Table des matières

Introduction

Ce mémoire est principalement à consacré à deux grands outils de l'Analyse, l'analyse de Fourier et la théorie des distributions. Ainsi qu'à diverses applications à des équations de la physique mathématique. Il s'agit de domaines ayant des racines très anciennes mais qui font toujours l'objet de recherches actives et qui ont connu dans une période récente des développements très importants dont nous essaierons de donner une idée.

Le premier chapitre, contient les définitions des distributions qui est une extension de la notion de fonction et les opérations mathématiques qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.

La seconde partie, traite de l'analyse de Fourier cette branche est dominée par les concepts de série et surtout de transformation de Fourier qui permet à étuder les équations aux dérivées partielles à coefficients variables.

Notre objectif dans $3^{ème}$ chapitre est de rendre accessible les idées que nous avons présenté et nous allons réaliser d'une manière détaillée comment résoudre les équation différentieles partielles.

Notations multi-indicielles

Un multi-indice α est un n-uplet d'entiers, $\alpha = (\ \alpha_1, ..., \ \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On appelle longueur de α l'entier

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω comme suit :

$$\partial^\alpha \varphi\left(x\right) \text{ ou } \partial_x^\alpha \varphi\left(x\right) \text{ noté } \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}\left(x\right),$$

c'est-à-dire que

$$\partial^\alpha \varphi\left(x\right) \text{ ou } \partial_x^\alpha \varphi\left(x\right) = \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n} \varphi\left(x\right)$$

Par analogie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Notons encore, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$\beta \leq \alpha \text{ si et seulement si } \beta_i \leq \alpha_i \text{ pour tout } i \in \{1, ..., n\}.$$

On pose aussi

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

On définit la factorielle de α par

$$\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_n!\ .$$

Chapitre 1

Théorie des distributions

Notions et définitions

Contenu

Introduction

La théorie des ditributions: C'est une extension de la notion de fonction, qui a joué un rôle très important dans le développement de l'Analyse. Bien que son introduction par L.Schwartz soit encore relativement récente, elle a permis de tels progrès en théorie des équations aux dérivées partielles et en analyse harmonique que l'on ne saurait plus parler de ces deux branches sans y avoir recours.

1.1 Espace des fonctions $\mathcal{D}(\Omega)$

1.1.1 Support d'une fonction

On définit le support d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(ou\ \mathbb{C})$, notée ***supp*** $\boldsymbol{\varphi}$ par :

$$\boldsymbol{supp\ \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}},$$

c'est-à-dire **l'adhérence** de l'ensemble des x tels que $\varphi(x)$ est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le **plus petit** ensemble **fermé** en dehors duquel φ est identiquement nulle.

1.1.2 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1 *: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. On appelle **fonctions-test** dans Ω les éléments de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions **indéfiniment dérivables** et à **support compact** dans Ω. l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est souvent noté $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. pour K compact dans Ω, on note $\mathcal{C}_k^\infty$ l'espace des fonctions-test à support compact dans K (c'est-à-dire nulles hors de k). On notera*

$$\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : supp\ \varphi\ compact \subset \Omega\}}.$$

Exemple 1.1.1 *: La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}$. En effet, si $|x| > 1$, alors $\varphi(x) = 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. De même, si $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x^2} \in \mathcal{C}^\infty$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \in \mathcal{C}^\infty$. Si $|x| = 1$, les dérivées à droite de φ sont nulles. On montre dans ce cas que l'on a $\varphi^{(k)}(x) = 0$, donc $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. En outre, supp $\varphi = [-1, 1]$ et par conséquent $\varphi \in \mathcal{D}$.

Proposition 1.1.1 *:*

- *Si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}$.*
- *Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors $\alpha\,\varphi \in \mathcal{D}$*

$$\boldsymbol{supp\ (\alpha\varphi) \subset supp\varphi.}$$

1.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

1.2.1 Définition d'une distribution

Définition 1.2.1 *: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle distribution sur Ω, toute* ***forme linéaire continue*** *sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\langle T, \varphi \rangle$ la valeur de T sur $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi T est une distribution sur Ω si :*

– ***d'une part*** : *$\varphi \to \langle T, \varphi \rangle$ est une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire telle que :*

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle && \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \langle T, \lambda\varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle && \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

