Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Nour Eldin BEN HAMIDOCHE** *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère pour leur soutient tout au long de mes études.

Résumé

Nous nous intéressons ici aux méthodes de réduction pour le système des équations aux dérivées partielles non linéaires , nous choisisons la méthode directe de Clarkson et Kruskal, apparue en 1989.

pour résoudre un système d'Euler en dimension un , et un système en dimension deux lié à la mécanique des fluides.

Table des matières

Introduction

Il est important de développer des méthodes d'obtention des solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires, parce que celles-ci sont présentés dans la formulation de plusieurs modèles physiques. Par exemple, plusieurs équations aux dérivées partielles non-linéaires interviennent en grand nombre dans la théorie moderne des solitons ainsi qu'en mécanique des fluides, en théorie des champs classiques et quantiques.

Les transformations apparaissent pour la première fois dans l'année 1880 dans le cadre de la théorie classique de la géométrie différentielle des surfaces et de la théorie des équations différentielles.

La méthode de similarité directe de Clarkson et Kruskal a été proposée en 1989 [11] . L'idée de la méthode est de chercher la solution sous forme particuliére, en transformant les équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'application de cette méthode aux systèmes des équations aux dérivées partielles.

Dans le premier chapitre on donne la définition de la méthode de Clarkson et Kruskal avec un exemple d'application sur les équations aux dérivées partielles.

Dans le deuxième chapitre on étudie le système des équations aux dérivées partielles en dimension un, à partir de la recherche de la solution sous forme auto similaire [7] , et en proposant une nouvelle application de la méthode de Clarkson et Kruskal .

En fin dans le chapitre trois, on étudie un système d'Euler en dimension deux, en proposant une nouvelle application pour donner des solutions auto similaires de ce système, et en se basant sur les travaux de Clarkson et Kruskal [5] .

Chapitre 1

Méthode de similarité directe de Clarkson et Kruskal

On a plusieurs méthodes de réduction de similarité , pour résoudre les équations d'Euler, on va présenter essentiellement dans ce chapitre la méthode de Clarkson et Kruskal.

1.1 Définition de la méthode de Clarkson et Kruskal

La méthode de similarité directe de Clarkson et Kruskal est une méthode de reduction directe des équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires elle a été introduite par Clarkson et Kruskal en 1989 [11] .

L'idée de base est chercher la solution a la forme :

$$u(x,t) = u(x,t,W(z)) = A(x,t) + B(x,t)W(z(x,t))$$

Et de, choisir les fonctions u et z de telle maniére que l'équation aux dérivées partielles se réduite à une équation différentielle ordinaire pour $W(z)$.

1.2 Exemple d'application de la méthode de Clarkson et Kruskal

On a l'équation de la chaleur :

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

on va appliquer la méthode de Clarkson et Kruskal sur cette équation

1.2.1 Réduction de similarité

On a la forme de solution:

$u(x,t) = A(x,t) + B(x,t)U(z(x,t))$

$z(x,t) = \frac{x}{t}$

Et on a

$u_t = A_t + B_tU + Bz_tU'$

$u_{xx} = A_{xx} + B_{xx}U + 2B_xz_xU' + Bz_x^2U'' + Bz_{xx}U'$

On remplace dans l'équation:

$Bz_x^2U'' + (2B_xz_x + Bz_t + Bz_{xx})U' + (B_t + B_{xx})U + A_t + A_{xx} = 0...(1)$

1.2.2 Méthode directe de similarité

on pose les coefficients $\Gamma_i(z)$ pour écrire l'équation par z,

tel que $\Gamma_i(z)$ sont fonctions depende à z et $(i = 1...5)$, et on peut appelée les dérivées de $\Gamma_i(z)$ par $\Gamma_i(z)$.

Remarque 1.2.1 *si* δ *à la forme* $\delta = \delta_0 + \lambda\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 0$ *.*

Remarque 1.2.2 *si* μ *à la forme* $\mu = \mu_0\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 1$ *.*

Remarque 1.2.3 *si z déterminer par un équation de la forme $\omega(z) = z_0$,*

on peut prendre $\omega(z) = z$.

1) $2B_x z_x = B z_x^2 \Gamma_1(z)$, 2) $Bz_t + Bz_{xx} = Bz_x^2 \Gamma_2(z)$

3) $B_t + B_{xx} = Bz_x^2 \Gamma_3(z)$, 4) $A_t = Bz_x^2 \Gamma_4(z)$

5) $A_{xx} = Bz_x^2 \Gamma_5(z)$

Donc l'équation (1) implique :

$Bz_x^2 U'' + Bz_x^2 \Gamma_1(z) U' + Bz_x^2 \Gamma_2(z) U' + Bz_x^2 \Gamma_3(z) U + Bz_x^2 \Gamma_4(z) + Bz_x^2 \Gamma_5(z) = 0.$

on dévise par (Bz_x^2) on obtient :

$U'' + \Gamma_1(z)U' + \Gamma_2(z)U' + \Gamma_3(z)U + \Gamma_4(z) + \Gamma_5(z) = 0.$

1)$\Rightarrow 2B_x = Bz_x\Gamma_1(z) \Rightarrow \frac{B_x}{B} = (1/2)z_x\Gamma_1(z) \Rightarrow \ln|B| = (1/2)\Gamma_1(z) + B_0$

$\Rightarrow B = B_0 \exp((1/2)\Gamma_1(z))$

tel que B_0 est une constante , on utilise le remarque (1.2.2) :

$\exp((1/2)\Gamma_1(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_1(z) = 0.$

Alors $B = B_0$, pour la similarité simple on prend $B = 1$.

3)$\Rightarrow Bz_x^2\Gamma_3(z) = 0$, car ($B_t = B_{xx} = 0$) .

$\Rightarrow \Gamma_3(z) = 0.$

2)$\Rightarrow z_t = z_x^2\Gamma_2(z) \Rightarrow \frac{-x}{t^2} = \frac{1}{t^2}\Gamma_2(z)$, car $(B = 1, z_{xx} = 0, z_t = \frac{-x}{t^2}, z_x^2 = \frac{1}{t^2})$

$\Rightarrow \Gamma_2(z) = -x.$

4)$\Rightarrow A_t = \frac{1}{t^2}\Gamma_4(z)$, car $(B = 1, z_x^2 = \frac{1}{t^2})$,

on utilise le remarque (1.2.1) :

$\Gamma_4(z) = 1 \Rightarrow A_t = \frac{1}{t^2} \xrightarrow{\text{parl'intégration}} A(x,t) = A(t) = \frac{-1}{t}.$

5) $\Rightarrow z_x^2\Gamma_5(z) = 0$,(car $A_{xx} = 0$).

$\Rightarrow \Gamma_5(z) = 0.$

On remplace les valeurs des $\Gamma_i(z)$ dans l'équation (1) on obtient:

$U'' - xU' + 1 = 0.$

la solution d'équation de la chaleur donner par :

$u(x,t) = \frac{-1}{t} + U(\frac{x}{t}).$

1.3 Cas particulier - auto similarité-

1.3.1 Définition du cas auto similaire

C'est un cas particuliére de la méthode directe de Clarkson et Kruskal,

la forme de solution du Clarkson et Kruskal est:

$$u(x,t) = A(x,t) + B(x,t)W(z(x,t))$$

avec $z(x,t) = \frac{x}{a(t)}$.

et dans le cas auto similarité $A(x,t) = 0$ et $B(x,t) = B(t)$

Alors la forme de solution de cas auto similarité est :

$$u(x,t) = B(t)W(z(x,t))$$

1.3.2 Cas auto similarité de un dimension

Dans ce cas z s'écrit sous la forme :

$$z(x,t) = \frac{x}{a(t)}.$$

et la solution s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = B(t)W(\frac{x}{a(t)}) \ .$$

1.3.3 Cas auto similarité de deux dimensions

Dans ce cas z s'écrit sous la forme :

$$z(x,y,t) = (\frac{x}{a(t)}, \frac{y}{a(t)}).$$

et la solution s' écrit sous la forme :

$$u(x,t) = B(t)W(z(x,y,t)) \ .$$

1.4 Exemple d'application du cas auto similaire

On applique le cas auto similarité sur l'équation (1) (l'équation de la chaleur)

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

1.4.1 Réduction de similarité

La forme de solution dans le cas particulie de Clarkson et Kruskal

-Le cas auto similaire-

$u(x,t) = B(t)U(z(x,t))$

$= B(t)U(\frac{x}{t})$, tel que $z(x,t) = \frac{x}{t}$

donc$\begin{cases} u_t = B_t U + B z_t U' \\ u_{xx} = B z_x^2 U'' + B z_{xx} U' \end{cases}$

On remplace dans l'équation (1) :

$B z_x^2 U'' + (B z_t + B z_{xx}) U' + B_t U = 0 ...(1.1)$

1.4.2 Méthode directe de similarité

on pose les coefficients $\Gamma_i(z)$ pour écrire l'équation par fonction z,

tel que les $\Gamma_i(z)$ sont fonctions par z et $(i = 1, ..., 3)$, et on peut appelée les dérivées de $\Gamma_i(z)$ par $\Gamma_i(z)$.

Remarque 1.4.1 *si* δ *à la forme* $\delta = \delta_0 + \lambda\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 0$ *.*

Remarque 1.4.2 *si* μ *à la forme* $\mu = \mu_0\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 1$ *.*

Remarque 1.4.3 *si* z *déterminer par un équation de la forme* $\omega(z) = z_0$ *,*

on peut prendre $\omega(z) = z$.

1) $B_t = B z_t \Gamma_1(z)$, 2) $B z_x^2 = B z_t \Gamma_2(z)$

3) $B z_{xx} = B z_t \Gamma_3(z)$

on remplace les fonctions des $\Gamma_i(z), (i = 1, 2, 3)$ dans (1.1)

$Bz_tU' + Bz_t\Gamma_1(z)U + Bz_t\Gamma_2(z)U'' + \Gamma_3(z)Bz_tU' = 0...(1.2)$

on dévise par (Bz_t) :

$(1.2) \Rightarrow U' + \Gamma_1(z)U + \Gamma_2(z)U'' + \Gamma_3(z)U' = 0.$

1) $\Rightarrow \frac{B_t}{B} = z_t\Gamma_1(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|B| = \Gamma_1(z) + B_0 \Rightarrow B = B_0 \exp(\Gamma_1(z)),$

tel que B_0 est un constant.

on utilise le remarque (1.4.2)

donc $\exp(\Gamma_1(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_1(z) = 0 \Rightarrow B = B_0.$

pour la similarité simple on prend $B = B_0 = 1.$

2) $\Rightarrow \frac{1}{t^2} = \frac{-x}{t^2}\Gamma_2(z)$,(car $z_x^2 = \frac{1}{t^2}, B = 1, z_t = \frac{-x}{t^2}$)

$\Rightarrow \Gamma_2(z) = -\frac{1}{x}.$

3)$\Rightarrow \Gamma_3(z) = 0$, (car $z_{xx} = 0, B = 1, z_t = \frac{-x}{t^2}$)

on remplace les valeurs des fonctions $\Gamma_i(z), (i = 1, 2, 3)$ dans (1.2) on obtient :

$-\frac{1}{x}U'' + U' = 0$

$\xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|U'(z)| = x \Rightarrow U'(z) = \exp(xz)$

$\xrightarrow{\text{par l'intégration}} U(z) = \frac{1}{x}\exp(xz).$

Alors la solution auto similaire d'équation de la chaleur est :

$u(x, t) = \frac{1}{x}\exp(xz).$

Chapitre 2

Application de la méthode de Clarkson et Kruskal sur un système des équations aux dérivées partielles en dimension un

Dans ce chapitre on va présenter une nouvelle application de la méthode de Clarkson et Kruskal sur le système d'Euler en dimension un.

