقين كل دراسة نظرية بالوسائل العملية الموافقة لها، كما سنولي أهمية خاصة لأسر (احتواء) Confinement الذرات بواسطة الحقول المغناطيسية والحقول الليزرية وخاصة الاحتواءات التي تنشأ عن كمونات شبيهة بكمونات الهزاز التوافقي "Potentiel d'oscillateur harmonique" إذ أن أغلب التجارب التي أجريت على التكتّفات تمت في مثل هذه الكمونات، كما أن وجود الغازات محصورة بهذه القوة يغير من قيمة درجة حرارة التكتّف التي نحسبها في الفصل الأول، ذلك أن الغاز في حالة وجوده في حجم معين يكون غير خاضع لأي كمن على عكس الحالة هنا أين يكون خاضع لكمون توافقي.

في الفصل الثالث سنقوم بدراسة التكتّف في حالة كمن هزاز توافقي في ثلاثة أبعاد كما سنقدم تعميماً يشمل الدراسة التي أجريت في الفصل الأول، سندرس في هذه الحالة إذن كثافة الحالات ودرجة الحرارة الحرجة كما سنقوم بحساب عدد الذرات الموجودة في الحالات المثارة للغاز وهي الذرات الموجودة خارج طور التكتّف وسنحسب في المقابل الكسر الذي يمثل عدد الذرات الموجودة في الحالة الأساسية وهي الموجودة في طور التكتّف، كما سنقدم صيغاً عامة لعبارة درجة الحرارة الحرجة.

في النهاية نجمع كل الدراسة التي أجريت هنا في الخلاصة التي تنهي هذا العمل.

الفصل الأول

تكثيف بوز-اينشتاين

Condensation de Bose-Einstein

1- مقدمة:

سنقوم في هذا الفصل بدراسة خصائص غاز من البوزونات (سبين صحيح أو معدوم) المعتبرة كجسيمات مستقلة (Indépendants) -بدون تفاعل- وذلك عند درجات الحرارة المنخفضة جدا، أي القريبة من الصفر المطلق ، أين يكون للظواهر الكمومية تأثير على سلوك مثل هذه الغازات. سنتعرض اذن للظاهرة المثيرة المتوقعة من طرف اينشتاين منذ 1925 والمسماة بظاهرة تكثف بوز-اينشتاين (Condensation de Bose-Einstein) ، كما سنعرض أيضا لدرجة الحرارة والشروط الفيزيائية الأخرى اللازمة لتحقيق مثل هذا التكثف. هذه الظاهرة كما يدل اسمها عبارة عن تواجد (تجمع) العدد الأعظمي من جسيمات الغاز في حالة كمومية واحدة وهي الحالة الأساسية للغاز (Etat fondamental) مما سيعكس سلوكا كموميا ليس فقط على الجانب المجهرى (Microscopique) للجملة بل على الجانب العياني منها أيضا (Macroscopique). إن هذه الظاهرة، التي تم تحقيقها عمليا منذ سنة 1995 والتي لا تزال التجارب الحديثة حولها مستمرة ومتجددة وتتطور كل مرة، تُعد من بين الظواهر الفيزيائية التي قدمت تأكيدا آخر قويا للنظرية الإحصائية الكمومية (Statistique Quantique) بطريقة مذهلة، كما أتاح استخدامها في تجارب عديدة تسهيل دراسة ظواهر فيزيائية أخرى.

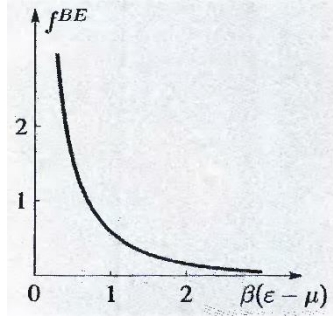
2- الدراسة الإحصائية لغاز من البوزونات: Gaz de Bosons

يتم وصف السلوك الإجمالي لهذه الجسيمات (البوزونات) في الفيزياء الاحصائية من خلال ما يسمى تابع توزيع بوز-اينشتاين (Fonction de Distribution Statistique de Bose-Einstein)، فمن أجل نظام يتكون من عدد $N \gg 1$ من البوزونات المستقلة في وعاء ذو حجم V ودرجة حرارة مطلقة T نجد أن التوزيع الأكثر احتمالا هو:

$$(1.1) \quad f_{BE}(\varepsilon_i) = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}\right) - 1} = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1}$$

حيث يمثل N_i عدد البوزونات الموجود في الحالة الكمومية الميكروية التي لها طاقة ε_i ويمثل g_i درجة انحلال هذا المستوى ε_i (dégénérescence)، فيكون اذن $f_{BE}(\varepsilon_i)$ معبرا عن متوسط عدد الجسيمات الموجودة في حالة ميكروسكوبية واحدة (Micro-état). في العبارة أعلاه k_B هو ثابت بولتزمان (Boltzmann) حيث نضع غالبا $(\beta = 1/k_B T)$ و μ هو الكمون الكيميائي (potentiel chimique).

يمكن تمثيل تابع التوزيع المعطى بالمعادلة (1.1) بالشكل (1) أدناه.



الشكل (1)

نستطيع أن نلاحظ من خلال هذا الشكل أن: $f_{BE} \rightarrow \infty$ عندما $\epsilon \rightarrow \mu$ ، بينما يؤول الى النهاية الكلاسيكية من أجل $\epsilon > \mu$ والتي هي توزيع ماكسويل-بولتزمان (Limite classique de Boltzmann) .

عند درجات الحرارة القريبة من الصفر المطلق فإن جميع الجسيمات تشغل السوية الأساسية ذات الطاقة $\epsilon_0 = 0$ ، وهذا ما يسمى التكثف الكلي فيكون إذن:

$$(2.1) \quad T \rightarrow 0 \Rightarrow N_0 \approx N$$

حيث N هو العدد الكلي للجسيمات، وبالتالي فإن الحالات المثارة (états excités) ستكون تقريبا فارغة. في الحالة العامة ومن شرط ثبوت العدد الكلي للجسيمات داخل النظام المغلق نجد أن:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{\infty} N_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \\ &= \frac{g_0}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} + \frac{g_1}{e^{\beta(\epsilon_1 - \mu)} - 1} + \dots \\ &= N_0 + N_1 + \dots \end{aligned}$$

وعدد الجسيمات N_0 بالمستوى الأرضي (Niveau fondamental) ، والذي طاقته هي $\epsilon_0 = 0$ ، هو :

$$(4.1) \quad N_0 = f(\epsilon_0 = 0) = \frac{1}{e^{\eta} - 1}$$

أين أخذنا $(\eta = -\mu\beta = -\mu/k_B T)$. وبما أن عدد الجسيمات N_0 يجب أن تكون قيمته موجبة فيكون بالتالي من خلال العلاقة (4.1) : $\eta > 0 \Rightarrow \mu < 0$. لتعيين العلاقة بين الكمون الكميائي وعدد الجسيمات الكلي N و درجة الحرارة المطلقة T نعلم على العلاقة (2.1) و (4.1) فنجد :

$$(5.1) \quad N = \frac{1}{e^{\eta} - 1} \Rightarrow \eta = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \approx \frac{1}{N} \Rightarrow \mu = -\frac{k_B T}{N}$$

بما أن N عدد كبير جدا فإن قيمة الكمون الكيميائي ستكون ضعيفة جدا ومهملة كما أنها ذات قيمة سالبة.

ملاحظة جد مهمة: نشير مرة أخرى إلى أن تجمع البوزونات المذكور في تكثف بوز-اينشتاين هو تجمعها في الحالة الكوانتية الأساسية، وبعبارة أخرى تجمعها في فضاء الأطوار، وليس تجمعها في الفضاء الفيزيائي الحقيقي (الذي هو تجمع في الموضع المكاني)، فهذه الظاهرة مختلفة تماما عن ظاهرة تكثف الغاز ليتحول على سائل.

3- درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين: Température de Condensation

1-3 عدد الجسيمات في مستويات الطاقة:

سنقوم في هذه الفقرة بحساب عدد الجسيمات المتواجدة في مستويات الطاقة المثارة والاساسية وسنعتبر من أجل ذلك بدايةً أن جسيمات الغاز تشغل في درجات الحرارة المرتفعة المستويات المثارة فقط وأن السوية الأساسية فارغة تماما ثم بدايةً من درجة الحرارة التي يبدأ عندها شغل المستوى الأساسي نحدد درجة حرارة التكثف كما سنرى في الفقرة 2-3.

إن عدد الجسيمات N_e التي تشغل كل المستويات المثارة في درجات الحرارة المرتفعة يمكن أن يُحسب إذا علمنا أن كثافة الحالات (Densité d'états) الخاصة بغاز من البوزونات غير متفاعلة وموجودة في حجم V تعطى بالعلاقة [7]:

$$(6.1) \quad \rho(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon}$$

فيكون إذن:

$$(7.1) \quad N_e = \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) f_{BE}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon - \mu)] - 1}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon - \mu)] - 1}$$

حيث نلاحظ أن وجود $\sqrt{\varepsilon}$ في هذه العلاقة سيلغني من الحساب أي تدخل لعدد الجسيمات N_0 الموجودة في المستوى الأساسي.

يمكن تبسيط التكامل في العلاقة السابقة (7.1) إذا وضعنا $x = \beta\varepsilon$ وأدخلنا الطول الموجي الحراري λ_{th} المسمى أيضا طول الموجة الحراري لديبروغلي المرفقة بالجسيم (Longueur d'onde de De Broglie):

$$(8.1) \quad \lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

تصبح العبارة (7.1) كالآتي:

$$(9.1) \quad N_e = \frac{2V}{\sqrt{\pi}\lambda_{th}^3} J_{1/2}(\eta)$$

حيث $J_{1/2}(\eta)$ هو تكامل بوز (Intégrale de Bose) المعروف كما يلي [8]:

$$(10.1) \quad J_\alpha(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{\exp(x-\eta)-1}$$

إن العلاقة (9.1) تعطي عدد الجسيمات التي تشغل المستويات المثارة عند درجات الحرارة المرتفعة في حين أن المستوى الأساسي فارغ من الجسيمات أو مشغول بعدد ضئيل جدا منها، ونريد الآن أن نجد كيف تتوزع هذه الجسيمات عند درجات الحرارة المنخفضة، أي القريبة من الصفر المطلق، مما سيسمح لنا بتعريف درجة حرارة التكثف.