– ***d'autre part*** : *$\varphi_n \to \varphi$ au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$ entraîne :*

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty$$

L'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$ forme un espace vectoriel complexe noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 1.2.1 *: Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que supp $\varphi \subset K$ (la propriété de continuité),*

$$|\ \langle T, \varphi \rangle\ | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|\ .$$

Le plus petit entier m possible est appelé ***l'ordre*** *de la distribution T (distribution d'ordre fini).*

1.2.2 Exemples de distributions

Fonctions localement sommables :

Définition 1.2.2 *: Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dit* ***localement sommable*** *si elle est sommable sur toute ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, si*

$$\int_K |\ f(x)|\ dx\ < +\infty.$$

On dit aussi qu'elle est localement intégrable .

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,(\text{ou } \mathbb{C})$ une fonction localement sommable, on définit la distribution **régulière** associée à f, souvent notée T_f, par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\;dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

L'intégrale ci-dessus existe car on intégre en fait, non sur $\mathbb{R}$, mais sur le support compact de φ.

(*i*) $\boldsymbol{T_f}$ **est linéaire** : en effet, soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\langle T_f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)\right)\;dx \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_1(x)\,dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_2(x)\;dx \\
&= \alpha \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T_f, \varphi_2 \rangle\ .
\end{aligned}$$

(*ii*) $\boldsymbol{T_f}$ **est continue** : en effet, par hypothèse la suit (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire tous les supports des φ_n sont contenus dans un même compact $[a,b]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suit des dérivées $\left(\varphi_n^{(j)}\right)$ converge uniformément vers $\varphi^{(j)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[a,b]} \left|\varphi_n^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)\right|\right) = 0.$$

Montrons que $\langle T_f, \varphi_n \rangle$ converge vers $\langle T_f, \varphi \rangle$. On a

$$\begin{aligned}
\mid \langle T_f, \varphi_n \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle \mid &= \mid \langle T_f, \varphi_n - \varphi \rangle \mid \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right)\;dx \right| \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x) \mid \; \mid \varphi_n(x) - \varphi(x) \mid\;dx \\
&= \left(\int_a^b \mid f(x) \mid dx\right) . \left(\sup_{x\in[a,b]} \left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right|\right).
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 *: Toute fonction $f(x)$ localement sommable définit une distribution T_f par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dans $\mathbb{R}^n$, toute fonction $f(x_1,...,x_n)$ localement sommable définit une distribution T_f par la relation

$$\begin{aligned}\langle T_f,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,...,x_n)\,\varphi(x_1,...,x_n)\,dx_1...x_n, \quad \varphi\in\mathcal{D}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad x=(x_1,...,x_n)\,.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.1 *: Deux fonctions localement sommables f et g définissent la même distribution (régulière), si et seulement si, elles sont égales presque partout.*

$$\boxed{T_f = T_g \Longleftrightarrow f = g \quad p.p.}$$

Distribution de Dirac

Définition 1.2.3 *: La Distribution de **Dirac** à l'origine est fonctionnelle, notée $\boldsymbol{\delta}$, défini par :*

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

1.2.3 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.2.4 (Suite convergente de distributions) *: On dit qu'une suite $(T_n)_{n\,\geq 1}$ de distributions sur Ω converge vers $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\ \langle T_n,\varphi\rangle = \ \langle T,\varphi\rangle\,.$$

*Cette notion de convergence est donc une **convergence simple**. On écrira dans cette situation*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \ T \quad ou \quad T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \ T \quad lorsque\ n\longrightarrow\infty.$$

1.2.4 Distributions à support compact

Support d'une distributiont :

Restriction d'une distribution à un ouvert : Considérons deux ouverts $\Omega\subset\Omega'$ de $\mathbb{R}$ et soit $T\in\mathcal{D}'(\Omega')$. Nous pouvons associer à T une distribution T_Ω appelée restriction de T

à Ω, définie pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ par :

$$\langle T_\Omega, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle ,$$

et dans laquelle $\tilde{\varphi}$ est le prolongement par 0 de φ à Ω'.