Commençant d'abord par la présentation d'une application de la forme auto-similaire donnée dans [7]

2.1 Définition du système d'Euler en dimension un

On a le système d'Euler (1) en dimension un composée à troix équation :

$$\begin{cases} \rho(x,t)_t + (\rho(x,t)v(x,t))_x = 0. \quad ...(1.1) \\ v(x,t)_t + v(x,t)v(x,t)_x = \frac{-1}{\rho(x,t)}p(x,t)_x \quad ...(1.2) \\ T(x,t)_t + v(x,t)T(x,t)_x = \lambda T(x,t)_{xx} \quad ...(1.3) \end{cases}$$

Tel que ρ ,v, T, p des fonctions représentant respectivement les valeurs des densité, vitesse, tempéra ture, pression .

2.2 L'application du cas auto similarité sur le système en dimension un

On appliquant -le cas auto similaire- sur le systéme (1)

2.2.1 Réduction de similarité

Tel que ρ ,v, T, p des fonctions par x, t s'écrivons sous la forme :

$\rho(x,t) = t^{-\gamma}h(z(x,t))$

$v(x,t) = t^{-\delta}g(z(x,t))$

$T(x,t) = t^{-\alpha}f(z(x,t))$

$p(x,t) = b(t^{-\gamma}h(z(x,t)))^n$

$z(x,t) = \frac{x}{t^\beta}$

Tel que x, t sont variables et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont paremétres, b est un nomber réel constant et $n \in \mathbb{N}$.

(1)- $\rho(x,t)_t = -\gamma t^{-\gamma-1}h(z) - \beta t^{-\gamma-1}zh'(z)$

(2)- $(\rho(x,t)v(x,t))_x = ((t^{-\gamma}h(z))(t^{-\delta}g(z)))_x = t^{-\gamma-\delta-\beta}(g'h + h'g)$

D'aprés ((1),(2),(1.1)) on trouve

$-\gamma t^{-\gamma-1}h(z) - \beta t^{-\gamma-1}zh'(z) + t^{-\gamma-\delta-\beta}(g'h + h'g) = 0...(1.1.1)$

(3)- $v(x,t)_t = -\delta t^{-\delta-1}g(z) - \beta t^{-\delta-1}zg'(z)$

(4)- $v(x,t)v(x,t)_x = (t^{-\delta}g(z))(t^{-\delta}g(z))_x = t^{-2\delta-\beta}gg'$

(5)- $p(x,t) = b\rho^n(x,t) = b(t^{-\gamma}h(z))^n$

$\Rightarrow p_x = b.n(t^{-\beta}h')(t^{-\gamma}h)^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{-1}{\rho(x,t)}p(x,t)_x = -b.n(t^{-\gamma-\beta}h')(t^{-\gamma}h)^{n-2}$

D'aprés ((3),(4),(5),(1.2)) on trouve

$-\delta t^{-\delta-1}g - \beta t^{-\delta-1}zg' + t^{-2\delta-\beta}gg' = -b.n(t^{-\gamma-\beta}h')(t^{-\gamma}h)^{n-2}$

$\Rightarrow -\delta t^{-\delta-1}g - \beta t^{-\delta-1}zg' + t^{-2\delta-\beta}gg' + b.n(t^{-\gamma-\beta}h')(t^{-\gamma}h)^{n-2} = 0...(1.2.1)$

(6)- $T(x,t)_t = -\alpha t^{-\alpha-1}f - \beta t^{-\alpha-1}zf'$

(7)- $v(x,t)T(x,t)_x = (t^{-\delta}g)(t^{-\alpha-\beta}f')$

(8)- $\lambda T(x,t)_{xx} = \lambda(t^{-\alpha-2\beta}f'')$

D'aprés ((6),(7),(8),(1.3)) on trouve

$T(x,t)_t + v(x,t)T(x,t)_x - \lambda T(x,t)_{xx} = 0.$

$\Rightarrow -\alpha t^{-\alpha-1} f - \beta t^{-\alpha-1} z f' + (t^{-\delta-\alpha-\beta} g f') - \lambda(t^{-\alpha-2\beta} f'') = 0 ...(1.3.1)$

2.2.2 Les solutions non linéaires du système

$(1.1.1) \Rightarrow -\gamma t^{-\gamma-1} h(z) - \beta t^{-\gamma-1} z h'(z) + t^{-\gamma-\delta-\beta}(g'h + h'g) = 0.$

$$\Rightarrow t^{-\gamma-1} = t^{-\gamma-\delta-\beta} \Rightarrow -\gamma - 1 = -\gamma - \delta - \beta$$

$$\Rightarrow 1 - \delta = \beta$$

On pose $\beta = 1/2 \Rightarrow \delta = 1/2$

Donc $(1.1.1) \Rightarrow -\gamma h(z) - (1/2) z h'(z) + (g'h + h'g) = 0$

Si on choisisons $\gamma = 1/2$

Donc $(1.1.1) \Rightarrow -(1/2)h - (1/2)zh' + (g'h + h'g) = 0$

$$\Rightarrow -((1/2)zh)' = -(hg)' \xrightarrow{\text{parl'intégration}} (1/2)zh = (hg) \Rightarrow g(z) = (1/2)z$$

$(1.2.1) \Rightarrow -\delta t^{-\delta-1} g - \beta t^{-\delta-1} z g' + t^{-2\delta-\beta} g g' + b.n(t^{-\gamma-\beta} h')(t^{-\gamma} h)^{n-2} = 0$

$$\Rightarrow t^{-\delta-1} = t^{-2\delta-\beta} = t^{-\gamma-\beta-n\gamma+2\gamma} \Rightarrow -\delta - 1 = -2\delta - \beta = -\gamma - \beta - n\gamma + 2\gamma$$

On a : $\delta = \beta = 1/2$

$\Rightarrow -n\gamma + \gamma - 1/2 = -3/2 \Rightarrow n = \frac{1+\gamma}{\gamma}$

$(1.2.1) \Rightarrow -(1/2)g - (1/2)zg' + gg' + b.n(h')(h)^{n-2} = 0$

$(1.3.1) \Rightarrow -\alpha t^{-\alpha-1} f - \beta t^{-\alpha-1} z f' + (t^{-\delta-\alpha-\beta} g f') - \lambda(t^{-\alpha-2\beta} f'') = 0$

$$\Rightarrow t^{-\alpha-1} = t^{-\delta-\alpha-\beta} = t^{-\alpha-2\beta}$$

On a : $\delta = \beta = 1/2$

$\Rightarrow -\lambda f'' + (-(1/2)z + g) f' - \alpha f = 0.$

On a : $g(z) = (1/2)z$

1) On remplace dans (1.2.1) on obtient:

$-(1/2)(1/2)z - (1/2)(1/2)z + (1/2)(1/2)z + b.\frac{1+\gamma}{\gamma} h'(h)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}-2} = 0$

Si on choisisons $n = \frac{1+\gamma}{\gamma} = 3.$

$\Rightarrow -(1/2)(1/2)z = -b.\frac{1+\gamma}{\gamma} h'(h)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}-2} \Rightarrow -(1/4)z = -3bhh'$

La solution de (1.2.1) donner par $3bhh' = (1/4)z$

Par l'intégration :

$3b \int h dh = (1/4) \int z dz \Rightarrow \frac{3b}{2} h(z)^2 = \frac{1}{8} z^2 + c_1$

$\Rightarrow h(z) = ((1/3b)(\frac{1}{4} z^2 + 2c_1))^{1/2}$

Tel que c_1 et constant .

2) On remplace dans (1.3.1) on obtient:

$-\lambda f'' + (-(1/2)z + (1/2)z)f' - \alpha f = 0 \Rightarrow -\lambda f'' - \alpha f = 0$

$\Rightarrow \lambda f'' + \alpha f = 0$

Par l'intégration on obtient :

$f(z) = c_2 \cos(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z) + c_3 \sin(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z)$

Alors on a les resultats suivants :

$g(z) = (1/2)z$

$f(z) = c_2 \cos(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z) + c_3 \sin(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z)$

$h(z) = ((1/3b)(\frac{1}{4}z^2 + 2c_1))^{1/2}$

Donc on donne les valeurs des (ρ, v, T, p)

$$\left\{\begin{array}{c} \rho(x,t) = t^{-\gamma} h(z(x,t)) \\ v(x,t) = t^{-\delta} g(z(x,t)) \\ T(x,t) = t^{-\alpha} f(z(x,t)) \\ p(x,t) = b(t^{-\gamma} h(z(x,t)))^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \rho(x,t) = t^{-\gamma}((1/3b)(\frac{1}{4}z^2 + 2c_1))^{1/2} \\ v(x,t) = t^{-1/2}(1/2)z \\ T(x,t) = t^{-\alpha}(c_2 \cos(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z) + c_3 \sin(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} z)) \\ p(x,t) = b(t^{-\gamma}((1/3b)(\frac{1}{4}z^2 + 2c_1))^{1/2})^3 \end{array}\right.$$

2.3 L'application de la méthode de Clarkson et Kruskal sur un système en dimension un

En appliquant la méthode de Clarkson et Kruskal sur le systéme (1) avec les équations ((1.1), (1.2), (1.3))

2.3.1 Réduction de similarité

Tel que ρ ,v, T, p des fonctions par x, t s'écrivons sous la forme:

$\rho(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)h(z(x,t))$

$v(x,t) = \varepsilon(x,t) + \eta(x,t)g(z(x,t))$

$T(x,t) = \sigma(x,t) + \psi(x,t)f(z(x,t))$

$p(x,t) = b\rho^n(x,t)$

$z(x,t) = \frac{x}{a(t)}$

Tel que b est une constant et n est réel, on prend $n = 2$.