عند درجة الصفر المطلق كل الجسيمات تشغل السوية الأساسية كما هو معطى بالعلاقة (2.1)، فإذا ازدادت درجة الحرارة، مع بقاءها قريبة من الصفر المطلق، فإن الجسيمات تبدأ بشغل السويات المثارة ولكن غالب الجسيمات تبقى موجودة في السوية الأساسية. رأينا أيضا من خلال العلاقة (5.1) أن قيمة الكمون الكيميائي μ للغاز في هذه الحالة تكون سالبة وصغيرة جدا، أي أن $\eta = -\mu\beta = 0$ ، ويكون عدد الجسيمات في المستويات المثارة حسب العلاقة (9.1) هو:

$$(11.1) \quad N_e = \frac{2V}{\sqrt{\pi}\lambda_{th}^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{\exp(x)-1}$$

باستخدام نتيجة التكامل التالية [8]:

$$(12.1) \quad \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{\exp(x)-1} = 1.306\sqrt{\pi}$$

وبالتالي:

$$(13.1) \quad N_e = \frac{2.612V}{\lambda_{th}^3} = 2.612V \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2}$$

ويكون عدد الجسيمات في السوية الأساسية هو:

$$(14.1) \quad N_0 = N - N_e$$

2-3 درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين:

إن درجة حرارة التكثف هي الدرجة التي يكون فيها عدد الجسيمات التي تشغل المستويات المثارة مساويا للعدد الكلي تماما $N_e = N$ ، وتسمى أيضا درجة حرارة اينشتاين أو درجة الحرارة الحرجة T_c (Température critique)، فإذا ما انخفضت درجة الحرارة تحت هذه القيمة تبدأ البوزونات بالتكثف في المستوى الأساسي. فيكون إذن انطلاقا من العلاقة (13.1):

$$(15.1) \quad N_e(T_c) = 2.612V \left(\frac{2\pi m k_B T_c}{h^2} \right)^{3/2} = N$$

يمكن إذن الحصول على T_c من خلال هذه العلاقة الأخيرة:

$$(16.1) \quad T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3}$$

وفقا لهذا التحديد لدرجة حرارة التكثف فإنه يمكن أن نكتب ما يلي:

- من أجل $T > T_c$ فإن N_0 عدد صغير جدا أو معدوم
- من أجل $T < T_c$ فإن N_0 عدد كبير جدا (تكثف بوز-اينشتاين)

كما يمكن ربط عدد الجسيمات في المستويات المثارة بالعدد الكلي للجسيمات كما في العلاقة التالية:

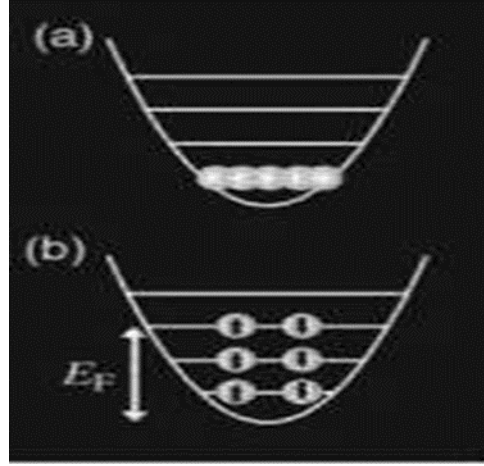
$$(17.1) \quad N_e = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

بشرط أن يكون $T \leq T_c$.

إنه التكاثف في فضاء الاندفاعات¹ (Espaces des impulsions) أو فضاء الأطوار، أي هو تكثف البوزونات في نفس الحالة الكوانتية.

إن الشكل 2 يبين كيفية شغل البوزونات للمستوى الأساسي في كيون هزاز توافقي مقارنة بالفرميونات التي لا يمكنها أن تشغل نفس السوية الطاقية.

¹ Espace des moments



الشكل -2-

A توضح عدم خضوع البوزونات لمبدأ باولي (وجود عدة بوزونات في نفس الحالة الكوانتية)
 B توضح شغل الفرميونات لمستويات الطاقة والتي تخضع أثناء توزيعها لمبدأ باولي عكس البوزونات.

3-3 رتبة مقدار درجة حرارة التكثف: *Ordre de grandeur de la température de condensation*

نود أن نشير هنا إلى رتبة درجات الحرارة الموصلة إلى ظاهرة تكثف بوز-اينشتاين لنعرف مدى صعوبة التوصل عمليا إلى تحقيقها وهو ما استغرق مدة سبعين سنة (70) من أجل ذلك، وهو في الحقيقة فارق زمني كبير بين توقعها نظريا سنة 1925 وتحقيقها تجريبيا سنة 1995. في الحقيقة هذه المدة زمنية كانت لازمة من أجل انتظار التطور التكنولوجي وخاصة اختراع الليزر وكذا تطور النظرية الكوانتية الخاصة به (pompape optique) واكتشاف تقنيات تبريد الذرات بواسطة وكذا تقنيات أسر الذرات المعتدلة كهربائيا بواسطة الحقول المغناطيسية وكذا الحقول الضوئية كما سنرى في الفصل التالي.

إنّ تعديلا بسيطا على المعادلة (16.1) يمكن من كتابتها على الشكل :

$$(18.1) \quad T_c = 114.5 \frac{\rho^{2/3}}{M^{5/3}}$$

حيث ρ هي الكتلة الحجمية مقدرة بـ g/cm^3 و M هي الكتلة المولية مقدرة بـ g/mol .

إن تطبيق العلاقة (18.1) على الهيليوم 4He يعطي درجة حرارة $T_c = 3.15k$ وهذا توقع نظري جيد إذ أننا اعتبرنا سائل الهيليوم المبرد كغاز مثالي فلم نأخذ التفاعلات بين الجسيمات في حساباتنا السابقة. إن درجة الحرارة الملاحظة عمليا والتي يتحول فيها غاز الهيليوم من طور السائل العادي (كلاسيكي) إلى طور السائل الفائق السيولة (Phase

² - حيث لدينا $M = 4g.mol^{-1}$ و $\rho = 0.146g.cm^{-3}$

(superfluide) هي $T = 2.17k$ وقد فُسرَت الخصائص الغريبة له فيما بعد من طرف العالم F. London وذلك وفقا لمفهوم تكثف بوز-اينشتاين نظرا لأن ذرات الهيليوم عبارة عن بوزونات.

في الحقيقة إن درجات الحرارة التي يتحقق عندها تكثف بوز-اينشتاين عمليا لأبخرة بعض العناصر الكيميائية (العناصر التي تكون ذراتها بوزونات مثل الصوديوم، الريبيديوم، الليثيوم، ...) تصل إلى درجات صغيرة جدا قريبة من الصفر المطلق فهي من رتبة النانو كلفن أو أقل من ذلك $T \sim nk = 10^{-9}k$ كما سنرى.

4- تفسير السلوك الكوانتي لتكثف بوز-اينشتاين

Interprétation du comportement quantique du condensat de Bose-Einstein

في الحقيقة، يمكننا الحصول على درجة حرارة التكثف باعتبارها بسيطة فقط كما سنقوم بها هنا، ولكن الغرض الأصلي من هذه الفقرة هو تفسير لماذا تسلك تكثفات بوز-اينشتاين سلوكا كوانتيا عيانيا حيث يتحصل لدينا جسيم كوانتي ذوا أبعاد عيانية Macroscopique تصل إلى رتبة السنتمتر، وهذا أمر يفتح مجالات لتطبيقات متعددة ويسمح بالتحقق من ظواهر كوانتية أخرى على مستوى قابل للمراقبة والتحكم بسهولة وفق ما تتيحه التقنيات الحديثة في الأسر بواسطة حزم الليزر والحقول المغناطيسية والتبريد والتصوير Imagerie.

إن نقطة الفهم الأساسية لهذه التظاهرات الكوانتية للذرات الفائقة البرودة على المستوى العياني يرجع في حقيقة الأمر إلى الطابع الموجي للجسيمات الكوانتية والذي نعبر عنه بالثنائية موجة-جسيم (Dualité onde-corpuscule). نعلم أن كل جسيم ترافقه موجة وأن هذه الموجة مرتبطة بسرعة الجسيم وكتلته وذلك وفقا لعلاقة ديبروغلي³ فهي متناسبة عكسا مع كمية الحركة، كما نعلم أيضا أن سرعة الجسيمات مرتبطة بدرجة حرارتها، لذلك فإنه من أجل درجات الحرارة العادية (température ambiante) تكون سرعة التهييج الحراري للجسيمات كبيرة مما ينج عنها أطوال موجية صغيرة جدا خاصة بالمقارنة مع الأبعاد بين الجسيمات، ويكون سلوك الغاز في هذه الحالة سلوكا كلاسيكيا بحتا ولا أثر ملحوظ لأي ظاهرة كوانتية. ولكن اذا قمنا بتبريد الغاز إلى درجات حرارة صغيرة جدا فإن سرعات الجسيمات ستقوم بالانخفاض إلى قيم دنيا وتنقص معها تفاعلات التصادم المتبادلة بينها، وتأخذ أطوال الموجات المرافقة قوما معتبرة جدا بالنسبة للأبعاد بين الجسيمات وسينتج عنه تداخلات وتراكبات في الدوال الموجية وتبدأ التأثيرات الكوانتية في الظهور على هذا الغاز ويصبح سلوكه كوانتيا صرفا، وكلما قمنا بخفض درجة الحرارة كلما ازدادت الأطوال الموجية وتراكباتها على اعتبار أن الجسيمات ستشغل المستوى الطاقوي الأساسي وستكون لها بالتالي نفس دالة الموجة مما يخلق تداخلات بناء لهذه الدوال لتتصل في النهاية على تكثف بوز-اينشتاين، كما هو موضح بالصورة التبسيطية في الشكل 3 في الصفحة 14.

³ -علاقة ديبروغلي أو دي بروي De Broglie $\lambda = h/mv$

من أجل توضيح أكثر لهذا التفسير الكيفي أعلاه، سنضيف إليه تفسيراً كميًا وذلك بتحديد مقدار فيزيائي له أهميته البالغة في تحديد النقطة الحرجة لتكوّن تكثف بوز-اينشتاين.

إذا كان N هو عدد جسيمات الغاز و V حجمه، فإن عدد الجسيمات الموجودة في وحدة الحجم والذي نرمز له ب n هو:

$$(19.1) \quad n = \frac{N}{V}$$

إضافة إلى هذا ندخل الكمية المسماة التركيز الكوانتي (Concentration quantique) الذي نرمز له ب n_0 والمعرف ب [8]:

$$(20.1) \quad n_0 = \frac{1}{\lambda_{th}^3}$$

الذي يوافق نسبة ذرة واحدة في الحجم λ_{th}^3 ، حيث λ_{th} هو طول الموجة الحرارية المعرفة بالعلاقة (8.1). نسمي النسبة بين n و n_0 الكثافة في فضاء الأطوار D (Densité dans l'espace des phases) وهي كمية ذات أهمية كبيرة جداً وخاصة في الجانب التجريبي من حيث أنها تربط بين قيمة درجة الحرارة وكثافة جسيمات الغاز، فهي في الحقيقة تحكم سلوك الغاز. وفق هذا التعريف فإن:

$$(21.1) \quad D = \frac{n}{n_0} = n \lambda_{th}^3$$

وفقاً لهذه العلاقة فإن D هو عدد الجسيمات الموجودة في الحجم $v = \lambda_{th}^3$. عندما يكون $D \leq 1$ ، أي $n \leq n_0$ ، في هذه الحالة نقول أن الجملة تسلك سلوك نظام كلاسيكي، في هذا النظام يكون غاز الجسيمات عبارة عن غاز ذراته غير متفاعلة فيما بينها، والمقصود بذلك أن كثافته جد ضعيفة إلى الحد الذي يمكن معه إهمال التفاعلات. في مثل هذه الشروط المحيطة، أي ضغط ودرجة حرارة الوسط المحيط، يكون $D = 10^{-8}$ فتكون كل ذرة متموضعة في حجم محدد بالطول الموجي الحراري لدي بروي والمهمل أمام المسافة المتوسطة بين الذرات. لكن لما $D \geq 1$ ، أي $n \geq n_0$ ، فإن الجملة تبدأ في الدخول للنظام الكوانتي، بمعنى أنه عند خفض درجة الحرارة مع المحافظة على قيمة كبيرة للكثافة n فإننا نصل إلى ما يسمى عتبة الانحلال الكمي (Dégénérescence quantique). في الحقيقة، تبدأ الظواهر الكوانتية في التأثير في الخصائص العيانية لجملة تحتوي على N جسيم عندما تبدأ دوال الموجات للجسيمات في التراكب، فالطول الموجي الحراري لدي بروغلي $\lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ يصبح من رتبة مقدار المسافة المتوسطة الفاصلة بين الذرات، وذلك ما يوضحه أيضاً الشكل التبسيطي رقم 3.