Définition 1.2.5 *: Le support de T, noté supp T est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert ω de Ω tel que la restriction de T à ω soit nulle.*

Distributions à support compact :

Définition 1.2.6 *: On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact lorsque supp T est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\xi'(\Omega)$.*

$$\xi'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega), \textit{supp } T \textit{ compact dans } \Omega\}.$$

Evidemment, $\xi'(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1.3 Opérations sur les distributions

1.3.1 Dérivation des distributions

Définition de la dérivation:

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En faisant une intégration par parties :

$$\langle\, f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\ dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\ (x)\,\varphi'(x)\ dx = -\ \langle\ f\ , \varphi' \rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \Omega \subset \mathbb{R}$$

car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est donc conduit à la définition générale suivante :

Définition 1.3.1 *: On appelle dérivée T' d'une distribution T, la fonctionnelle définie par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\ \langle T, \varphi' \rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \Omega \subset \mathbb{R}.$$

Proposition 1.3.1 *: Tout distribution admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions.*

Démonstration. Soient T une distribution et $\varphi \in \mathcal{D}$. On a par définition,

$$\left\langle T^{(j)}, \varphi \right\rangle = (-1)^{(j)} \left\langle T, \varphi^{(j)} \right\rangle,$$

où $\varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(j)}$ existent car $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Montrons maitenant que $T^{(j)}$ est une distribution. Elle est linéaire : soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \Omega \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle T^{(j)}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \right\rangle = \alpha \left\langle T^{(j)}, \varphi_1 \right\rangle + \beta \left\langle T^{(j)}, \varphi_2 \right\rangle.$$

Pour établir la continuité de $T^{(j)}$, on suppose que la suit (φ_n) converge dans $\mathcal{D}$ vers φ. Alors, par définition, $\left(\varphi_n^{(j)}\right)$ converge uniformément vers $\varphi^{(j)}$ et par conséquent

$$\left\langle T^{(j)}, \varphi_n \right\rangle = (-1)^{(j)} \left\langle T, \varphi_n^{(j)} \right\rangle,$$

converge vers

$$(-1)^{(j)} \left\langle T, \varphi^{(j)} \right\rangle = \left\langle T^{(j)}, \varphi \right\rangle.$$

■

Exemples:

Dérivée de la fonction d'Heaviside

Rappelon que la fonction d'Heaviside (dit échelon unité) est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée H. Au sens des fonctions, la dérivée de $H(x)$ n'exite pas au point $x = 0$. Mais au sens des distributions, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}$;

$$\langle H', \varphi \rangle = - \ \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \ dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle ,$$

car $\varphi(+\infty) = 0$. Par conséquent, $H' = \delta$, c'est-à-dire la distribution H a pour dérivée la distribution de Dirac. La discontinuité que représente $H(x)$ à l'origine apparaît dans la dérivée de distribution associée, sous la forme d'une masse $(+1)$ ponctuelle placée à l'origine. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de $H(x)$ pour $x = 0$, qui est un ensemble de mesure nulle. Par réitérations, on obtient

$$H^{(m+1)} = \delta^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dérivée de la distribution de Dirac

On a

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \ \langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) .$$

En général, on a

$$\left\langle \delta^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) , \ m \in \mathbb{N}.$$

Extension au cas de plusieurs variable:

Dans le cas de plusieurs variable, on définit la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ d'une distribution T, par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \ \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle , \quad i = 1, 2, ..., m.$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \ \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle ,$$

où $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathcal{C}^\infty$, donc $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$, et par conséquent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Plus généralement, on a

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle .$$

1.3.2 Multiplication des distributions

Le produit de deux distributions arbitraires n'est pas toujours défini. Si une distribution est définie par une fonction localement sommable $f(x)$, le produit $f^2(x)$ n'est pas forcément sommable. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est localement sommable mais $f^2(x) = \frac{1}{|x|}$ n'est pas sommable à l'origine. Dans ce qui suit, nous allons définir le produit d'une distribution T par une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$. Supposons tout d'abord que cette distribution soit associée à une fonction $f(x)$ localement sommable. On a, pour $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \varphi(x) \, dx = \langle f, g\varphi \rangle .$$

Rappelons que $g\varphi \in \mathcal{D}$ (voir proposition 1.1.1). On est ainsi conduit à la

Définition 1.3.2 *: Le produit d'une distribution quelconque T par une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ est défini par*

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle Tg, \varphi \rangle , \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

