

colors of the beads

Propriétés des relations binaires et ternaires

Abdelkarim *MEHENNI*

6 juin 2016

Table des matières

Introduction	1
I Relations binaires et classes particulières	3
1 Relations binaires	4
1.1 Notions et exemples préliminaires	4
1.1.1 Produit cartésien	4
1.1.2 Relation binaire	5
1.2 Représentations des relations binaires	6
1.2.1 Représentation matricielle	6
1.2.2 Représentation graphique	6
1.2.3 Domaine et image	7
1.2.4 Ensemble des relations	8
1.3 Interactions des relations binaires avec les opérations ensemblistes	9
1.4 Propriétés des relations binaires	12
1.4.1 Réflexivité, irréflexivité et non-réflexivité	12
1.4.2 Symétrie et antisymétrie	12
1.4.3 Transitivité et intransitivité	13
1.4.4 Propriétés des relations binaires sur X	14
1.4.5 La clôture transitive	15
2 Classes particulières des relations binaires	17
2.1 Relations d'équivalences	17

2.1.1	Classes d'équivalences	18
2.1.2	Ensemble quotient	19
2.2	Relations d'ordres	19
2.2.1	Éléments particuliers d'un ensemble ordonné	22
2.2.2	Représentation d'un ensemble ordonné et diagramme de Hasse . . .	24
2.2.3	Morphisme d'ensembles ordonnés	25
2.2.4	Sections initiales et sections finales d'un ensemble ordonné	26
2.3	Classes particulières d'ensembles ordonnés	27
2.3.1	Chaînes, antichaînes et paramètres fondamentaux	27
2.3.2	Extensions linéaires d'un ensemble ordonné	30
2.3.3	Sommes et produits d'ensembles ordonnés	31
2.3.4	Bon ordre	33
2.3.5	Treillis (lattices)	34

II Relations n-aires et ternaires 37

3 Relations n-aires 38

3.1	Définitions de base et exemples	38
3.2	Propriétés des relations n-aires sur X	39
3.3	Les projections d'une relation n-aire	42
3.4	Liens entre les relations n-aires et binaires	43

4 Relations ternaires 46

4.1	Opérations de base sur les relations ternaires	46
4.2	Propriétés des relations ternaires	47
4.3	Clôtures d'une relation ternaire	50
4.4	Les projections d'une relation ternaire	52
4.5	Ordre cyclique	54
4.5.1	Définitions et exemples	54
4.5.2	Relations binaires associées à un ordre cyclique	55
4.5.3	Extensions linéaires d'un ordre cyclique	57

Introduction

Les relations entre les éléments d'ensembles se produisent dans de nombreux contextes. Chaque jour, nous traitons des relations telles que celles entre un employé et son salaire ou un employé et les tâches de travail, une personne et un parent ou bien les relations familiales et ainsi de suite. Les relations entre les éléments d'ensembles sont représentées en utilisant la structure (ou la notion) appelée une relation, qui est juste un sous-ensemble du produit cartésien des ensembles. Les relations peuvent être utilisées pour modéliser, expliquer ou résoudre des problèmes, tels que la détermination des paires de villes qui sont reliées par des vols des compagnies aériennes dans un ordre, trouver un ordre viable pour les différentes phases d'un projet complexe, ou la production d'un moyen utile pour stocker des informations dans des bases de données informatiques.

Depuis les années soixante-dix du siècle dernier, la situation a considérablement évolué. Les travaux sur les relations sont multipliés pour répondre aussi bien à des motivations internes de « mathématiques pures » qu'aux problèmes soulevés à l'occasion de l'usage de ces structures par des « mathématiques appliquées » dans des domaines comme la recherche opérationnelle, la microéconomie, l'analyse et la fouille de données, la biologie, la robotique, l'informatique théorique, l'algorithmique, etc. Aujourd'hui, il faudrait au moins des 1000 pages pour présenter seulement une synthèse des résultats obtenus.

Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines où les concepts de différentes classes (binaires, ternaires, ..., n-aires). Toutefois, celles-ci sont relativement récentes. Certes, en mathématiques, les relations binaires, notamment, la notion d'ordre des grandeurs est connue depuis longtemps et c'est au seizième siècle qu'apparaissent pour la première fois les symboles $>$ et $<$ pour désigner « plus grand que » et « plus

petit que » . Mais la notion abstraite d'ordre définie comme un type particulier de relation transitive n'a été élaborée qu'entre les années 1880 et 1914 par des mathématiciens et/ou logiciens comme Peirce, Peano, Schröder, Cantor, Dedekind, Russel, Huntington, Scheffer et Hausdorff (voir [1]).

Ces raisons et l'importance du sujet des relations étaient derrière le choix de ce sujet pour un mémoire de master sur les relations binaires et ternaires. Dans lequel, nous allons discuter les différents concepts et propriétés de différentes classes des relations (relation binaire, relation ternaire, ..., relation n-aire). Aussi, des classes particulières des relations binaires telles que les relations d'équivalences et les ensembles ordonnés ont été étudiées. Dans le cadre de relations ternaires, nous présenterons les différentes notions et propriétés généralisées des relations binaires aux ternaires.

Ce mémoire est divisé en deux parties, chaque partie contient deux chapitres.

La première partie porte sur les relations binaires et classes particulières pour ce type de relations. Dans le chapitre 1, nous donnons des rappels sur les relations binaires. Dans le chapitre 2, nous présentons des classes particulières des relations binaires (les relations d'équivalences et relations d'ordres).

La deuxième partie est divisée en deux chapitres aussi.

Le chapitre 1 porte sur les relations n-aires et leurs propriétés fondamentales. Dans chapitre 2, nous intéressons aux relations ternaires comme une classe importante des relations n-aires qui nous aident à mieux comprendre les généralisations des notions et des propriétés des relations binaires aux relations ternaires. On va étudier en détails cette classe des relations ternaires. Premièrement, nous présentons les opérations et les propriétés de cette classe des relations. Deuxièmement, nous étudions les projections binaires d'une relation ternaire. Enfin, on va étudier les ordres cycliques comme cas particulier important des relations ternaires.

Première partie

Relations binaires et classes particulières

Chapitre 1

Relations binaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions de base concernant les relations binaires, les ensembles ordonnés, les bon ordres et les treillis. Pour plus détails on peut consulter [12], [6],[1], [20], [5], [19], [21].

1.1 Notions et exemples préliminaires

Dans cette section on représente quelques notions et définitions de base pour les utiliser dans les sections suivantes.

1.1.1 Produit cartésien

Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (**cas fini discret**), ou $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ (**cas infini discret**).

Définition 1.1 (Produit cartésien) Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des ensembles, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ est l'ensemble des suites $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, avec pour tout $i : x_i \in X_i$. Ces suites sont encore appelées « vecteurs » ou « n -uples ». Pour tout ensemble X , on note X^n le produit cartésien $X \times X \times \dots \times X$ (n fois). Les éléments de X^n sont les n -uples d'éléments de X .
En particulier pour $(n = 2)$: Soient X et Y deux ensembles non vides.

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \text{ et } y \in Y\}$$

Si $X = Y$, $X \times Y = X^2$ (**carré cartésien**).

Notation : Soit $(x, y) \in X \times Y$.

x est la **première coordonnée** du couple (x, y) .

y est la **deuxième coordonnée** du couple (x, y) .

Si $((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2$. Alors :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y',$$

$$(x, y) \neq (x', y') \Leftrightarrow x \neq x' \text{ ou } y \neq y'.$$

1.1.2 Relation binaire

Définition 1.2 (Relation binaire) Soient X et Y deux ensembles. On appelle **relation binaire** de X vers Y toute partie de $X \times Y$. Si $\mathfrak{R}$ est une relation binaire de X vers Y et si $(x, y) \in \mathfrak{R}$, on note alors $x\mathfrak{R}y$ ou $\mathfrak{R}(x, y)$.

On appelle **relation binaire sur un ensemble** X , toute relation binaire de X dans X .

Exemple 1.1

i) Soient $X = \{\text{Albert}, \text{Bernard}, \text{Charles}\}$, $Y = \{\text{Zo}, \text{Yolande}, \text{Xavire}, \text{Wanda}\}$

Et la relation $a\mathfrak{R}b$ si et seulement si a est le **mari** de b .

$$\mathfrak{R} = \{(\text{Albert}, \text{Zo}), (\text{Bernard}, \text{Wanda}), (\text{Charles}, \text{Yolande})\}.$$

ii) Soient $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Définition 1.3 (Relation inverse) La relation inverse, notée $\mathfrak{R}^T$, d'une relation $\mathfrak{R}$, est la collection de toutes les paires (y, x) telles que (x, y) satisfait $\mathfrak{R}$, Ainsi :

$$\mathfrak{R}^T \equiv \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathfrak{R}\}.$$

Exemple 1.2 Sur l'exemple (1.1.(ii)) on a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^T &= \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), \dots\} \\ &= \{(x^2, x) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

1.2 Représentations des relations binaires

On suppose que X et Y sont des ensembles finis de cardinal respectif $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$.

1.2.1 Représentation matricielle

On peut représenter $\mathfrak{R}$ par une **matrice** $M_{\mathfrak{R}} = (r_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ comportant $\mathbf{m}$ lignes et $\mathbf{n}$ colonnes dont les coefficients sont 0 ou 1. Les éléments de la matrice $M_{\mathfrak{R}}$ sont définis de la manière suivante :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathfrak{R} y_j \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Exemple 1.3 Reprenons l'exemple (1.1.(i)). La matrice $M_{\mathfrak{R}}$ de la relation $\mathfrak{R}$ est :

$$M_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1 [2] Si $M_{\mathfrak{R}}$ est la matrice associée d'une relation $\mathfrak{R}$, la **matrice associée** de la relation inverse $\mathfrak{R}^T$ est tout simplement la **transposée** de $M_{\mathfrak{R}}$:

$$M_{\mathfrak{R}^T} = (M_{\mathfrak{R}})^t.$$

1.2.2 Représentation graphique

On peut représenter $\mathfrak{R}$ par un **graphe bipartite** (c'est à dire qu'il y a une partition $X \cup Y$ des sommets du graphe et que chaque arc va de X vers Y).

On définit maintenant le graphe de $\mathfrak{R}$ comme suit :

$$G_{\mathfrak{R}} = (X \cup Y, \mathfrak{R})$$

Remarque 1.1 (Graphe d'une Relation inverse) Le graphe de $\mathcal{R}^T$ est obtenu en inversant les flèches d'arcs du graphe de $\mathcal{R}$.

Exemple 1.4 Sur l'exemple (1.1.(i)), le graphe de $\mathcal{R}$ est représenté comme suit :

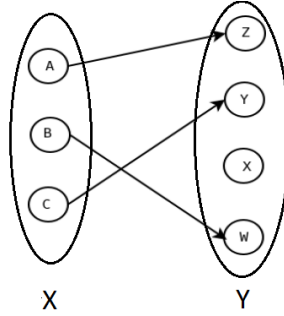


FIGURE 1.1 – La représentation graphique de la relation $\mathcal{R}$.

1.2.3 Domaine et image

Dans cette section on définit le domaine et l'image d'une relation binaire, ainsi que quelques propriétés. Pour plus de détails on peut consulter [6].

Définition 1.4 Soit $\mathcal{R}$ une relation de X à Y .

- i) On appelle **domaine** de $\mathcal{R}$, l'ensemble des éléments de X ayant par $\mathcal{R}$ une image dans Y . On note :

$$\text{dom}(\mathcal{R}) \equiv \{ x \in X \mid \exists y \in Y \ x \mathcal{R} y \}.$$

- ii) On appelle **image d'un point** a de X par $\mathcal{R}$, l'ensemble éventuellement vide des éléments b de Y tels que $(a, b) \in \mathcal{R}$. On note :

$$\text{im}_{\mathcal{R}}(x) \equiv \{ y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{R} \}.$$

- iii) On appelle **image** ou **codomaine** de $\mathcal{R}$, l'ensemble des éléments de Y image(s) par $\mathcal{R}$ d'au moins un élément de X . On note :

$$\text{im}(\mathcal{R}) \equiv \{ y \in Y \mid (\exists x \in X) \text{ tel que } (x, y) \in \mathcal{R} \}.$$

Exemple 1.5 Soit $X = Y = P$, où P est un ensemble de **Personnes**, et la relation $\mathfrak{R} = \ll \text{être enfant de} \gg$.

$\text{dom}(\mathfrak{R})$ est le sous-ensemble des enfants dans P , c'est-à-dire des personnes de P ayant au moins un parent dans P .

$\text{im}_{\mathfrak{R}}(x)$ est l'ensemble des parents de x .

$\text{im}(\mathfrak{R})$ est le sous-ensemble des parents, c'est-à-dire des personnes de P ayant au moins un enfant dans P .

Propriétés : Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ deux relations dans $X \times Y$:

1. $\text{dom}(\mathfrak{R}) \subseteq X, \text{im}(\mathfrak{R}) \subseteq Y, \mathfrak{R} \subseteq \text{dom}(\mathfrak{R}) \times \text{im}(\mathfrak{R})$.
2. Si $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq X \times Y \Rightarrow \text{dom}(\mathfrak{R}) \subseteq \text{dom}(\mathfrak{S}), \text{im}(\mathfrak{R}) \subseteq \text{im}(\mathfrak{S})$.
3. La relation inverse $\mathfrak{R}^T$ est toujours définie, c-à-d :
 $\text{dom}(\mathfrak{R}^T) = \text{im}(\mathfrak{R}) ; \text{im}(\mathfrak{R}^T) = \text{dom}(\mathfrak{R})$.
4. $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y \Leftrightarrow \mathfrak{R}^T \subseteq Y \times X$.
5. $(\mathfrak{R}^T)^T = \mathfrak{R}$ /involution.
6. $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq X \times Y \Rightarrow \mathfrak{R}^T \subseteq \mathfrak{S}^T \subseteq Y \times X$.

1.2.4 Ensemble des relations

On notera $\mathfrak{R}_{XY}$ l'ensemble des relations de X à Y , de fait identique à $P(X \times Y)$.

Dans le cas où X et Y sont finis, le nombre de relations de X vers Y est donc : $2^{|X| \cdot |Y|}$.

Définition 1.5 Soient X, Y deux ensembles. Parmi les relations de X à Y , on note :

0_{XY} la relation **nulle** ou **vide**, jamais satisfaite, dont la matrice caractéristique ne contiendra que des 0

$U_{XY} = X \times Y$ la relation **universelle** ou **complète**, toujours satisfaite, dont la matrice caractéristique ne contiendra que des 1.

1.3 Interactions des relations binaires avec les opérations ensemblistes

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations dans X vers Y . Tant que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous ensembles de $X \times Y$, on peut leur appliquer les opérations ensemblistes de, **l'inclusion**, **l'union**, **l'intersection**, **le complément**,..., pour construire des relations de X vers Y . Pour plus de détails on peut consulter [12], [6].

L'inclusion

Soient $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ deux relations binaires. On dit que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ si et seulement si : $(x, y) \in \mathcal{R}$ alors $(x, y) \in \mathcal{S}$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

Union et intersection

La relation " $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ " se décrit par :

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(x, y) \in X \times Y / x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y\}.$$

De même, la relation " $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ " se décrit par :

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x, y) \in X \times Y / x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y\}.$$

la relation $\mathcal{R}^T$ et $\mathcal{S}^T$ vont de Y vers X . Il est facile d'établir que :

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^T = \mathcal{R}^T \cup \mathcal{S}^T \text{ et } (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^T = \mathcal{R}^T \cap \mathcal{S}^T.$$

Exemple 1.6 Soit X un ensemble d'êtres humains. Considérons sur X les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définies par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow "x \text{ est le } \textbf{père} \text{ de } y."$$

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow "x \text{ est la } \textbf{mère} \text{ de } y."$$

Dans ce contexte, $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est la relation "est parent de" et $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1}$ est la relation "est enfant de".

