REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Inéquations variationnelles en dimension fini : Méthodes de résolution et quelques applications

---

Présentée par :

M^{elle} *BARKA* Karima

Soutenu publiquement le : 05/06/2016.

Devant le jury composé de :

Président :	M^r *GASMI* Abdelkader	Prof., Université de M'sila
Encadreur :	M^r *NOUIRI* Brahim	M.C.B, Université de M'sila
Examinateur :	M^r *MERZOUGUI* Abdelkarim	M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2015/2016

Remerciements

Dédicaces

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة ركزنا على المتراجحات التغييرية ذات البعد الواحد والتي تحتوي على مؤثر رتيب. بداية قمنا بدراسة النتائج الأساسية في نظرية المتراجحات التغييرية والتي تحتوي على مؤثر مستمر وعلاقتها بمسائل عامة في التحليل غير الخطي مثل مسألة متكاملة ومسألة النقطة الثابتة ومسألة مثالية، بعدها استعملنا طرق لحل المسألة عدديا. دعمنا المذكرة بمثال في الاقتصاد ومثال في تنظيم حركة المركبات في المدن.

كلمات المفتاح: طريقة التدرج، طريقة الاسقاط، متراجحة تغييرية، مسالة متكاملة، مسألة مثالية.

Ce mémoire est consacré sur les inéquations variationnelles en dimension fini avec un opérateur monotone. Nous considérons d'abord les principaux résultats de la théorie des problèmes d'inéquations variationnelles avec un opérateur continu et leurs relations avec d'autres problèmes généraux d'analyse non linéaire, telles que le problème de complémentarité, problème de point fixe et problème d'optimisation. Ensuite, nous présentons des méthodes pour la résolution numérique et quelques applications.

Mots-Clés : Inéquations variationnelles, Méthode de projection, Méthode de l'extragradient. Problème de complémentarité, Problème d'optimisation.

This memory is devoted to variational inequalities in finite-dimensional with a monotone operator. We first consider the main results of the theory of variational inequalities problems with a continuous operator and their relationship with other general problems of nonlinear analysis, such as the complementarity problem, fixed point problem and optimization problem. Then, we present methods for the numerical solution and some applications.

Keywords : Extragradient Method, Complementarity problem, Optimization problem, Projection method, Variational inequalities.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

La théorie de l'inéquation variationnelle a été introduite par Hartman et Stampacchia (1966) comme un outil pour l'étude des équations aux dérivées partielles avec des applications principalement tirées de la mécanique. De telles inéquations variationnelles étaient en dimension finie plutôt que de dimension finie que nous allons étudier ici.

Dans ce mémoire, nous présentons des méthodes numériques et quelques applications sur les inéquations variationnelles en dimension fini avec un opérateur monotone. Nous considérons d'abord les principaux résultats de la théorie des problèmes d'inéquations variationnelles avec un opérateur continu et leurs relations avec d'autres problèmes généraux d'analyse non linéaire.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : Le chapitre 1 est un rappel sur quelques définitions et outils de l'analyse convexe qui nous seront utiles dans ce mémoire.

Le chapitre 2 est consacré sur les inéquations variationnelles en dimension fini et leurs relations à de nombreux problèmes généraux d'analyse non linéaire, telles que le problème de complémentarité, problème de point fixe et problème d'optimisation. Ensuite, nous présentons des méthodes pour la résolution numérique.

Dans le chapitre 3, nous avons donné deux exemples sur les problèmes d'équilibre :

- ✓ Équilibre oligopolistique.
- ✓ Équilibre sur des réseaux de transport.

Ce mémoire se termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Notions générales de l'analyse convexe

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et outils de l'analyse convexe qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages.

Dans la suite, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

1.1 Différentiabilité

Définition 1.1. (Dérivée directionnelle). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ une fonction. On appelle dérivée directionnelle de f au point $x\in\Omega$ suivant le vecteur $v\in R^n$, $v\neq 0$, si la limite suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.2. (Différentiabilité). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ une fonction. on dit que f est différentiable en $x\in\Omega$ s'il existe une application linéaire $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|f(x+h)-f(x)-L(x)h\right\|}{\|h\|}=0.$$

et par conséquent, on a :

$$L(x)\,h=\frac{\partial f}{\partial h}(x)=\left\langle \nabla f(x),h\right\rangle.$$

1.2 Analyse convexe

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.3. Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit ensemble convexe si pour tous $x,y\in C$,

$$(1-\lambda)x+\lambda y\in C,\ \forall\lambda\in[0,1].$$

Définition 1.4. Soit C un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide. On appelle enveloppe convexe (resp. enveloppe convexe fermé) de C, et on note $co(C)$ (resp. $\bar{co}(C)$), le plus petit ensemble convexe (resp. ensemble convexe fermé) contenant C.