On vérifie aisément que le produit ainsi défini est bien une distribution. soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle gT, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \ \langle gT, \varphi_1 \rangle + \beta \ \langle gT, \varphi_2 \rangle ,$$

donc gT est linéaire. Pour la continuité, on a par hypothèse $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. Donc $g\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} g\varphi$ et dès lors

$$\lim_{n\to\infty} \ \langle gT, \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \ \langle T, g\varphi_n \rangle = \langle T, g\varphi \rangle = \langle gT, \varphi \rangle .$$

1.3.3 Translation d'une distribution

Soit f une fonction localement sommable, on peut définir la fonction translatée de f par a, notée $\tau_a f$, en posant $\tau_a f(x) = f(x-a)$. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_a f)(x) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) \varphi(x)\, dx.$$

En posant $y = x - a$, on obtient

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y+a)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (\tau_{-a}\varphi)(y)\, dy = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

Et généralement, pour une distribution T, on a

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle,$$

soit explicitement,

$$\langle T(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle.$$

Définition 1.3.3 : *La distribution $\tau_a T$ définie ci-dessus est dite translatée de T par la translation a.*

Exemple 1.3.1 : *La distribution de Dirac δ_a au point a, représente la translatée de δ par a,*

$$\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x+a) \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

1.3.4 Transposée et parité d'une distribution

Soit f une fonction localement sommable et soit $\overset{\vee}{f} : x \longmapsto f(-x)$, sa transposée. La distribution $T_{\overset{\vee}{f}}$ associée à $\overset{\vee}{f}$ est déterminée par

$$\left\langle T_{\overset{\vee}{f}}, \varphi \right\rangle = \int f(-x) \varphi(x)\, dx = \int f(x) \varphi(-x)\, dx = \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle,$$

où $\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Définition 1.3.4 *: Le transposée d'une distribution T, notée $\overset{\vee}{T}$, est la distribution définie par*

$$\left\langle \overset{\vee}{T}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

La notion de transposée d'une distribution permet de définir les distributions paires et impaires comme pour les fonctions.

Définition 1.3.5 *: Une distribution T est dite paire si $\overset{\vee}{T} = T$, c'est-à-dire*

$$\left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

et elle est dite impaire si $\overset{\vee}{T} = -T$, c'est-à-dire

$$\left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = - \ \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Chapitre 2

Transformation de Fourier

Contenu

Introduction

L'analyse de Fourier: Dite encore analyse harmonique, cette branche est dominée par les concepts de série et surtout de transformation de Fourier, ainsi que par l'opération de convolution qui leur est étroitement reliée.

On peut, sous des hypothèses trés générales, représenter une fonction f définié dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme suivante

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

oû la fonction $\hat{f}$ définie dans $\mathbb{R}^n$ et qui se déduit de f par une formule analogue s'appelle la transformée de Fourier de f.

Il faut voir cette formule de la maniére suivante. Elle permet d'écrire une fonction quelconque f comme une "superposition" de fonction oscillautes simples : les application $x \to e^{ix\xi}$, chacune d'elles ayant une amplitude $|\hat{f}(\xi)|$, et un déphasage $arg\hat{f}(\xi)$.

Lorsquon veut analyser qualitativement ou quantitativement une fonction, l'idée la plus simple est la "en amplitude" fondée sur les valeurs ponctuelles : en quels points x la fonction est-elle nulle, "petite", "grande"...?

L'analyse de Fourier permet d'y superposer une analyse "en fréquence" : quelles sont les fréquences ξ qui contibuent à l'écriture de f ci-dessus, y contribuent-elle peu ou beaucoup...?

Ce point de vue revient à faire l'analyse "en amplitude" de $\hat{f}$.

Peut-être d'apparence moins naturelle, l'analyse en fréquence s'est révélée d'une importance aussi grande que l'analyse en amplitude (leurs rôles sont symétriques en mécanique par example). Elle prend même un caractère prédominant dans l'étude d'un certain nombre de questions.

La transformation de Fourier : a néanmoins un inconvénient, son caractère global. Pour le traitement du signal ou pour l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients variables, l'analyse en fréquence reste indispensable,mais il faut pouvoir la mener localement en 1es variables de temnps ou d'espace.