On peut s'attendre à ce que la relation $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ soit vide, puisque $x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y$ signifie " x est à la fois le **père** et la **mère** de y ".

Proposition 1.2 Soient $R, S \subseteq X \times Y$ deux relations quelconques, on a :

- i) $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ i.e : $\forall i, j : (M_{R \cup S})_{ij} = r_{ij} \vee s_{ij}$, où $\vee$ dénote le **ou inclusif**.
- ii) $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ i.e : $\forall i, j : (M_{R \cap S})_{ij} = r_{ij} \wedge s_{ij}$, où $\wedge$ dénote le **et**.
- iii) $0_{XY} \cup R = U_{XY} \cap R = R = R \cup 0_{XY} = R \cup U_{XY}$.
- iv) $0_{XY} \subseteq R \cap S \subseteq R \subseteq R \cup S \subseteq U_{XY}$.

Exemple 1.7 Soient R et S deux relations sur X définies par la matrice associée :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices associées à l'union et l'intersection sont définies respectivement :

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Complément

Définition 1.6 Soit $\mathfrak{R}$ une relation de $X \times Y$, on note $\overline{\mathfrak{R}}$ et on appelle relation **complémentaire** de $\mathfrak{R}$, la relation de X vers Y définie par :

$$(x, y) \in \overline{\mathfrak{R}} \Leftrightarrow (x, y) \notin \mathfrak{R}.$$

Autrement dit : $\overline{\mathfrak{R}} = (X \times Y) - \mathfrak{R}$.

La matrice associée de la relation $\overline{\mathfrak{R}}$ est la matrice **complément** de $M_{\mathfrak{R}}$:

$$M_{\overline{\mathfrak{R}}} = \overline{M_{\mathfrak{R}}}.$$

Exemple 1.8 Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. On définit la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$\mathfrak{R} = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}.$$

Le produit cartésien de $X \times Y$:

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d), (4, a), (4, b), (4, c), (4, d)\}.$$

Donc $\overline{\mathcal{R}} = \{(1, c), (2, a), (3, a), (3, c), (4, b), (4, c)\}$.

Proposition 1.3 Soient $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ deux relations binaires. Alors :

$$i) \overline{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \cup \overline{\mathcal{S}}.$$

$$ii) \overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \cap \overline{\mathcal{S}}.$$

Composition des relations

Soient les relations $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$, on appelle **composée** de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ la relation notée $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq X \times Z$ est définie par :

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{S} z)\}.$$

Proposition 1.4 Soient $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$. Alors :

$$i) \text{dom}(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \subseteq \text{dom}(\mathcal{R}), \text{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{im}(\mathcal{S}).$$

$$ii) 0_{XY} \circ \mathcal{S} = 0_{XZ} = \mathcal{R} \circ 0_{YZ}.$$

$$iii) \text{si } \wp \subseteq Z \times K, \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \wp) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \wp \quad / \text{associativité.}$$

$$iv) \text{si } \wp \subseteq Y \times Z, \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \cup \wp) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \circ \wp) \quad / \text{distributivité } \circ / \cup.$$

$$v) (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^T = \mathcal{S}^T \circ \mathcal{R}^T.$$

$$vi) \text{si } \wp \subseteq Y \times Z : \mathcal{S} \subseteq \wp \Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \circ \wp \quad / \text{monotonie.}$$

$$vii) M_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}} \odot M_{\mathcal{R}} \quad / \odot \text{ est le produit booléen, } (x \odot y = x \wedge y).$$

Preuve.

$$iii) x \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \wp) z \Leftrightarrow \exists y \in Z : (x \mathcal{S} \circ \wp y) \wedge (y \mathcal{R} z)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in Z, \exists w \in Y : (x \wp w) \wedge (w \mathcal{S} y) \wedge (y \mathcal{R} z)$$

$$\Leftrightarrow \exists w \in Y : (x \wp w) \wedge (w \mathcal{R} \circ \mathcal{S} z)$$

$$\Leftrightarrow x \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \wp) z$$

$$v) z(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^T x \Leftrightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) z \Leftrightarrow \exists y \in Y : (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{S} z) \Leftrightarrow \exists y \in Y : (y \mathcal{R}^T x \wedge z \mathcal{S}^T y) \Leftrightarrow \exists y \in Y :$$

$$(z \mathcal{S}^T y \wedge y \mathcal{R}^T x) \Leftrightarrow z(\mathcal{S}^T \circ \mathcal{R}^T) x.$$

1.4 Propriétés des relations binaires

On s'intéresse maintenant aux propriétés fondamentales des relations binaires définies sur le même ensemble X . Pour plus de détails on peut consulter [12] et [6].

1.4.1 Réflexivité, irréflexivité et non-réflexivité

La relation $\mathcal{R}$ est :

- i) *Réflexive*, si pour tout $x \in X$, $x\mathcal{R}x$.
- ii) *Irréflexive*, si pour tout $x \in X$, $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
- iii) *Non réflexive*, si pour tout $x, y \in X$, $(\exists x \in X : (x, x) \in \mathcal{R}) \wedge (\exists y \in Y : (y, y) \notin \mathcal{R})$.

La proposition suivante donne quelques propriétés de la réflexivité d'une relation binaire .

Proposition 1.5

- i) Toute relation *réflexive* a sa matrice caractéristique de diagonale 1.
- ii) Tout *graphe réflexif* comporte une boucle par sommet .
- iii) Toute relation *irréflexive* a sa matrice caractéristique de diagonale 0.
- iv) La diagonale de la matrice caractéristique d'une relation *non réflexive* comporte **au moins un 1 et au moins un 0**.

Exemple 1.9

- i) la relation $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ est *réflexive* .
- ii) la relation 0_X (la définition précédente) est *irréflexive* .

1.4.2 Symétrie et antisymétrie

La relation $\mathcal{R}$ est :

- i) *Symétrique*, si pour tout $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- ii) *Asymétrique*, si pour tout $x, y \in X$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \notin \mathcal{R}$.
- iii) *Antisymétrique*, si pour tout $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Exemple 1.10 La relation $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^T$ est toujours **symétrique**.

Note : Aux relations **symétriques** on associera un graphe symétrique, obtenu en **remplaçant** chaque **paire d'arcs** opposés par un trait démunie de **flèche**, appelé **arête**.

Proposition 1.6

- i) La matrice associée à une relation symétrique est symétrique .
- ii) Toute relation asymétrique est irréflexive .

Preuve.

Soient $\mathcal{R}$ une relation **asymétrique**, et « x » un point tel que $x\mathcal{R}x$. Par l'asymétrie de $\mathcal{R}$, on aurait $(x, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x) \notin \mathcal{R}$, et $x\mathcal{R}x$ serait **contradictoire** ; il n'existe donc aucun point pour lequel on ait $x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est **irréflexive**.

1.4.3 Transitivité et intransitivité

La relation $\mathcal{R}$ est :

- i) **Transitive**, si pour tout $x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- ii) **Intransitive** ou (anti-transitive), si pour tout $x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow (x, z) \notin \mathcal{R}$.

Exemple 1.11

- i) Les relations $0_X, \Delta_X, U_X$ sont **transitives** .
- ii) Soit $\mathcal{R}$ une relation définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \perp y \quad " \perp " : \text{être perpendiculaire}$$

est **intransitive** .

Proposition 1.7 Toute relation intransitive est irréflexive .

Preuve.

Soient $\mathcal{R}$ une relation **intransitive**, et « x » un point tel que $x\mathcal{R}x$. Par l'intransitivité de $\mathcal{R}$, on aurait $x\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}x \Rightarrow (x, x) \notin \mathcal{R}$, et $x\mathcal{R}x$ serait **contradictoire** ; il n'existe donc aucun point pour lequel on ait $x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est **irréflexive**.

Exemple 1.12 La **perpendicularité** entre **droites** est une relation **intransitive** donc **irréflexive** .

1.4.4 Propriétés des relations binaires sur X

L'union, l'intersection, l'inclusion et la composition des relations s'adaptent facilement au cas où l'ensemble de départ et d'arrivée sont identiques.

Cependant, les propriétés nouvellement définies et la relation **d'identité** introduisent de nouveaux résultats. Pour plus de détails on peut consulter [12], [6].

Proposition 1.8

- i) $0_X \subseteq \Delta_X \subseteq U_X$.
- ii) $\mathcal{R}$ est réflexive ssi $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}$.
- iii) $\mathcal{R}$ est symétrique ssi $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T$.

Définition 1.7 On appelle *symétrisée* de $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^s = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^T$.

Proposition 1.9

- i) $\mathcal{R}^s$ est la relation symétrique *la plus fine* majorant $\mathcal{R}$ (et $\mathcal{R}^T$).
- ii) $\Delta_X \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \Delta_X = \mathcal{R}$.
- iii) $\mathcal{R}$ est *transitive* si seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.
- iv) Soient deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S} \subseteq X^2$:

$$0_X \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq U_X,$$

$$0_X \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq U_X.$$

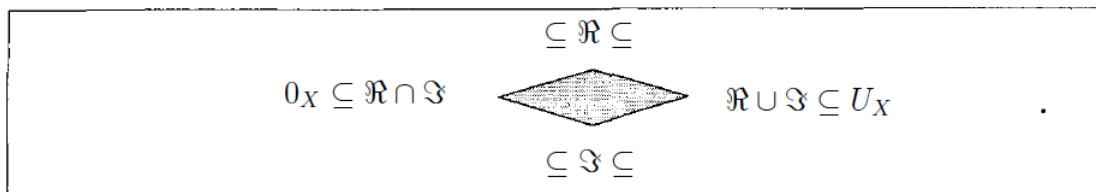


FIGURE 1.2 – Diagramme en losange pour l'inclusion entre relations, leurs intersections et leurs unions.

Corollaire 1.1 *La composition des relations binaires est toujours une relation binaire, donc l'opération composition est définie une loi interne, en plus, elle est **associative** d'après la proposition (1.4), et on remarque que Δ_X est neutre avec l'opération composition (élément neutre). Donc $(X^2, \circ)$ est un **monoïde** avec un élément neutre Δ_X .*

Notation 1.1 *De manière générale on pose :*

$$\mathfrak{R}^0 = \Delta_X,$$

$$\text{pour } k > 0 : \mathfrak{R}^k = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}^{k-1},$$

$$\text{pour } k < 0 : \mathfrak{R}^k = (\mathfrak{R}^{-1})^{|k|} = (\mathfrak{R}^T)^{|k|}.$$

1.4.5 La clôture transitive

Soit $\mathfrak{R}$ une relation sur X , et soient x et y des éléments de X .

Définition 1.8 (chemins dans un digraphe) *Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que Ω est un $\mathfrak{R}$ -chemin de longueur n de x à y ssi il existe une suite*

$\Omega = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de X telle que :

1. $x_0 = x$ et $x_n = y$
2. $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} : x_i \mathfrak{R} x_{i+1}$.

Lorsque $x=y$, on parle de $\mathfrak{R}$ -cycle.

Définition 1.9 (fermeture transitive) *On définit sur X une nouvelle relation $\mathfrak{R}^+$, que nous appellerons plus tard **fermeture transitive** (clôture transitive) de $\mathfrak{R}$, en posant :*

$$x \mathfrak{R}^+ y \Leftrightarrow \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y.$$

La relation $\mathfrak{R}^+$ est donc l'union de toutes les relations $\mathfrak{R}^k$:

$$\mathfrak{R}^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{R}^k$$

Dans le cas où X est fini de cardinal n , la remarque précédente nous permet d'écrire la formule plus sympathique :

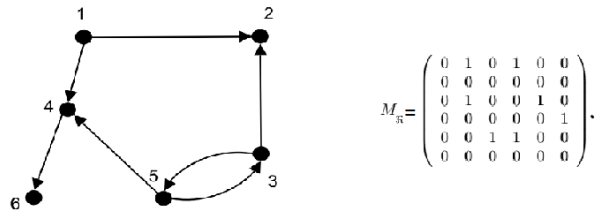
$$\mathfrak{R}^+ = \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{R}^k$$

On définit encore une relation $\mathfrak{R}^*$ sur X , appelée relation de $\mathfrak{R}$ -**accessibilité** (fermeture réflexo-transitive de $\mathfrak{R}$), en posant :

$$\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^+ \cup \Delta_X$$

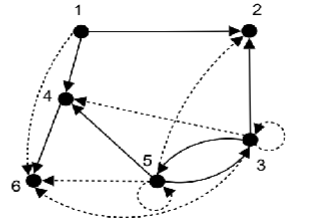
Exemple 1.13 Voici le **graphe** pour lequel on se propose de **calculer la fermeture transitive** en calculant les puissances successives des matrices.

La matrice **associée** à ce graphe est la suivante :



La matrice associée de la fermeture transitive, ainsi que le graphe sont représentés par :

$$M_{\mathfrak{R}} \vee M_{\mathfrak{R}}^2 \vee M_{\mathfrak{R}}^3 \vee M_{\mathfrak{R}}^4 \vee M_{\mathfrak{R}}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Chapitre 2

Classes particulières des relations binaires

Dans ce chapitre, nous présenterons des classes particulières importantes des relations binaires. Pour plus de détails on peut consulter [12], [21], [6], [9].

2.1 Relations d'équivalences

Les relations d'équivalences et ses classes d'équivalences jouent un rôle très important dans les fondements théoriques mathématiques, ainsi que l'utilisation dans différentes domaines d'applications. Pour plus de détails on peut consulter [9], [21].

Définition 2.1 (Relation d'équivalence) Une relation d'équivalence sur un ensemble X est une relation $\mathcal{R}$ sur X qui est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**. On note alors $(x \equiv y \bmod \mathcal{R})$ ou bien $(x \approx y)$ pour $(x \mathcal{R} y)$.

Exemple 2.1 Soit n un entier relatif non nul. Sur $\mathbb{Z}$ on définit une relation $\mathcal{R}_n$, en posant $x \mathcal{R}_n y \Leftrightarrow n$ divise $y - x$ (Lorsque la mention de n en indice sera rendue superflue par le contexte, on l'omettra). $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence :

- i) **Réflexivité** : Le nombre 0 est bien divisible par n , on a donc $x \mathcal{R}_n x$ pour tout entier x .
- ii) **Symétrie** : Si n divise $y - x$, il divise aussi $x - y$.
- iii) **Transitivité** : Si n divise $y - x$, il existe un entier k tel que l'on ait l'égalité $y - x = kn$, si n divise $z - y$, il existe un entier m tel que l'on ait l'égalité $z - y = mn$, l'entier n divise donc

aussi $z - x$ puisque l'on a les égalités $z - x = (z - y) + (y - x) = kn + mn = (k + m)n$.

2.1.1 Classes d'équivalences

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X , et x un élément de X . On appelle **classe d'équivalence** de x l'ensemble $C(x) = \bar{x} = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$.

Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \bar{x}$; une classe d'équivalence n'est donc jamais vide.