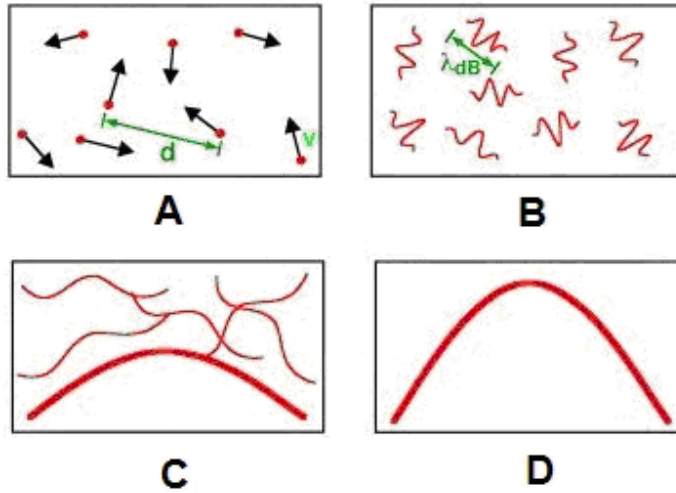
وفق هذا التحليل ونظراً للعلاقة (21.1) يمكن أن نتحصل بسهولة على درجة حرارة التكثف الحدية:

$$(22.1) \quad T_0 = \frac{h^2}{2\pi m k_B} n^{2/3}$$

تحصلنا إذن باعتبارات بسيطة على علاقة تشبه (16.1) مع اختلاف طفيف وذلك أن العبارة الدقيقة لدرجة الحرارة الموافقة لتعريف بداية التكثف هي تلك المعطاة بالعلاقة (16.1). عند درجات الحرارة تحت هذه القيمة، يقال أن الغاز منحل، وهنا يجب التمييز بين حالتين مختلفتين، حالة الغاز المكون من البوزونات والغاز المكون من الفرميونات.

في حالة البوزونات يترافق المرور إلى الحالة الكمية المنحلة مع تراكم الذرات في الحالة الكوانتية الأساسية ويصبح النظام عندئذ فائق السيولة Superfluide، مشكلا بذلك تكاثف بوز اينشتاين.

اما بالنسبة للفرميونات فعلى العكس من ذلك، والسبب ان هذه الجسيمات تخضع في توزيعها لمبدأ الاستبعاد لبولي Pauli الذي ينص على استحالة وجود فرميونين يشغلان نفس الحالة الكوانتي، و تشغل الفرميونات في حالة الانحلال المستويات الطاقوية من الأساسي إلى الأعلى حتى تستنفذ عددها الكلي ويترافق الدخول في هذا النظام الكوانتي مع وجود ضغط دائم غير معدوم حتى في درجة الحرارة صفر مطلق وهو ما يسمى ضغط فارمي Pressure de Fermi، عكس الغاز المثالي الكلاسيكي الذي ينتج عنه ضغط معدوم عند درجة الحرارة صفر وذلك وفقا للعلاقة $p = nk_B T$.



الشكل 3-

- A الكرات الحمراء هي ذرات الغاز وهي موجودة في درجة حرارة الغرفة، فالطول الموجي صغير جدا وسلوكها كلاسيكي.
- B قللنا درجة الحرارة فزاد الطول الموجي للذرات.
- C قللنا درجة الحرارة أكثر وأكثر زاد الطول الموجي ونلاحظ أن موجات المادة تبدأ في التداخل والتراكب ويبدأ طور التكثف .
- D عندما أصبحت درجة الحرارة قريبا جدا من الصفر المطلق أصبحت جميع الأطوال الموجية متراكبة وذرات الغاز جميعها في نفس الحالة الكوانتية.

الفصل الثاني

الأسس النظرية والعملية لتبريد وحصر الذرات

**Idées Théoriques et pratiques pour le
Refroidissement et le Piégeage des Atomes**

1- مقدمة:

بالرغم من التأسيس النظري لظاهرة تكثف بوز- اينشتاين (Condensation de Bose-Einstein) في عام 1924م إلا انه لم يُلاحظ تجريبيا حتى بعد مرور 70 عاما، أي في سنة 1995م وذلك بعد تطوير طرق وتقنيات تبريد وحصر الذرات على يد كل من كارل فيمان Carl Wieman و إيريك كورنال Eric Cornell و لونغان كيتارلي Wolfgang Ketterle الذين تحصلوا على جائزة نوبل سنة 2001 مقابل هذا الإنجاز الكبير، ونحن نريد في هذا الفصل عرض الأسس النظرية والعملية التي أدت إلى تطوير وتطبيق هذه التقنيات.

في الحقيقة إن تقنيات تبريد الغاز القديمة (cryogénie) التي أُعتمدت في تبريد الغازات مثل الهيليوم لا تستطيع توفير الشروط اللازمة للحصول على ظاهرة تكثف بوز-اينشتاين، ولذلك بقيت المحاولات بدون نتيجة إلى غاية اختراع الليزر وتطوير طرق التبريد به اعتمادا على قوانين التفاعل بين الاشعاع والمادة، ولكن هذه التقنية، أي التبريد بالليزر (Refroidissement par Laser)، لم تسمح بالوصول الى الكثافة ودرجة الحرارة المناسبة، لذلك اقترح فيمان C. Wieman و كورنال E. Cornell تقنية التبريد بالتبخير (Refroidissement par Evaporation) للحصول على درجة حرارة اقل، ومن اجل تفادي زيادة درجة حرارة الذرات من خلال تصادمها بجدار الوعاء تم تصميم المصيدة المغناطيسية (piège magnétique) حيث يتم احتجاز الذرات في منطقة داخل اناء مغلق شديد التفرغ بواسطة تطبيق حقل مغناطيسي كما سنرى في الفقرات التالية.

إن هذا الفصل مُنظّم كما يلي، في **الفقرة الثانية** سنتعرض لمفهوم الضغط الاشعاعي وتفاعل المادة مع الاشعاع وكذا إمكانية إقاص سرعات التهييج الحراري للذرات من قيم تعادل مئات الأمتار في الثانية في درجة الحرارة المحيطة إلى غاية بضعة سنتيمترات في الثانية وأحيانا إلى غاية توقيفها وعكس اتجاه حركتها تماما، وفي **الفقرة الثالثة** سندرس أسس التبريد بالليزر عبر دراسة الامتصاص والبث الاشعاعي، وفي **الفقرة الرابعة والخامسة** نتعرض للأسر المغناطيسي للذرات المعتدلة كهربائيا ودراسة طاقة التفاعل و الحقل المغناطيسي الناشئ عن بعض التراكيب العملية بصفة خاصة والتي تؤدي إلى خلق طاقة تفاعل شبيهة بالطاقة الخاصة بالهزاز التوافقي (Oscillateur harmonique) وهو ما نهتم به في الفصل القادم عندما نعود لدراسة درجة حرارة التكتف، بين الذرة والحقل. وفي **الفقرة السادسة** سنتعرض لطريقة حصر مكافئة للطريقة المغناطيسية وهي المسماة الحصر الضوئي ثنائي القطب (piège optique dipolaire) والتي توفر أيضا طاقة تفاعل توافقية. في **الفقرة السابعة والأخيرة** سنتعرض للمرحلة النهائية لتبريد الغاز وهي طريقة التبخير ذات المبدأ البسيط.

2- الضغط الإشعاعي: Pression de radiation

إن فكرة تغيير سرعة ذرة أثناء تفاعلها مع إشعاع كهرومغناطيسي تعود إلى سنة 1917 أين أسس اينشتاين قوانين حفظ الطاقة والاندفاع عند امتصاص أو بث فوتون من طرف الذرة، فالفوتون يملك طاقة $E = \hbar\omega_L$ واندفاعا $p = \hbar k$ وهذا الاندفاع هو السبب الرئيس في التأثير الميكانيكي للإشعاع على الذرة وبالتالي تغيير سرعتها كما سنرى. فعند امتصاص الذرة لفوتون فإن طاقة هذا الأخير تنقل إلى الحالة المثارة واندفاعه يُحفظ مقابل تراجع الذرة بالمقدار الموافق لـ $\hbar k$ وهذا التغير في سرعة الذرة المسماة سرعة الارتداد (vitesse de recule) هو ما يثير الاهتمام في مثل هذه العملية، فهو يعطى بالعلاقة:

$$(1.2) \quad \Delta v = \frac{\hbar k}{m}$$

حيث m هي كتلة الذرة و k الشعاع الموجي للفوتون. إن هذا التغير في سرعة الذرة يُقدّر ببعض السنتمترات أو حتى المليمترات في الثانية.

صحيح أن عملية امتصاص واحدة لا ينتج عنها تغير ملحوظ في سرعة الذرة المقدره في درجات الحرارة العادية بمئات المرات في الثانية مما يجعل محاولة تبريد الذرة بواسطة حزمة ضوئية عادية غير مفيد عمليا، ويجب في هذه الحالة توفير مصدر إشعاع يتيح حدوث هذه العملية عددا كبيرا من المرات لنصل إلى تغير ملحوظ في سرعة الذرة، وهذا أحد الأسباب التي ساهمت في تأخر تحقيق ظاهرة التكتف. إن المصادر التي نحتاجها لتحقيق إيقاف الذرات، وبالتالي خفض درجات حرارتها، توفرت باختراع الليزر، فباستخدام حزمة شديدة من الليزر *faisceau intense*، والتي هي عبارة عن حزمة ضوئية مترابطة (*faisceau cohérent*) من الفوتونات التي لها نفس التردد ونفس الاتجاه، نستطيع إعادة عملية امتصاص الذرة وبها العشوائي للفوتونات عددا كبيرا جدا من المرات يؤدي في النهاية إلى تغيير اتجاهها وذلك ما حدث أولا [9] أو توقيفها تقريبا [10-11].

في كل عملية امتصاص واحدة هناك انخفاض للطاقة الكلية وللاندفاع الكلي، فإذا كانت طاقة فوتون الليزر مساوية للفرق بين طاقة مستوى الطاقة الأرضي وطاقة مستوى التهيح الأول $\Delta\epsilon = \hbar\omega_{ul}$ ، أو قريبة منه إذا أخذنا في الاعتبار مفعول دوبلر Doppler وهو ما يسمى بشرط التجاوب، فإنه يُمتص من طرف الذرة لتنتقل إلى الحالة المثارة والتي هي حالة غير مستقرة لها لتُعيد بث فوتون آخر تلقائيا وفي اتجاه عشوائي عائدة بذلك إلى حالتها الأساسية وفي وقت صغير جدا، من رتبة النانو ثانية ns . عملية الامتصاص والبث التلقائي هذه تترافق مع تغيرات في اندفاعات الفوتون والذرة، فعند الامتصاص يُجول الفوتون اندفاعه إلى الذرة في اتجاه انتشاره، أي انتشار حزمة الليزر، وتخضع بذلك الذرة إلى تراجع وتغير

سرعتها¹ في الاتجاه الموافق لاتجاه الحزمة المثيرة، كما تخضع لتراجع اخر عند عودتها إلى حالتها الأساسية وبثها لفوتون ولكن هذه المرة يكون اتجاه التراجع عشوائيا، هذه العملية الموصوفة أعلاه تسمى دورة الامتصاص والبث التلقائي (cycle d'absorption-émission spontanée).