2.1 Transformée de Fourier d'une fonction

Définition 2.1.1 *: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i.e. une fonction sommable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. **La transformée de Fourier** de f est la fonction, notée $\mathcal{F}f$ ou $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ et définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par :*

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx. \tag{2.1.1}$$

Proposition 2.1.1 *: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f}$ est continue, bornée, $\widehat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\xi \to \pm\infty$ (Riemann-Lebesgue) et $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Démonstration. On a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction sous intégrale est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. En outre, on a

$$\left|f(x) e^{-ix\xi}\right| = |f(x)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Le second membre appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et d'après le théorème de continuité pour les fonctions définies par une intégrale, la fonction $\widehat{f}$ est continue.Par ailleurs, on a

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

ce qui montre que $\widehat{f}$ est bornée. De plus,

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Montrons maintenant que $\widehat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\xi \longrightarrow \pm\infty$. En effet, l'espace des fonctions continues par morceaux à support borné sur $\mathbb{R}^n$ ou celi des fonctions en escalier est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Tout fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ peut être approchée au sens de la norme de $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions en escalier à support borné. On peut donc trouver une fonction en escalier φ; cela signifie qu'il existe des intervalles bornés $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ et des valeurs $c_1, ..., c_n$ tels que :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]},$$

où $\mathbf{1}_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$ désigne la fonction caractéristique de $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$, c'est-à-dire égale à 1 si $x \in [\alpha_{k-1},\alpha_k]$ et à 0 sinon. Donc φ s'écrit comme combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'intervalles et on peut calculer sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ par linéarité. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]} \right) e^{-ix\xi} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-ix\xi} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ic_k}{\xi} \left(e^{-i\alpha_k \xi} - e^{-i\alpha_{k-1}\xi} \right).
\end{aligned}$$

Dés lors

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k| \right),$$

et pour $\xi \longrightarrow \pm\infty$, on a $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)\right| + |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \varepsilon.$$

■

2.1.1 Transformée de Fourier inverse

Définition 2.1.2 (Transformée de Fourier conjuguée) *: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle **transformée de Fourier conjuguée** de f la fonction :*

$$\overline{\mathcal{F}}(f) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

On a alors le théorème d'inversion suivant :

Théorème 2.1.1 (Formule d'inversion) *: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a presque partout :*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad i.e. \quad f = \frac{1}{(2\pi)^n} \overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\right).$$

En particulier, admet un représentant continu.

Proposition 2.1.2 : *soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons que f est dérivable et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\xi\mathcal{F}\{f(x)\} = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Si en outre, f admet des dérivées jusqu'a l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\xi)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-ix\xi} dx \\ &= f(x)\, e^{-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi} dx.\end{aligned}$$

on sait que si une fonction intégrable admet une limite, alors cette dernière est nulle. Par hypothèse, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et il suffit de monter que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ existe. Nottons que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f(t)\, dt.$$

Comme f' est intégrable, alors $f(x)$ a une limite finie pour $x \to^{+}_{-} \infty$. Cette limite ne peut être que zéro car sinon f ne serait pas intégrable. Dés lors,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi} dx = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Plus généralement, puisque f admet des dérivées jusqu'a l'ordre n alors en répétant le processus ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

■

2.2 Transformée d'une distribution

2.2.1 Fonctions à décroissance rapide

Définition 2.2.1 *: L'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide.*

Exemple 2.2.1 *:*

1) *La fonction* e^{-x^2} *est indéfiniment dérivable et*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^{\beta} e^{-x^2} = 0,$$

elle est à décroissance rapide et donc $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$.

2) *La fonction* $e^{-|x|}$ *est à décroissance rapide mais n'est pas de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *donc* $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}$.

3) *La fonction* $\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *mais n'est pas à décroissance rapide, donc* $\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}$.

Proposition 2.2.1 *: La transformée de Fourier d'une fonction de* $\mathcal{S}$ *est encore une fonction de* $\mathcal{S}$.

2.2.2 Distributions tempérées

Définition 2.2.2 *: On appelle distribution tempérée, tout fonctionnelle linéaire continue définie sur* $\mathcal{S}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note* $\mathcal{S}'$ *(espace dual de* $\mathcal{S}$*). On vérifie que :* $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Définition 2.2.3 *: La transformée de Fourier d'une distribution tempérée* T *est la distribution* $\mathcal{F}T$ *(que l'on note aussi* $\widehat{T}$*) définie par*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

Proposition 2.2.2 *: Si* $T \in \mathcal{S}'$, *alors* $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$.