Exemple 2.2 Disons que n est strictement positif, et reprenons la relation $\mathcal{R}_n$ décrite dans l'exemple(2.1) ci-dessus, la classe d'équivalence de $\{0, 1, k, -1\}$ est définie respectivement par :

$$\bar{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}.$$

$$\bar{1} = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, \dots\}.$$

$$\bar{k} = \{\dots, -2n + k, -n + k, k, n + k, 2n + k, \dots\}.$$

$$\overline{-1} = \{\dots, -2n - 1, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, \dots\}.$$

Théorème 2.1 Soient les classes $C(x)$ et $C(y)$ de deux éléments x et y . Ces classes sont disjointes ou sont confondues .

Preuve.

— 1^{er} cas : $C(x) \cap C(y) = \emptyset$, alors les deux classes sont disjointes .

— 2^{ème} cas : $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$.

Soit $z \in C(x) \cap C(y)$, on en conclut que y est dans la classe de x : $y \in C(x)$.

Montrons que la classe de y est contenue dans celle de x . Soit $z_1 \in C(y)$, on a $y\mathcal{R}z_1$ et $x\mathcal{R}y$, et donc $x\mathcal{R}z_1$ par transitivité. C'est-à-dire $z_1 \in C(x)$ et donc $C(y) \subseteq C(x)$. De la même façon, on montre que $C(x) \subseteq C(y)$. Donc les deux classes $C(x)$ et $C(y)$ sont **confondues** .

Proposition 2.1 L'ensemble X est partagé en une réunion disjointe des classes d'équivalence.

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x).$$

Donc les classes forment une partition de l'ensemble X telle que :

- Chaque élément de X appartient à une classe au moins.
- Chaque élément de X appartient à une seule classe.

2.1.2 Ensemble quotient

Définition 2.2 Soit $X \neq \emptyset$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X .

L'ensemble **quotient** de X par $\mathcal{R}$ est $X/\mathcal{R} = \{\bar{x} / x \in X\} =$ l'ensemble des classes d'équivalence sur X .

Exemple 2.3 Dans l'exemple précédent on a l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ est de cardinal n .

2.2 Relations d'ordres

Cette section est consacrée au concept de relation d'ordre et ses propriétés. Des classes particulières d'ensembles ordonnés sont présentées aussi. Pour plus détails on peut consulter [19], [6], [20].

Définition 2.3 (Relation d'ordre) Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est un **ordre** (ordre partiel) sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes : **réflexive**, **antisymétrique**, **transitive**.

Exemple 2.4 On note $a|b$ si et seulement si b est un multiple de a ($\exists k \in \mathbb{N}^*, b = ka$). C'est une relation d'ordre définie dans $\mathbb{N}^*$.

En effet, elle est :

Réflexive : $a = 1a$, donc $a|a$ est vrai.

Antisymétrique : si $a|b$ et $b|a$, alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*, a = kb$ et $b = k'a$. Donc $a = kk'a$. Comme $a \neq 0$, $kk' = 1$. Mais $k, k' \in \mathbb{N}^*$, donc $k = k' = 1$, et $a = b$.

Transitive : si $a|b$ et $b|c$, alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*, a = kb$ et $b = k'c$. Donc $a = kk'c$, il existe $k'' \in \mathbb{N}^*$ ($k'' = kk'$) tel que $a = k''c \Leftrightarrow a|c$.

L'ordre $\mathcal{R}$ est dit **total** si pour tout $x, y \in X$:

$$x\mathcal{R}y \text{ implique } y\mathcal{R}x$$

Définition 2.4 (Ensemble ordonné) Un **ensemble ordonné** est un couple $P = (X, \mathcal{R})$ où X est un ensemble et $\mathcal{R}$ un ordre sur X (dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter $\mathcal{R}_P$ l'ordre de l'ensemble ordonné P).

Si $\mathfrak{R}$ est un ordre total, $P = (X, \mathfrak{R})$ est alors appelé un **ensemble totalement ordonné** (ou ensemble linéairement ordonné).

Exemple 2.5 Soient $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, \mathfrak{R})$ l'ensemble ordonné où $\mathfrak{R}$ est l'ordre suivant sur X :

$$\mathfrak{R} = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

On peut représenter l'ensemble ordonné P par un tableau (cf. la figure 2.1 ci-dessous). Cependant nous présentons à la section (2.2.2) une manière beaucoup plus élégante de représenter un ensemble ordonné, appelée : Le diagramme de Hasse.

	a	b	c	d	e
a	×	×			×
b		×			
c		×	×	×	×
d				×	×
e					×

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

FIGURE 2.1 – Deux sortes de tables pour l'ensemble ordonné P .

Définition 2.5 (Ordre strict) Soit $\mathfrak{R}$ une relation sur un ensemble X .

- $\mathfrak{R}$ est un **ordre strict** si elle est **irréflexive** et **transitive**.
- Un ensemble **strictement ordonné** est un couple $P = (X, \mathfrak{R})$ où X est un ensemble et $\mathfrak{R}$ un ordre strict sur X .
- L'ordre strict $\mathfrak{R}$ est dit **strictement total** si pour tout $x, y : x \neq y, (x, y) \notin \mathfrak{R}$ impliquent $(y, x) \in \mathfrak{R}$. On dit alors que P est un ensemble **strictement totalement ordonné**. Si $|X| = n$, P ou l'ordre strict correspondant pourra être noté $\underline{n}_s$.

Notation : Nous avons utilisé la notation $\mathfrak{R}$ pour désigner un ordre mais, dans un grand nombre de situations, cette notation est avantageusement remplacée par le symbole " $\leq$ ", qui se lit « **inférieur ou égal** ». On utilise ainsi pour un ordre quelconque le symbole traditionnel de l'ordre entre les nombres. Un ensemble ordonné est alors noté $P = (X, \leq_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, \leq)$. De la même manière, un **ordre strict** sera fréquemment

symbolisé par « $<$ » qui se lit « **inférieur** » ou « **strictement inférieur** », et les notations $P = (X, <_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, <)$ seront utilisées pour désigner un ensemble **strictement ordonné**.

- i) Si $x \leq y$ n'est pas vérifié, on dit que x n'est pas inférieur ou égal à y , ce qu'on note $x \not\leq y$. La relation ainsi définie est aussi notée $\leq^c$ (puisque c'est la relation complémentaire de la relation $\leq$).
- ii) Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on dit que x est inférieur à y , ou que y est supérieur à x , ce qu'on note $x < y$. On dit aussi que x est un **minorant strict** de y et que y est un **majorant strict** de x . La relation $<$ est la relation d'ordre strict associée à la relation $\leq$.
- iii) Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont **comparables**. Dans le cas contraire, i.e : si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, on dit que x et y sont **incomparables**, ce que l'on note $x || y$.

Exemple 2.6 Dans l'exemple (2.5), a et b sont **comparables** (car il existe une flèche entre a et b) alors que a et c sont **incomparables**.

Définition 2.6 (Chaîne) On remarquera que $y \not\leq x$ est équivalent à $(x < y \text{ ou } x || y)$. Il résulte des définitions précédentes qu'une **chaîne** est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours comparables ($x \leq y$ ou bien $y \leq x$).

Les symboles C_n et $\underline{n}$ désigneront une chaîne à n éléments.

Exemple 2.7 Les ensembles ordonnés $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, sont des **chaines**.

Définition 2.7 (antichaîne) On appelle **antichaîne** tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables.

Le symbole A_n désignera une antichaîne à n éléments.

Exemple 2.8 Soit $X = \{2, 3, 5, 7\}$ un ensemble d'entiers, l'ensemble ordonné $(X, |)$ est une antichaîne, où $|$ est la relation divise.

Définition 2.8 (préordre) Un **préordre** sur un ensemble non vide X est toute relation **réflexive** et **transitive**.

Exemple 2.9 L'ordre partiel et l'équivalence sont deux variétés particulières du préordre.

Ordre Inverse, Ordre Induit, Ordre Produit :

1. Ordre inverse (Nouvelle notation)

Soit un ensemble ordonné $(X, \leq)$, on peut définir sur X une nouvelle notation d'un **ordre inverse**, notée : " $x \geq y$ " comme étant équivalente à " $y \leq x$ ".

La relation $x \geq y$ (x supérieur à y) est dite la relation d'ordre inverse de $x \leq y$.

Remarque 2.1

- i) Si $(X, \leq)$ une relation d'ordre alors $(X, \geq)$ l'est aussi.
- ii) Une **relation d'ordre** et sa **relation inverse** ne sont identiques que dans le seul cas de la relation **d'égalité** (" $=$ ").

2. Ordre induit

Soient $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie non vide de X . La trace sur $Y \times Y$ de la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur Y qui sera notée $x \leq_Y y$, elle est donc définie par : $x \in Y$ et $y \in Y$ et $x \leq y$. Cette relation sera appelée **relation d'ordre induite** par $\leq$ sur Y .

3. Ordre produit

Considérons une famille d'ensembles ordonnés $(X_i, \leq_i)_{i \in I}$ sur l'ensemble produit $X = \prod_{i \in I} X_i$, on peut définir la relation $\leq$ par :

$$\forall i \in I, x_i \leq_i y_i : x \leq y$$

On vérifiera sans peine que ceci est une relation d'ordre sur X qui est appelée **relation d'ordre produit**.

Remarque 2.2 Un produit de chaînes n'est pas nécessairement une chaîne.

Exemple 2.10 Dans le carré de la chaîne $(\mathbb{N}, \leq)$ les couples $(2, 5)$ et $(1, 6)$ sont incomparables.

2.2.1 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A \subseteq X$ un sous ensemble de X .

- i) **Majorant** : On appelle majorant d'une partie A de X tout élément m de X tel que pour tout $x \in A : x \leq m$.

Exemple 2.11 Soit $A = \{2, 3, 4, 9\}$ dans $(\mathbb{N}^*, |)$, 36 est un majorant, 72 aussi, etc...

- ii) **Borne supérieure** : On appelle borne supérieure de A , tout élément x de X tel que :
- Pour tout $y \in A, y \leq x$ (x est un majorant de A)
 - Pour tout majorant z de $A, x \leq z$.

Si une partie A de X admet une borne supérieure S , celle-ci sera notée :

$$S = \text{Sup}_X A.$$

Exemple 2.12 L'ensemble des nombres *pairs* dans $(\mathbb{N}, \leq)$ (où " $\leq$ " l'ordre usuelle) n'a pas de majorant, donc n'a pas de borne supérieure.

- iii) **Plus grand élément (maximum)** : On appelle plus grand élément g de X tout élément défini par : pour tout $x \in X, x \leq g$. Notons qu'un tel élément, s'il **existe**, est nécessairement **unique**, car s'il y en avait deux, g et g' , on aurait $g \leq g'$ et $g' \leq g$, donc $g = g'$.

Exemple 2.13 Dans $X = \{2, 3, 6\}$ ordonné par *divisibilité*, 6 est le **plus grand élément**.

- iv) **Element maximal** : On appelle élément maximal m de X tout élément défini par : Pour tout $x \in X, m \not\leq x$ (ce qui signifie : ou bien $x \leq m$, ou bien x et m sont incomparables).

Exemple 2.14 Dans $X = \{2, 3, 4, 9\}$ ordonné par *divisibilité*, 4 et 9 sont des éléments *maximaux*.

Remarque 2.3

1. Si X a un plus grand élément g , g est aussi un élément maximal et c'est le seul.
2. Si X est une *chaîne*, les notions d'élément *maximal* et de *plus grand élément* se confondent.
3. Si $S = \text{Sup}_X A$ existe et si $S \in A$, alors S est le plus grand élément de A pour l'ordre *induit*.
Réciproquement, si A a un plus grand élément pour l'ordre *induit* alors c'est aussi sa borne supérieure.

4. L'ensemble des majorants de $\emptyset$ dans X est X , donc dire que $\text{Sup}_X \emptyset$ existe signifie que X possède un **plus petit élément**.

5. **Passage à l'ordre réciproque :**

En utilisant l'ordre réciproque $\geq$ sur X , on définit comme précédemment :

Minorant d'une partie A de X : $m' \in X$ et pour tout $x \in A$, $m' \leq x$.

Borne inférieure d'une partie A de X : $I \in X$ tel que :

I est un minorant de A .

Pour tout minorant m' de A , $m' \leq I$.

La borne inférieure, lorsqu'elle existe, sera notée $I = \text{Inf}_X A$.

Plus petit élément p de X : pour tout $x \in X$, $p \leq x$.

Élément minimal m' de X : pour tout $x \in X$, $x \not< m'$.

2.2.2 Représentation d'un ensemble ordonné et diagramme de Hasse

Définition 2.9 La relation de **couverture** d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, noté " $\prec_P$ " ou simplement " $\prec$ " est définie par :

1. $x < y$.
2. Il n'existe aucun élément z tel que $x < z < y$.

on pose :

$$xP^+ = \{t \in P \mid x \prec t\}.$$

$$P^-x = \{t \in P \mid t \prec x\}.$$

Le graphe $\text{Couv}(P) = (X, \prec)$ associé à la relation de couverture s'appelle le **graphe de couverture** de P .

Exemple 2.15 L'ensemble ordonné P de l'exemple (2.5) a cinq couples de couverture : $a \prec b$, $a \prec e$, $c \prec b$, $c \prec d$ et $d \prec e$.

Proposition 2.2 Dans un ensemble ordonné fini :

- i) Tout élément qui n'est pas minimal couvre au moins un élément.
- ii) Tout élément qui n'est pas maximal est couvert par au moins un élément.

Diagramme de Hasse

Le diagramme (ou diagramme de Hasse) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

- i) Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $p(x)$ est au dessous de (l'horizontale passant par) $p(y)$.
- ii) $p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si x couvre y .

Exemple 2.16 Dans l'exemple précédent(2.5), on a le diagramme de l'ensemble ordonné P est représenté du manière suivant :

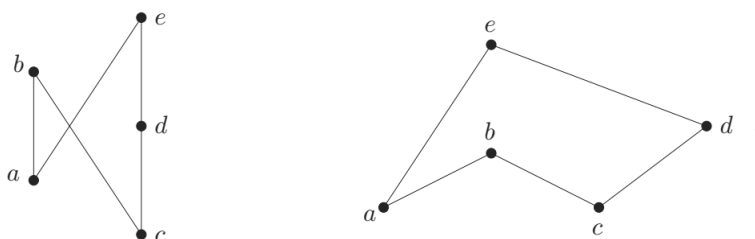


FIGURE 2.2 – Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple(2.5)

2.2.3 Morphisme d'ensembles ordonnés

Soient deux ensembles ordonnés $(X, \leq_1)$ et $(Y, \leq_2)$, une application $f : X \longrightarrow Y$ sera dite un **morphisme d'ordre** ou encore une **application croissante**, si quels que soient x et y dans X :

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y).$$

On définira également : Application décroissante : $x \leq_1 y \Rightarrow f(y) \leq_2 f(x)$.

Remarque 2.4

- i) Une application constante est à la fois croissante et décroissante, mais la réciproque est inexacte.
- ii) Une application croissante et injective est strictement croissante, mais une application strictement croissante n'est pas nécessairement injective.

iii) Si f est une bijection croissante, l'application réciproque f^{-1} n'est pas nécessairement croissante.