On a:

(1)-$\rho(x,t)_t = \alpha_t + \beta_t h + \beta z_t h'$

(2)- $(\rho(x,t)v(x,t))_x = ((\alpha + \beta h)(\varepsilon + \eta g))_x$

$= \alpha_x\varepsilon + \alpha\varepsilon_x + \alpha_x\eta g + \alpha\eta_x g + \alpha\eta z_x g' + \beta_x\varepsilon h + \beta\varepsilon_x h + \beta\varepsilon z_x h'$

$+\beta_x\eta hg + \beta\eta_x hg + \beta\eta z_x(h'g + hg')$

d'aprés ((1), (2), (1.1))

$\beta\eta z_x(h'g + hg') + (\beta_x\eta + \beta\eta_x)hg + (\beta_x\varepsilon + \beta\varepsilon_x)h + (\alpha_x\eta + \alpha\eta_x)g + (\beta\varepsilon z_x + \beta z_t)h'$

$+\alpha\eta z_x g' + \alpha_x\varepsilon + \alpha\varepsilon_x + \alpha_t = 0$...(1.1.1)

On a:

(3)-$v(x,t)_t = \varepsilon_t + \eta_t g + \eta z_t g'$

(4)-$v(x,t)v(x,t)_x = (\varepsilon + \eta g)(\varepsilon_x + \eta_x g + \eta z_x g')$

(5)-$\frac{-1}{\rho(x,t)}p(x,t)_x = -\rho^{-1}(x,t)(2b\rho_x\rho(x,t)) = -2b\rho_x$, (on prend $b = 1/2$)

d'aprés ((3), (4), (5), (1.2))

$\varepsilon_t + \eta_t g + \eta z_t g' + \varepsilon\varepsilon_x + \varepsilon\eta_x g + \varepsilon\eta z_x g' + \varepsilon_x\eta g + \eta\eta_x g^2 + \eta^2 z_x g' g = -(\alpha_x + \beta_x h + \beta z_x h')$

$\Rightarrow \eta^2 z_x g' g + \eta\eta_x g^2 + \varepsilon\eta z_x g' + (\varepsilon\eta_x + \varepsilon_x\eta)g + \beta_x h + \eta_t g + \eta z_t g' + \beta z_x h'$

$+\varepsilon\varepsilon_x + \varepsilon_t + \alpha_x = 0...(1.2.1)$

On a:

(6)-$T(x,t)_t = \sigma_t + \psi_t f + \psi z_t f'$

(7)-$v(x,t)T(x,t)_x = (\varepsilon + \eta g)(\sigma_x + \psi_x f + \psi z_x f')$

(8)-$\lambda T(x,t)_{xx} = \lambda(\sigma_{xx} + \psi_{xx} f + \psi_x z_x f' + \psi_x z_x f' + \psi z_x^2 f'')$

d'aprés ((6), (7), (8), (1.3))

$(\psi_t + \varepsilon\psi_x - \lambda\psi_{xx})f + (\psi z_t + \varepsilon\psi z_x - 2\lambda\psi_x z_x - \lambda\psi z_{xx})f' + \eta\sigma_x g + \eta\psi_x g f$

$+\eta\psi z_x g f' - \lambda\psi z_x^2 f'' + \sigma_t + \varepsilon\sigma_x - \lambda\sigma_{xx} = 0...(1.3.1)$

2.3.2 Méthode directe de similarité

on pose les coefficients $\Gamma_i(z)$ pour écrire les équations par z,

tel que les $\Gamma_i(z)$ sont fonctions par z et $(i = 1, ..., 21)$, et on peut appelée les dérivées de $\Gamma_i(z)$ par $\Gamma_i(z)$.

Remarque 2.3.1 *si* δ *à la forme* $\delta = \delta_0 + \lambda\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 0$ *.*

Remarque 2.3.2 *si* μ *à la forme* $\mu = \mu_0\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 1$ *.*

Remarque 2.3.3 *si* z *déterminer par un équation de la forme* $\omega(z) = z_0$ *,*

on peut prendre $\omega(z) = z$.

1) $\beta_x\eta = \beta\eta z_x\Gamma_1(z)$

2) $\beta\eta_x = \beta\eta z_x\Gamma_2(z)$

3) $(\beta_x\varepsilon + \beta\varepsilon_x) = \beta\eta z_x\Gamma_3(z)$

4) $(\alpha_x\eta + \alpha\eta_x) = \beta\eta z_x\Gamma_4(z)$

5) $\alpha\eta z_x = \beta\eta z_x\Gamma_5(z)$

6) $(\beta\varepsilon z_x + \beta z_t) = \beta\eta z_x\Gamma_6(z)$

7) $(\alpha_x\varepsilon + \alpha\varepsilon_x + \alpha_t) = \beta\eta z_x\Gamma_7(z)$

8) $(\varepsilon\eta_x + \varepsilon_x\eta) = \varepsilon\eta z_x\Gamma_8(z)$

9) $\eta\eta_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_9(z)$

10) $\eta^2 z_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{10}(z)$

11) $\beta z_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{11}(z)$

12) $\varepsilon\varepsilon_x + \varepsilon_t + \alpha_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{12}(z)$

13) $\beta_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{13}(z)$

14) $\eta_t = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{14}(z)$

15) $\eta z_t = \varepsilon\eta z_x\Gamma_{15}(z)$

16) $\eta\psi_x = \eta\psi z_x\Gamma_{16}(z)$

17) $(\psi_t + \varepsilon\psi_x - \lambda\psi_{xx}) = \eta\psi z_x\Gamma_{17}(z)$

18) $(\psi z_t + \varepsilon\psi z_x - 2\lambda\psi_x z_x - \lambda\psi z_{xx}) = \eta\psi z_x\Gamma_{18}(z)$

19) $\eta\sigma_x = \eta\psi z_x\Gamma_{19}(z)$

20) $-\lambda\psi z_x^2 = \eta\psi z_x\Gamma_{20}(z)$

21) $\sigma_t + \varepsilon\sigma_x - \lambda\sigma_{xx} = \eta\psi z_x\Gamma_{21}(z)$

Alors:

$(1.1.1) \Rightarrow \beta\eta z_x(h'g + hg') + \beta\eta z_x(\Gamma_1(z) + \Gamma_2(z))hg + \beta\eta z_x\Gamma_3(z)h + \beta\eta z_x\Gamma_4(z)g$

$+\beta\eta z_x\Gamma_5(z)g' + \beta\eta z_x\Gamma_6(z)h' + \beta\eta z_x\Gamma_7(z) = 0.$

On dévise par $(\beta\eta z_x)$ on obtient:

$(1.1.1) \Rightarrow (h'g+hg')+(\Gamma_1(z)+\Gamma_2(z))hg+\Gamma_3(z)h+\Gamma_4(z)g+\Gamma_5(z)g' +\Gamma_6(z)h'+\Gamma_7(z) = 0.$

et

$(1.2.1) \Rightarrow \varepsilon\eta z_x g' + \varepsilon\eta z_x\Gamma_8(z)g + \varepsilon\eta z_x\Gamma_9(z)g^2 + \varepsilon\eta z_x\Gamma_{10}(z)g'g + \varepsilon\eta z_x\Gamma_{11}(z)h'$

$+\varepsilon\eta z_x\Gamma_{12}(z) + \varepsilon\eta z_x\Gamma_{13}(z)h + \varepsilon\eta z_x\Gamma_{14}(z)g + \varepsilon\eta z_x\Gamma_{15}(z)\ g' = 0$

On dévise par $(\varepsilon\eta z_x)$ on obtient:

$(1.2.1) \Rightarrow g' + \Gamma_8(z)g + \Gamma_9(z)g^2 + \Gamma_{10}(z)g'g + \Gamma_{11}(z)h' + \Gamma_{12}(z) + \Gamma_{13}(z)h + \Gamma_{14}(z)g$

$+ \Gamma_{15}(z)\ g' = 0$

et

$(1.3.1) \Rightarrow \eta\psi z_x gf' + \eta\psi z_x\Gamma_{16}(z)gf + \eta\psi z_x\Gamma_{17}(z)f + \eta\psi z_x\Gamma_{18}(z)f'$

$+\eta\psi z_x\Gamma_{19}(z)g + \eta\psi z_x\Gamma_{20}(z)f'' + \eta\psi z_x\Gamma_{21}(z) = 0$

On dévise par $(\eta\psi z_x)$ on obtient:

$(1.3.1) \Rightarrow gf' + \Gamma_{16}(z)gf + \Gamma_{17}(z)f + \Gamma_{18}(z)f' + \Gamma_{19}(z)g + \Gamma_{20}(z)f'' + \Gamma_{21}(z) = 0$

On cherche sur les valeurs des $\Gamma_i(z)$ tel que $(i = 1, ..., 21)$:

1) $\Rightarrow\ \beta_x\eta = \beta\eta z_x\Gamma_1(z) \Rightarrow \beta_x = \beta z_x\Gamma_1(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|\beta| = \Gamma_1(z) + \beta_0(t)$

$\Rightarrow \beta = \beta_0(t)\exp(\Gamma_1(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_1(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_1(z) = 0$ donc $\beta = \beta_0(t)$

On peut prendre $\beta_0(t)$ constante on pose $\beta = \beta_0(t) = 1$

2) $\Rightarrow \beta\eta_x = \beta\eta z_x \Gamma_2(z) \Rightarrow \eta_x = \eta z_x \Gamma_2(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|\eta| = \Gamma_2(z) + \eta_0(t)$

$\Rightarrow \eta = \eta_0(t)\exp(\Gamma_2(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_2(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_2(z) = 0$ donc $\eta = \eta_0(t)$

On peut prendre $\eta_0(t)$ constante on pose $\eta = \eta_0(t) = 1$.

3) $\Rightarrow$ $(\beta_x\varepsilon + \beta\varepsilon_x) = \beta\eta z_x\Gamma_3(z)$ on a : $\beta = 1, \eta = 1$ et $\beta_x = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_x = z_x\Gamma_3(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|\varepsilon| = \Gamma_3(z) + \varepsilon_0(t)$

$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0(t)\exp(\Gamma_3(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_3(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_3(z) = 0$ donc $\varepsilon = \varepsilon_0(t)$

On peut prendre $\varepsilon_0(t)$ constante on pose $\varepsilon = \varepsilon_0(t) = 1$

4) $\Rightarrow (\alpha_x\eta + \alpha\eta_x) = \beta\eta z_x\Gamma_4(z)$ on a : $\beta = 1, \eta = 1$ et $\eta_x = 0$

$\Rightarrow \alpha_x = z_x\Gamma_4(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|\alpha| = \Gamma_4(z) + \alpha_0(t)$

$\Rightarrow \alpha = \alpha_0(t)\exp(\Gamma_4(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_4(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_4(z) = 0$ donc $\alpha = \alpha_0(t)$

On peut prendre $\alpha_0(t)$ constante on pose $\alpha = \alpha_0(t) = 1$

5) $\Rightarrow \alpha\eta z_x = \beta\eta z_x\Gamma_5(z)$ on a : $\beta = 1, \eta = 1$ et $\alpha = 1$

$\Rightarrow z_x = z_x\Gamma_5(z) \Rightarrow \Gamma_5(z) = 1$

6) $\Rightarrow (\beta\varepsilon z_x + \beta z_t) = \beta\eta z_x\Gamma_6(z)$ on a : $\beta = 1, \eta = 1$ et $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow z_x + z_t = z_x\Gamma_6(z)$

On a : $z_x = \frac{1}{a(t)}$ et $z_t = \frac{-a_t}{a(t)^2}x$

Donc : $\Gamma_6(z) = 1 - \frac{a_t}{a(t)}x$, on prend $a(t) = t$

$\Rightarrow \Gamma_6(z) = 1 - \frac{1}{t}x = 1 - z$

7) $\Rightarrow$ $(\alpha_x\varepsilon + \alpha\varepsilon_x + \alpha_t) = \beta\eta z_x\Gamma_7(z)$ on a :$\beta = 1, \eta = 1, \alpha = 1, \varepsilon = 1$

et $\alpha_x = 0, \varepsilon_x = 0, \alpha_t = 0$

Alors : $\Gamma_7(z) = 0$

8) $\Rightarrow (\varepsilon\eta_x + \varepsilon_x\eta) = \varepsilon\eta z_x\Gamma_8(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1, \varepsilon_x = 0, \eta_x = 0$