Démonstration. voir [A.LES] ■

Remarque 2.2.1 *: De même, on définit la transformée de Fourier (conjugué)* $\overline{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *en posant*

$$\left\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ *et* $T \in \mathcal{S}'$ *avec* $\overline{\mathcal{F}}\varphi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{ix\xi} dx$. *Par ailleurs, si* $\varphi \in \mathcal{S}$ *et* $T \in \mathcal{S}'$, *alors*

$$\left\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}\overline{\varphi}} \right\rangle = \left\langle \overline{\overline{T}, \mathcal{F}\overline{\varphi}} \right\rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{T}, \overline{\varphi}} \right\rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{T}}, \varphi \right\rangle,$$

d'où $\overline{\mathcal{F}}T = \overline{\mathcal{F}\overline{T}}$.

Proposition 2.2.3 *: Si T est une distribution tempérée, alors sa dérivée T' est aussi tempérée et on a*

$$\mathcal{F}T' = i\xi\mathcal{F}T, \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \widehat{T'} = i\xi\widehat{T}.$$

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a

$$\mathcal{F}T^{(n)} = (i\xi)^n \mathcal{F}T, \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \widehat{T^{(n)}} = (i\xi)^n \widehat{T}.$$

Démonstration. voir [A.LES] ■

Transformation de Fourier dans L^2

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ i.e de carré intégrable. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire et $\| \|_2$ la norme associée à ce produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x)\, dx \\ \|f\|_2 &= \sqrt{\langle f, f\rangle}. \end{aligned}$$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

On sait que les deux inclusions $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ sont fausses.

Remarque 2.2.2 *: Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors la transformée de Fourier $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.*

Chapitre 3

Résolution de l'équation de la chaleur

Contenu

Introduction

L'équation de la chaleur : linéaire est constitue le modèle type de la classe des équations aux dérivées partielles paraboliques qui décrivent, en générale, un phénomène de diffusion. Son analyse mathématique et la compréhension des propriétés qualitatives de ses solutions ont conduit à développer des outils dont l'extension permet de mieux aborder les modèles non linéaires plus complexes à appréhender.

3.1 Propriétés et applications de la transformation de Fourier

3.1.1 Linéarité

La transformation de Fourier est linéaire, comme le crochet de dualité; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f+g) &= \mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g)=\widehat{f}+\widehat{g} \\ \mathcal{F}(\lambda f) &= \lambda\mathcal{F}(f)=\lambda\widehat{f}. \end{aligned}$$

3.1.2 Cotransformation de Fourier

Définition 3.1.1 *: **La cotransformation de Fourier** de φ est la fonction, notée $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ et définie par :*

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}(\varphi).$$

Dans le cas où φ est une fonction sommable, on a notamment :

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi.$$

La notation s'explique par le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *: La cotransformation de Fourier est l'inverse de la transformation de Fourier; c'est-à-dire que pour toute distribution $T\in\mathcal{S}'$, on a :*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{T}\right)=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T)=T=\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(T).$$

Cette formule est parfois appelée formule de réciprocité.

Démonstration. Pour l'établir, il suffit de la montrer pour une fonction $\varphi\in\mathcal{S}$ (à cause de (2.2.2)). Dans ce cas, elle se ramène à une utilisation de la formule de Fubini et à un passage à la limite; nous donnons ce calcul important dans le cas de la dimension

1 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{-iy\xi}dy\right)e^{ix\xi}d\xi \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{i(x-y)\xi}d\xi\right)dy \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,\frac{\sin\left[(x-y)A\right]}{\pi(x-y)}dy \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x-\frac{z}{A}\right)\frac{\sin z}{\pi z}dz \\
&= \varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin z}{\pi z}dz = \varphi(x)
\end{aligned}$$

car la dernière intégrale est exactement égale à 1 (c'est la raison d'être du coefficient $1/2\pi$).