Exemple 2.17

- i) Soit $X = \{2, 3, 4, 9\}$ ordonné par divisibilité, et $Y = \mathbb{N}$ avec l'ordre naturel. On définit f par $f(2) = f(4) = 1$ et $f(3) = f(9) = 2$, f est **croissante** et **décroissante** mais n'est pas **constante**.
- ii) Avec les mêmes ensembles que précédemment, $f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = 2$, et $f(9) = 3$, f est strictement croissante mais n'est pas injective.
- iii) L'application identique de $(\mathbb{N}^*, |)$ sur $(\mathbb{N}^*, \leq)$ est une bijection croissante, mais l'application **réciproque** n'est pas croissante.

Définition 2.10 (Isomorphisme d'ordre) Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite un **isomorphisme d'ordre** si :

1. f est bijective.
2. $x \leq_1 y$ équivaut à $f(x) \leq_2 f(y)$.

Cela signifie donc que f et f^{-1} sont toutes les deux croissantes, par suite étant injectives elles seront strictement croissantes .

2.2.4 Sections initiales et sections finales d'un ensemble ordonné

Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné, on appelle **section initiale** engendrée par x notée :

$$\downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}.$$

On définit de la même manière une **section finale** par :

$$\uparrow x = \{y \in P \mid x \leq y\}.$$

Proposition 2.3 Tout ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est isomorphe à une famille d'ensembles ordonnés par l'inclusion, c.à.d :

$$(P, \leq) \simeq (F, \subseteq).$$

Preuve.

Soit $F = \{\downarrow x \mid x \in P\}$, et on définit une application f par :

$$f : P \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto \downarrow x$$

i) f **présERVE l'ordre** : soit $x, y \in P$ tel que $x \leq y$, on va montrer que pour tout $z \in f(x) \Rightarrow z \in f(y)$.

Soit $z \in P : z \in f(x) \Leftrightarrow z \in \downarrow x \Leftrightarrow z \leq x \Rightarrow z \leq y \Leftrightarrow z \in \downarrow y \Leftrightarrow z \in f(y)$.

donc $f(x) \subseteq f(y)$.

ii) f **injective** : soit $x, y \in P$:

$\downarrow x = \downarrow y \Leftrightarrow x \leq y \text{ et } y \leq x \Leftrightarrow x = y$.

iii) f **surjective** : soit $z \in F$ on pose $z = \downarrow z_0$, tel que $z_0 \in P$.

donc il existe un élément de P tel que : $f(z_0) = z$.

On conclut que f est une application isomorphisme, alors P et F sont **isomorphes**.

2.3 Classes particulières d'ensembles ordonnés

Dans cette section nous étudions les Chaînes et les antichaînes, extensions linéaires des ensembles ordonnés, les bons ordres, treillis et quelques propriétés dans cet ordre. Pour plus de détails on peut consulter [19], [11], [13], [1].

2.3.1 Chaînes, antichaînes et paramètres fondamentaux

Définition 2.11 (Sous-ensemble ordonné) Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X . La restriction de l'ordre $\leq$ à la partie Y est un ordre, noté $\leq_Y$ et appelé un sous-ordre de $\leq$. On dit alors que $Q = (Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de P , noté $Q \sqsubseteq P$.

Définition 2.12 Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P . Si Q est totalement ordonné, on dit que Q est une chaîne de P . On note $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ une chaîne de P ou simplement, $x_0 x_1 \dots x_p$.

Une chaîne $Q = x_0 x_1 \dots x_p$ de P est dite **maximale** si elle n'est contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de P .

Exemple 2.18 L'ensemble ordonné de l'exemple(2.5) admet quatre chaînes maximales, ab , ae , cb , cde .

Définition 2.13 Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P . Si les éléments de Q sont deux à deux **incomparables**, on dit que Q est une **antichaîne** de P .

Remarque 2.5

- i) Une antichaîne de P est maximale si elle n'est contenue dans aucune autre antichaîne de P .
- ii) Les seuls sous-ensembles ordonnés de P qui sont à la fois **chaîne** et **antichaîne** de P sont les **singletons** de P .

Aux notions de chaîne et d'antichaîne d'un ensemble ordonné P sont associés **quatre** paramètres fondamentaux :

- i) Le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de P s'appelle la **largeur** de P et est noté $\alpha(P)$.
- ii) $\kappa(P)$ de P est le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de P .
- iii) on note $\gamma(P)$ le nombre minimum d'antichaînes dans une partition de P en antichaînes.
- iv) $\theta(P)$ le nombre minimum de chaînes dans une partition de P en chaînes.

On considère aussi la longueur $\lambda(P) = \kappa(P) - 1$. Ce paramètre est donc la **longueur** maximum d'une chaîne de P .

Exemple 2.19 Dans l'exemple(2.5), $\{ae, cb, d\}$ constitue une partition en trois chaînes et $\{ac, d, be\}$ une partition en trois antichaînes de P (on rappelle qu'ici, pour alléger l'écriture, ae (par exemple) désigne l'ensemble $\{a, e\}$). Le lecteur vérifiera que dans cet exemple, $\kappa(P) = \gamma(P) = 3$ et que $\theta(P) = \alpha(P) = 2$.

Théorème 2.2 [19] Si $\alpha(P)$ est fini, alors $\alpha(P) = \theta(P)$.

Définition 2.14 (Inductif) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que X est **inductif** si toute chaîne $A \subseteq X$ admet un **majorant**.

Théorème 2.3 Les axiomes suivants sont équivalentes :

1. **Axiome de choix** : Si X est un ensemble non vide, il existe une application φ , telle que pour tout $A \subseteq X$:

$$\begin{aligned}\varphi : P(X) &\longrightarrow X \\ A &\longmapsto \varphi(A) \in A\end{aligned}$$

Cas fini : le cardinal de $|P(X)| = 2^{|X|}$, et on a : $2^{|X|} > |X|$, donc φ n'est jamais **injective**.

2. **Zermilo** : Tout ensemble non vide admet un bon ordre (voir à la sous-section 2.3.4)
3. **Principe de maximalité de Hansdoff** : Toute chaîne dans un ensemble ordonné peut être injectée dans une chaîne maximale.
4. **Lemme de Zorn** : Si P est inductif, alors P admet un élément maximal.
5. Si toute chaîne dans un ensemble admet le plus petit des majorants, alors P admet un élément maximal.

Lemme 2.1 Soit P un ensemble ordonné, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Tout sous ensemble de P contient un élément minimal,
- ii) P ne contient pas une chaîne descendante infinie $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$,
- iii) Si $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ dans P , alors il existe un k tel que : $a_k = a_n$ pour tout $n \geq k$.

Les conditions décrites par le lemme précédent sont appelés **DCC (Descending Chain Condition)**, i.e : P ne contient pas une chaîne infinie strictement décroissante). Le dual notion est appelé **ACC (Ascending Chain Condition)**.

Le lemme suivant indique simplement que des ensembles ordonnés satisfaisant le **DCC** sont ceux pour lesquels le principe de l'induction.

Lemme 2.2 Soit P un ensemble ordonné vérifiant **DCC**, et soit $\varphi(x)$ un énoncé tel que :

- i) $\varphi(x)$ est vraie pour tous les éléments minimaux de P ;
 - ii) Si $\varphi(y)$ est vraie pour tout $y < x$, $\varphi(x)$ est vraie.
- Alors $\varphi(x)$ est vraie pour tous les éléments de P .

Preuve.

Supposons que la contra-posé de (2), soit $F = \{x \in P \mid \varphi(x) \text{ est faux} \}$.

F n'a pas d'élément minimal, ce qui contredit la **DCC**, donc F doit être vide, alors $\varphi(x)$ est vraie pour tout x .

2.3.2 Extensions linéaires d'un ensemble ordonné

Définition 2.15 Soient $\leq$ et $\leq'$ deux ordres sur un même ensemble X . On dit que $\leq'$ est une extension de $\leq$ si " $\leq \subseteq \leq'$ " (en d'autres termes, pour tout $x, y \in X$, $x \leq y$ implique $x \leq' y$).

Une extension $\leq'$ de $\leq$ est dite **linéaire** si $\leq'$ est un ordre total.

Exemple 2.20 Soit $X = \{a, b, c\}$, et on définit $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$ comme suit :

$$\mathfrak{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$\mathfrak{R}' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$$

$$\mathfrak{R}'' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$$

On a :

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}' \Leftrightarrow \mathfrak{R}' \text{ extension de } \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}'' \Leftrightarrow \mathfrak{R}'' \text{ extension de } \mathfrak{R}'$$

En plus $\mathfrak{R}''$ extension linéaire de $\mathfrak{R}$.

Le lemme de Zorn et le lemme suivant sont les résultat clés pour démontrer l'existence d'une extension linéaire d'un ordre partiel.

Lemme 2.3 [22] Soit $(X, \leq)$ un ordre partiel avec des éléments a et b vérifiant $b \parallel a$, alors la relation $\leq'$ définie par :

$$x \leq' y = \begin{cases} x \leq y \\ \text{ou} \\ x \leq a \text{ et } b \leq y \end{cases}$$

est un ordre partiel contenant $\leq$, en plus $a \leq' b$.

Théorème 2.4 (Théorème d'extension linéaire de Szpilrajn) [22] *Tout ordre partiel admet une extension linéaire.*

Corollaire 2.1 [22] *Tout ordre partiel est l'intersection de toutes ses extensions linéaires.*

Définition 2.16 (La dimension) *Si P est un ensemble ordonné, la **dimension** de P , notée $\dim P$, est le plus petit cardinal k tel que l'ordre sur P soit intersection de k ordres linéaires.*

Exemple 2.21 *Pour l'exemple(2.5), les deux extensions linéaires "acbde" et "cdaeb" constituent l'unique base de P et qu'on a donc $\dim P = 2$. On montrera aussi que l'ensemble ordonné B_3 donné dans la figure ci-dessous est de dimension 3 (on a plus généralement $\dim(B_n) = n$).*

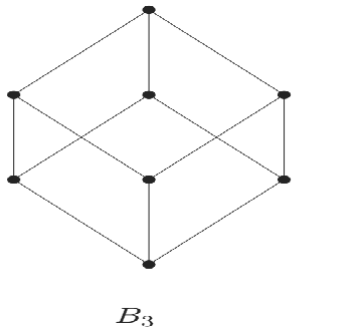


FIGURE 2.3 – Le diagramme de la cube B_3

2.3.3 Sommes et produits d'ensembles ordonnés

Soit $\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$, $\mathbb{Q} = (Q, \leq_{\mathbb{Q}})$ sont deux ensembles ordonnés disjoints ($P \cap Q \neq \emptyset$), on peut définir de nouveaux ensembles ordonnés comme suit :

i) **Réunion disjoint** : $\mathbb{P} + \mathbb{Q}$ est la réunion disjoint de $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$

On a : $x \leq_{\mathbb{P}+\mathbb{Q}} y$ ssi l'une des conditions sont réalisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x, y \in P \text{ et } x \leq_{\mathbb{P}} y, \\ \text{ou} \\ x, y \in Q \text{ et } x \leq_{\mathbb{Q}} y. \end{array} \right.$$

Le diagramme de $\mathbb{P} + \mathbb{Q}$ est le diagramme de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ dressés l'un à coté de l'autre.

ii) **La somme ordinale** : $\mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$ est la somme ordinale ssi l'une des conditions est réalisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq_{\mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}} y, \\ \text{ou} \\ x \in P \text{ et } y \in Q. \end{array} \right.$$

iii) **Produit classique** : Le Produit classique est le produit cartésien $\{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$, tel que :

$$(x, y) \leq_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} (x', y') \text{ si } x \leq_{\mathbb{P}} x' \text{ et } y \leq_{\mathbb{Q}} y'.$$

Définition 2.17 On peut définir un ordre $\preceq$ sur $X \times Y$ comme suit :

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff [x_1 <_{\mathbb{P}} x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 <_{\mathbb{Q}} y_2)].$$

Cet ordre est appelé **l'ordre lexicographique** ou bien **l'ordre de dictionnaire**.

Remarque 2.6 Si " $\leq_P$ " et " $\leq_Q$ " sont des ordres linéaires sur X et Y respectivement, alors :

- L'ordre lexicographique " $\preceq$ " est aussi linéaire.
- L'ordre produit classique " $\leq_{P \times Q}$ " n'est pas forcément linéaire.

Exemple 2.22 Soit Q, P, P' trois ensembles ordonnés définis par les diagrammes de Hasse suivants :

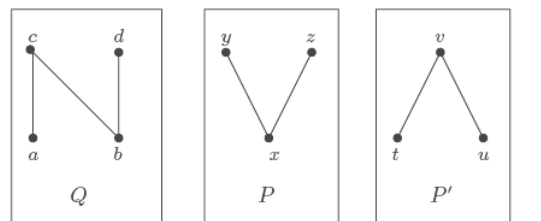


FIGURE 2.4 – Les diagrammes de Hasse de Q, P, P' .

Les ensembles ordonnés $P + P'$, $P \oplus P'$ et $Q \times P$ sont définis respectivement par :

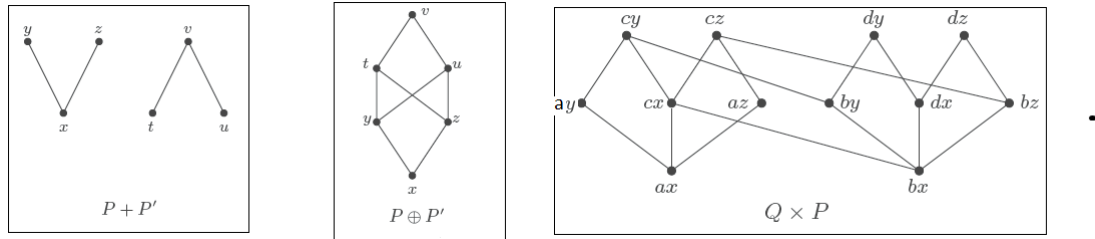


FIGURE 2.5 – Les diagrammes de Hasse de $P + P'$, $P \oplus P'$ et $Q \times P$.

2.3.4 Bon ordre

Appelons **bon ordre** tout ordre sur un ensemble X tel que toute partie non vide de X admet un plus petit élément pour cet ordre. Dans ce cas, $(X, \leq)$ est appelé ensemble bien ordonné.

Exemple 2.23

- i) $(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble bien ordonné.
- ii) $(P(X), \subseteq)$ n'est pas un bon ordre sauf si $|X| \leq 1$.

Remarque 2.7

- i) Un bon ordre est un ordre total.
- ii) Tout ordre linéaire fini est un bon ordre.

Dans les propositions suivantes on va présenter les propriétés fondamentales des ensembles bien ordonnés, pour les preuves voir [8].

Proposition 2.4 Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné et $f : X \rightarrow X$ une application strictement croissante, alors on a : $f(x) \geq x \quad \forall x \in X$.

Proposition 2.5 Soit $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ sont deux ensembles bien ordonnés, il existe au plus un **isomorphisme** de $(X, \leq)$ vers $(Y, \leq')$.

En particulier **l'identité** est le seul **automorphisme** d'un ensemble bien ordonné.

2.3.5 Treillis (lattices)

Dans cette section nous présentons également les notions des treillis et certains résultats importants sur cette classe d'ensemble ordonnés. Pour plus de détails on peut consulter [19], [12].

Définition 2.18 *Un ensemble ordonné $(T, \leq)$ est appelé **treillis** si toute paire d'éléments de T admet une borne supérieure et une borne inférieure dans T .*

On notera : $Sup_T\{x, y\} = x \vee y$ (qui pourra se lire : x ou y) et $Inf_T\{x, y\} = x \wedge y$ (qui pourra se lire : x et y).