إن الضوء الآتي من حزمة ليزر يتيح حدوث هذه العملية بمعدل عدة ملايين دورة للذرة الواحدة في الثانية، وفي هذه الحالة فإن عمليات التبادل في الاندفاع بين الذرات والفوتونات تكون معتبرة ولها مفعول ملحوظ في تغيير سرعة الذرة. في الحقيقة، إن كل امتصاص لفوتون واحد من طرف الذرة ينقص من سرعتها بنفس المقدار وفي نفس اتجاه حزمة الليزر، التي سنعتبرها معاكسة لاتجاه حركة الذرة، لأن كل الفوتونات تملك نفس الاتجاه ونفس التردد (الطاقة)، فتراجعات الذرة تُضاف إلى بعضها وبالتالي ترغمها على التوقف². وعلى العكس، فعملية البث التلقائي للفوتونات تنتج تراجعات في اتجاهات عشوائية والتي تُعطي تساهما متوسطا معدوما لا يغير من سرعة الذرة [12-13]. إن هذا التأثير للإشعاع هو ما يُسمى بالضغط الإشعاعي وهو أساس التجارب الخاصة بالتحكم في الذرات بواسطة الإشعاع (manipulation des atomes par de la lumière). وهذا هو أيضا أساس التبريد بالليزر الذي يحقق درجات حرارة تصل إلى رتبة المليكيلفن (millikelven) أين تنخفض سرعات التبريد الحراري للذرات إلى بعض المليكيلفنات في الثانية فقط.

من أجل إعطاء فكرة على رُتب المقدار للمقادير التي تدخل في عمليات تبريد الذرات بواسطة إشعاع الليزر نُدرج هذا النموذج التقريبي أين نفترض أن سرعة الذرة في البخار الأصلي قبل التبريد هي $v \sim 10^3 m/s$ وأن طول موجة إشعاع الليزر هو $\lambda \sim \mu m = 10^{-6} m$ وكتلة الذرة من الرتبة $m \sim 10^{-27} kg$ ، ثابت بلانك الذي يدخل في عبارة التغير في مقدار السرعة (1.2) هو من الرتبة $h \sim 10^{-34} j \cdot s^{-1}$. بهذه القيم ستكون القيمة التقريبية للتغير في السرعة الناتج عن عملية امتصاص و بث تلقائي واحدة طبقا للعلاقة (1.2) هي $\Delta v \sim 10^{-3} m/s = 0.1 cm/s$. ومن أجل خفض سرعة الذرة إلى غاية توقيفها تقريبا يجب إعادة هذه العملية عددا من المرات يساوي:

$$(2.2) \quad \frac{v}{\Delta v} = \frac{10^3}{10^{-3}} = 10^6 \text{ cycles}$$

وهو ما توفره حزمة من الليزر. ولمعرفة الزمن اللازم لإحداث هذه الدورات cycles يكفي أن نتذكر أن مدة حياة الحالة المثارة للذرة، أي زمن دورة واحدة، هي من رتبة النانو ثانية $n.s = 10^{-9} s$ وعليه فإن التوقيف الكلي للذرة سيستغرق زمنا قدره:

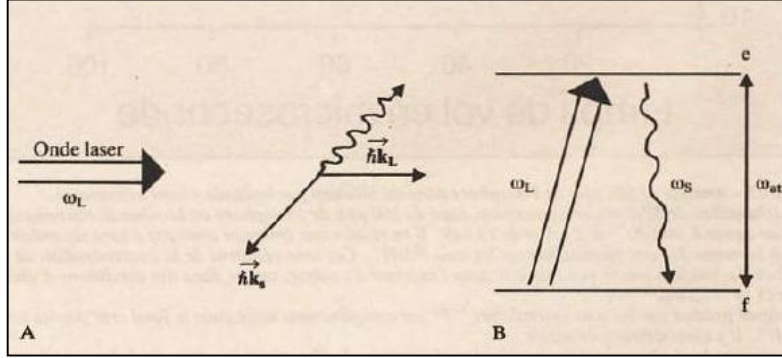
$$(3.2) \quad t \sim 10^{-9} \times 10^6 = 10^{-3} s$$

¹ نقصد أن التغير في مقدار سرعتها يحدث وفق اتجاه الفوتون الوارد، ولكن سرعة الذرة تبقى في اتجاهها الأصلي، فهي إذن متعاكسان وذلك ما يجعل الذرة تنقص من سرعتها.

² نقصد خفض سرعتها إلى قيمة صغيرة جدا، إذ أننا نعلم أنه من غير الممكن توقيفها تماما.

وهو زمن صغير جدا، فالعملية تتم بسرعة. من جهة أخرى، تخضع الذرة أثناء خفض سرعتها بواسطة الليزر إلى تسارع نقصان (décélération) قدره $\gamma \sim 10^6 \text{ m/s}^2 = 10^5 \times g$ حيث g هو تسارع الجاذبية الأرضية، وهذه قوة ضغط إشعاعي كبيرة، كما أن المسافة اللازمة لتوقيف هذه الذرة هي $x \sim 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$.

مثل هذه التجارب تجرى في نطاق مغلق شديد التفريغ لتفادي حدوث تصادمات بين الذرات وجزيئات الهواء.



الشكل - 1- الامتصاص وإعادة الانبعاث التلقائي للفوتون.

يبين الجزء A عملية الامتصاص والبعث التلقائي: تتراجع الذرة عند الامتصاص وفق اتجاه الفوتون وعند البعث وفق اتجاه عشوائي.

ويبين الجزء B مخطط القفز من الحالة الأساسية إلى الحالة المثارة والموافقة لعملية الامتصاص ثم عملية البعث أو الإصدار التلقائي والعودة إلى الحالة الأساسية في زمن حياة السوية من رتبة النانو ثانية (صورة مأخوذة من المصدر [12]).

3- التبريد بالليزر: Refroidissement par Laser

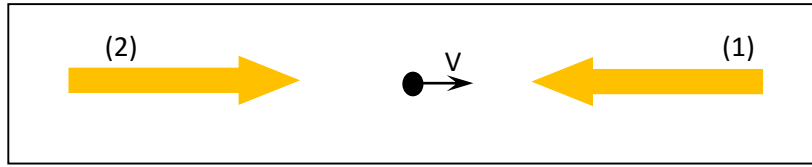
1-3 الليزر-Laser : هذه الكلمة هي اختصار للجملة الانجليزية (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) والتي معناها التضخيم الضوئي بالإصدار المُحث للأشعة. فعملية التضخيم الضوئي تتم عن طريق تحفيز انبعاث الفوتونات من الذرات، كما أن لهذا الإشعاع درجة عالية من التماسك في المكان والزمان Cohérence spatio-temporelle.

2-3 المبدأ النظري لتبريد دوبلر: Principe du refroidissement Doppler

رأينا في الفقرة السابقة أن الضغط الإشعاعي يملك طابعا تجاوبيا (caractère résonnant)، فهو لا يكون شديدا إلا إذا كان تواتر الإشعاع مساويا بالضبط لتواتر الانتقال الذري بين مستويين طاقيين ذريين، وفي حساباتنا السابقة افترضنا وجود هذا التوافق بين طاقة الفوتون والفرق الطاقي $\Delta \epsilon = \hbar \omega_a$ ، وهو ما يضمن فعالية تخفيض سرعة الذرة بدرجة تناقص كبيرة، ولكن وجود سرعة للذرة وأيضا حدوث التغير في قيمتها يؤثر في درجة هذا التجاوب وذلك بسبب مفعول دوبلر، فالذرة في حالة حركة ترى التواتر الظاهري للضوء منزاحا نتيجة لهذا المفعول وأن هذا الانزياح يتغير بتناقص سرعة الذرة، والدراسات الدقيقة للضغط الإشعاعي تبين أن هذا الأخير حساس لهذه التأثيرات الطفيفة في سرعة الذرة مما

سيؤثر على محاولة توقيف الذرة وبالتالي خفض درجة حرارتها. من أجل تفادي هذا الخلل وتجاوزه يتم تغيير³ تواتر الليزر تدريجياً وفقاً لانخفاض سرعة الذرة [11] أو تغيير تردد التجاوب للذرة عبر التأثير عليها بواسطة حقل مغناطيسي وفق ما يُعرف بمفعول زيمان [10].

من أجل التبسيط سنقوم في البداية بالدراسة في بعد واحد كما في الشكل 2، سنعتبر إذن أن لدينا موجتان من الليزر لهما نفس التردد ω_L تنتشران في اتجاهين متعاكسين ولتكن هناك ذرة ذات كتلتها m تتحرك بسرعة v على طول نفس المحور في الاتجاه $+x$ حيث نعتبرها جملة ذات مستويين طاقيين (système à deux niveaux) ولنفرض أن طاقة المستوى الأرضي تساوي الصفر وطاقة المستوى الثاني تساوي $\hbar\omega_a$ وبفرض أيضاً أن $\frac{\hbar k}{mv} \ll 1$ أي أن كمية حركة الذرة أكبر بكثير من كمية حركة فوتون واحد.



الشكل - 2

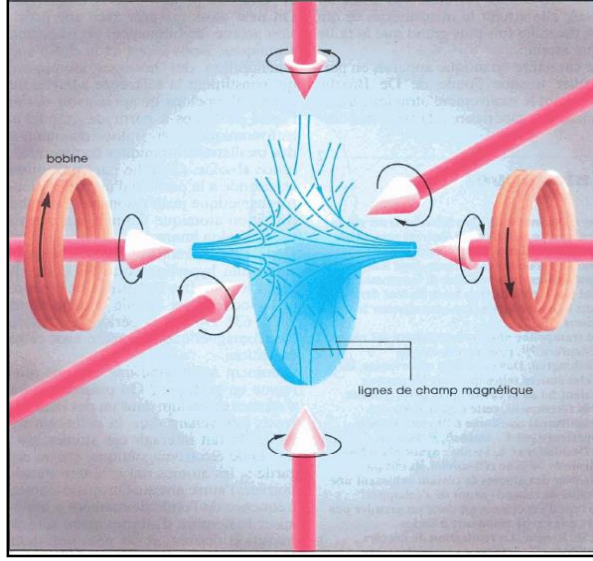
ذرة ذات كتلة m تتحرك بسرعة v في اتجاه $+x$ تصطدم بفوتون ذو طاقة $\hbar\omega_L$ وكمية حركته $\hbar k$

إن تواتر الموجات الضوئية ω_L يتغير في المعلم المرتبط بالذرة بسبب حركتها وفقاً لأثر دوبلر ويجب تبعاً لذلك أن يكون أقل من تواتر التجاوب ω_a . فإذا كانت الذرة ساكنة فإن الضغط الإشعاعي لكلا الموجتين يكون متساوياً والقوة الكلية التي تخضع لها الذرة تكون معدومة، ولكن في حالة الذرة المتحركة فإنها ترى الموجة (1) قادمةً بتردد ظاهري قيمته $\omega_L + k_L v = \omega_L (1 + v/c)$ مقترباً بذلك من تردد التجاوب ω_a ، في حين أن التواتر الظاهري للموجة (2) قيمته بالنسبة للذرة هو $\omega_L - k_L v = \omega_L (1 - v/c)$ مبتعداً بذلك عن قيمة تردد التجاوب، فالضغط الإشعاعي المطبق من طرف الموجة (1) سيكون إذن أكبر من الضغط الإشعاعي المطبق من طرف الموجة (2) وذلك ما سيحدث قوة معاكسة لاتجاه حركة الذرة وبالتالي خفض سرعتها. نطبق نفس الاستدلال من أجل ذرة متحركة في الاتجاه $-x$ المعاكس. وهذا هو مبدأ تبريد دوبلر في بعد واحد.