■

3.1.3 Multiplication et convolution

Définition 3.1.2 (Produit de convolution) *: Soient f et g, deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle **produit de convolution** de f et de g la fonction notée $f*g$ définie par :*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

On a alors $(f*g)\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Si φ et ψ sont deux fonctions de $\mathcal{S}$, alors $\widehat{\varphi},\widehat{\psi}$ et leur produit également appartiennent à $\mathcal{S}$ et l'on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\xi)\,\widehat{\psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,e^{-ix\xi}dx\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\,e^{-iy\xi}dy \qquad (2.3.5)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,\psi(y)\,e^{-i(x+y)\xi}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,\psi(z-x)\,dx\right)e^{-iz\xi}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(\varphi*\psi)(z)\,e^{-iz\xi}dz \\
&= \mathcal{F}(\varphi*\psi)
\end{aligned}$$

Une formule similaire existe pour $\mathcal{F}^{-1}$, et on peut aussi appliquer $\mathcal{F}^{-1}$aux deux membres de(2.3.5) ; enfin, on peut remplacer l'une des fonctions par un élément arbitraire de $\mathcal{S}'$. On obtient alors les égalités suivantes :

$$\forall T \in \mathcal{S}', \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \qquad \begin{array}{c} \widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{T} \\ \widehat{\varphi T} = \frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\varphi} * \widehat{T}. \end{array} \tag{2.3.6}$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier (et aussi la cotransformation) échangent la multiplication et le produit de convolution.

3.1.4 Formules de Parseval et Plancherel

Si φ et ψ sont deux fonctions de $\mathcal{S}$, On peut calculer :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(x)\, \psi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(x)\, \mathcal{F}^{-1}\widehat{\psi}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi \right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(x)\, e^{ix\xi} dx \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi)\, \overline{\widehat{\varphi}}(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \right\rangle. \end{aligned}$$

Cette formule reste vraie pour deux fonctions de L^2; elle est connue sous le nom de formule de Plancherel:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle.$$

Lorsque $g = f$, on obtient la formule de Parseval en prenant la racine carrée :

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\| f \right\|_{L^2}.$$

Il en résulte notamment que si f est de carré intégrable, alors $\widehat{f}$ aussi, ainsi que $\mathcal{F}^{-1}(f)$. Par conséquente, l'espace L^2 est globalement invariant par la transformation de Fourier, comme $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

Les formules(2.3.6) peuvent être employées plus généralement

quand les deux membres ont un sens. Par exemple, si f et g sont des fonctions de L^2, alors leurs transformées aussi et $f * g \in L^1$; on a donc au sens des fonctions sommables ordinaires $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}$, et ce produit appartient à L^∞.

Inversement, la formule de Plancherel est vraie pour le crochet de dualité de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$:

$$\forall T \in \mathcal{S}',\ \forall \varphi \in \mathcal{S}, \qquad \langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \widehat{T}, \widehat{\varphi} \right\rangle.$$

3.1.5 Applications de la transformation de Fourier

Le problème de Cauchy

En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ a > 0$$

avec la condition initiale : $u(x,0) = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la température à l'instant $t = 0$.

Pour résoudre l'équation ci-dessus, on considère la transformée de Fourier par rapport à la variable x seulement. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, e^{-ix\xi} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-ix\xi} dx,$$

et

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-ix\xi} dx.$$

En tenant compte de la proposition 2.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right\} &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi}}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, e^{-ix\xi} dx = i\xi \widehat{u}(\xi,t), \\
\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right\} &= \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-ix\xi} dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,t).
\end{aligned}$$

Dès lors, l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi,t).$$

En intégrant cette équation en l'inconnue $\widehat{u}(\xi,t)$ de la variable t, on obtient

$$\widehat{u}(\xi,t) = C e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

Or

$$\widehat{u}(\xi,0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\xi} dx$$

donc

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-a^2\xi^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\xi} dx = e^{-a^2\xi^2 t} \widehat{\varphi}(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = e^{-a^2\xi^2 t} \mathcal{F}\{\varphi(x)\}.$$

Comme $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$, on peut poser $u(x,t) = f * g$, avec $f = \varphi(x)$ donnée et g telle que : $\mathcal{F}\{g\} = \widehat{g}(\xi) = e^{-a^2\xi^2 t}$. D'après 3.3.2, on a

$$g = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Finalement, on obtient la solution

$$u(x,t) = \varphi * \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy.$$

3.2 Résolution de l'équation de la chaleur au sens des distributions

Définition 3.2.1 : *on dit que la distribution* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *est une solution élémentaire de l'operateur* $P(D)$ *si* E *satisfait l'égalité*

$$P(D)\,E = \delta$$

au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

($P(D)$ *un opérateur différentiel linéaire d'ordre au plus* m *et à coefficients contants*).