Exemple 2.24

i) *Pour tout ensemble X , $(P(X), \subseteq)$ est un treillis.*

En effet, si A et B sont des sous-ensembles de X , tels que :

$$A \vee B = A \cup B;$$

$$A \wedge B = A \cap B.$$

ii) *$(\mathbb{N}^*, |)$ est un treillis, en effet, si a et b sont des naturels non nuls, on a :*

$$a \vee b = \text{ppcm}(a, b);$$

$$a \wedge b = \text{pgcd}(a, b).$$

Remarque 2.8

i) *Tout ensemble **totalelement ordonné** est un treillis, puisque dans un tel ensemble, toute paire d'éléments admet un **maximum** et un **minimum**.*

ii) *Il est clair aussi que, si $(T, \leq)$ est un treillis, le **dual** $(T, \geq)$ est encore un treillis, puisque la borne supérieure de $\{a, b\}$ dans $(T, \leq)$ est la borne inférieure de $\{a, b\}$ dans $(T, \geq)$, et vice-versa.*

Propriétés : Dans un treillis quelconque $(T, \leq)$ on a :

$$1. x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y \quad (\text{consistance}).$$

$$2. x \vee x = x \text{ et } x \wedge x = x \quad (\text{idempotente}).$$

3. $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$ (commutativité).
4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associativité).
5. $x \wedge (x \vee y) = x$ et $x \vee (x \wedge y) = x$ (lois d'absorption).

Théorème 2.5 Soit T un ensemble muni de deux lois de composition internes, $x \vee y$ et $x \wedge y$, vérifiant les propriétés précédentes (idempotente, commutative, associative, lois d'absorption), alors on peut définir sur T une unique relation d'ordre $\leq$ telle que $(T, \leq)$ soit un treillis, avec $\text{Sup}_T\{x, y\} = x \vee y$ et $\text{Inf}_T\{x, y\} = x \wedge y$.

Cette relation d'ordre est définie par $x \leq y$ ssi $x \vee y = y$ ou $x \wedge y = x$ qui sont des relations équivalentes.

Preuve.

Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement définie par :

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \text{ ou } x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

Il suffit de montrer que les relations :

$$x \leq_1 y \text{ définie par } x \vee y = y.$$

$$x \leq_2 y \text{ définie par } x \wedge y = x.$$

Sont équivalentes.

Supposons $x \leq_1 y$ donc $x \vee y = y$, d'où $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ (loi d'absorption), donc $x \leq_2 y$.

Supposons $x \leq_2 y$, donc $x \wedge y = x$, d'où $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (y \wedge x) = y$ (commutativité, loi d'absorption), donc $x \leq_1 y$.

Proposition 2.6 Dans un treillis $(T, \leq)$:

Si $a \leq b$, alors pour tout x : $a \wedge x \leq b \wedge x$ et $a \vee x \leq b \vee x$.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors : $a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d$.

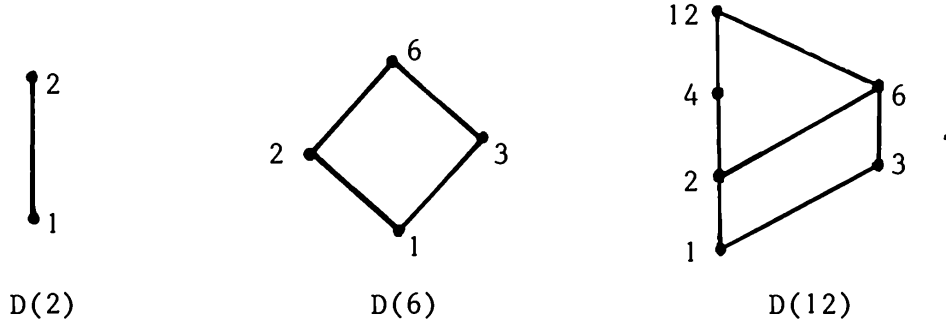
Définition 2.19 (Sous-treillis) Soit $(T, \leq)$ un treillis et soit B une partie de T . On dit que B est un **sous-treillis** de T si :

$$\forall x, y \in B : (x \vee y) \in B \text{ et } (x \wedge y) \in B.$$

Exemple 2.25 Nous considérons ici le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ et soit n un entier non nul fixé, nous désignons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de ' n '. Nous avons alors le résultat suivant :

$D(n)$ est un sous-treillis de $\mathbb{N}^*$.

En effet, si $x|n$ et $y|n$, alors $\text{pgcd}(x, y)|n$ et $\text{ppmc}(x, y)|n$, par exemple :



Définition 2.20 (Morphisme de treillis) Soient $(T_1, \leq)$ et $(T_2, \leq')$ des treillis. On dit qu'une fonction $f : T_1 \longrightarrow T_2$ est un **morphisme de treillis** si :

$$\forall x, y \in T_1 : (f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)) \quad \text{et} \quad (f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y))$$

Si f est **bijjective** et est un **morphisme de treillis**, on dit que f est un **isomorphisme de treillis**, donc T_1 et T_2 sont **isomorphes**. Dans ce cas on a :

$$\forall x, y \in T_1 : (x \leq y) \Leftrightarrow (f(x) \leq' f(y)) .$$

Remarque 2.9 Si f est un morphisme de treillis, alors f est une fonction croissante, c'est-à-dire : $\forall x, y \in T_1 : (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq' f(y))$, car : Si $x \leq y$, on a : $x \vee y = y$. On aura donc, dans le treillis T_2 :

$$f(x) \leq' f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y).$$

Deuxième partie

Relations n-aires et ternaires

Chapitre 3

Relations n-aires

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les propriétés fondamentales des relations n-aires. Pour plus de détails on peut consulter [10], [7], [2], [21], [16],[18], [17], [14], [15].

3.1 Définitions de base et exemples

Dans cette section, nous présentons quelques notions de base des relations n-aires. Supposons que $X_i \neq \emptyset$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel tel que $n \geq 2$ et $\mathfrak{R} \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Définition 3.1 (Relation n-aire) On appelle *relation n-aire* entre les ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$ une partie quelconque de leur produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, les ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont appelés les *universes* de la relation, et n est appelé son *degré*.

Exemple 3.1 Soit $n = 3$, $\mathfrak{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ constituée de tous les triplets d'entiers (a, b, c) dans lesquels a, b et c forment une progression arithmétique. Autrement dit, $(a, b, c) \in \mathfrak{R}$ si et seulement s'il y a un entier k tel que $b = a + k$ et $c = a + 2k$, ou de manière équivalente, de telle sorte que $b - a = k$ et $c - b = k$. On notera que $(1, 3, 5) \in R$ parce que $3 = 1 + 2$ et $5 = 1 + 2 \cdot 2$, mais $(2, 5, 9) \notin R$, parce que $5 - 2 = 3$, tandis que $9 - 5 = 4$. Cette relation est de degré 3 et ses domaines sont tous égaux (des entiers).

Notation : Soit $\mathfrak{R}$ une relation n-aire, pour un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, on notera $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le fait que ces éléments sont en relation par la relation $\mathfrak{R}$.

Cas particuliers

Définition 3.2 (Relation binaire (2-aires)) Les relations binaires sont étudiées en détails au chapitre 1.

Définition 3.3 (Relation ternaire (3-aires)) Soient X, Y, Z sont des ensembles, une relation **ternaire** $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble de produit cartésien $X \times Y \times Z$, et on notera $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$ ssi x, y, z en relation avec $\mathfrak{R}$.

Exemple 3.2

i) La relation dans l'exemple précédent est une relation ternaire.

ii) Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ consistant en triplet (x, y, m) , où x, y et m sont des nombres entiers avec $m \geq 1$ et $x \equiv y \pmod{m}$. Puis $(8, 2, 3)$, $(-1, 9, 5)$ et $(14, 0, 7)$ appartiennent tous à $\mathfrak{R}$, mais $(7, 2, 3)$, $(-2, -8, 5)$, et $(11, 0, 6)$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{R}$ car : $8 \equiv 2 \pmod{3}$, $-1 \equiv 9 \pmod{5}$, et $14 \equiv 0 \pmod{7}$, mais $7 \equiv 2 \pmod{3}$, $-2 \equiv -8 \pmod{5}$ et $11 \equiv 0 \pmod{6}$ sont tous faux. Cette relation est de degré 3 et ses deux premiers univers sont l'ensemble des entiers et son troisième univers est l'ensemble des nombres entiers positifs.

3.2 Propriétés des relations n-aires sur X

Dans cette section on s'intéresse aux propriétés des relations n-aires sur X^n , avec $n \geq 2$. On dit brièvement relations n-aires sur X .

Définition 3.4 (Permutation) Soit X l'ensemble fini à n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$. On appelle permutation de X (ou aussi "**substitution**") une application σ bijective de X dans lui-même. On note $GP(n)$ l'ensemble des permutations de X .

La permutation σ peut alors s'écrire conventionnellement sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Soient $i < j$ deux éléments distincts compris entre 1 et n . On dit que la paire $\{i, j\}$ est en **inversion** pour σ quand $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Une permutation est dite **paire** quand elle présente un nombre pair d'inversions, **impaire** sinon.

Rappelons qu'il y a $n!$ permutations de X .

Exemple 3.3 Soit X un ensemble. Si $X = \{1, 2, 3\}$ les éléments de $GP(3)$ sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a : $3! = 6$, $GP(3) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$.

Les **permutations impaires** de σ_1 sont $\{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$.

Les **permutations paires** de σ_1 sont $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Définition 3.5 (Relations n-aires équivalentes) [7] Deux relations n -aires sont équivalentes lorsque leurs univers sont les mêmes et qu'il existe une **permutation** de ces univers telle que les relations associées sont égales (au sens de l'égalité des ensembles, puisqu'une relation n -aire est définie comme un ensemble).

Définition 3.6 (Relations n-aires égales) [7] Deux relations n -aires sont égales lorsqu'elles sont équivalentes et que leurs attributs sont les mêmes.

Exemple 3.4

Groupe	Nom	Age	Age	Nom	Groupe	Note	Matière	Nombre
1	A	18	18	A	1	18	A	1
1	B	17	17	B	1	17	B	1
2	C	18	18	C	2	18	C	2

Une relation $\mathcal{R}$ Une relation égale à $\mathcal{R}$ Une relation équivalente à $\mathcal{R}$

Définition 3.7 (Relation n-aire réflexive) [4] La relation n -aire $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si, $\forall x \in X$ le n -uplet $(x, x, \dots, x) \in \mathcal{R}$.

Définition 3.8 (Relation n-aire faiblement réflexive) Si $A \subset X$, La relation n-aire $\mathcal{R}$ est dite **faiblement réflexive** si, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ telle que $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ et $(|A| \leq n - 1)$ alors $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$.

Définition 3.9 (Relation n-aire transitive) [4] La relation n-aire $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si elle a la propriété suivante : si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{R}$, et s'il existe des nombres naturels $i_0 > j_0$ tels que $1 < i_0 \leq n$, $1 \leq j_0 < n$, $x_{i_0} = y_{j_0}$ alors le n-uplet $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, y_{j_{k+1}}, y_{j_{k+2}}, \dots, y_{j_n}) \in \mathcal{R}$ pour tout nombre naturel $1 \leq k < n$ et $i_1, \dots, i_k, j_{k+1}, \dots, j_n$ tel que $1 \leq i_1 < \dots < i_k < i_0$, $j_0 < j_{k+1} < \dots < j_n \leq n$.

Définition 3.10 (Relation n-aire symétrique) [4] La relation n-aire $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$ alors $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \in \mathcal{R}$.

Définition 3.11 (Relation n-aire fortement symétrique) [4] La relation n-aire $\mathcal{R}$ est dite **fortement symétrique** si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$ alors $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in \mathcal{R}$ pour toute permutation σ sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Remarque 3.1 [4] Une relation ternaire $\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si elle satisfait l'une des conditions suivantes :

- i) Si $(x, y, z) \in \mathcal{R}$, $(y, u, v) \in \mathcal{R}$, alors $(x, u, v) \in \mathcal{R}$.
- ii) Si $(x, y, z) \in \mathcal{R}$, $(z, u, v) \in \mathcal{R}$, alors $(x, y, u) \in \mathcal{R}$, $(x, y, v) \in \mathcal{R}$, $(x, u, v) \in \mathcal{R}$, $(y, u, v) \in \mathcal{R}$.
- iii) Si $(x, y, z) \in \mathcal{R}$, $(u, z, v) \in \mathcal{R}$, alors $(x, y, v) \in \mathcal{R}$.

Définition 3.12 (Préordre n-aire) [3] On appelle **préordre n-aire** sur X toute relation **réflexive** et **transitive**.

Définition 3.13 (Équivalence n-aire) [3] On appelle **équivalence n-aire** sur X si elle est **réflexive**, **fortement symétrique** et **transitive**.

Exemple 3.5

- i) Pour $n = 2$, une relation binaire est transitive si et seulement si elle est **transitive** dans le sens habituel et on a donc une 2-équivalence si et seulement si elle est une **équivalence** dans le sens habituel.

ii) Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\mathfrak{R} = \{(x_i, \dots, x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$, où toute séquence est formée par n symboles égaux, dite aussi relation diagonale X . Alors $\mathfrak{R}$ est une équivalence n -aire .

iii) Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathfrak{R} \subseteq X \times X \times X$ la relation ternaire sur X définie par :

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1, 3), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (1, 3, 3)\}.$$

Alors $\mathfrak{R}$ est un préordre ternaire sur X , mais il n'est pas un équivalence ternaire (puisque $\mathfrak{R}$ n'est pas symétrique).

3.3 Les projections d'une relation n -aire

Dans cette section, on va étudier les projections d'une relation n -aire.

Définition 3.14 (Projection) [4],[21] Soit $\mathfrak{R}$ une relation n -aire sur un ensemble non vide X et $k < n$. La $(i_1, \dots, i_k)$ -projection de $\mathfrak{R}$, notée $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_k}$ est une relation k -aire de X définie par : si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$, alors $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_k}$

Définition 3.15 (Jointure) [4],[21] Soit $\mathfrak{R}$ une relation m -aire sur un ensemble non vide X , ρ une relation n -aire sur le même ensemble X . La **jointure** de $\mathfrak{R}$ et ρ , notée $J_p(\mathfrak{R}, \rho)$, où $1 \leq p < m$, $1 \leq p < n$, est un

$(m+n-p)$ -relation de X qui se compose de tous les $(m+n-p)$ -uplets $(x_1, \dots, x_{m-p}, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-p})$ de telle sorte que $(x_1, \dots, x_{m-p}, y_1, \dots, y_p) \in \mathfrak{R}$ et $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-p}) \in \rho$.

Exemple 3.6 Sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on définit la relation 5-aire $\mathfrak{R}$ et la relation ternaire ρ :

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1, 3, 4, 1), (2, 3, 5, 2, 1), (3, 3, 4, 5, 1)\},$$

$$\rho = \{(4, 1, 6), (5, 1, 2), (3, 4, 3), (2, 2, 2)\}.$$

La projection de $\mathfrak{R}_{2,4,5}$ est la relation ternaire $\mathfrak{R}_{2,4,5} = \{(1, 4, 1), (3, 2, 1), (3, 5, 1)\}$.

La jointure $J_2(\mathfrak{R}, \rho)$ est la relation 6-aire $J_2(\mathfrak{R}, \rho) = \{(1, 1, 3, 4, 1, 6), (3, 3, 4, 5, 1, 2)\}$.