Remarque 1.1.
1. En général, $co(C)$ n'est pas un ensemble fermé.
2. Si C est convexe alors $co(C)=C$.
3. Si C est compact (resp. borné) alors $co(C)$ est compact (resp. borné).

1.2.2 Cônes

Définition 1.5. Soit C un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est un cône si

$$\forall\lambda\geq 0,\ \forall x\in C,\ \lambda x\in C.$$

Si C est un cône convexe fermé, on définit le polaire de C par :

$$C^0=\left\{z\in\mathbb{R}^n\ /\ \langle z,\ x\rangle\leq 0,\ \forall x\in C\right\}.$$

Définition 1.6. On appelle cône normal d'un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ au point x, l'ensemble défini par :

$$N_C(x)=\left\{z\in\mathbb{R}^n\ /\ \left\langle z,y-x\right\rangle\leq 0,\forall y\in C\right\}.$$

Remarque 1.2. Le cône normal est toujours un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.7. On définit le polaire de $N_C(x)$ par :

$$(N_C(x))^0 = \left\{z \in \mathbb{R}^n | \left\langle z, y\right\rangle \leq 0, \forall y \in N_C(x)\right\}.$$

où l'ensemble $(N_C(x))^0$ est appelé cône tangent à C au point x et dans la suite sera noté par $T_C(x)$.

Définition 1.8. On dit que le cône C est saillant si et seulement si $(C)\bigcap(-C) = \{0\}$, avec

$$-C = \{-x \ / \ x \in C\}.$$

1.2.3 Fonctions convexes

Définition 1.9. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On appelle *épigraphe* de la fonction φ, l'ensemble défini par :

$$epi\left(\varphi\right) = \left\{\left(x, \mu\right)\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ / \ \varphi\left(x\right) \leq \mu\right\}.$$

- Nous notons par :
$$dom\left(\varphi\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi\left(x\right) < +\infty\right\}$$
le domaine de définition de la fonction φ.
- Si $dom\left(\varphi\right) \neq \emptyset$ alors la fonction φ est dite propre.
- La fonction φ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nous avons :
$$\varphi\left(x_0\right) \leq \lim_{x \to x_0} \inf \varphi\left(x\right).$$
- La fonction φ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- la fonction φ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) si la fonction $-\varphi$ est s.c.i..

Définition 1.10. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction tel que C un ensemble convexe.

1. On dit que f est convexe sur C si et seulement si :
$$\forall x, y \in C; \forall \lambda \in [0,1] : f\left((1-\lambda)\,x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda f(y).$$
2. On dit que f est strictement convexe sur C si l'inégalité ci dessus est stricte.
3. On dit que f est fortement convexe sur C si :
$$\exists \alpha \geq 0 \text{ tel que : } f\left((1-\lambda)\,x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda\,(1-\lambda)\,\left\|x-y\right\|^2.$$

Remarque 1.3. Soit C un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f est convexe sur C si son épigraphe $epi\left(f\right)$ est une partie convexe de $C \times \mathbb{R}$.

Proposition 1.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $C \subset \Omega$ un sous ensemble convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Nous avons :*

1. *f est convexe si et seulement si*
$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \nabla f(x), y - x\right\rangle, \forall x, y \in C.$$

2. *f est strictement convexe si et seulement si*

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle > 0, \forall x, y \in C,\ x \neq y.$$

3. *f est fortement convexe si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq \alpha \left\| x-y \right\|^2,\ \ \forall x, y \in C.$$

1.2.4 Fonctions monotones

Définition 1.11. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que :

1. f est monotone si

$$\forall x, y \in \Omega, \langle f(x) - f(y), x-y \rangle \geq 0.$$

2. f est strictement monotone si

$$\forall x, y \in \Omega,\ x \neq y,\ \langle f(x) - f(y), x-y \rangle > 0.$$

3. f est fortement monotone s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x, y \in \Omega, \langle f(x) - f(y), x-y \rangle \geq \alpha \left\| x-y \right\|^2.$$

1.2.5 Projection sur un convexe fermé

Lemme 1.1. *Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe unique élément $y \in C$ tel que*

$$\left\| x-y \right\| = \inf_{z \in C} \| x-z \| . \tag{1.1}$$

Le point y est appelé la projection de x sur C et on note $y = P_C(x)$.