Alors : $\Gamma_8(z) = 0$

9) $\Rightarrow$ $\eta\eta_x = \varepsilon\eta z_x\Gamma_9(z)$ on a :$\eta = 1, \varepsilon = 1, \eta_x = 0$

Alors : $\Gamma_9(z) = 0$

10)$\Rightarrow$ $\eta^2 z_x = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{10}(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1$

Alors : $\Gamma_{10}(z) = 1$

11) $\Rightarrow$ $\beta z_x = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{11}(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1$

Alors : $\Gamma_{11}(z) = 1$

12)$\Rightarrow$ $\varepsilon\varepsilon_x + \varepsilon_t + \alpha_x = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{12}(z)$ on a : $\varepsilon = 1, \alpha = 1, \alpha_x = 0, \varepsilon_x = 0, \varepsilon_t = 0$

Alors : $\Gamma_{12}(z) = 0$

13) $\Rightarrow$ $\beta_x = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{13}(z)$ on a : $\beta = 1, \eta = 1, \varepsilon = 1, \beta_x = 0$

Alors : $\Gamma_{13}(z) = 0$

14) $\Rightarrow$ $\eta_t = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{14}(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1, \eta_t = 0$

Alors : $\Gamma_{14}(z) = 0$

15) $\Rightarrow$ $\eta z_t = \varepsilon\eta z_x \Gamma_{15}(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1,$ $z_x = \frac{1}{t}$, $z_t = \frac{-1}{t^2}x$

Alors : $\Gamma_{15}(z) = \frac{-x}{t} = -z$

16)$\Rightarrow$ $\eta\psi_x = \eta\psi z_x \Gamma_{16}(z)$ on a : $\eta = 1 \Rightarrow \psi_x = \psi z_x \Gamma_{16}(z)$

par l'intégration $\ln|\psi| = \Gamma_{16}(z) + \psi_0(t)$

$\Rightarrow \psi = \psi_0(t)\exp(\Gamma_{16}(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_{16}(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_{16}(z) = 0$ donc $\psi = \psi_0(t)$

On peut prendre $\psi_0(t)$ constante on pose $\psi = \psi_0(t) = 1.$

17) $\Rightarrow$ $(\psi_t + \varepsilon\psi_x - \lambda\psi_{xx}) = \eta\psi z_x \Gamma_{17}(z)$ on a : $\eta = 1, \varepsilon = 1, \psi = 1, \psi_x = 0, \psi_t = 0, \psi_{xx} = 0$

Alors : $\Gamma_{17}(z) = 0.$

18)$\Rightarrow$ $(\psi z_t + \varepsilon\psi z_x - 2\lambda\psi_x z_x - \lambda\psi z_{xx}) = \eta\psi z_x \Gamma_{18}(z)$

On a : $\varepsilon = 1, \psi_x = 0, \psi = 1, z_{xx} = 0,$ $z_x = \frac{1}{t}$, $z_t = \frac{-1}{t^2}x$

Alors : $\Gamma_{18}(z) = 1 - \frac{1}{t}x = 1 - z$

19)$\Rightarrow$ $\eta\sigma_x = \eta\psi z_x \Gamma_{19}(z)$ on a : $\eta = 1, \psi = 1$

$\Rightarrow \sigma_x = z_x \Gamma_{19}(z) \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \ln|\sigma| = \Gamma_{19}(z) + \sigma_0(t)$

$\Rightarrow \sigma = \sigma_0(t)\exp(\Gamma_{19}(z))$

D'aprés remarque (2.3.2) on a : $\exp(\Gamma_{19}(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_{19}(z) = 0$ donc $\sigma = \sigma_0(t)$

on peut prendre $\sigma_0(t)$ constante on pose $\sigma = \sigma_0(t) = 1$

20) $\Rightarrow$ $-\lambda\psi z_x^2 = \eta\psi z_x \Gamma_{20}(z) \Rightarrow -\lambda z_x = \Gamma_{20}(z)$ on a : $z_x = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \Gamma_{20}(z) = -\lambda(1/t)$

21)$\Rightarrow$ $\sigma_t + \varepsilon\sigma_x - \lambda\sigma_{xx} = \eta\psi z_x \Gamma_{21}(z)$ on a : $\sigma_{xx} = 0, \sigma_x = 0,\ \sigma_t = 0, \varepsilon = \eta = \psi = 1$

$\Rightarrow \Gamma_{21}(z) = 0$

Alors, on remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$,$i = (1, ..., 21)$ dans ($(1.1.1), (1.2.1), (1.3.1)$) on obtient :

$(1.1.1) \Rightarrow (h'g + hg') + g' \ + (1 - z)h' = 0.$

$(1.2.1) \Rightarrow g' + g'g + h' - z\ g' = 0.$

$(1.3.1) \Rightarrow gf' + (1 - z)f' - \lambda(1/t)f'' = 0.$

(1) On prend l'équation (1.1.1)

$(h'g + hg') + g' \ + (1 - z)h' = 0 \Rightarrow h'(g + (1 - z)) + g'(1 + h) = 0$

$\Rightarrow h'(g + (1 - z)) = -g'(1 + h) \Rightarrow h'/(1 + h) = -g'/(g + (1 - z))$

$\xrightarrow{\text{par l'intégration}}$ $\ln|(1 + h)| = -\ln|(g + (1 - z))| \Rightarrow h(z) + 1 = (g(z) + (1 - z))^{-1}$

$\Rightarrow h(z) = (g(z) + (1 - z))^{-1} - 1$

(2) On prend l'équation (1.2.1)

$g' + g'g + h' - z\ g' = 0$

On a : $h(z) = (g(z) + (1 - z))^{-1} - 1 \Rightarrow h'(z) = (-g'(z) + 1)(g(z) - z + 1)^{-2}$

$\Rightarrow g'(1 + g - z) + (-g'(z) + 1)(g(z) - z + 1)^{-2} = 0.$

$\Rightarrow g'(-g^{-2} - ((z - 1)^2 + z - 1) + 2g(z - 1)) = -(g - z + 1)^2$

(3) On prend l'équation (1.3.1)

$(\ g + 1 - z)f' - \lambda(1/t)f'' = 0 \ \Rightarrow -\lambda(1/t)f'' = -\ \ (\ g + 1 - z)f'$

$\Rightarrow \frac{f''}{f'} = \frac{(\ g+1-z)}{\lambda(1/t)}$ $\xrightarrow{\text{par l'intégration}}$ $\ln|f'| = \int \frac{(\ g+1-z)}{\lambda(1/t)} dz$

On pose : $\int \frac{(\ g+1-z)}{\lambda(1/t)} dz = K(z)$

Donc : $f(z) = \exp(K(z))$

Les valeurs des $(\rho\ ,v, T, p)$

$$\left\{\begin{array}{c} \rho(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)h(z(x,t)) \\ v(x,t) = \varepsilon(x,t) + \eta(x,t)g(z(x,t)) \\ T(x,t) = \sigma(x,t) + \psi(x,t)f(z(x,t)) \\ p(x,t) = a\rho^n(x,t) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \rho(x,t) = (g(x/t) + (1 - (x/t)))^{-1} \\ v(x,t) = 1 + g(x/t) \\ T(x,t) = 1 + \exp(K(x/t)) \\ p(x,t) = (1/2)((g(x/t) + (1 - (x/t)))^{-1})^{\ 2} \end{array}\right.$$

Chapitre 3

Application de la méthode de Clarkson et Kruskal sur un système des équations aux dérivées partielles en dimension deux

Dans ce chapitre en se basent sur les travaux sur le système d'Euler en dimension deux [5], et on va presenter une nouvelle application de le cas auto similarité sur le méme système d'Euler.

3.1 Définition du système d'Euler en dimension deux

on prend le système d'Euler (2) en dimension deux :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ u_t + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 \end{cases} \quad ...(2)$$

Tel que : u est un la vitesse et composée à deux composants :

$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$.

et p représente la valeur de la pression de liquide à position (x, y, t).

donc on écrit le système par les composants de u.

donc $\operatorname{div} u = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \qquad ...(2.1)$

$$\text{et} \quad u_t + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & ...(2.2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & ...(2.3) \end{cases}$$

Donc les équations de système sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \; ...(2.1) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ...(2.2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad ...(2.3) \end{cases}$$

3.2 Application de la méthode de Clarkson et Kruskal sur le système

On a la forme de solution par la méthode de Clarkson et Kruskal écrit par :

$u(x, y, t) = \Psi(x, y, t) + \Phi(x, y, t)\Omega(z(x, y, t))$

tel que Ψ, Φ, Ω des fonctions et x, y, t des variables.

3.2.1 Réduction de similarité

$u_1(x, y, t) = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)W(z(x, y, t))$

$u_2(x, y, t) = \varepsilon(x, y, t) + \eta(x, y, t)Q(z(x, y, t))$

donc on remplace dans $(2.1), (2.2), (2.3)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \alpha_x + \beta_x W + z_x \beta W' \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = \varepsilon_y + \eta_y Q + z_y \eta Q' \end{cases} \qquad ...(2.4)$$

(2.1) et $(2.4) \quad \Rightarrow \alpha_x + \beta_x W + z_x \beta W' + \varepsilon_y + \eta_y Q + z_y \eta Q' = 0 ...(2.5)$

et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha_t + \beta_t W + z_t \beta W' \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = (\alpha + \beta W)(\alpha_x + \beta_x W + z_x \beta W') \\ u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = (\varepsilon + \eta Q)(\alpha_y + \beta_y W + z_y \beta W') \\ \frac{\partial p}{\partial x} = p_x \end{cases} \qquad ...(2.6)$$

(2.2) et (2.6) $\Rightarrow \beta^2 z_x WW' + (z_t\beta + \alpha\beta z_x + \varepsilon\beta z_x)W' + \beta\eta z_y QW' + \beta\beta_x W^2$
$+(\beta_t + \alpha\beta_x + \beta\alpha_x + \varepsilon\beta_y)W + \eta\beta_y QW + \eta\alpha_y Q + \alpha_t + \alpha\alpha_x + \varepsilon\alpha_y + p_x = 0$...(2.7)
et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon_t + \eta_t Q + z_t\eta Q' \\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} = (\alpha + \beta W)(\varepsilon_x + \eta_x Q + z_x\eta Q') \\ u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = (\varepsilon + \eta Q)(\varepsilon_y + \eta_y Q + z_y\eta Q') \\ \frac{\partial p}{\partial y} = p_y \end{cases} \quad ...(2.8)$$

(2.3) et (2.8) $\Rightarrow \eta^2 zy \;\; QQ' + (\eta z_t + \alpha\eta z_x + \varepsilon\eta z_y)Q' + \eta\beta z_x WQ' + \eta\eta_x Q^2$
$+(\eta_t + \alpha\eta_x + \varepsilon\eta_y + \eta\varepsilon_y)Q + \beta\eta_x QW + \beta\varepsilon_x W + \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_x + \varepsilon\varepsilon_y + p_y = 0$...(2.9)

3.2.2 Méthode directe de similarité

on pose les coefficients $\Gamma_i(z)$ pour écrire les équations de système par z

tel que les $\Gamma_i(z)$ sont fonctions par z , et on peut d'appele les dérivées de $\Gamma_i(z)$ par $\Gamma_i(z)$

.