إذا طبقنا على الذرة ثلاثة أزواج من موجات الليزر المتعاكسة وفق الاتجاهات الثلاثة المتعامدة فإن الذرة ستوقف تماماً كما كان اتجاه حركتها، وتصبح كأنها مغموسة enflue وتتحرك في وسط لزج visqueux من الفوتونات وهذا ما يسمى

³ وهذه الخاصية ممكنة في حالة الليزر قابل الضبط Laser Accordable

بالغسائية الضوئية⁴ « Mélasse optique » والتي تم تحقيقها تجريبيا سنة 1985 [14] كما في الشكل 3، أين يُضاف إليها حقل مغناطيسي لتشكيل ما يسمى بالأسر الضوئي-المغناطيسي Piège magnéto-optique، كما سنرى فيما بعد.



الشكل 3-

ثلاثة أزواج من أمواج الليزر منتشرة وفق المحاور الثلاثة المتعامدة ويتم بواسطتها توقيف حركة الذرات مهما كان اتجاهها والحقل المغناطيسي هنا يساهم في أسر الذرات بعد تخفيض سرعتها (صورة مأخوذة من المصدر [19]).

3-3 حدود درجة حرارة تبريد دوبلر : Limite du refroidissement Doppler

إن وجود الذرة في الوسط الضوئي كما في الشكل 3 يجب أن يؤدي إلى إيقاف الذرة تماما عن الحركة، ولكن إذا تذكرنا أن الضغط الإشعاعي تم وصفه بالأخذ في الاعتبار التغيرات التي تحدث للسرعة فقط في حالة الامتصاص، حيث اعتبرنا أن متوسط التراجعات العشوائية للذرة عند الإصدارات التلقائية معدوما. لكن هذه التراجعات العشوائية تحدث في الحقيقة تذبذبات عشوائية لسرعة الذرة، وبالتالي تتذبذب قيمة قوة الضغط الإشعاعي حول قيمتها المتوسطة وهو ما يحدث تهييجا دائما للذرة يؤدي إلى تصادمها مع ذرات أخرى تماما كما يحدث في الحركة البراونية وبالتالي تسخينها، فهذه الإصدارات التلقائية أذن هي مصدر للتسخين في مقابل التبريد الحاصل في الوسط الضوئي، والتوازن في مجموع هاتين العمليتين المتعاكستين يؤدي إلى توازن حراري تكون فيه درجة الحرارة الدنيا من رتبة محصورة بين الملي كلفن mk والميكرو كلفن μk وفقا لنوع الذرات ومدة حياة الحالة المثارة. في الحقيقة، إن الدراسة التفصيلية تعطي النتيجة التالية [15]:

$$(4.2) \quad T_{\min} = \frac{\hbar \Gamma}{2k_B}$$

⁴ ترجمة أحدثناها لهذا المصطلح.

حيث أن Γ^{-1} هو مدة حياة المستوى المثار (Largeur naturelle).

من أجل الليثيوم مثلا لدينا $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$ وتكون درجة الحرارة الدنيا هي إذن $T_{\min} = 144 \mu\text{K}$.

4-3 الأسر الضوئي-المغناطيسي: Piège magnéto-optique

إن الذرات الموجودة في العُسييلة الضوئية تقوم بحركة براونية دائمة كما رأينا في الفقرة السابقة مما يسمح لها بالإفلات من الوسط الضوئي إذا وصل مسار حركتها إلى تخوم سحابة الذرات وهو ما يحدث خلال بضع ثوان فقط و لهذا المفعول تأثيره على كثافة الذرات التي هي الكمية المهمة الأخرى الواجب الحفاظ عليها في قيم مرتفعة في نفس الوقت الذي نحاول فيه خفض درجة الحرارة وهو ما أجملناه في الكمية D ، الكثافة في فضاء الأطوار، المعطاة بالعلاقة (21.1).

من أجل تمديد فترة بقاء الذرات في وسط الضوئي، يُطبق حقل مغناطيسي ساكن في الوسط الضوئي لكي يولد قوة إرجاع ناتجة عن تفاعل العزم المغناطيسي الدائم للذرات مع الحقل المغناطيسي المطبق، هذه القوة تُعيد الذرة إلى مركز الوسط الضوئي إضافة إلى قوى الضغط الإشعاعي وهو ما يسمى الفخ المغناطيسي الضوئي. لكن حتى إضافة هذا الحقل تبقى قيمة القيمة D صغيرة، في الحقيقة نحصل على قيمة من الرتبة 10^{-5} [15]، وهي غير كافية لإحداث تكثف بوز-اينشتاين، غير أن هذه الطريقة تساعد في الحفاظ على كثافة جيدة للذرات.

في الحقيقة إن هذا النوع من الأسر والتبريد، نقصد الأسر الضوئي-المغناطيسي، يُستخدم عادة كمرحلة أولية من مراحل تحقيق تكثف بوز-اينشتاين، إذ أن الذرات المبردة بهذه الطريقة تُنقل إلى مرحلة جديدة من التبريد وهي المسماة التبريد بالتبخير كما سنرى، وهنا تكمن أهميتها الكبيرة إذ يعتبر التبخير بالتبريد غير نافع لو أجريناه مباشرة على أبخرة محضرة في درجات الحرارة المحيطة، كما لا يمكن أسرها بتطبيق الحقول المغناطيسية مباشرة إذ أن طاقة التفاعل تكون أقل من قيمة طاقة التهييج الحراري للذرات في هذه الحالة. لكن قبل الانتقال إلى دراسة التبريد بالتبخير يجب أن نمر على الأسس النظرية والعملية لطرق أسر الذرات المستخدمة بالموازاة مع هذا التبريد وهو موضوع الفقرتين التاليتين.

4- الأسر المغناطيسي: Piège magnétique

إن أسر ذرات معتدلة كهربائياً بواسطة فخ مغناطيسي (piège magnétique) يعتمد على وجود عزم مغناطيسي دائم للذرات $\vec{\mu}$ moment magnétique وحقل مغناطيسي خارجي غير متجانس $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$. إن هذا الاحتواء⁵ يحدث بفضل التفاعل بين هذا الحقل المغناطيسي غير المنتظم والذرة وفق ما يسمى تفاعل زيمان Interaction Zeeman، هذه الطاقة تساوي:

$$(5.2) \quad U(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

هذه الطاقة تلعب دور الطاقة الكامنة في حركة الذرة والتي تشتق منها القوة المؤثرة على الذرات المعطاة بالعلاقة:

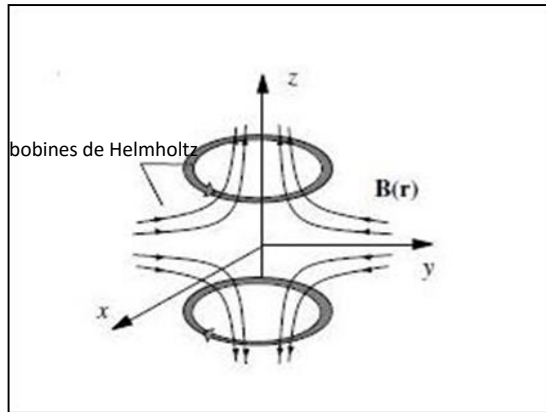
$$(6.2) \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U = \|\vec{\mu}\| \cdot \|\vec{\nabla}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\vec{\mu}, \vec{B})$$

التي تسمح بأسر الذرات. فإذا كان العزم المغناطيسي موازيا للحقل المغناطيسي فإن طاقة التفاعل تكون في هذه الحالة لها قيمة حدية:

$$(7.2) \quad U(\vec{r}) = \pm \mu \cdot B(\vec{r})$$

حسب ما إذا كان لها نفس الاتجاه أم اتجاهان متعاكسان. ولأسر الذرات يجب أن يكون لهذه الطاقة الكامنة قيمة صغرى محلية في نقطة معينة من الفضاء، فإذا كان $\vec{\mu}$ و $\vec{B}(\vec{r})$ لها نفس الاتجاه فإن الذرات ستنجذب إلى المناطق التي يكون فيها الحقل المغناطيسي شديدا، بينما لو كان ل $\vec{\mu}$ و $\vec{B}(\vec{r})$ اتجاهان متعاكسان فإن الذرات ستنجذب إلى المناطق التي يكون فيها الحقل المغناطيسي ضعيفا وهي الحالة التي تفيد في الأسر إذ أن انجذاب الذرات إلى المناطق ذات الحقل المغناطيسي الشديد سيجذبها نحو مصادر هذا الحقل ويخرجها بالتالي من الأسر.

في الحقيقة، من الممكن خلق مناطق يكون فيها الحقل المغناطيسي ضعيفا أو حتى معدوما وذلك عبر تشكيلات تجريبية مختلفة نذكر بعضها منها هنا. في البداية تم استخدام اثنين من اللفائف والتي تسمى لفائف هيلمهولتز Bobines de Helmholtz والتي يجتازها التيار الكهربائي في اتجاهين متعاكسين مما يخلق مجال مغناطيسي كما هو موضح في الشكل 4 والذي ينعدم في المركز:

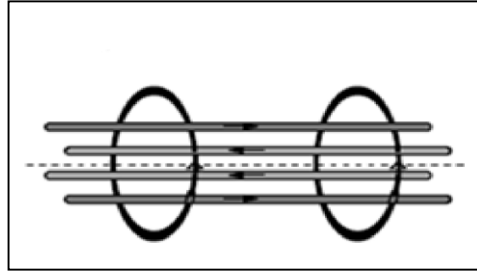


الشكل 4-

في لفائف هيلمهولتز في نفس المحور والتيار يمر فيها في اتجاهين متعاكسين (صورة مأخوذة من المصدر [16]).

لكن مع ذلك لها جانب سلبي رئيسي في تجربة مثل تبريد الذرات لأن الحقل المغناطيسي الناتج منعدم في المركز ويتغير اتجاهه بسرعة مما يجعل العزم والمغناطيسي والحقل لهما نفس الاتجاه بجوار هذه النقطة وهذا يمكن أن يحدث افلاتا للذرات وذلك ما يعرف بقفزات ماجورانا [16].

هناك ترتيب تجريبي بديل مناسب من اجل خلق الحد الأدنى الغير منعدم للحقل المغناطيسي، وهو فخ يوف - بريتشار (Piege d'Ioffe-Pritchard). وقد تم تصميم هذا الفخ في البداية من مزيج من حقل رباعي الأقطاب عرضي (champ quadripolaire radial) والذي يتم إنشاؤه بواسطة أربعة نواقل متوازية، والتي تسمى قضبان يوف (barres de Ioffe)، حيث تحمل التيار في أزواج متعاكسة مثني مثني وذلك من اجل تحقيق الاحتواء العرضي للذرات، ويضاف إلى التركيب زوج من اللفائف تسمى لفائف بينتش (bobines pinch) كما هو موضح في (الشكل 5) والتي تضمن الاحتواء الطولي (المحوري)، كما تم أيضا تطوير تشكيلات أخرى لإنتاج حقول مغناطيسية مماثلة كما في الشكل 6 مثلا.



الشكل 5-

تشكيلة فخ يوف - بريتشارد الأصلي

المسافة بين اللفافتين يجب أن تكون أكبر من نصف قطرها حتى يمكن أن تكون هناك قيمة صغرى للحقل المغناطيسي



الشكل 6 -

تشكيلة مغايرة اخرى لفخ يوف - بريتشارد (صور مأخوذة من المصدر [20]).