Proposition 3.1 [4] Soit $\mathfrak{R}$ une relation n -aire sur X telle que $\mathfrak{R}_{1,n} = X \times X$.

Si $\mathfrak{R}$ est fortement symétrique et n -transitive, alors $\mathfrak{R}$ est une n -équivalence de X .

Preuve.

soit x arbitraire dans X . Puisque $\mathfrak{R}_{1,n} = X \times X$, il existe $u_1, \dots, u_{n-2} \in X$ tels que

$(x, u_1, \dots, u_{n-2}, x) \in \mathfrak{R}$ et par la symétrie, il en résulte que $(u_1, \dots, u_{n-2}, x, x) \in \mathfrak{R}$. Par utilisation de la transitivité, on a $(x, u_2, \dots, u_{n-2}, x, x) \in \mathfrak{R}$. Et à nouveau par la symétrie, on obtient $(u_2, \dots, u_{n-2}, x, x, x) \in \mathfrak{R}$ et par conséquent, par la transitivité $(x, u_3, \dots, u_{n-2}, x, x, x) \in \mathfrak{R}$ et ainsi de suite. Par induction, il en résulte que $(x, x, \dots, x) \in \mathfrak{R}$, pour tout $x \in X$, alors $\mathfrak{R}$ est une équivalence n-aire sur X .

3.4 Liens entre les relations n-aires et binaires

Dans cette section, on va présenter les liens entre une relation n-aire et des relations binaires associées à cette relation.

Définition 3.16 [14] Soit $\mathfrak{R}$ une relation n-aire sur un ensemble X . On peut associer à $\mathfrak{R}$ une relation binaire $\mathfrak{R}^b$ comme suit, pour tout $(x, y) \in X^2$, nous mettons $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$ s'il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$ et i, j sont des nombres naturels tels que : $1 \leq i < j \leq n$, $x = x_i$, $y = x_j$.

Exemple 3.7 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X . La relation binaire $\mathfrak{R}^b$ associée à X est définie comme suit : $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$ s'il existe $z \in X$ tel que $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$ ou $(z, x, y) \in \mathfrak{R}$ ou $(x, z, y) \in \mathfrak{R}$. Autrement dit, $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,2}$ ou $(x, y) \in \mathfrak{R}_{2,3}$ ou $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,3}$. Alors $\mathfrak{R}^b = \mathfrak{R}_{1,2} \cup \mathfrak{R}_{2,3} \cup \mathfrak{R}_{1,3}$. Par exemple, la relation binaire $\mathfrak{R}^b$ associée à la relation ternaire $\mathfrak{R}$ dans l'exemple (3.5.3) est $\mathfrak{R}^b = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$, qui est une préordre, mais pas une équivalence.

Lemme 3.1 Soit $\mathfrak{R}$ une relation n-aire sur X . Alors $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$ si et seulement si $(x, y, \dots, y) \in \mathfrak{R}$.

Preuve.

Si $(x, y, \dots, y) \in \mathfrak{R}$, alors $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$. Soit $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$ alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$ et i, j sont des nombres naturels tels que : $1 \leq i < j \leq n$, $x = x_i$, $y = x_j$. Depuis $(y, y, \dots, y) \in \mathfrak{R}$ (la réflexivité de $\mathfrak{R}$), la transitivité de $\mathfrak{R}$ implique $(x, y, \dots, y) \in \mathfrak{R}$.

Théorème 3.1 [3] Soit $\mathfrak{R}$ un préordre n-aire sur un ensemble X , alors $\mathfrak{R}^b$ est un préordre sur X .

Preuve.

La réflexivité est triviale. Soit $\mathfrak{R}^b$ une relation binaire telle que $(x, y) \in \mathfrak{R}^b$ et $(y, z) \in \mathfrak{R}^b$, par le lemme précédent, on obtient $(x, y, \dots, y) \in \mathfrak{R}$, $(y, z, \dots, z) \in \mathfrak{R}$ et la transitivité implique $(x, z, \dots, z) \in \mathfrak{R}$, ce qui implique $(x, z) \in \mathfrak{R}^b$. Alors $\mathfrak{R}^b$ est transitive.

Théorème 3.2 [14] Soit $\mathfrak{R}$ un équivalence n -aire sur un ensemble X , alors $\mathfrak{R}^b$ est une relation d'équivalence sur X .

Définition 3.17 [14] Soit ρ une relation binaire sur un ensemble X . On peut associer à ρ une relation n -aire ρ_n en X , en plaçant pour chaque $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho_n$ si $(x_i, x_j) \in \rho$ pour chaque paire des nombres naturels (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$.

Théorème 3.3 [14] Soit ρ un préordre sur un ensemble X , alors ρ_n un préordre n -aire sur X , et aussi si ρ est une relation d'équivalence sur un ensemble X , alors ρ_n est une équivalence n -aire.

Il est facile de voir le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 [3]

- i) Si $\mathfrak{R}$ est une relation n -aire sur un ensemble X , alors $(\mathfrak{R}^b)_n \supset \mathfrak{R}$, mais l'égalité n'est pas nécessairement valable.
- ii) Si ρ est une relation binaire sur un ensemble X , alors $(\rho_n)^b \subset \rho$, mais l'égalité n'est pas nécessairement valable.

Exemple 3.8 Les premières parties des deux déclarations sont facilement vérifiées. Nous donnons seulement des contre-exemples pour leurs deuxièmes parties.

Sur l'ensemble $X = \{1, 2\}$, nous considérons $\mathfrak{R} = \{(1, 2, \dots, 2)\}$. Ensuite, $\mathfrak{R}^b = \{(1, 2), (2, 2)\}$ et ainsi $(\mathfrak{R}^b)_n = \{(1, 2, \dots, 2), (2, \dots, 2)\} \supsetneq \mathfrak{R}$.

Sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$, nous prenons la relation binaire ρ telle que $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$. alors $\rho_n = \{(2, 3, \dots, 3), (3, \dots, 3)\}$ et par conséquent $(\rho_n)^b = \{(2, 3), (3, 3)\} \subsetneq \rho$.

Proposition 3.2 [14]

- i) Si $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont deux relations n -aires sur un ensemble X telles que $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$, alors $\mathfrak{R}_1^b \subset \mathfrak{R}_2^b$.
- ii) Pour toute relation n -aire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble X , $((\mathfrak{R}^b)_n)^b = \mathfrak{R}^b$.

Preuve.

- i) soit $(x, y) \in \mathfrak{R}_1^b$, alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_1$ et des nombres naturels i, j de telle sorte que $1 \leq i < j \leq n$, $x = x_i$, $y = x_j$. Étant donné que $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$, il en résulte qu'il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_2$ et des nombres naturels i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $x = x_i$, $y = x_j$, c'est $(x, y) \in \mathfrak{R}_2^b$.

ii) Pour la preuve de l'inclusion directe on note $\mathfrak{R}^b$ par σ . Par Corollaire(3.1.ii), nous avons $(\sigma_n)^b \subset \sigma$ équivalent à $((\mathfrak{R}^b)_n)^b \subset \mathfrak{R}^b$. A l'inverse, par corollaire(3.1.i), pour une relation n -aire $\mathfrak{R}$, nous avons $\mathfrak{R} \subset (\mathfrak{R}^b)_n$ et par la première preuve de cette proposition, il en résulte que $\mathfrak{R}^b \subset ((\mathfrak{R}^b)_n)^b$, qui conclut la preuve.

Théorème 3.4 [3] Si $\mathfrak{R}$ est un préordre n -aire sur un ensemble X , alors $(\mathfrak{R}^b)_n = \mathfrak{R}$, et si ρ est un préordre sur X , alors $(\rho_n)^b = \rho$.

Chapitre 4

Relations ternaires

Les relations ternaires constituent une classe importante des relations n-aires. On va étudier en détails cette classe des relations ternaires. Premièrement nous présentons les opérations et les propriétés de cette classe des relations. Deuxièmement, nous étudions les projections binaires d'une relation ternaire. Enfin, nous allons étudier les ordres cycliques comme cas particulier important des relations ternaires. Pour plus de détails on peut consulter [10], [16], [18], [17], [14], [15].

4.1 Opérations de base sur les relations ternaires

Une relation ternaire est un ensemble de triplets, notée (x, y, z) . Pour toutes deux relations ternaires $\mathfrak{R}$ et ρ , $\mathfrak{R} \cap \rho$ est l'**intersection** de $\mathfrak{R}$ et ρ , $\mathfrak{R} \cup \rho$ est l'**union** de $\mathfrak{R}$ et ρ , $\mathfrak{R} \circ \rho$ est la **composition** de $\mathfrak{R}$ et ρ , $\mathfrak{R}^T$ est l'**inverse** de $\mathfrak{R}$; celles-ci sont définies comme suit :

$$\mathfrak{R} \cap \rho = \{(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathfrak{R} \text{ et } (a, b, c) \in \rho\}$$

$$\mathfrak{R} \cup \rho = \{(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathfrak{R} \text{ ou } (a, b, c) \in \rho\}$$

$$\mathfrak{R} \circ \rho = \{(a, b, c) : \exists d \in X, (a, b, d) \in \mathfrak{R} \text{ et } (a, d, c) \in \rho\}$$

$$\mathfrak{R}^T = \{(a, b, c) : (a, c, b) \in \mathfrak{R}\}.$$

Trois relations ternaires spéciales sur un ensemble X sont : La **relation vide** $\emptyset$ qui ne contient aucun triplet, l'**identité** $\Delta_X^t = \{(x, x, x) : x \in X\}$, et la relation **universelle** $T_X^t = X \times X \times X$. Une autre relation ternaire spéciale, et sera nécessaire plus tard, est $\Delta_X^{t_{23}} = \{(x, y, y) : x, y \in X\}$.

Propriétés :[10] Soient $\mathfrak{R}$, ρ et $\mathfrak{S}$ sont des relations ternaires sur X . Alors les égalités suivantes sont vérifiées :

1. $(\mathfrak{R} \circ \rho) \circ \mathfrak{S} = \mathfrak{R} \circ (\rho \circ \mathfrak{S})$.
2. $(\mathfrak{R} \cup \rho) \circ \mathfrak{S} = (\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}) \cup (\rho \circ \mathfrak{S})$.
3. $(\mathfrak{R}^T)^T = \mathfrak{R}$.
4. $(\mathfrak{R} \cup \rho)^T = \mathfrak{R}^T \cup \rho^T$.
5. $(\mathfrak{R} \circ \rho)^T = \rho^T \circ \mathfrak{R}^T$.

Preuve.

1. Soit $(x, y, z) \in (\mathfrak{R} \circ \rho) \circ \mathfrak{S}$. Ainsi $\exists d : (x, y, d) \in (\mathfrak{R} \circ \rho) \wedge (x, d, z) \in \mathfrak{S}$, et on a $(x, y, d) \in (\mathfrak{R} \circ \rho)$ implique $\exists e : (x, y, e) \in \mathfrak{R} \wedge (x, e, d) \in \rho$. A partir de $(x, e, d) \in \rho$ et $(x, d, z) \in \mathfrak{S}$, nous déduisons $(x, e, z) \in (\rho \circ \mathfrak{S})$. A partir de $(x, y, e) \in \mathfrak{R}$ et $(x, e, z) \in (\rho \circ \mathfrak{S})$, nous en déduisons $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \circ (\rho \circ \mathfrak{S})$. Par conséquent $(\mathfrak{R} \circ \rho) \circ \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R} \circ (\rho \circ \mathfrak{S})$.
– La même chose pour l'inverse.
2. $(\mathfrak{R} \cup \rho) \circ \mathfrak{S} = \{(x, y, z) \mid \exists d : (x, y, d) \in (\mathfrak{R} \cup \rho) \wedge (x, d, z) \in \mathfrak{S}\}$
 $= \{(x, y, z) \mid \exists d : ((x, y, d) \in \mathfrak{R} \vee (x, y, d) \in \rho) \wedge (x, d, z) \in \mathfrak{S}\}$
 $= \{(x, y, z) \mid \exists d : (x, y, d) \in \mathfrak{R} \wedge (x, d, z) \in \mathfrak{S}\} \cup \{(x, y, z) \mid \exists d : (x, y, d) \in \rho \wedge (x, d, z) \in \mathfrak{S}\}$
 $= (\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}) \cup (\rho \circ \mathfrak{S})$.

4.2 Propriétés des relations ternaires

Définition 4.1 [2] Soit X un ensemble et $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X . La relation $\mathfrak{R}$ est dite :

1. **Symétrique** : si $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (z, y, x) \in \mathfrak{R}$.
2. **Fortement symétrique** : si $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u, v, w) \in \mathfrak{R}$ pour toute permutation (u, v, w) de la séquence (x, y, z) .
3. **Asymétrique** : si $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (z, y, x) \notin \mathfrak{R}$.
4. **Fortement asymétrique** : si $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u, v, w) \notin \mathfrak{R}$ pour toute permutation impaire (i.e :) (u, v, w) de la séquence (x, y, z) .

5. **Réflexive** : si $x, y, z \in X$, $\text{card } \{x, y, z\} \leq 2 \Rightarrow (x, y, z) \in \mathfrak{R}$;

Faiblement réflexive : si $(x, x, x) \in \mathfrak{R}$, $\forall x \in X$.

6. **Transitive** :, si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

(T_1) $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (y, u, v) \in \mathfrak{R}$, alors $(x, u, v) \in \mathfrak{R}$.

(T_2) $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (z, u, v) \in \mathfrak{R}$, alors $(x, y, u) \in \mathfrak{R}, (x, y, v) \in \mathfrak{R}, (x, u, v) \in \mathfrak{R}, (y, u, v) \in \mathfrak{R}$.

(T_3) $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (u, z, v) \in \mathfrak{R}$, alors $(x, y, v) \in \mathfrak{R}$.

7. **Cyclique** : si $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, z, x) \in \mathfrak{R}$.

8. **Linéaire** : (total) si $x, y, z \in X$, $x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow$ non plus $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$ ou $(z, y, x) \in \mathfrak{R}$.

Remarque 4.1 [18] Il existe une autre définition d'une relation ternaire **linéaire** définie comme suit :

Si $x, y, z \in X$, $x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow$ il existe une permutation (u, v, w) de la suite (x, y, z) telle que $(u, v, w) \in \mathfrak{R}$.

Proposition 4.1 [18] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire asymétrique et cyclique sur X et $x, y, z \in X$, Si $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$ alors $(y, z, x) \in \mathfrak{R}, (z, x, y) \in \mathfrak{R}, (z, y, x) \notin \mathfrak{R}, (y, x, z) \notin \mathfrak{R}$ et $(x, z, y) \notin \mathfrak{R}$.

preuve.

Supposons que $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$, alors par cyclicité de $\mathfrak{R}$ on obtient que $(y, z, x) \in \mathfrak{R}$ et $(z, x, y) \in \mathfrak{R}$.

L'asymétrie de $\mathfrak{R}$ implique que $(z, y, x) \notin \mathfrak{R}$. Si $(y, x, z) \in \mathfrak{R}$ alors $(z, y, x) \in \mathfrak{R}$ car $\mathfrak{R}$ est cyclique et ceci est une contradiction. De manière analogue $(x, z, y) \in \mathfrak{R}$ implique $(z, y, x) \in \mathfrak{R}$, aussi une contradiction.

Lemme 4.1 [18] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire asymétrique et cyclique sur X . Soit $x, y, z \in X$, $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$. Alors $x \neq y \neq z \neq x$.