Remarque 3.2.1 *si δ à la forme $\delta = \delta_0 + \lambda\omega(z)$,on peut prendre $\omega(z) = 0$.*

Remarque 3.2.2 *si μ à la forme $\mu = \mu_0\omega(z)$,on peut prendre $\omega(z) = 1$.*

Remarque 3.2.3 *si z déterminer par un équation de la forme $\omega(z) = z_0$,*

on peut prendre $\omega(z) = z$.

1) On applique pour l'équation (2.5) :

$\beta z_x W' + \eta z_y Q' + \beta_x W + \eta_y Q + (\varepsilon_y + \alpha_x) = 0$

On pose :

1)-$\eta z_y = \beta z_x \; \Gamma_1(z)$ 2)-$\beta_x = \beta z_x \; \Gamma_2(z)$

3)-$\eta_y = \beta z_x \; \Gamma_3(z)$ 4)-$(\varepsilon_y + \alpha_x) = \beta z_x \; \Gamma_4(z)$

On remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$,($i = 1, ..., 4$) dans (2.5) on obtient:

$\beta z_x W' + \beta z_x \Gamma_1(z)\ Q' + \ \beta z_x \Gamma_2(z) W + \beta z_x \Gamma_3(z)\ Q + \beta z_x \Gamma_4(z) = 0$

on dévise par (βz_x)

$(2.5) \Rightarrow W' + \Gamma_1(z)\ Q' + \ \ \Gamma_2(z) W + \Gamma_3(z)\ Q + \Gamma_4(z) = 0$

2) On applique pour l'équation (2.7) :

$\beta^2 z_x W W' + (z_t\beta + \alpha\beta z_x + \varepsilon\beta z_x) W' + \beta\eta z_y Q W' + \beta\beta_x W^2 + (\beta_t + \alpha\beta_x + \beta\alpha_x + \varepsilon\beta_y) W$

$+\eta\beta_y Q W + \eta\alpha_y Q + (\alpha_t + \alpha\alpha_x + \varepsilon\alpha_y + p_x) = 0$

On pose :

5)-$(z_t\beta + \alpha\beta z_x + \varepsilon\beta z_x) = \beta^2 z_x \Gamma_5(z)$

6)-$\beta\eta z_y = \beta^2 z_x\ \Gamma_6(z)$

7)-$\beta\beta_x = \beta^2 z_x \Gamma_7(z)$

8)-$(\beta_t + \alpha\beta_x + \beta\alpha_x + \varepsilon\beta_y) = \beta^2 z_x \Gamma_8(z)$

9)-$\eta\beta_y = \beta^2 z_x\ \Gamma_9(z)$

10)-$\eta\alpha_y = \beta^2 z_x \Gamma_{10}(z)$

11)-$(\alpha_t + \alpha\alpha_x + \varepsilon\alpha_y + p_x) = \beta^2 z_x\ \Gamma_{11}(z)$

On remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$,($i = 5, ..., 11)$ dans (2.7) on obtient :

$\beta^2 z_x W W' + \beta^2 z_x \Gamma_5(z) W' + \beta^2 z_x \Gamma_6(z) Q W' + \beta^2 z_x \Gamma_7(z) W^2 + \beta^2 z_x \Gamma_8(z) W + \beta^2 z_x \Gamma_9(z) Q W$

$+\beta^2 z_x \Gamma_{10}(z) Q + \beta^2 z_x \Gamma_{11}(z) = 0$

on devise par $(\beta^2 z_x)$

$(2.7) \Rightarrow W W' + \Gamma_5(z) W' + \Gamma_6(z) Q W' + \Gamma_7(z) W^2 + \Gamma_8(z) W + \Gamma_9(z) Q W + \Gamma_{10}(z) Q$

$+\Gamma_{11}(z) = 0$

3) On applique pour l'équation (2.9) :

$\eta^2 zy\ \ Q Q' + (\eta z_t + \alpha\eta z_x + \varepsilon\eta z_y) Q' + \eta\beta z_x W Q' + \eta\eta_x Q^2 + (\eta_t + \alpha\eta_x + \varepsilon\eta_y + \eta\varepsilon_y) Q + \beta\eta_x Q W$

$+\beta\varepsilon_x W + (\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_x + \varepsilon\varepsilon_y + p_y) = 0$

On pose :

12)-$(\eta z_t + \alpha\eta z_x + \varepsilon\eta z_y) = \eta^2 zy\ \Gamma_{12}(z)$

13)-$\eta\beta z_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{13}(z)$

14)-$\eta\eta_y = \eta^2 zy\ \Gamma_{14}(z)$

15)-$(\eta_t + \alpha\eta_x + \varepsilon\eta_y + \eta\varepsilon_y) = \eta^2 zy\ \Gamma_{15}(z)$

16)-$\beta\eta_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{16}(z)$

17)-$\beta\varepsilon_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{17}(z)$

18)-$(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_x + \varepsilon\varepsilon_y + p_y) = \eta^2 zy\ \Gamma_{18}(z)$

On remplace les valeurs des $\Gamma_i(z)$,($i = 12, ..., 18$) dans (2.9) on obtient

$\eta^2 zy\ QQ' + \eta^2 zy\Gamma_{12}(z)Q' + \eta^2 zy\Gamma_{13}(z)\ WQ' + \eta^2 zy\Gamma_{14}(z)Q^2 + \eta^2 zy\Gamma_{15}(z)Q + \eta^2 zy\Gamma_{16}(z)QW$
$+ \eta^2 zy\Gamma_{17}(z)W + \eta^2 zy\Gamma_{18}(z) = 0$

on dévise par ($\eta^2 zy$)

$(2.9) \Rightarrow QQ' + \Gamma_{12}(z)Q' + \Gamma_{13}(z)\ WQ' + \Gamma_{14}(z)Q^2 + \Gamma_{15}(z)Q + \Gamma_{16}(z)QW + \Gamma_{17}(z)W$
$+\Gamma_{18}(z) = 0$ ...(2.9)

On étudie les équations suivants :

(1)-$\beta_x = \beta z_x \Gamma_2(z) \Rightarrow \frac{\beta_x}{\beta} = z_x\Gamma_2(z)$

donc par l'intégration on obtient

$\ln(\beta) = \Gamma_2(z) + \beta_0(y,t) \Rightarrow \beta = \beta_0(y,t)\exp(\Gamma_2(z))$

on utilise le remarque (3.2.2)

$\exp(\Gamma_2(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_2(z) = 0$

Alors pour réduction simple , on considére β constante et on prend $\beta = 1$.

(2)-$\eta\eta_y = \eta^2 zy\ \Gamma_{14}(z) \ \Rightarrow \frac{\eta_y}{\eta} = zy\ \Gamma_{14}(z)$

donc par l'intégration on obtient:

$\ln(\eta) = \Gamma_{14}(z) + \eta_0(x,t) \Rightarrow \eta = \eta_0(y,t)\exp(\Gamma_{14}(z))$

on utilise le remarque (3.2.2)

$\exp(\Gamma_{14}(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_{14}(z) = 0$

Alors pour réduction simple , on considére η constante et on prend $\eta = 1$.

(3)-$\eta z_y = \beta\ z_x\ \Gamma_1(z) \Rightarrow z_y = z_x\ \Gamma_1(z)$,car $\beta = 1, \eta = 1$.

on utilise le remarque (3.2.2)

$z_y = z_x \Rightarrow \Gamma_1(z) = 1$

(4)-$\eta_y = \ \beta\ z_x\ \Gamma_3(z) \Rightarrow \ \ 0 = \ z_x\ \Gamma_3(z)$,car $\eta_y = 0$.

$\Rightarrow \Gamma_3(z) = 0$

(5)-$\beta\beta_x = \beta^2 z_x\Gamma_7(z) \Rightarrow \beta_x = z_x\Gamma_7(z) \Rightarrow z_x\Gamma_7(z) = 0$, car $\beta_x = 0$.

$\Rightarrow \Gamma_7(z) = 0$

(6)-$\beta\eta_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{16}(z) \Rightarrow zy\ \Gamma_{16}(z) = 0$, car $\eta = 1, \beta = 1, \eta_x = 0.$

$\Rightarrow \Gamma_{16}(z) = 0$

(7)-$(\beta_t + \alpha\beta_x + \beta\alpha_x + \varepsilon\beta_y) = \beta^2 z_x\Gamma_8(z) \Rightarrow \alpha_x = z_x\Gamma_8(z),$

car $\beta = 1, \beta_t = \beta_x = \beta_y = 0.$

donc par l'intégration on obtient :

$\alpha = \Gamma_8(z) + \theta_1(y,t)$

d'aprés le remarque (3.2.1)

$\Gamma_8(z) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \theta_1(y,t)$

la méme chose pour l'équation :

(8)-$(\eta_t + \alpha\eta_x + \varepsilon\eta_y + \eta\varepsilon_y) = \eta^2 zy\ \Gamma_{15}(z) \Rightarrow \varepsilon_y = zy\ \Gamma_{15}(z),$

car $\eta = 1, \eta_t = \eta_x = \eta_y = 0.$

donc par l'intégration on obtient :

$\varepsilon = \Gamma_{15}(z) + \theta_2(x,t)$

d'aprés le remarque (3.2.1)

$\Gamma_{15}(z) = 0$

$\Rightarrow \varepsilon = \theta_2(x,t)$

(9)-$\varepsilon_y + \alpha_x = \beta\ z_x\Gamma_4(z)$

on a α indépendant a x et ε indépendant a y donc $\varepsilon_y = 0$, $\alpha_x = 0$

$\Rightarrow z_x\Gamma_4(z) = 0$

$\Rightarrow \Gamma_4(z) = 0.$

(10)-$\eta\alpha_y = \beta^2 z_x\ \Gamma_{10}(z) \Rightarrow \alpha_y = z_x\ \Gamma_{10}(z)$, car $\beta = \eta = 1$

et on a : $\alpha_y = \theta_{1,y}(y,t)$

$\theta_{1,y}(y,t) = z_x\ \Gamma_{10}(z)$

on utilise le remarque (3.2.2)

$\Gamma_{10}(z) = 1 \Rightarrow \theta_{1,y}(y,t) = z_x$

d'aprés l'intégration

$z = \theta_{1,y}(y,t)x + \theta_3(y,t)$

(11)-$\eta\beta z_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{13}(z) \Rightarrow z_x = zy\ \Gamma_{13}(z)$, car $\beta = \eta = 1$

on utilise le remarque (3.2.2)

$\Gamma_{13}(z) = 1$

$\Rightarrow z_x = zy$

et on a $z_x = \theta_{1,y}(y,t)$, et $zy = \theta_{1,y,y}(y,t)x + \theta_{3,y}(y,t)$

$\Rightarrow \theta_{1,y,y}(y,t)x + \theta_{3,y}(y,t) = \theta_{1,y}(y,t)$

$\Rightarrow \theta_{1,y,y}(y,t) = 0.$

Alors $\quad \theta_{3,y}(y,t) = \theta_{1,y}(y,t)$

par l'intégration :

$\theta_3(y,t) = \theta_1(y,t) = f(t)y + g(t)$

tel que $f(t), g(t)$ des fonctions par la variable t .

on a : $z = \theta_{1,y}(y,t)x + \theta_3(y,t)$

et $\theta_3(y,t) = \theta_1(y,t) = f(t)y + g(t)$, $\theta_{1,y}(y,t) = f(t)$

$\Rightarrow z = f(t)x + f(t)y + g(t)$

et $\alpha = \theta_1(y,t) = f(t)y + g(t)$

donc on remplace dans les équations suivants :

(12)-$\beta\eta z_y = \beta^2 z_x\ \Gamma_6(z) \Rightarrow z_y = z_x\ \Gamma_6(z)$,car $\beta = \eta = 1$,et $z_y = z_x = f(t)$.