تم استبدال القضبان بثلاث لفائف رباعية.

سندرس في الفقرة التالية الحقل المغناطيسي الناتج عن مثل هذه التشكيلات وطبيعة طاقة التفاعل الناتجة تبعاً لذلك. في الحقيقة هناك تشكيلات هندسية أخرى لأسر الذرات وفق نفس المبدأ، ولكن التشكيلات المذكورة هنا هي المستعملة كثيراً وخاصة أنها تخلق طاقة تفاعل تشبه الطاقة الكامنة لهزاز توافقي Oscillateur harmonique كما سنرى.

5- الفخ المغناطيسي التوافقي: Piège magnétique harmonique

إذا اخترنا كمحورٍ للاحتواء confinement في تشكيلة يوف - بريشارد المحور (oz)، فإن عبارة الحقل المغناطيسي الكلي الذي ينشأ عن هذا الفخ تكون بالصيغة التالية [15]:

$$(8.2) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ z^2 - (x^2 + y^2)/2 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث B_0 يمثل شدة الحقل الناشئ في المركز، ويمثل B' تدرجه بينما يمثل B'' انحناءه.

في الجوار القريب لمركز الأسر، يمكن أن نكتب طولية الحقل $\|\vec{B}(\vec{r})\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ عند رتبة النشر الثانية بالنسبة لكل من x و y و z كما يلي:

$$(9.2) \quad \|\vec{B}(\vec{r})\| \approx B_0 + \left(\frac{B'^2}{2B_0} - \frac{B''}{4} \right) (x^2 + y^2) + \frac{B''}{2} z^2$$

نلاحظ أن هذه العبارة لطولية الحقل المغناطيسي ستملك قيمة صغرى محلية في مركز الأسر إذا كان $2B'^2 > B_0 B''$. وطاقة التفاعل المعطاة بالعبارة (7.2) تأخذ الآن الشكل:

$$(10.2) \quad U(\vec{r}) = \mu B_0 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{\mu B''}{2} z^2$$

نرى إذن أن طاقة الأسر هي طاقة هزاز توافقي في جوار مركز الفخ، فإذا قمنا بإدخال المقادير التالية:

$$(11.2) \quad \omega_{\perp} = \sqrt{\mu (B'^2 / B_0 - (B'' / 2)) / m}$$

$$(12.2) \quad \omega_z = \sqrt{\mu B'' / m}$$

والتي هي على التوالي تردد الأسر العرضي (fréquence de piégeage radiale) أي وفق المستوي (oxy) وتردد الأسر المحوري (fréquence de piégeage radiale et axiale) أي وفق المحور (oz)، يمكن إذن أن نعيد كتابة العبارة السابقة على الشكل البسيط التالي:

$$(13.2) \quad U(\vec{r}) = U_0 + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2$$

من خلال العبارتين (11.2) و (12.2) يتضح أن التردد العرضي يتعلق بالقيمة B_0 والتي يمكن تعديلها بمساعدة لفائف هيلمهولتز. نستطيع الآن تحويل طاقة التفاعل التوافقية $U(\vec{r})$ إلى طاقة هزاز توافقية متماثل المناحي (isotrope) إذا جعلنا $B_0 = 2B'^2/3B$ ، أو لا متماثل المناحي (anisotrope) بخفض قيمة B_0 بحيث يكون $\omega_{\perp} \gg \omega_z$ ، وفي هذه الحالة الأخيرة ستأخذ سحابة ذرات الغاز المحاصرة شكل سيجار (cigare) ممدود على طول المحور (oz).

6- الحصر الضوئي الثنائي القطبي: Le piégeage optique dipolaire

إن الحصر الضوئي الثنائي القطبي للذرات المعتدلة كهربائياً يعتمد على التفاعل بين المركبة الكهربائية المهتزة للإشعاع⁶ الضوئي المسلط على الذرة $\vec{E}(\vec{r})$ وشعاع ثنائي القطب الكهربائي المحرض للذرة (Dipôle électrique induit) الذي نرمز له ب \vec{d} والناشئ عن وجودها في هذا الحقل الكهربائي المهتز. إن طاقة التفاعل هذه تساوي:

$$(14.2) \quad V(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \langle \vec{d} \cdot \vec{E} \rangle$$

حيث أن المعامل (1/2) يظهر بسبب أن ثنائي القطب الكهربائي هو ثنائي مُحَرَّض وليس دائماً، بينما يشير الرمز $\langle \cdot \rangle$ إلى المتوسط الزمني. إن العلاقة بين ثنائي القطب والحقل الكهربائي هي $\vec{d} = \alpha \vec{E}$ حيث α هو الاستقطاب المركب للذرة (la polarisabilité complexe). تأخذ الطاقة الكامنة للتفاعل الشكل التالي:

$$(15.2) \quad V(\vec{r}) = -(1/4) \text{Re}(\alpha) \cdot \|\vec{E}(\vec{r})\|^2$$

فإذا علمنا أن شدة الضوء تكتب من الشكل $I = \frac{\epsilon_0 c}{2} \|\vec{E}\|^2$ ، فإن طاقة التفاعل (15.2) تكتب إذن:

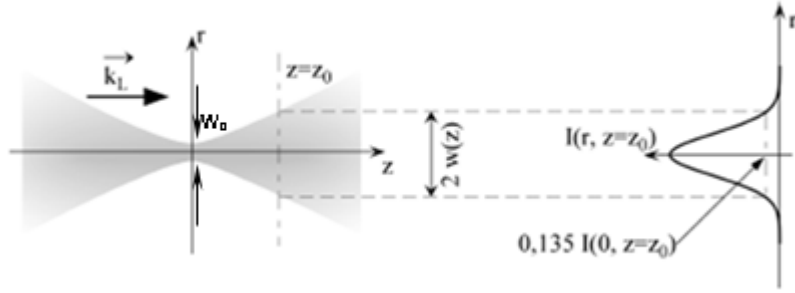
$$(16.2) \quad V(\vec{r}) = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \cdot I(\vec{r})$$

الحصر الضوئي الثنائي القطبي التوافقي: piégeage optique dipolaire harmonique

إذا كانت حزمة الإشعاع المستعملة في الحصر الضوئي الثنائي القطبي هي من نوع الحزمة الغاوسية المركزة Gaussien focalisé كما في الشكل 7، فإن شدتها تعطى بالعلاقة التالية [17]:

$$(17.2) \quad I(x, y, z) = \left[I_0 / (1 + z^2/z_R^2) \right] \exp[-2(x^2 + y^2)/w^2(z)]$$

⁶ نشير هنا أن تواتر الإشعاع المستعمل هنا يكون بعيد عن تواتر فرق الطاقة بين المستويين الطاقويين للذرة، فالأمر ليس كما يحدث في حالة التبريد بالليزر.



الشكل -7-

حزمة ضوئية غاوسية (مأخوذة من المصدر [17]).

حيث أن:

- I_0 الشدة القصوى للإشعاع.
- $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ هو نصف قطر الشدة في نقطة معينة من المحور (oz).
- w_0 هي نصف قطر الشدة في الاختناق (حيث: $z=0$) والتي توافق الحد الأدنى لنصف قطر الإشعاع الغاوسي.
- $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ هو طول رايلي-Rayleigh حيث λ هو طول الموجة، عند هذه القيمة يكون $I(0,0,z = z_R) = I_0/2$.

يمكن الآن أن نكتب طاقة التفاعل (16.2) كما يلي:

$$(18.2) \quad V(x, y, z) = \frac{V_0}{(1 + z^2/z_R^2)} \exp[-2(x^2 + y^2)/w^2(z)]$$

حيث V_0 تمثل عمق الفخ الضوئي. في جوار مركز الأسر الضوئي لثنائي القطب الكهربائي يمكن أن نقوم بالنشر إلى الرتبة الثانية لطاقة التفاعل هذه حيث تعطي شكل طاقة تفاعل توافقية:

$$(19.2) \quad V(x, y, z) = V_0 - \frac{2V_0}{w_0^2}(x^2 + y^2) - \frac{V_0}{z_R^2} z^2$$

حيث أن ترددات الاهتزاز العرضي والمحوري هي على الترتيب $\omega_{\perp} = \sqrt{4|V_0|/mw_0^2}$ و $\omega_z = \sqrt{2|V_0|/mz_R^2}$ نستطيع إذن جعل الترددات كبيرة بالقدر الذي نريد وذلك عبر القيمة V_0 المتعلقة بشدة حزمة الليزر وكذا خصائصها الأخرى، وفي الحقيقة كلما ضاق اختناق الحزمة w_0 كلما كان الأسر شديداً.

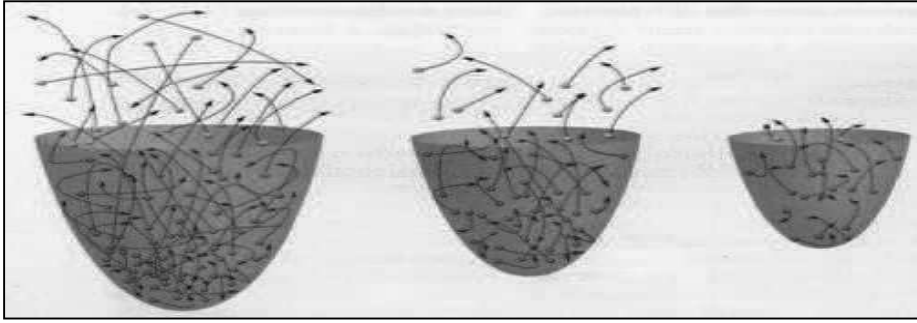
7- التبريد عن طريق التبخير: Refroidissement par évaporation

إن تقنيات الأسر التي عرضناها سابقا لا تقوم بتبريد الذرات ولكن تحافظ عليها محصورة في منطقة معينة في مركز الفخ وبالتالي زيادة كثافتها، ولذلك نستخدم بعد هذه المرحلة ما يسمى بالتبريد بالتبخير وهي التقنية الفعالة التي تسمح بتخفيض درجة حرارة السحابة الغازية الابتدائية المأسورة عند درجات الحرارة من رتبة الميلي كلفن (milli Kelvin) إلى درجة حرارة ميكرو كلفن (micro Kelvin) أو اقل من ذلك، وهو ما يسمح بالدخول في النظام الكوانتي الذي تكون فيه الكثافة في الفراغ الطوري مقاربة للوحدة ($D \sim 1$).

إن التبريد التبخيري هو أسلوب يسمح بتخفيض درجة حرارة سحابة الذرات إلى حد كبير وذلك في وجودها في الفخ المغناطيسي ذو الارتفاع المحدود U_f ، ويستند هذا التبريد على حقيقة أن الذرات الأكثر طاقة والتي تصل إلى تخوم السحابة الذرية (القيم الدنيا لطاقة التفاعل مع الحقل المغناطيسي)، يمكن أن تنفلت من الفخ تاركة وراءها الذرات الأقل طاقة وبفعل التصادمات بين الذرات الباقية والتبادلات الطاقية الناتجة عنها في هذا الوسط يتم إعادة توزيع الطاقة الحركية للذرات لتتناقص درجة الحرارة في النهاية.