Théorème 4.1 [18] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire cyclique sur X . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (y, u, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, u, z) \in \mathfrak{R}$.

2. $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (z, u, v) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, y, u) \in \mathfrak{R}, (x, y, v) \in \mathfrak{R}, (x, u, v) \in \mathfrak{R}, (y, u, v) \in \mathfrak{R}$.

3. $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (x, u, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, u, z) \in \mathfrak{R}$.

$$4. (x, y, z) \in \mathfrak{R}, (x, u, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u, y, z) \in \mathfrak{R}.$$

$$5. (x, y, z) \in \mathfrak{R}, (y, u, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, y, u) \in \mathfrak{R}.$$

preuve.

La transitivité de $\mathfrak{R}$ est équivalente à (1) selon la définition.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit (1) est vraie et soient $x, y, z, u, v \in X$ $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (z, u, v) \in \mathfrak{R}$. Comme $\mathfrak{R}$ est cyclique, $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (v, z, u) \in \mathfrak{R}$ et implique $(x, y, u) \in \mathfrak{R}$ selon (1), d'autre part $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, z, x) \in \mathfrak{R}$ et $(v, z, u) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u, v, z) \in \mathfrak{R}$, alors $(u, v, x) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, u, v) \in \mathfrak{R}$ selon (1), $(u, v, x) \in \mathfrak{R}$ et $(x, y, u) \in \mathfrak{R}$ implique $(u, v, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, u, v) \in \mathfrak{R}$, en plus $(x, y, u) \in \mathfrak{R}$ et $(x, u, v) \in \mathfrak{R}$ implique $(x, y, v) \in \mathfrak{R}$, donc (2) est vraie.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Soit (2) est vraie et soient $x, y, z, u \in X$ $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (x, u, y) \in \mathfrak{R}$. Comme $\mathfrak{R}$ est cyclique, $(y, z, x) \in \mathfrak{R}, (x, u, y) \in \mathfrak{R}$ et implique $(x, u, z) \in \mathfrak{R}$ selon (2), donc (3) est vraie.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Soit (3) est vraie et soient $x, y, z, u \in X$ $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (x, u, y) \in \mathfrak{R}$. Comme $\mathfrak{R}$ est cyclique, $(y, x, u) \in \mathfrak{R}, (y, z, x) \in \mathfrak{R}$ et implique $(y, z, u) \in \mathfrak{R}$ selon (3). La cyclicité de $\mathfrak{R}$ implique alors $(u, y, z) \in \mathfrak{R}$, donc (4) est vraie.

(4) $\Rightarrow$ (5) : Soit (4) est vraie et soient $x, y, z, u \in X$ $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (y, u, z) \in \mathfrak{R}$. Alors $(z, y, u) \in \mathfrak{R}, (z, x, y) \in \mathfrak{R}$ solen (4), $(x, y, u) \in \mathfrak{R}$. Par conséquent (5) est valable.

(5) $\Rightarrow$ (1) : Soit (5) est vraie et soient $x, y, z, u \in X$ $(x, y, z) \in \mathfrak{R}, (y, u, z) \in \mathfrak{R}$. Alors $(u, z, y) \in \mathfrak{R}, (z, x, y) \in \mathfrak{R}$ solen (5), $(u, z, x) \in \mathfrak{R}$. Et comme $\mathfrak{R}$ est cyclique alors $(u, y, z) \in \mathfrak{R}$, donc (1) est valable. ■

Corollaire 4.1 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire cyclique. Alors les trois conditions de transitivité (définition : 4.1) sont équivalentes.

Remarque 4.2 Pour vérifier qu'une relation ternaire cyclique est transitive, il suffit de vérifier seulement l'une des conditions $(T_1), (T_2), (T_3)$.

Proposition 4.2 [2] Soient X un ensemble, $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur l'ensemble X . $\mathfrak{R}$ est **fortement symétrique** si et seulement si $\mathfrak{R}$ est **symétrique** et **cyclique**.

Définition 4.2 [2] Soit X un ensemble. Pour une relation ternaire sur l'ensemble X , la relation ternaire $\mathfrak{R}^*$ sur X est définie par :

$$(x, y, z) \in \mathfrak{R}^* \Leftrightarrow (z, y, x) \in \mathfrak{R}.$$

est appelée la relation **duale** à $\mathcal{R}$.

Proposition 4.3 [18] Soient X un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation ternaire sur X . Alors :

- i) Si $\mathcal{R}$ est asymétrique, alors $\mathcal{R}^*$ est asymétrique ;
- ii) Si $\mathcal{R}$ est cyclique, alors $\mathcal{R}^*$ est cyclique ;
- iii) Si $\mathcal{R}$ est linéaire, alors $\mathcal{R}^*$ est linéaire ;
- iv) Si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R}^*$ est transitive.

4.3 Clôtures d'une relation ternaire

Définition 4.3 [2] Soit $\mathcal{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X , et soit (p) un propriété quelconque de (1) à (8) de la définition (4.1). Une relation ternaire ℓ sur X est une **clôture** $-(p)$ de $\mathcal{R}$, si et seulement si :

- 1. $\mathcal{R} \subseteq \ell$,
- 2. ℓ vérifie la propriété (p) ,
- 3. Si $\wp$ est une relation ternaire sur X ayant la propriété (p) et telle que $\mathcal{R} \subseteq \wp$, alors $\ell \subseteq \wp$.

Proposition 4.4 [2] Soient X un ensemble, $I \neq \emptyset$ un ensemble, et soit $\mathcal{R}_i$ une relation ternaire sur X pour tout $i \in I$, soit (p) une propriété de (1) à (7) de la définition (4.1). Si $\mathcal{R}_i$ vérifie (p) pour tout $i \in I$ alors $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ vérifie aussi la propriété (p) .

Corollaire 4.2 [2] Soit $\mathcal{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X et soit (p) est l'une des propriétés (1), (2) et de (5) à (7) de la définition (4.1). Alors il existe toujours une **clôture** $-(p)$ de $\mathcal{R}$ sur X .

Preuve.

Si la clôture $-(p)$ existe alors la démonstration est terminée. Si non, on prend X^3 comme une clôture $-(p)$, car la relation X^3 vérifie toutes les propriétés (1, 2, 5, 6, 7 et 8).

Proposition 4.5 (Clôture symétrique) [2] Soit $\mathcal{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X , et $\mathcal{R}^s$ sa clôture symétrique. Alors,

$$\mathcal{R}^s = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^*.$$

Proposition 4.6 (Clôture cyclique) [2] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X et $\mathfrak{R}^c$ sa clôture cyclique. Alors

$\mathfrak{R}^c = \{(x, y, z) \in X^3 ; \text{ il existe une permutation paire } (u, v, w) \text{ de la suite } (x, y, z) \text{ telle que } (u, v, w) \in \mathfrak{R}\}.$

Lemme 4.2 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X . Si $\mathfrak{R}$ est fortement asymétrique alors $\mathfrak{R}^c$ est asymétrique.

Proposition 4.7 [2] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X , et $\mathfrak{R}^\sigma$ sa clôture fortement symétrique. Alors

$$\mathfrak{R}^\sigma = (\mathfrak{R}^s)^c.$$

Notation 4.1 $I_X = \{(x, y, z) \in X^3; \text{card}\{x, y, z\} \leq 2\}.$

Définition 4.4 (Clôture réflexive) [2] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X , et $\mathfrak{R}^r$ sa clôture réflexive. Alors :

$$\mathfrak{R}^r = \mathfrak{R} \cup I_X.$$

Remarque 4.3 Si $\mathfrak{R}$ est réflexive alors $\mathfrak{R}^r = \mathfrak{R}$.

Théorème 4.2 [2] Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur un ensemble X et $\mathfrak{R}^{ct}$ sa clôture transitive. Alors : $\mathfrak{R}^{ct} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n)}$, telle que $\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^{(n)}$ définie par récurrence par : $\mathfrak{R}^{(n)} = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}^{(n-1)}$.

Définition 4.5 [20] Soit X un ensemble, et $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X et $x_0 \in X$. On note $\rho_{\mathfrak{R}, x_0}$ une relation binaire sur X définie comme suit :

$$(x, y) \in \rho_{\mathfrak{R}, x_0} \Leftrightarrow (x_0, x, y) \in \mathfrak{R}.$$

Remarque 4.4 On a toujours $\rho_{\mathfrak{R}, x_0} \subseteq \mathfrak{R}_{2,3}$.

Théorème 4.3 [20] Soient X un ensemble, et $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X . Alors :

1. $\rho_{\mathfrak{R}, x_0}$ est une relation binaire transitive sur X pour tout $x_0 \in X$ si et seulement si $\mathfrak{R}$ est transitive.
2. Si $\mathfrak{R}$ est cyclique alors $\rho_{\mathfrak{R}, x_0}$ est une relation binaire asymétrique sur X si et seulement si $\mathfrak{R}$ est asymétrique.

4.4 Les projections d'une relation ternaire

Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X , en utilisant les projections sur des relations ternaires pour extraire des relations binaires plus faciles à étudier, ainsi que, qui va nous aider pour étudier les propriétés des relations ternaires.

Définition 4.6 (les projections d'une relation ternaire) Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X .

Les projections binaires de $\mathfrak{R}$ sont : $\{\mathfrak{R}_{1,2}, \mathfrak{R}_{1,3}, \mathfrak{R}_{2,3}, \mathfrak{R}_{2,1}, \mathfrak{R}_{3,1}, \mathfrak{R}_{3,2}\}$, tel que :

$$\mathfrak{R}_{1,2} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (x, y, z) \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_{1,3} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (x, z, y) \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_{2,3} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (z, x, y) \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_{2,1} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (y, x, z) \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_{3,1} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (y, z, x) \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_{3,2} = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (z, y, x) \in \mathfrak{R}\}.$$

Proposition 4.8 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire et $(\mathfrak{R}_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq 3}$ ces projections binaires. Alors,

$$\mathfrak{R}_{i,j} = \mathfrak{R}_{j,i}^T.$$

Preuve.

Soit $1 \leq i \neq j \leq 3$, on a deux cas possibles : $(x, y) \in \mathfrak{R}_{i,j} \Rightarrow \exists z \in X$ tels que :

i) Si $j < i$, alors les cas possibles sont :

(a) $j = 1, i = 2$,

(b) $j = 1, i = 3$,

(c) $j = 2, i = 3$.

Si $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,2}$ dans le premier cas, alors $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,2} \Rightarrow \exists z \in X$ tel que $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathfrak{R}_{2,1} \Rightarrow (y, x) \in \mathfrak{R}_{1,2}^T$.

Les autres cas d'une manière similaire.

ii) Si $i < j$, d'une manière duale.

Exemple 4.1 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur $X = \{x, y, z\}$, telle que $\mathfrak{R} = \{(x, x, x), (y, y, y), (z, z, z), (x, y, z), (z, y, x), (x, z, y), (y, z, x)\}$, alors :

$$\mathfrak{R}_{1,2} = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y), (x, z), (y, z)\},$$

$$\mathfrak{R}_{1,3} = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, z), (z, x), (x, y), (y, x)\},$$

$$\mathfrak{R}_{2,3} = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (y, x), (z, y), (z, x)\}.$$

Les autres projections sont : $\mathfrak{R}_{2,1} = \mathfrak{R}_{1,2}^T$, $\mathfrak{R}_{3,1} = \mathfrak{R}_{1,3}^T$, $\mathfrak{R}_{3,2} = \mathfrak{R}_{2,3}^T$.

Corollaire 4.3 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire et $(\mathfrak{R}_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq 3}$ ses projections, alors les équivalences suivantes sont vérifiées :

- i) $\mathfrak{R}_{i,j}$ réflexive $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{j,i}$ réflexive.
- ii) $\mathfrak{R}_{i,j}$ symétrique $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{i,j} = \mathfrak{R}_{j,i}$.
- iii) $\mathfrak{R}_{i,j}$ transitive $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{j,i}$ transitive.
- iv) $\mathfrak{R}_{i,j}$ antisymétrique $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{j,i}$ antisymétrique.
- v) $\mathfrak{R}_{i,j}$ asymétrique $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{j,i}$ asymétrique.

Proposition 4.9 Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X

- i) Si $\mathfrak{R}$ est réflexive, alors toutes les projections sont réflexives.
- ii) Si $\mathfrak{R}$ est fortement symétrique, alors toutes les projections sont symétriques.
- iii) Si $\mathfrak{R}$ est symétrique, alors il existe des projections symétriques.
- iv) Si $\mathfrak{R}$ est transitive, alors toutes les projections sont transitives.
- v) Si toutes les projections sont réflexives, alors $\mathfrak{R}$ est faiblement réflexives.

Preuve.

Soit $i < j$ pour toutes les démonstrations suivantes et l'inverse de même manière.

- i) $\mathfrak{R}$ est réflexive si, $\forall x \in X, (x, x, x) \in \mathfrak{R} \Rightarrow \forall x \in X, (x, x) \in \mathfrak{R}_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, alors toutes les projections sont réflexives.
- ii) $\mathfrak{R}$ est fortement symétrique, alors pour toute $x, y \in X, (x, y) \in \mathfrak{R}_{i,j}$, donc $\exists z \in X$ tel que $\mathfrak{R}$ contenant un élément de sa projection et $(y, x) \in \mathfrak{R}_{i,j}$.
- iii) Si $\mathfrak{R}$ est symétrique, alors $(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (z, y, x) \in \mathfrak{R} \quad \forall x, y, z \in X$. Considérons toujours x, z sont l'inverse sur la relation $\mathfrak{R}$, donc si $\forall x, y, z \in X (x, z) \in \mathfrak{R}_{1,3} \Rightarrow (z, x) \in \mathfrak{R}_{1,3}$, alors $\mathfrak{R}_{1,3}$ est symétrique.

iv) On a trois projections pour la relation ternaire $\mathfrak{R}$. Une projection est transitive ssi :

$\forall x, y, z \in X, (x, y) \in \mathfrak{R}_{i,j} \text{ et } (y, z) \in \mathfrak{R}_{i,j} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R}_{i,j}$, telle que $1 \leq i < 3, 1 < j \leq 3$.

(a) Si $i = 1$ et $j = 2$:

Soit $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,2}$ et $(y, z) \in \mathfrak{R}_{1,2}$, alors il existe $u, v \in X$ tels que $(x, y, u) \in \mathfrak{R}$ et $(y, z, v) \in \mathfrak{R}$, par la transitivité de $\mathfrak{R}$ on a $(x, z, v) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R}_{1,2}$.

(b) Si $i = 1$ et $j = 3$:

Soit $(x, y) \in \mathfrak{R}_{1,3}$ et $(y, z) \in \mathfrak{R}_{1,3}$, alors il existe $u, v \in X$ tels que $(x, u, y) \in \mathfrak{R}$ et $(y, v, z) \in \mathfrak{R}$, par la transitivité de $\mathfrak{R}$ on a $(x, u, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R}_{1,3}$.

(c) Si $i = 2$ et $j = 3$:

Soit $(x, y) \in \mathfrak{R}_{2,3}$ et $(y, z) \in \mathfrak{R}_{2,3}$, alors il existe $u, v \in X$ tels que $(u, x, y) \in \mathfrak{R}$ et $(v, y, z) \in \mathfrak{R}$, par la transitivité de $\mathfrak{R}$ on a $(u, x, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R}_{2,3}$. Donc toutes les projections sont transitives.