$\Rightarrow f(t) = f(t)\ \Gamma_6(z) \Rightarrow \Gamma_6(z) = 1$

(13)-$\beta\varepsilon_x = \eta^2 zy\ \Gamma_{17}(z) \Rightarrow \varepsilon_x = zy\ \Gamma_{17}(z)$,car $\beta = \eta = 1$

d'aprés le remarque (3.2.2) :

$\Gamma_{17}(z) = 1 \Rightarrow \varepsilon_x = zy$

on a $\varepsilon = \theta_2(x,t) \Rightarrow \varepsilon_x = \theta_{2,x}(x,t)$, et $zy = f(t)$

$\Rightarrow \theta_{2,x}(x,t) = f(t)$

par l'intégration :

$\theta_2(x,t) = f(t)x + h(t) = \varepsilon(x,t).$

$$\left.\begin{array}{l} (14)\text{-}\alpha_t + \alpha\alpha_x + \varepsilon\alpha_y + p_x = \beta^2 z_x \Gamma_{11}(z) \\ (15)\text{-}\ \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_x + \varepsilon\varepsilon_y + p_y = \eta^2 zy \Gamma_{18}(z) \end{array}\right\} \ldots(2.10)$$

on a :

$\alpha = f(t)y + g(t)$

$\Rightarrow \alpha_t = f'(t)y + g'(t), \alpha_x = 0, \alpha_y = f(t)$

et $z = f(t)x + f(t)y + g(t)$

$\Rightarrow z_y = f(t) = z_x$

et $\varepsilon(x,t) = f(t)x + h(t)$

$\Rightarrow \varepsilon_t = f'(t)x + h'(t), \varepsilon_x = f(t), \varepsilon_y = 0$

$$(2.10) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(t)y + g'(t) + (f'(t)x + g'(t))f(t) + p_x = z_x\Gamma_{11}(z) \\ f'(t)x + h'(t) + (f(t)y + g(t))f(t) + p_y = zy\Gamma_{18}(z) \end{cases}$$

$$(2.10) \ \Rightarrow \begin{cases} f^2(t)x + f'(t)y + (g'(t) + f(t)h(t)) + p_x = z_x\Gamma_{11}(z) \\ f^2(t)y + f'(t)x + (h'(t) + f(t)g(t)) + p_y = z_y\Gamma_{18}(z) \end{cases}$$

par l'intégration :

$$(2.10) \ \Rightarrow \begin{cases} (1/2)f^2(t)x^2 + f'(t)xy + (g'(t) + f(t)h(t))x + p = \Gamma_{11}(z) \\ (1/2)\ f^2(t)y^2 + f'(t)xy + (h'(t) + f(t)g(t))y + p = \Gamma_{18}(z) \end{cases}$$

d'aprés le remarque (3.2.1):

$\Gamma_{18}(z) = \Gamma_{11}(z) = 0.$

$$(2.10) \Rightarrow \begin{cases} f^2(t)x + f'(t)y + p_x = -(g'(t) + f(t)h(t)) \\ f^2(t)y + f'(t)x + p_y = -(h'(t) + f(t)g(t)) \end{cases}$$

on utilise le même remarque:

$(g'(t) + f(t)h(t)) = 0, (h'(t) + f(t)g(t)) = 0.$

$\Rightarrow \frac{g'(t)}{h(t)} = -f(t) = \frac{h'(t)}{g(t)} \Rightarrow h'(t)h(t) = g'(t)g(t)$

par l'intégration : $(1/2)h^2(t) = (1/2)g^2(t) \Rightarrow h(t) = g(t)$

Alors :

$$(2.10) \Rightarrow \begin{cases} (1/2)f^2(t)x^2 + f'(t)xy + (g'(t) + f(t)g(t))x + p = 0...(1) \\ (1/2)\ f^2(t)y^2 + f'(t)xy + (g'(t) + f(t)g(t))y + p = 0...(2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 2p + (1/2)f^2(t)(x^2 + y^2) + 2f'(t)xy + (g'(t) + f(t)g(t))(x + y) = 0 \\ &\Rightarrow 2p = -(1/2)f^2(t)(x^2 + y^2) - 2f'(t)xy - (g'(t) + f(t)g(t))(x + y) \\ &\Rightarrow p = -(1/4)f^2(t)(x^2 + y^2) - f'(t)xy - (1/2)(g'(t) + f(t)g(t))(x + y) \end{aligned}$$

(16)-$z_t\beta + \alpha\beta z_x + \varepsilon\beta z_x = \beta^2 z_x\Gamma_5(z)$

(17)-$\eta z_t + \alpha\eta z_x + \varepsilon\eta z_y = \eta^2 zy\ \Gamma_{12}(z)$

on a :

$\alpha = f(t)y + g(t)$

et $z = f(t)x + f(t)y + g(t)$

$\Rightarrow z_y = f(t) = z_x$, $z_t = f'(t)(x+y) + g'(t)$

et $\varepsilon(x,t) = f(t)x + h(t)$

et $\beta = \eta = 1$

(16)-$\Rightarrow f'(t)(x+y) + g'(t) + f^2(t)y + f(t)g(t) + f^2(t)x + f(t)h(t) = z_x\Gamma_5(z)$

(17)-$\Rightarrow f'(t)(x+y) + g'(t) + f^2(t)y + f(t)g(t) + f^2(t)x + f(t)h(t) = z_y\Gamma_{12}(z)$

on a $z_x = z_y = f(t)$, $h(t) = g(t)$ alors :

$(f^2(t) + f'(t))(x+y) + g'(t) + 2f(t)g(t) = f(t)\Gamma_5(z)...(1)$

$(f^2(t) + f'(t))(x+y) + g'(t) + 2f(t)g(t) = f(t)\Gamma_{12}(z)...(2)$

de $(1),(2) \Rightarrow \Gamma_5(z) = \Gamma_{12}(z)$

on a $z = f(t)x + f(t)y + g(t)$

z est linéaire pour x et y donc on peut prendre $\Gamma_5(z) = \Gamma_{12}(z)$ linéaire pour z

donc : $\Gamma_5(z) = \Gamma_{12}(z) = c_1z + c_2$

tel que c_1,c_2 sont constantes

$$\begin{aligned}
(f^2(t) + f'(t))(x+y) + g'(t) + 2f(t)g(t) &= f(t)\Gamma_5(z) \\
&= f(t)(c_1z + c_2) \\
&= f(t)(c_1(f(t)(x+y) + g(t)) + c_2) \\
&= c_1f^2(t)(x+y) + c_1f(t)g(t) + c_2f(t)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f^2(t) + f'(t) = c_1f^2(t) \Rightarrow f'(t) = f^2(t)(c_1 - 1)$

et $g'(t) + 2f(t)g(t) = c_1f(t)g(t) + c_2f(t)$

$g'(t) = f(t)g(t)(c_1 - 2) + c_2f(t)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f'(t) = f^2(t)(c_1 - 1) \\ g'(t) = f(t)g(t)(c_1 - 2) + c_2f(t) \end{array} \right. \quad ...(2.11)$$

Alors

on remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$,$i = (1, ..., 18)$ dans ($(2.5), (2.7), (2.9)$)

on obtient :

$f(t)W' + f(t)Q' = 0$

$WW' + (c_1z + c_2)W' + QW' + Q = 0$

$QQ\prime + (c_1z + c_2)Q' + WQ' + W = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} W' + Q' = 0 \\ WW' + (c_1 z + c_2)W' + QW' + Q = 0 \quad ...(2.12) \\ QQ\prime + (c_1 z + c_2)Q' + WQ' + W = 0 \end{cases}$$

En fin : la conclusion de méthode de la réduction similarité général pour équation d'Euler du 2D est donner par :

$u_1(x, y, t) = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)W(z(x, y, t))$

$= f(t)y + g(t) + W(z)$

$u_2(x, y, t) = \varepsilon(x, y, t) + \eta(x, y, t)Q(z(x, y, t))$

$= f(t)x + g(t) + Q(z)$

$p(x, y, t) = -(1/4)f^2(t)(x^2 + y^2) - f'(t)xy - (1/2)(g'(t) + f(t)g(t))(x + y)$

$z = f(t)x + f(t)y + g(t)$

3.2.3 Les solutions exactes non linéaires

Dans cette partie, nous dixussion les solutions exactes non linéaires de système d'Euler d'équation différentielle ordinaire pour trouve les solutions exacts non linéaires d'équation aux dérivées partielles

Etudie de cas de c_1 et c_2 pour trouver les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$

*)-Premier cas $c_1 = 1$

1)- $f'(t) = f^2(t)(c_1 - 1)$

$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f^2(t)} = (c_1 - 1)$

$\Rightarrow \frac{df}{f^2(t)} = (c_1 - 1)dt$

par l'intégration : $-f(t)^{-1} = (c_1 - 1)t + k$, k est une constante

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{(1-c_1)t-k}$, pour $c_1 = 1$

$\Rightarrow f(t) = \frac{-1}{k}$

on a $\frac{-1}{k}$ est un constante donc on peut prendre $\frac{-1}{k} = c_3$

donc $f(t) = c_3$

2)-$g'(t) = -f(t)g(t) + c_2 f(t) = -c_3 g(t) + c_2 c_3$

cette équation non homogène, donc premier étape on cherche sur une solution homogène : $g\prime(t) = -c_3 g(t) \Rightarrow \frac{g\prime(t)}{g(t)} = -c_3$

$\Rightarrow \int \frac{dg}{g(t)} = \int -c_3 dt \Rightarrow \ln|g(t)| = -c_3 t + c_4$

$\Rightarrow g(t) = c_4 \exp(-c_3 t)$

deuxième étape on cherche sur une solution particulier :

$g(t) = c_4 \exp(-c_3 t) \Rightarrow g\prime(t) = -c_3 c_4 \exp(-c_3 t) + c_4' \exp(-c_3 t)$

on remplace dans l'équation non homogène on obtient :

$-c_3 c_4 \exp(-c_3 t) + c_4' \exp(-c_3 t) = -c_3 c_4 \exp(-c_3 t) + c_2 c_3$

$c_4' \exp(-c_3 t) = c_2 c_3 \Rightarrow c_4'(t) = c_2 c_3 \exp(c_3 t)$

D'aprés l'intégration:

$c_4(t) = c_2 \exp(c_3 t) + k$, k est une constante

$\Rightarrow g(t) = (c_2 \exp(c_3 t) + k) \exp(-c_3 t) = k \exp(-c_3 t) + c_2$, (on prend $k = 1$)

donc $g(t) = \exp(-c_3 t) + c_2$.