3.2.1 Le problème de Cauchy

pour l'équation de la chaleur consiste à trouver $u(t,x)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ réel et t dans$[0,T]$, alors le problème admet au sens des distributions une solution unique $u \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}^+, \mathcal{S}'(\mathbb{R})\right)$ donnée par

$$u(x,t) = E(x,t) * f(x)$$

avec

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

Si f est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, alors u est une fonction seulement continue.

Dans le cas de variables réelles $(t, x \in \mathbb{R})$, la distribution

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} H(t)$$

où $H(t)$ est la distribution de Heaviside (valant 1 pour $t > 0$ et 0 sinon) est solution fondamentale de l'équation $DE = \delta$ où D est l'opérateur

$$D = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle DE, \varphi\rangle &= -\left\langle E, \partial_t\varphi - a^2\partial_{xx}\varphi\right\rangle \\ &= -\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}} \left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\left(\partial_t\varphi - a^2\partial_{xx}\varphi\right) dxdt.\end{aligned}$$

Évaluons séparément les deux intégrales

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}} \left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\left(\partial_t\varphi\right) dxdt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty} \left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\left(\partial_t\varphi\right) dxdt.\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t\left(\left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\right)\varphi dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\varphi(x,t)\right]_\varepsilon^{+\infty} dx$$

soit

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2a^4t^{5/2}} - \frac{1}{a^2t^{3/2}}\right) e^{-x^2/4a^2t}\varphi dxdt - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(4\pi a^2\varepsilon\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon)\, dx.$$

De la même manière, on calcule la deuxième intégrale

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}} \left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\left(a^2\partial_{xx}\varphi\right) dxdt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty} \left(4\pi a^2 t\right)^{-1/2} e^{-x^2/4a^2t}\left(a^2\partial_{xx}\varphi\right) dxdt.\end{aligned}$$

En intégrant deux fois par parties, et en utilisant le fait que la fonction φ s'annule à l'infini

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2a^4t^{5/2}} - \frac{1}{a^2t^{3/2}}\right) e^{-x^2/4a^2t}\varphi dxdt$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle DE, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(4\pi a^2\varepsilon\right)^{-1/2} e^{-x^2/4ca^2\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon)\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\right)^{-1/2}\varphi\left(2a^2\sqrt{\varepsilon y}, \varepsilon\right) dy\end{aligned}$$

par changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{4a^2\varepsilon}}$, on obtient finalement

$$\langle DE, \varphi\rangle = \varphi(0,0).$$

Par conséquent E est bien une solution élémentaire de l'opérateur D. Le problème considéré pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ admet donc une solution unique

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} dy.$$

Conclusion

La théorie des distributions sont en fait une généralisation de notion de fonction, auxquelles on peut étendre nombre de concepts de l'analyse, notamment le calcul différentiel.

Dans ce travail, nous avons étudré les définitions des bases : les espaces des fonctions et des distributions, et opérations mathématique puis on introduit dans cadre génerale les transformations de Fourier et on essayer d'appliquer cette transformation sur les équotions de la chaleur pour trouver la solution de ce équation.

Bibliographie

[1] A.LECLAIRE, Analyse de Fourier. ENS Cachan. 2016-2017.

[2] A.LESFARI, *Distrubition, analyse de Fourier et transformation de Laplace, cours et exercices,* ISBN : 9782729876296, 2012.

[3] F.BAYEN & C.MARGARIA, *Problèmes de mathematique appliquées. Tome 3, Distributions analyse de Fourier transformation de laplace.* 1988.

[4] F.JEDRZEJEWSKI, *Introdiction aux méthodes numériques deuxième édition. 2005.*

[5] H.BOUMAZA, *Théorie des distributions.* U.P.N-Sup Galilée. 2015-2016.

[6] J-M.BONY, *Théorie des distributions et analyse de Fourier, cours d'analyse.* Janvier 2001.

[7] T.LACHAND-ROBERT, *Analyse harmonique, distributions, convolution.* Maître de Conférences à Université de Paris VI. 10 nov 1993.