4.5 Ordre cyclique

Dans cette section, nous présentons les notions et les propriétés de cette classe des relations ternaires. Pour plus de détails on peut consulter [2], [18].

4.5.1 Définitions et exemples

Définition 4.7 (Ordre cyclique) Soit $\mathfrak{R}$ une relation ternaire sur X qui est asymétrique, transitive et cyclique, cette relation est appelé un **ordre cyclique** sur X , et $(X, \mathfrak{R})$ est appelée un ensemble cycliquement ordonné.

Si $\mathfrak{R}$ est linéaire alors $(X, \mathfrak{R})$ est appelé un ensemble linéaire cycliquement ordonné ou un **cycle**.

Si $\mathfrak{R} = \emptyset$ alors $\mathfrak{R}$ est appelée un ordre cyclique discret, et $(X, \mathfrak{R})$ est appelé un ensemble cycliquement ordonné trivial.

Remarque 4.5 Si $\mathfrak{R}$ est un ordre cyclique sur un ensemble X , alors $\mathfrak{R}^*$ est un ordre cyclique sur X .

Définition 4.8 (Homomorphisme d'un ordre cyclique) [15] Soient $A = (X, \mathfrak{R})$, $B = (Y, \wp)$ deux ensembles cycliquement ordonnés, $f : X \longrightarrow Y$ est appelé un **homomorphisme** de X dans Y si, $\forall x, y, z \in X$, alors $[(x, y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (f(x), f(y), f(z)) \in \wp]$.

Définition 4.9 (Puissance d'un ensemble cycliquement ordonné) [15] Soient $A = (X, \mathfrak{R})$, $B = (Y, \wp)$ deux ensembles cycliquement ordonnés. Une puissance A^B est un ensemble cycliquement ordonné $C = (Z, \mathfrak{h})$ où $Z = \text{Hom}(B, A)$ et pour toute $f, g, h \in Z$ nous avons $(f, g, h) \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow (f(x), g(x), h(x)) \in \mathfrak{R}$ pour tout $x \in Y$.

4.5.2 Relations binaires associées à un ordre cyclique

Théorème 4.4 [16] Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné et $x_0 \in X$. Pour tout $x, y \in X$ on pose $x <_{\mathfrak{R}, x_0} y$ si et seulement si $(x_0, x, y) \in \mathfrak{R}$ ou $x_0 = x \neq y$. Alors $<_{\mathfrak{R}, x_0}$ est un ordre sur X et x_0 est le plus petit élément pour cet ordre.

Preuve.

Par le Théorème (4.3) et le Lemme (4.1) on a $<_{\mathfrak{R}, x_0}$ est une relation binaire asymétrique et transitive sur $X - \{x_0\}$. Mais $x_0 <_{\mathfrak{R}, x_0} y$ pour toute $y \in X - \{x_0\}$ par la définition de $<_{\mathfrak{R}, x_0}$, i.e. x_0 est le plus petit élément sur $(X, <_{\mathfrak{R}, x_0})$ et $<_{\mathfrak{R}, x_0}$ est un ordre sur X .

Remarque 4.6 [16] D'une manière duale, nous pouvons définir $x <^{\mathfrak{R}, x_0} y \Leftrightarrow (x, y, x_0) \in \mathfrak{R}$ ou $x \neq y = x_0$. Ainsi $<^{\mathfrak{R}, x_0}$ est un ordre sur X avec x_0 est le plus grand élément.

Lemme 4.3 [2] Soit $\mathfrak{R}, \wp$ deux ordres cycliques sur X et soit $x_0 \in X$. Si $\mathfrak{R} \subseteq \wp$, alors $<_{\mathfrak{R}, x_0} \subseteq <_{\wp, x_0}$.

Lemme 4.4 [16] Soit $\mathfrak{R}$ un ordre cyclique linéaire sur X et soit $x_0 \in X$. Alors $<_{\mathfrak{R}, x_0}$ est un ordre linéaire sur X .

Preuve.

Si $x, y \in X - \{x_0\}$, $x \neq y$, alors $(x_0, x, y) \in \mathfrak{R}$ ou $(x_0, y, x) \in \mathfrak{R}$ (cyclique). Le premier cas implique $x <_{\mathfrak{R}, x_0} y$ et le deuxième implique $y <_{\mathfrak{R}, x_0} x$. En plus $x_0 <_{\mathfrak{R}, x_0} y$ pour tout $y \in X - \{x_0\}$. Ainsi $<_{\mathfrak{R}, x_0}$ est un ordre linéaire sur X .

Théorème 4.5 [17] Soit $\leq$ une relation d'ordre sur X , on définit la relation ternaire $\mathfrak{R}_{<}$ sur X par $(x, y, z) \in \mathfrak{R}_{<} \Leftrightarrow x < y < z$, ou $y < z < x$ ou $z < x < y$. Alors, $\mathfrak{R}_{<}$ est un ordre cyclique sur X .

Proposition 4.10 [18] Soit X un ensemble et $\leq$ un ordre linéaire sur X . Si $\text{card}(X) \geq 3$ alors $\mathfrak{R}_{<}$ est un ordre cyclique linéaire sur X .

Preuve.

Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et soient $x, y, z \in X$ tels que $x \neq y \neq z \neq x$, alors l'une des possibilités suivantes est valide :

$$x < y < z, y < z < x, z < x < y,$$

$$z < y < x, y < x < z, x < z < y.$$

Donc le premier cas implique $(x, y, z) \in \mathfrak{R}_{<}$, et le deuxième implique $(z, y, x) \in \mathfrak{R}_{<}$. Par conséquent $\mathfrak{R}_{<}$ est un ordre cyclique linéaire sur X .

Proposition 4.11 [16] Soit $\leq$ un ordre sur X . Alors $\mathfrak{R}_{<^T} = \mathfrak{R}_{<}^*$.

Théorème 4.6 [17] Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné avec un plus petit élément x_0 . Alors $< = <_{\mathfrak{R}_{<, x_0}}$.

Preuve.

Soient $x, y \in X - \{x_0\}$, alors $x < y \Leftrightarrow x_0 < x < y \Leftrightarrow (x_0, x, y) \in \mathfrak{R}_{<} \Leftrightarrow x <_{\mathfrak{R}_{<, x_0}} y$. En plus l'élément $x_0 \in X$ est un élément de $<$ et $<_{\mathfrak{R}_{<, x_0}}$ respectivement, donc $< = <_{\mathfrak{R}_{<, x_0}}$.

Théorème 4.7 [18] Soient X un ensemble non vide et $x_0 \in X$. Si $\mathfrak{R}$ est un ordre cyclique sur X alors $\mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}} \subseteq \mathfrak{R}$.

Remarque 4.7 Dans le théorème précédent, l'égalité n'est pas valide en général. En effet, soient $X = \{x_0, y, z, u, v, w\}$, $\mathfrak{R} = \{(x_0, y, z), (y, z, x_0), (z, x_0, y), (u, v, w), (v, w, u), (w, u, v)\}$. Alors :

$$<_{\mathfrak{R}, x_0} = \{(x_0, y), (x_0, z), (x_0, u), (x_0, v), (x_0, w), (y, z)\}.$$

$$\mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}} = \{(x_0, y, z), (y, z, x_0), (z, x_0, y)\}.$$

Le fait que $\mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}} = \mathfrak{R}$ n'est pas valable conduit en général à la question :

"Quelles les conditions pour vérifier l'égalité".

Théorème 4.8 [17] Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné. Alors il existe une famille $(\leq_i)_{i \in I}$ des ordres sur X telle que $\mathfrak{R} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{R}_{<_i}$.

Preuve.

Soit ℓ l'ensemble de tous les triplets ordonnés $(x, y, z) \in X^3$ tels que $(x, y, z) \in \mathfrak{R}$. Pour toute $\tau = (x, y, z) \in \ell$ on définit un ordre $<_\tau$ sur $\{x, y, z\}$ par $x <_\tau y <_\tau z$. Alors $(<_\tau)_{\tau \in \ell}$ est une famille des ordres sur X , et clairement $\mathfrak{R} = \bigcup_{\tau \in \ell} \mathfrak{R}_{<_\tau}$.

Corollaire 4.4 [17] *Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné. Alors il existe une famille $(<_i)_{i \in I}$ des ordres **linéaire** sur X telle que $\mathfrak{R} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{R}_{<_i}$.*

Théorème 4.9 [17] *Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné. Alors $\mathfrak{R} = \bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}}$.*

Preuve.

Il est facile de prouver $\mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}} \subseteq \mathfrak{R}$ pour tout $x \in X$ (voir la théorème (4.7)). Nous avons donc $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}} \subseteq \mathfrak{R}$. D'autre part, si $(x_0, y, z) \in \mathfrak{R}$, alors $x_0 <_{\mathfrak{R}, x_0} y <_{\mathfrak{R}, x_0} z$, ce qui implique $(x_0, y, z) \in \mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}}$. Alors $\mathfrak{R} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}}$ et donc $\mathfrak{R} = \bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{R}_{<_{\mathfrak{R}, x_0}}$.

4.5.3 Extensions linéaires d'un ordre cyclique

Soient $(X, \mathfrak{R}_1), (X, \mathfrak{R}_2)$ des ensembles cycliquement ordonnés, $\mathfrak{R}_2$ est appelée une **extension** de $\mathfrak{R}_1$ ssi $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2$. En plus, si $\mathfrak{R}_2$ est linéaire on dit que $\mathfrak{R}_2$ est une extension linéaire de $\mathfrak{R}_1$.

Remarque 4.8 [2] *Contrairement au théorème d'extension linéaire de "Szpilrajn" bien connu sur les ordres linéaires, il existe des ordres cycliques qui n'admettent pas une extension linéaire.*

Exemple 4.2 Soit $X = \{x_0, y_0, z_0, x, y, z, u, v, w, q, r, s, t\}$, $\mathfrak{R} = \{(x_0, z_0, x), (y_0, x, y), (z_0, y, z), (x, z, u), (y, u, v), (z, v, x_0), (u, x_0, z_0), (v, z_0, y_0), (x_0, y_0, w), (z_0, w, q), (y_0, q, r), (w, r, s), (q, s, t), (r, t, x_0), (s, x_0, y_0), (t, y_0, z_0), (v, z_0, t), (y_0, v, t)\}$.

Comme $\mathfrak{R}$ est fortement asymétrique alors la clôture cyclique $\mathfrak{R}^c$ est asymétrique (par lemme (4.2)), $\mathfrak{R}^c$ est cyclique et par une vérification directe, nous constatons qu'il est transitive, donc $\mathfrak{R}^c$ est un ordre cyclique sur X .

Soit C une extension de $\mathfrak{R}^c$ sur X et soit $(x_0, y_0, z_0) \in C$. Alors $(x_0, z_0, x) \in \mathfrak{R} \subseteq C$ implique $(y_0, z_0, x) \in C$ par la remarque (3.1), analogiquement $(y_0, x, y) \in \mathfrak{R} \subseteq C$ implique $(z_0, x, y) \in C$ et nous obtenons successivement $(x, y, z) \in C, (y, z, u) \in C, (z, u, v) \in C, (u, v, x_0) \in C, (v, x_0, z_0) \in$

$C, (x_0, z_0, y_0) \in C$. Cela contredit l'hypothèse $(x_0, y_0, z_0) \in C$. Si nous supposons $(x_0, z_0, y_0) \in C$ on obtient alors similaire $(z_0, y_0, w) \in C, (y_0, w, q) \in C, (w, q, r) \in C, (q, r, s) \in C, (r, s, t) \in C, (s, t, x_0) \in C, (t, x_0, y_0) \in C, (x_0, y_0, z_0) \in C$ (contradiction à la définition d'une relation ternaire fortement asymétrique), donc $\mathfrak{R}^c$ n'a pas d'extension linéaire.

Définition 4.10 [18] Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné, et $x_0 \in X$. On appelle $(X, \mathfrak{R})$ est x_0 -stable

ssi : $x, y \in X - \{x_0\}, (z, x, y) \in \mathfrak{R}$ pour tout $z \in X \Rightarrow [(x_0, x, y) \in \mathfrak{R} \text{ ou } (x_0, y, x) \in \mathfrak{R}]$.

Le théorème suivant donne sous quelle condition un ordre cyclique possède une extension linéaire.

Théorème 4.10 [2] Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble cycliquement ordonné tel que $\text{card}(X) \geq 3$. Si $(X, \mathfrak{R})$ est x_0 -stable pour tout $x_0 \in X$, alors il existe une extension linéaire de l'ordre cyclique $\mathfrak{R}$ sur X .

Bibliographie

- [1] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [2] I. Chajda, V. Novák, *On extensions of cyclic orders*, Časopis pro pěstování matematiky 110 (1985), 116–121.
- [3] I. Cristea, M. Ştefănescu, *Hypergroups and n -ary relations*, European Journal of Combinatorics 31 (2010), 780–789.
- [4] I. Cristea, *Several aspects on the hypergroups associated with n -ary relations*, An. St. Univ. Ovidius Constanta 17 (2009), 99–110.
- [5] B. Deschamps, *Cours Théorie des ensembles*, Saint-Etienne, 2002–2003.
- [6] L. Frécon, *Eléments de mathématiques discrètes*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2002.
- [7] CH. Guyeux, J.F. Couchot, *Mathématiques pour l’informatique*, (2010), <https://cours-info.iut-bm.univ-fcomte.fr/wiki/fichiers/MonWiki/coursMathsDis101103.pdf>.
- [8] E. Harzhein, *ordered sets*, Springer Science+Business Media, Inc, 2005.
- [9] S. Iovleff, *Mathématiques Pour l’informatique 1 : Théorie des Ensembles et Relations* (2004), <http://www.iut-info.univ-lille1.fr/~iovleff>.
- [10] A. Isli, A. G. Cohn, *A new approach to cyclic ordering of 2D orientations using ternary relation algebras*, Artificial Intelligence 122 (2000), 137–187.
- [11] B. Kolman, R.C. Busby, S.C. Ross, *Discrete mathematical stuvtures*, édition 4, Pearson education north asia limied and higher education press, 2001.
- [12] M. Marchand, *Outils mathématiques pour l’informaticien*, édition 2, De boeck et Larcier s.a, 2005.

- [13] J.B. Nation, Notes on Lattice Theory, *University de Hawaii*, 2008.
- [14] V. Novák, M. Novotný, *Pseudodimension of relational structures*, Czechoslovak Mathematical Journal 49 (1999), 547–560
- [15] V. Novák, M. Novotný, *On representation of cyclically ordered sets*, Czechoslovak Mathematical Journal 39 (1989), 127–132.
- [16] V. Novák, *Cuts in cyclically ordered sets*, Czechoslovak Mathematical Journal 34 (1984), 322–333.
- [17] V. Novák, M. Novotný, *On determination of a cyclic order*, Czechoslovak Mathematical Journal 33 (1983), 555–563.
- [18] V. Novák, *Cyclically ordered sets*, Czechoslovak Mathematical Journal 32 (1982), 460–473.
- [19] D. Ponasse, J.C. Carrega, *Algèbre et topologie booléennes*, Masson, Paris, 1979.
- [20] M. Pouzet, *Cours Théorie de l'ordre : une introduction*, l'université Simon Bolivar, 2003.
- [21] K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, édition 7, The McGraw-Hill Companies, 2012.
- [22] J. Szpilrajn, *Sur l'existence de l'ordre partial*, Fund. Math. 16 (1930) 386–389.