*)-Deuxième cas pour $c_1 = 2$:

1)-$\frac{f'(t)}{f^2(t)} = 1$

$\Rightarrow \int \frac{df}{f^2(t)} = \int dt \Rightarrow -f^{-1}(t) = t + c_0$

$\Rightarrow f(t) = -(t + c_0)^{-1}$

on pose $c_0 = 0$

$\Rightarrow f(t) = -t^{-1}$

2)-$g'(t) = c_2 f(t) = -c_2 t^{-1}$

par l'intégration : $g(t) = -c_2 \ln|t|$

*)-Troixième cas $c_1 \neq 1$ et $c_2 \neq 2$:

1)-$f'(t) = f^2(t)(c_1 - 1)$

$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f^2(t)} = (c_1 - 1) \Rightarrow \frac{df}{f^2(t)} = (c_1 - 1)dt$

par l'intégration : $f(t) = \frac{1}{(1-c_1)t}$

2)- $g'(t) = f(t)g(t)(c_1 - 2) + c_2 f(t) \Rightarrow g'(t) = \frac{(c_1-2)}{(1-c_1)t} g(t) + \frac{c_2}{(1-c_1)t}$

cette équation non homogène, on a deux étapes pour résoudre cette équation

premier étape on cherche sur la solution homogène

$g'(t) = \frac{(c_1-2)}{(1-c_1)} \frac{g(t)}{t} \Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{(c_1-2)}{(1-c_1)} \frac{1}{t}$

Par l'intégration :

$\ln|g(t)| = \frac{(c_1-2)}{(1-c_1)} \ln|t| + k$

$\Rightarrow g(t) = kt^{(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})}$

Deuxième étape on cherche sur une solution particulier :

on remplace les valeurs des $g'(t), g(t)$ dans l'équation non homogène

$g'(t) = k'(t)t^{(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})} + (\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})k(t)t^{(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})-1} = (\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)}\frac{1}{t})(kt^{(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})}) + \frac{c_2}{(1-c_1)t}$

$$\Rightarrow k'(t)t^{(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})} = \frac{c_2}{(1-c_1)}t^{-1} \Rightarrow k'(t) = \frac{c_2}{(1-c_1)}t^{-(\frac{(c_1-2)}{(1-c_1)})-1}$$

par l'intégration

$k(t) = \frac{-c_2}{(1-c_1)}\frac{1-c_1}{c_1-2}t^{(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} + k_0$

$\Rightarrow g(t) = (\frac{-c_2}{(1-c_1)}\frac{1-c_1}{c_1-2}t^{(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} + k_0)t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})}$

On pose: $k_0 = 1$

$\Rightarrow g(t) = t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{c_2}{c_1-2}$

Etudie le cas de c_1 et c_2 pour résoudre les systémes ((2.11) (2.12))

*)Premier cas ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$)

$W' + Q' = 0 \Rightarrow W' = -Q' \xrightarrow{\text{parl'intégration}} W = -Q$

et :

$WW' + (c_1z + c_2)W' + QW' + Q = 0$

$\Rightarrow WW' + (c_1z + c_2)W' - WW' - W = 0$

$\Rightarrow (c_1z + c_2)W' = W$

$\Rightarrow \frac{W'}{W} = (c_1z + c_2)^{-1} \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{1}{c_1}(z + \frac{c_2}{c_1})^{-1} = \frac{dW}{W} = \frac{1}{c_1}(z + \frac{c_2}{c_1})^{-1}dz$

par l'intégration :

$\ln|W| = \frac{1}{c_1}\ln|(z + \frac{c_2}{c_1})|$

$\Rightarrow W = (z + \frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{c_1}}, c_1 \neq 0$

$z = f(t)x + f(t)y + g(t) = (\frac{1}{(1-c_1)t})(x + y) + t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{c_2}{c_1-2}$

On romplace les valeurs $(f(t), g(t), W(z), Q(z))$ dans $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t), p(x,y,t))$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = f(t)y + g(t) + W(z) \\ u_2(x,y,t) = f(t)x + g(t) + Q(z) \\ p(x,y,t) = -(1/4)f^2(t)(x^2 + y^2) - f'(t)xy - (1/2)(g'(t) + f(t)g(t))(x + y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = (\frac{1}{(1-c_1)t})y + t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{c_2}{c_1-2} \quad +(\ (\frac{1}{(1-c_1)t})(x+y) + t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{3c_2}{c_1(c_1-2)})^{\frac{1}{c_1}} \\ u_2(x,y,t) = (\frac{1}{(1-c_1)t})x + t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{c_2}{c_1-2} \quad -(\ (\frac{1}{(1-c_1)t})(x+y) + t^{-(\frac{(c_1-2)}{(c_1-1)})} - \frac{3c_2}{c_1(c_1-2)})^{\frac{1}{c_1}} \\ p(x,y,t) = -(1/4)(\frac{1}{(1-c_1)t})^2(x^2+y^2) - \frac{1-c_1}{((1-c_1)t)^2}xy - (1/2)(-(\frac{c_1-2}{c_1-1})t^{-(\frac{c_1-2}{c_1-1})-1} \\ +(\frac{1}{(1-c_1)t})(t^{-(\frac{c_1-2}{c_1-1})} + \frac{c_2}{c_1-2}))(x+y) \end{cases}$$

*)Deuxième cas ($c_1 = c_2 = 0$)

On a $: W = -Q$

et

$WW' + (0+0)W' - WW' - W = 0 \Rightarrow W = 0 \Rightarrow Q = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = t^{-1} \\ g(t) = t^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = t^{-1}y + t^{-2} \\ u_2(x,y,t) = t^{-1}x + t^{-2} \\ p(x,y,t) = t^{-2}(-1/4(x^2+y^2) - xy) + 1/2(t^{-3})xy) \end{cases}$$

*)Troixième cas :($c_1 = 0$,$c_2 \neq 0$)

$W' + Q' = 0 \Rightarrow W' = -Q' \xrightarrow{\text{parl'intégration}} W = -Q$

$\Rightarrow WW' + c_2W' - WW' - W = 0 \Rightarrow c_2W' - W = 0$

$c_2W' = W \Rightarrow W' = (1/c_2)W$

$\Rightarrow \frac{dW}{W} = (1/c_2)dz$

par l'intégration on obtient :

$\ln|W| = \ln|(1/c_2)z|$

$\Rightarrow W = \exp((1/c_2)z) = -Q$

et $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = t^{-2} + \frac{c_2}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = t^{-1}y + t^{-2} + \frac{c_2}{2} + \exp((1/c_2)z) \\ u_2(x,y,t) = t^{-1}x + t^{-2}\frac{c_2}{2} - \exp((1/c_2)z) \\ p(x,y,t) = t^{-2}(-1/4(x^2+y^2) - xy) + 1/2(t^{-3})(x+y) \end{cases}$$

*)Quatrième cas : $(c_1 = 1 \quad , c_2 \neq 0)$

On a : $W = -Q$

$\Rightarrow WW' + (z + c_2)W' - WW' - W = 0$

$\Rightarrow (z + c_2)W' - W = 0$

$(z + c_2)W' = W \Rightarrow W' = (\frac{1}{z+c_2})W$

$$\Rightarrow \frac{dW}{W} = (\frac{1}{z+c_2})dz$$

par l'intégration on obtient :

$\ln|W| = \ln|z + c_2| \Rightarrow W(z) = z + c_2 = -Q(z)$

On a : $f(t) = c_3$, et $g(t) = \exp(-c_3 t) + c_2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = 2c_3(y + (1/2)x) + 2\exp(-c_3 t) + 3c_2 \\ u_2(x,y,t) = -c_3 y - c_2 \\ p(x,y,t) = (-1/4)c_3^2(x^2+y^2) - (1/2)c_2 c_3 \end{cases}$$

*)Cinquième cas: $c_1 = 2$

On a: $W = -Q$

$\Rightarrow WW' + (2z + c_2)W' - WW' - W = 0$

$\Rightarrow (2z + c_2)W' - W = 0 \Rightarrow \frac{dW}{W} = (2z + c_2)^{-1}dz$

par l'intégration on obtient :

$\ln|W| = (1/2)\ln|(z + \frac{c_2}{2})|$

$\Rightarrow W = (z + \frac{c_2}{2})^{1/2}$

on a : $f(t) = -t^{-1}$, $g(t) = -c_2 \ln|t|$, $z = f(t)(x+y) + g(t)$

$\Rightarrow z = -t^{-1}(x+y) - c_2 \ln|t|$

$\Rightarrow W = (-t^{-1}(x+y) - c_2\ln|t| + \frac{c_2}{2})^{1/2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x,y,t) = -t^{-1}y - c_2\ln|t| + (-t^{-1}(x+y) - c_2\ln|t| + \frac{c_2}{2})^{1/2} \\ u_2(x,y,t) = -t^{-1}x - c_2\ln|t| - (-t^{-1}(x+y) - c_2\ln|t| + \frac{c_2}{2})^{1/2} + c_2 \\ p(x,y,t) = -(1/2)t^{-1}((1/2)t^{-1}(x^2+y^2) + t^{-1}xy + c_2(\ln|t| - 1) \end{cases}$$

3.3 Application du cas auto similaire sur le système en dimension deux

on applique le cas auto similaire sur le système (2), dans ce cas la forme de solution est :

$u_i = c_i(t)\varphi_i(z)$

Tel que u_i sont composants iéme de u la solution de système .

dans ce cas on prend ($i = 1, 2$)

3.3.1 Réduction de similarité

$u_1(x, y, t) = c_1(t)\varphi_1(z)$

$u_2(x, y, t) = c_2(t)\varphi_2(z)$

On pose :

$$\begin{cases} c_1(t) = \beta(t) \\ c_2(t) = \eta(t) \end{cases} \text{et} \begin{cases} \varphi_1(z) = W(z) \\ \varphi_2(z) = Q(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(x, y, t) = \beta(t)W(z) \\ u_2(x, y, t) = \eta(t)Q(z) \\ p = p(x, y, t) \end{cases}$$

et $z = \frac{1}{a(t)}(x + y)$

On remplace u_1, u_2 dans l'équation de système

1) La premier équation :

$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$ ...(2.1)

$$\text{et on} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \beta(t)z_x W'(z) \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = \eta(t)z_y Q'(z) \end{array} \right\} \Rightarrow (2.1) \Rightarrow \beta(t)z_x W'(z) + \eta(t)z_y Q'(z) = 0$$

2) La deuxième équation :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ...(2.2)$$

On a

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \beta_t W + \beta z_t W' \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \ = \beta^2 z_x W W' \\ u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \eta \beta z_y Q W' \\ \frac{\partial p}{\partial x} \ = p_x \end{array}\right\} \Rightarrow (2.2) \Rightarrow \beta z_t W' + \beta_t W + \beta^2 z_x W W' + \eta \beta z_y Q W' + p_x = 0$$

3) Le troixième équation :

$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ...(2.3)

On a

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \eta_t Q + \eta z_t Q' \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \ = \eta \beta z_x W Q' \\ u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \eta^2 z_y Q Q' \\ \frac{\partial p}{\partial y} \ = p_y \end{array}\right\} \Rightarrow (2.3) \Rightarrow \eta z_t Q' + \eta_t Q + \eta \beta z_x W Q' + \eta^2 z_y Q Q' + p_y = 0$$

3.3.2 Méthode directe de similarité

on pose les coueficients $\Gamma_i(z)$ pour écrire les équations de systéme par z

tel les $\Gamma_i(z)$ sont fonctions par z , et on peut appelée les dérivées de $\Gamma_i(z)$ par $\Gamma_i(z)$.