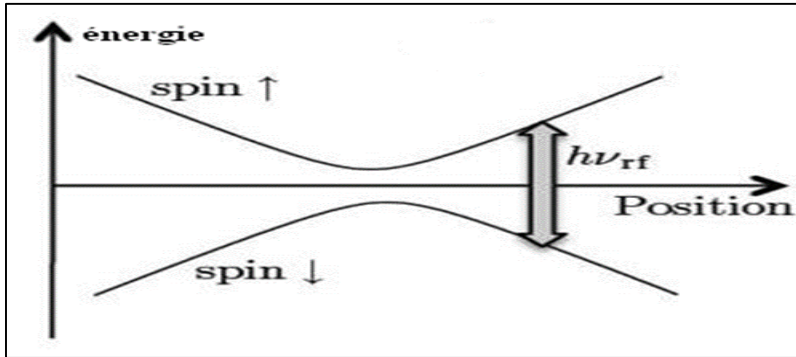
في الحقيقة، هذا التبريد التبخيري يتكون من مرحلتين، انظر شكل 8 و 9، المرحلة الأولى تسمى بالتبخير الحر (Evaporation libre) والثانية التبخير القصري (*forcée*). في المرحلة الأولى نحافظ على ارتفاع الفخ U_f ثابتا ونترك الذرات تتبخر بحرية (الأكثر طاقة تخرج من الفخ) وبالتالي ينقص عدد الذرات المحصورة و تنناقص درجة حرارة السحابة و بصفة طبيعية فهذه العملية تتباطأ تدريجيا. ثم بعد ذلك إلى المرحلة الثانية من التبريد وهي التبخير القصري، في البداية نفكر في الحفض من ارتفاع طاقة الأسر قليلا وذلك بتغيير التيار في لفائف الفخ (bobines du piège)، هذا الانخفاض يرافقه تناقص في قدرة كيون الفخ على الحصر وبعبارة أخرى سنسمح للذرات القريبة من تخوم الفخ بالإفلات، هذه الطريقة تؤدي إلى تناقص التصادمات بين ذرات السحابة الباردة نسبيا نظرا لانخفاض قدرة الأسر.

هناك طريقة أكثر فعالية وهي تلك التي تكمن في استعمال موجة راديوية ذات تردد قابل للتعديل (onde radiofréquence de pulsation ω_f ajustable) والتي تستخدم لقلب اتجاه شعاع العزم المغناطيسي للذرات المتواجدة قريبا من تخوم الأسر والتي تحقق الشرط الطاقي $\hbar\omega_f = \mu \|\vec{B}(\vec{r}_{evap})\|$ ، وهذا القلب في اتجاه العزم المغناطيسي للذرة من شأنه أن يغير طاقة تفاعلها مع الحقل المغناطيسي ويجعل الذرات تُطرد إلى المناطق التي يكون فيها الحقل المغناطيسي شديدا كما رأينا في الفقرة الخامسة. نتحصل في نهاية مثل هذه التجارب على عدد من الذرات الموجودة في السحابة الفائقة البرودة ما تكون قيمته محصورة بين $10^8 \sim 10^3$ ذرة [18].



شكل 8 -

مبدأ التبريد بالتبخير الحر والتصري



الشكل 9 -

التبريد التبخيري بواسطة موجة راديوية تقوم بقلب العزم المغناطيسي للذرات وبالتالي تؤدي إلى خروجها من الفخ مع الحفاظ على قوة الأسر المتمثلة في ارتفاع الكمون.

الفصل الثالث

دراسة درجة حرارة تكثف بوز-اينشتاين لغاز محصور في
كمون توافقي

Etude de la Température de Condensation de Bose-Einstein
pour un Gaz Piégé par un Potentiel Harmonique

1- مقدمة:

لقد عالنا في الفصل الأول حالة غاز من البوزونات غير المتفاعلة المحصورة في حجم قدره V حيث درسنا درجة الحرارة الحرجة اللازمة لبداية ظاهرة تكثف بوز-اينشتاين كما قمنا بحساب عدد الجسيمات الموجودة في الحالة المثارة والتي تشكل الجزء غير المكثف من السحابة الذرية واستنتجنا منها عدد الجسيمات الموجودة في الحالة الأساسية والتي تمثل الطور المكثف. نريد في هذا الفصل معالجة هذه الكميات، أي درجة الحرارة الحرجة و كثافة الغاز، في الحالة الخاصة بحدوث ظاهرة التكثف عندما تكون السحابة الذرية هذه المرة محصورة في فخ هزاز توافقى، لأنه كما رأينا في الفصل الثاني أن معظم التجارب التي تُجرى لتحقيق تكثف بوز-اينشتاين تتم بواسطة تشكيلات هندسية توفر لنا طاقة أسر لها شكل الطاقة الكامنة لهزاز توافقى.

إن هذا الفصل مقسم كما يلي: في الفقرة الثانية سنبحث عن كثافة الحالات "densité d'états" من أجل الجسم الموجود في هزاز توافقى، هذه الكمية التي تساعدنا في حساب عدد الجسيمات في مختلف المستويات الطاقوية، ثم في الفقرة الثالثة سنبحث عن درجة الحرارة الحرجة الموافقة للتحويل الطوري المؤدي إلى حدوث التكثف، وفي الفقرة الرابعة والاحيرة نبحث عن الكسر المعبر عن عدد الجسيمات الموجودة في الحالات المثارة (أي غير المكثفة) وأيضا الكسر الممثل لعدد الجسيمات الموجودة في حالة تكثف.

نشير قبل بداية الدراسة أننا نتممون بحالة كيون الهزاز التوافقى لا متماثل المناحي anisotrope في ثلاثة أبعاد، ولكن الدراسة المقدمة هنا تحتوي أيضا الحالة الخاصة بهزاز توافقى في d بُعد، وكذلك الجسم الحر داخل حجم معين لذلك ستشمل الدراسة بعضا من نتائج الفصل الأول كحالات خاصة.

2- كثافة الحالات لهزاز توافقى: Densité d'états d'un oscillateur harmonique

لنفرض أن لدينا جسم موجود في كيون الهزاز التوافقى لا متماثل المناحي التالي:

$$(1.3) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

حيث تمثل ω_i الترددات وفق المحاور الثلاثة. إن مستويات الطاقة المرافقة لهذا الكيون معروفة في الميكانيك الكوموي وهي تعطى بالعلاقة:

$$(2.3) \quad \varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar \left(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z + \frac{3}{2} \right)$$

هنا، الأعداد n_i هي أعداد طبيعية أو معدومة.

نريد الان في البداية أن نحسب عدد الحالات $\varphi(\varepsilon)$ التي طاقتها أقل أو تساوي قيمة طاقة معينة ε ، والذي يمكن القيام به سواء بطريقة كلاسيكية أو بطريقة كوانتية. سنختار هنا العمل بالطريقة الكلاسيكية، نبحث إذن أولاً عن الحجم الذي يشغله الجسم في فضاء الحالات والمحدد بشرط الطاقة المعطى ب $\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \leq \varepsilon$ ، إن هذا الحجم هو:

$$(3.3) \quad \Gamma = \underbrace{\int dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3}_{\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \leq \varepsilon} = \underbrace{\int dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3}_{\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) \leq \varepsilon}$$

أين وضعنا $(p_{1,2,3} = x, y, z)$ لتسهيل الحساب، وكذلك $\omega_{x,y,z} = \omega_{1,2,3}$. من أجل حساب هذا التكامل السداسي سنقوم بإجراء التحويلات البسيطة التالية:

$$(4.3) \quad \begin{cases} y_j = \frac{p_j}{\sqrt{2m}}, j = 1, 2, 3 \\ y_j = \sqrt{\frac{m\omega_{j-3}^2}{2}} x_{j-3}, j = 4, 5, 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dp_j = \sqrt{2m} dy_j, j = 1, 2, 3 \\ dx_{j-3} = \sqrt{\frac{2}{m\omega_{j-3}^2}} dy_j, j = 4, 5, 6 \end{cases}$$

يصح لدينا الان:

$$(5.3) \quad \Gamma = \left(\frac{8}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \right) \underbrace{\int \prod_{j=1}^6 dy_j}_{\sum_{j=1}^6 y_j^2 \leq \varepsilon}$$

إن هذا التكامل الأخير يمثل حجم الكرة الفائقة "hyper sphere" الموجودة في فضاء سداسي الأبعاد والتي نصف قطرها هو $\varepsilon^{1/2}$ ، نتيجة هذا التكامل هي:

$$(6.3) \quad v = \underbrace{\int \prod_{j=1}^6 dy_j}_{\sum_{j=1}^6 y_j^2 \leq \varepsilon} = \frac{\pi^{6/2}}{(6/2)!} (\sqrt{\varepsilon})^6 = \frac{\pi^3}{3!} \varepsilon^3$$

حيث استخدمنا عبارة حجم الكرة الفائقة في n بُعد او لمعطى بالعلاقة $v = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \mathcal{R}^n$ [8]. نتحصل وفق العلاقتين

(6.3) و (5.3) على:

$$(7.3) \quad \Gamma = \frac{4\pi^3}{3\omega_1 \omega_2 \omega_3} \varepsilon^3$$

نستطيع الان حساب عدد الحالات $\varphi(\varepsilon)$ في فضاء الاطوار سداسي الأبعاد هذا انطلاقا من علاقته مع Γ ، نجد:

$$(8.3) \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi^3}{3h^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \varepsilon^3 = \frac{1}{6h^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \varepsilon^3$$

في النهاية، يمكننا الحصول على عبارة كثافة الحالات $\rho(\varepsilon)$ انطلاقا من عبارة عدد الحالات $\varphi(\varepsilon)$ وذلك كما يلي:

$$(9.3) \quad \rho(\varepsilon) = \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Rightarrow \rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2h^3 \omega_x \omega_y \omega_z}$$

كما يمكن تعميم هذه النتيجة من أجل d بعد حيث تصبح [18]:

$$(10.3) \quad \rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_i h \omega_i}$$

إن كثافة الحالات، بصفة عامة، تكون متناسبة مع قيمة الطاقة مرفوعةً إلى أساس معين α ، ولذلك فهي توضع عادة على الشكل:

$$(11.3) \quad \rho(\varepsilon) = C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1}$$

حيث أن C_α هو ثابت. فمثلا من أجل جسيم في علبة ذات حجم V فإن $\alpha = 3/2$ كما أن الثابت C_α يمكن أن يستخرج

من العلاقة (6.1)، $C_{3/2} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2}$ ، و في حالة الهزاز التوافقي في ثلاثة أبعاد يكون $\alpha = 3$ و بالمقارنة مع (9.3)

نجد:

$$(12.3) \quad C_3 = (2h^3 \omega_x \omega_y \omega_z)^{-1}$$

3- درجة حرارة التكثف: Température de Condensation

كنا قد عرّفنا في الفصل الأول، في الفقرة 2-3، درجة حرارة التكثف على أنها هي الدرجة التي يكون فيها عدد الجسيمات التي تشغل المستويات المثارة مساويا للعدد الكلي تماما $N_e = N$ ، أو هي درجة الحرارة التي تبدأ الجسيمات عندها في شغل المستوى الأساسي. فعندما يكون عدد الجسيمات N كبيرا، كما هو حال الغازات المستعملة في التكثف، يمكننا إهمال طاقة السوية الصفرية للهزاز التوافقي واعتبارها مساوية للصفر، فيكون إذن عدد الجسيمات N_e التي تشغل كل المستويات المثارة هو:

$$(13.3) \quad N_e = \int_0^\infty \rho(\varepsilon) f_{BE}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon - \mu)] - 1}$$

وهي تأخذ قيمتها العظمى في حالة كون قيمة الكيون الكيميائي للغاز معدومة، كما أن تعريف درجة الحرارة الحرجة يفرض أن يكون عدد الجسيمات في الحالة المثارة مساويا للعدد الكلي للجسيمات إذن:

$$(14.3) \quad N = N_e(T_c, \mu=0) = C_\alpha \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\alpha-1} d\varepsilon}{\exp(\beta\varepsilon) - 1}$$

إذا وضعنا $x = \beta\varepsilon$ واستخدمنا الخاصية $\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$ حيث $\Gamma(\alpha)$ هي دالة غاما Gamma و $\zeta(\alpha)$ هي دالة زيتا لريمان Fonction Zita فإننا نتحصل على العبارة التالية:

$$(15.3) \quad N = C_\alpha \beta^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)$$

ومن خلال هذه العبارة الأخيرة يمكن حساب درجة حرارة التكثف بصفة عامة:

$$(16.3) \quad k_B T_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}}$$

نعطي هنا قيم الدوال $\Gamma(\alpha)$ و $\zeta(\alpha)$ من أجل بعض القيم ل α ، والتي توافق جمل فيزيائية مختلفة، [18]:

α	$\Gamma(\alpha)$	$\zeta(\alpha)$
1	1	∞
1.5	$\sqrt{\pi}/2 \approx 0.886$	2.612
2	1	$\pi^2/6 \approx 1.645$
2.5	$3\sqrt{\pi}/4 \approx 1.329$	1.341
3	2	1.202
3.5	$15\sqrt{\pi}/8 \approx 3.323$	1.127
4	6	$\pi^4/90 \approx 1.082$

فيمكن إذن حساب درجة الحرارة الحرجة هذه من أجل هزاز توافقي في ثلاثة أبعاد إذا أخذنا بعين الاعتبار قيمة الثابت C_α المعطاة بالعلاقة (12.3)، إذن:

$$(17.3) \quad k_B T_c = \frac{\hbar \varpi N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0.94 \hbar \varpi N^{1/3}$$

حيث أن $\varpi = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ يسمى المتوسط الهندسي للتواترات $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

4- عدد الجسيمات في مستويات الطاقة المثارة والأساسية:

نريد الان حساب عدد الجسيمات $N_e(T)$ الموجودة في الحالات المثارة من أجل درجة حرارة معينة حيث يكون $T < T_c$. إن هذا العدد لم يبق مساويا للعدد الكلي للجسيمات في هذه الحالة نظرا لانتقال جزء منها إلى الحالة الأساسية. وفقا للعلاقة (15.3)، ستكون لدينا النتيجة التالية:

$$(18.3) \quad N_e = C_\alpha (k_B T)^\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)$$

وباستخدام العلاقتين (16.3) و (18.3) نتحصل على:

$$(19.3) \quad N_e = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha$$

وعليه، فإن عدد الجسيمات في الطور المكثف هو:

$$(20.3) \quad N_0 = N - N_e = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \right]$$

من أجل جسيمات موضوعة في حجم V يكون $\alpha = 3/2$ ونتحصل على نفس العلاقة (17.1) في الفصل الأول، بينما من أجل كمن هزاز توافقى في ثلاثة أبعاد فإن $\alpha = 3$ ونتحصل على:

$$(21.3) \quad N_e = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$(22.3) \quad N_0 = N - N_e = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]$$

الختة

Conclusion

الخاتمة

قدمنا في هذه المذكرة دراسة لظاهرة تكثف بوز- اينشتاين، والتي عجز العلماء التجريبيون عن الوصول إليها من قبل بسبب نقص الإمكانيات و الوسائل التقنية اللازمة، لكن التطور العلمي المتسارع الذي شهدته الساحة العلمية سمح بتحقيقها عمليا كما تمت الاستفادة من هذه الظاهرة في دراسة ظواهر فيزيائية أخرى لم تتطرق إليها هنا، لأن موضوع الدراسة الأساسي لهذه المذكرة هو المعالجة النظرية الجزئية للمقادير الأساسية التي تدخل مباشرة في تحقيق هذه الظاهرة.

سلطنا الضوء في البداية على الخواص الفيزيائية لغاز من البوزونات والذي دفعنا، بطبيعة الحال، إلى التطرق إلى إحصاء بوز - اينشتاين (Statistique de Bose -Einstein) والذي يصف كيفية توزيع الجسيمات الأولية في الإحصاء الكمي (statistiques quantique). تم إذن تحديد قيمة درجة الحرارة التي تبدأ عندها الجسيمات في شغل المستوى الأساسي وهي المسماة درجة الحرارة الحرجة، كما تم حساب أعداد الجسيمات في الطور المكثف وغير المكثف، وكل هذا من أجل غاز من الذرات الحرة الموجودة في حجم معين. ثم التوجه بعد ذلك في الفصل الموالي إلى دراسة أهم الطرق و الوسائل المستعملة في تبريد وحصر الذرات والتي هدفها الرئيس هو تحقيق درجة الحرارة المناسبة وكذا الكثافة اللازمة من أجل حصول التكثف.

في الفصل الأخير، وبعد أن رأينا أن طرق الأسر المستعملة في عملية التكثف تخلق كمونات مشابهة لكمون الهزاز التوافقي، وهذا يخالف ما هو مدروس نظريا في الفصل الأول حيث كانت العناية بالذرات الحرة المحصورة في حجم ما في الفضاء حيث لا يوجد أي كيون، قمنا تبعا لذلك بحساب درجة حرارة التكثف الموافقة لهذه الكمونات وإعادة حساب عدد الجسيمات في الطورين المكثف وغير المكثف. كما شملت الدراسة في هذا الفصل تعميما للدراسة الابتدائية الموجودة في الفصل الأول.

قائمة المراجع

Références

Références

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [3] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics IX, Statistical Physics*, part 2 (Pergamon Press, 1981).
- [5] F. Dalfovo et al, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [6] A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
- [7] E. Belorizky, W. Gorecki, *Introduction à la mécanique statistique*, OPU, Alger, 1993.
- [8] C. Ngô, H. Ngô, *Physique statistique*, Dunod, Paris, 2008.
- [9] P. Jacquinet et al, *Opt. Commun.* **8**, 163, (1973). R. Schieder et al. *Opt. Commun.* **5**, 337 (1972).
- [10] J. Prodan et al., *Phys. Rev. Lett.* **54**, 992 (1985).
- [11] W. Ertmer et al., *Phys. Rev. Lett.* **54**, 996 (1985).
- [12] A. Aspect, C. Salomon, *Atomes refroidis par laser: vers le microkelvin*, Images de la physique, p.74 (1990).
- [13] J. Dalibard, *Immobiliser les atomes à coup de lumière laser*, La Recherche, p.934, Volume 16 N° **168** Juillet-Aout (1985).
- [14] S. Chu et al., *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985).
- [15] J. Dalibard, *Cours Atomes ultra-froids*, année (2006).
- [16] V. Letokhov, *Laser control of atoms and molecules*. (Oxford University Press 2007).
- [17] N. Schlosser, *Étude et réalisation de micro-pièges dipolaires optiques pour atomes neutres*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2001).

- [18] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge university press (2008). Chapter 4 and 5.
- [19] A. Aspect, J. Dalibard, *Le refroidissement des atomes par laser*, La Recherche, P.30, Volume 25, **261** janvier (1994).
- [20] F. Chevy. *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat, Atomic Physics. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2001). French.

قدمنا في هذه المذكرة دراسة لظاهرة تكثف بوز - اينشتاين، والتي كان الإنسان يعجز عن الوصول إليها من قبل بسبب نقص الإمكانيات و الوسائل اللازمة، لكن التطور العلمي الكبير الذي شهدته الساحة العلمية سمح بالحصول عليها والاستفادة من هذه الظاهرة في دراسة ظواهر فيزيائية أخرى ذات صلة لم تنطرق إليها هنا، لأن موضوع الدراسة الأساسي لهذه المذكرة هو المعالجة النظرية للمقادير الأساسية التي تدخل مباشرة في تحقيق هذه الظاهرة.

سلطنا الضوء في البداية على الخواص الفيزيائية لغاز البوزونات والذي دفعنا إلى التطرق لإحصاء بوز - اينشتاين والذي يصف توزيع الجسيمات الأولية في الإحصاء الكومي، تم في البداية تحديد قيمة درجة الحرارة التي تبدأ عندها الجسيمات في شغل المستوى الأساسي وهي المسماة "درجة الحرارة الحرجة"، ثم حساب أعداد الجسيمات في الطور المكثف وغير المكثف، و التوجه بعد ذلك إلى دراسة أهم الطرق والوسائل المستعملة في تبريد وحصر الذرات والتي هدفها الرئيس هو الوصول إلى درجة الحرارة المناسبة وكذا الكثافة اللازمة من أجل حصول التكثف.

في الفصل الأخير، وبعد أن رأينا أن طرق الأسر المستعملة في عملية التكثف تخلق كمونات مشابهة لكمون الهزاز التوافقي، قمنا تبعاً لذلك بحساب درجة حرارة التكثف الموافقة لهذه الكمونات وإعادة حساب عدد الجسيمات في الطورين المكثف وغير المكثف وهو ما يختلف عن الدراسة الأولية التي اعتبرنا فيها أن الغاز لا يخضع لأي كون غير أنه موجود (محصور) في حجم معين.

الكلمات المفتاحية: تكثف بوز-اينشتاين، درجة حرارة التكثف الحرجة، تقنيات تبريد الذرات، تقنيات أسر الذرات، فخ الهزاز التوافقي، عدد انشغال سويات الطاقة.

Résumé :

On présente dans ce Mémoire une étude du phénomène de la condensation de Bose-Einstein, un phénomène qui était difficile à vérifier expérimentalement auparavant. Il fallait, en fait, attendre l'avènement du Laser pour que la température de condensation soit franchie. Ces condensats sont encore un champ de recherches très intense vu les caractères remarquables que présentent et leurs liens avec d'autres domaines de la physique.

On a étudié tout d'abord les propriétés physiques d'un gaz de bosons, ce qui nous a amené à la statistique de Bose-Einstein et aussi à la détermination de la température critique, seuil de condensation. Nous avons calculé aussi le nombre de particules dans les deux phases, Condensée et non condensée, ensuite nous avons exposé quelques techniques de refroidissement et de piégeage des atomes qui ont pour but l'aboutissement à une température critique ainsi qu'une densité élevée des atomes qui permettent la réalisation du phénomène de la condensation.

Dans le dernier chapitre, nous avons calculé la température critique quand le nuage atomique à refroidir soit confiné par un piège harmonique et par suite nous avons calculé les nombres d'occupation des phases condensée et non condensée.

Mots de passe : Condensat de Bose-Einstein, Température de Condensation, Techniques de piégeage et de refroidissement, piège harmonique, Nombre d'occupation.

Abstract:

This paper presents a study of the Bose-Einstein condensation phenomena that was early difficult to verify experimentally. In fact, it was necessary to introduce the Laser techniques in order to ensure the frankness of the temperature of condensation. These condensates are still a very intense field of research considering the remarkable characteristics which present and their links with other fields of physics.

We studied, first, the physical properties of a boson gas, which brought us to the Bose-Einstein statistics and to the determination of the critical temperature, threshold of condensation. We also calculated the number of particles in the two phases, Condensed and non-condensed, then we exposed some techniques of cooling and trapping of the atoms in the purpose to see how the critical temperature as well as the high density of the atoms are realized, which allow the realization of the phenomenon of condensation.

In the final chapter, we calculated the critical temperature when the atomic cloud, to be cooled, is confined by a harmonic trap, and consequently we calculated the occupation numbers of the two phases condensed and non-condensed.

Keywords: Bose-Einstein Condensate, Temperature of Condensation, Trapping and Cooling Techniques, Harmonic Traps, Occupation Numbers.