Remarque 3.3.1 *si* δ *à la forme* $\delta = \delta_0 + \lambda\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 0$ *.*

Remarque 3.3.2 *si* μ *à la forme* $\mu = \mu_0\omega(z)$ *,on peut prendre* $\omega(z) = 1$ *.*

Remarque 3.3.3 *si* z *déterminer par un équation de la forme* $\omega(z) = z_0$ *,*

on peut prendre $\omega(z) = z$.

pour l'équation (2.1) on a :

1)-$\eta z_y = \beta z_x \Gamma_1(z)$

pour l'équation (2.2) on a :

2)-$\beta_t = \beta z_t \Gamma_2(z)$ 3)- $\beta^2 z_x = \beta z_t \Gamma_3(z)$

4)-$\eta \beta z_y = \beta z_t \Gamma_4(z)$ 5)-$p_x = \beta z_t \Gamma_5(z)$

pour l'équation (2.3) on a :

6)-$\eta_t = \eta z_t \Gamma_6(z)$ 7)-$\eta\beta z_x = \eta z_t \Gamma_7(z)$

8)-$\eta^2 z_y = \eta z_t \Gamma_8(z)$ 9)- $p_y = \eta z_t \Gamma_9(z)$

On remplace les valeurs de $\Gamma_1(z)$ dans (2.1) on obtient:

$\beta z_x W'(z) + \beta z_x \Gamma_1(z) Q'(z) = 0$

On devise par (βz_x)

(2.1) $\Rightarrow W'(z) + \Gamma_1(z) Q'(z) = 0$

On remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$ $(i = 2, ..., 5)$ dans (2.2) on obtient:

$\beta z_t W' + \beta z_t \Gamma_2(z) W + \beta z_t \Gamma_3(z) W W' + \beta z_t \Gamma_4(z) Q W' + \beta z_t \Gamma_5(z) = 0$

On devise par (βz_t)

(2.2) $\Rightarrow W' + \Gamma_2(z) W + \Gamma_3(z) W W' + \Gamma_4(z) Q W' + \Gamma_5(z) = 0$

On remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$ $(i = 6, ..., 9)$ dans (2.3) on obtient:

$\eta z_t Q' + \eta z_t \Gamma_6(z) Q + \eta z_t \Gamma_7(z) W Q' + \eta z_t \Gamma_8(z) Q Q' + \eta z_t \Gamma_9(z) = 0$

On devise par (ηz_t)

(2.3) $\Rightarrow Q' + \Gamma_6(z) Q + \Gamma_7(z) W Q' + \Gamma_8(z) Q Q' + \Gamma_9(z) = 0$

On etudie les équations suivants :

1)- $\beta_t = \beta z_t \Gamma_2(z) \Rightarrow \frac{\beta_t}{\beta} = z_t \Gamma_2(z)$

Par l'intégration on obtient :

$\ln|\beta| = \Gamma_2(z) + \beta_0 \Rightarrow \beta = \beta_0 \exp \Gamma_2(z)$, tel que β_0 est une constante.

D'aprés le remarque (3.3.2)

donc : $\exp(\Gamma_2(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_2(z) = 0$

$\Rightarrow \beta = \beta_0$, on peut prend $\beta = 1$

2)- $\eta_t = \eta z_t \Gamma_6(z) \Rightarrow \frac{\eta_t}{\eta} = z_t \Gamma_6(z)$

Par l'intégration on obtient :

$\ln|\eta| = \Gamma_6(z) + \eta_0 \Rightarrow \eta = \eta_0 \exp \Gamma_6(z)$, tel que $\eta_0$est une constante.

D'aprés le remarque (3.3.2)

donc : $\exp(\Gamma_6(z)) = 1 \Rightarrow \Gamma_6(z) = 0$

$\Rightarrow \eta = \eta_0$,on peut prendre $\eta = 1$.

3)-$\eta(t)z_y = \beta(t)z_x\Gamma_1(z) \Rightarrow z_y = z_x\Gamma_1(z)$

on a $z = \frac{1}{a(t)}(x+y) \Rightarrow z_x = z_y = \frac{1}{a(t)}$

$\Rightarrow z_y = z_x \Rightarrow \Gamma_1(z) = 1$

4)-$\beta^2 z_x = \beta z_t\Gamma_3(z) \Rightarrow z_x = z_t\Gamma_3(z) \Rightarrow \Gamma_3(z) = \frac{z_x}{z_t}$

5)-$\eta^2 z_y = \eta z_t\Gamma_8(z) \Rightarrow z_y = z_t\Gamma_8(z) \Rightarrow \Gamma_8(z) = \frac{z_y}{zt}$

6)-$\eta\beta z_y = \beta z_t\Gamma_4(z) \Rightarrow z_y = z_t\Gamma_4(z) \Rightarrow \Gamma_4(z) = \frac{z_y}{zt}$

7)-$\eta\beta z_x = \eta z_t\Gamma_7(z) \Rightarrow z_x = z_t\Gamma_7(z) \Rightarrow \Gamma_7(z) = \frac{z_x}{zt}$

on a $z_x = z_y = \frac{1}{a(t)}$, $z_t = \theta(t)(x+y)$

tel que $\theta(t)$ est un fonction par rapport à t .

Alors $\Gamma_3(z) = \Gamma_4(z) = \Gamma_7(z) = \Gamma_8(z)$

8)- $p_x = \beta z_t\Gamma_5(z) \Rightarrow p_x = \theta(t)(x+y)\Gamma_5(z)$

9)-$p_y = \eta z_t\Gamma_9(z) \Rightarrow p_y = \theta(t)(x+y)\Gamma_9(z)$

On pose $\theta(t)(x+y) = p_0 \Rightarrow \begin{cases} p_x = p_0\Gamma_5(z) \\ p_y = p_0\Gamma_9(z) \end{cases}$

On utilise le remarque (3.3.2) $\Rightarrow \Gamma_5(z) = 1, \Gamma_9(z) = 1 \Rightarrow p_x = p_y$

on a $\left\{ \begin{array}{l} p_x = \theta(t)(x+y) \\ p_y = \theta(t)(x+y) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{par l'intégration}} \left\{ \begin{array}{l} p(x,y,t) = \theta(t)((1/2)x^2 + yx) \\ p(x,y,t) = \theta(t)((1/2)y^2 + yx) \end{array} \right\}$

$\Rightarrow x = y$

donc $p(x,y,t) = \theta(t)(x^2)$, $\theta'(t) = \frac{-a_t}{a^2(t)}$

On remplace les valeurs de $\Gamma_i(z)$ dans $((2.1),(2.2))$

le premier équation (2.1) :

$W'(z) + \Gamma_1(z)Q'(z) = 0 \Rightarrow W' + Q' = 0 \Rightarrow W = -Q$

la deuxième équation (2.2) :

$W' + \Gamma_2(z)W + \Gamma_3(z)WW' + \Gamma_4(z)QW' + \Gamma_5(z) = 0$

$\Rightarrow W' + \Gamma_3(z)WW' - \Gamma_3(z)WW' + 1 = 0 \Rightarrow W' + 1 = 0 \Rightarrow W' = -1$

$\Rightarrow dW = -dz \xrightarrow{\text{par l'intégration}} W(z) = -z = -\frac{1}{a(t)}(2x) \Rightarrow Q(z) = \frac{1}{a(t)}(2x)$

On pose $a(t) = t$

$W(z) = \frac{-2x}{t} \Rightarrow Q(z) = \frac{2x}{t}$

et $p(x,y,t) = \frac{-x^2}{t^2}$

3.3.3 les solutions exactes non linéaires

$$\begin{cases} u_1(x,y,t) = \beta(t)W(z) \\ u_2(x,y,t) = \eta(t)Q(z) \\ p = p(x,y,t) \end{cases}$$

On a :

$\beta(t) = \eta(t) = 1$

$W(z) = -Q(z) = \frac{-2x}{t}$

Alors :

$$\begin{cases} u_1(x,y,t) = \frac{-2x}{t} \\ u_2(x,y,t) = \frac{2x}{t} \\ p(x,y,t) = \frac{-x^2}{t^2} \end{cases}$$

Conclusion générale

Nous avons appliquée dans ce mémoire la méthode directe de Clarkson et Kruskal et cas particuliére la forme auto similaire.

Essentiellement nous avons appliqué cette méthode sur un système aux dérivées partielles non linéaire (système d'Euler) en généralisant ainsi un travail établit sur la recherche de solution auto similaire pour le mème système [7].

Nous avons également étudié un système aux dérivées partielles non linéaire mais en dimension deux (Euler) en cherchant des solutions sous la forme de Clarkson et Kruskal en se basent sur les travaux de [5].

En fin nous avons étudié le cas particuliére concernant les solutions auto similaires.

Bibliographie

[1] **Bachelor-Arbeit,** Barenblatt's solution to the porous medium equation, Moritz Egert, (2010): 16-20.

[2] **B. H. Gilding and L. A. Peletier**, On a Class of Similarity Solutions of the Porous Media Equation, Netherlands, 55, (1976),351-364.

[3] **Christophe Ancey**, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fuides, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[4] **D K Ludlow, P A Clarkson and A P Bassom,** Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier-Stockes equations.Stud.Appl.Math, 103,(1999):183-210.

[5] **F.Engui,Y.Manwai.** Similarity reductions and new nonlinear exact solutions for the 2D incompressible Euler equations.Math.Informatique Technology,10,(2013):1-13 .

[6] **F.Shen Shou .** Clarkson-Kruskal Direct Similarity Approch for Differential -Difference Equations .Theor, phys,44,(2005):964-966.

[7] **I.Ferenc Barna,L.Matyas.**Analytic solutions for the one-Dimensional compressible Euler equation with heat conduction and with different kind of equations of state .Miskole Mathematical Notes ,14,(2013):785-799

[8] **Juan Luis Vàzquez**, The Porous Medium Equation -Mathematical Theory, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[9] **P A .Clarkson and M D Kruskal.**New similarity reductions of Boussinesq equation J Math Phys, 30,(1989): 2201-2213

[10] **Pedro Ferreira et Sylvie Mas Gallic**, Équation aux Dérivées Partielles, 11 Décembre 2001, 20-21.

[11] **P.L.Sachdev** .Self-Similarity and beyond exact solutions of nonlinear problems , Chapman & Hall / CRC ,(2000) .

[12] **Vincent,L.** (2005).Transformations de Backlund, Symétries et solutions explicites des systèmes d'EDPs .Thèse . Université du Québec .

[13] **X.Jiao**.Some similarity reduction solutions to two-dimensional incompressible Navier –Stockes equation, Commun .Theor .Phys,3,(2009):389-394.