Démonstration. **Existence :** Soit $(z_k) \in C$ une suite minimisante c'est-à-dire

$$\lim_{k \to +\infty} \| x - z_k \| = d = \inf_{z \in C} \| x-z \| . \tag{1.2}$$

Avec la loi de parallélogramme suivante :

$$\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2\left(\| u \|^2 + \| v \|^2 \right),\ \forall u, v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

en remplaçant dans (1.3) $u = x - z_n$ et $v = x - z_m$, on obtient :

$$\| z_n - z_m \|^2 = 2 \| x - z_n \|^2 + 2 \| x - z_m \|^2 - 4 \left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 . \tag{1.4}$$

C est convexe, alors $\frac{z_n + z_m}{2} \in C$ donc, on a :

$$d^2 \leq \left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 .$$

Par conséquent,
$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - 4d^2,$$
et de (1.2), nous obtenons :
$$\lim_{n,m\to+\infty} \|z_n - z_m\| = 0.$$
Alors, (z_n) est une suite de Cauchy donc il existe un élément $y \in C$ tel que
$$\lim_{k\to+\infty} z_k = y.$$
et on a :
$$\|x - y\| = \lim_{k\to+\infty} \|x - z_k\| = d.$$

Unicité : Soient $y_1, y_2 \in C$ vérifiant (1.1). En remplaçant dans (1.3) $u = x - y_1$ et $v = x - y_2$, on obtient :
$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$
donc $y_1 = y_2$.

□

Nous procédons à caractériser la projection.

Théorème 1.1. *Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors, $y = P_C(x)$ la projection de x sur C si et seulement si*
$$y \in C : \langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \text{ pour tout } z \in C. \tag{1.5}$$

Démonstration. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = P_C(x) \in C$. Comme C est convexe, on a :
$$(1-t)\,y + tz = y + t(z - y) \in C, \text{ pour tout } z \in C,\ t \in [0,1],$$
et donc, de (1.1), la fonction
$$\Phi(t) = \|x - y - t(z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\langle x - y, z - y\rangle + t^2\|z - y\|^2$$
est convexe et atteint son minimum à $t = 0$. Alors, on a :
$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \Phi'(0) \geq 0$$
donc, on a :
$$\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \text{ pour tout } z \in C.$$

2. D'autre part, si
$$y \in C : \langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \text{ pour tout } z \in C,$$
alors,
$$0 \leq \langle y - x, (z - x) + (x - y)\rangle = -\|x - y\|^2 + \langle y - x, z - x\rangle, \text{ pour tout } z \in C.$$

Donc,
$$\left\|x-y\right\|^2 \leq \left\langle y-x, z-x\right\rangle \leq \left\|y-x\right\| \|z-x\|,$$
enfin,
$$\left\|x-y\right\| \leq \|z-x\|.$$

□

Corollaire 1.1. *Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors, on a :*
$$\left\|P_C(x) - P_C\left(x'\right)\right\| \leq \left\|x-x'\right\|, \text{ pour tout } x, x' \in C. \tag{1.6}$$

Démonstration. Soient $x', x' \in \mathbb{R}^n$ et on pose $y = P_C(x)$ et $y' = P\left(x'\right)$. Alors, on a :
$$\begin{aligned} y \in C : \left\langle x-y, z-y\right\rangle \leq 0, &\text{ pour tout } z \in C, \\ y' \in C : \left\langle x'-y', z-y'\right\rangle \leq 0, &\text{ pour tout } z \in C, \end{aligned}$$

Nous choisissons $z = y'$ dans la première inégalité et $z = y$ dans la seconde, et par sommation, on obtient :
$$\left\|y-y'\right\|^2 \leq \left\langle y-y', y-y'\right\rangle \leq \left\langle x-x', y-y'\right\rangle \leq \left\|x-x'\right\| \left\|y-y'\right\|,$$
où
$$\left\|y-y'\right\| \leq \left\|x-x'\right\|.$$

□

1.3 Théorème de Brouwer

Définition 1.12. Soient C un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application. Un point $x \in C$ est point fixe de f si
$$f(x) = x.$$

Lemme 1.2. *(voir [6]). Soient B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to B$ une application continue. Alors, f admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.2. *(Brouwer). Soit C un sous ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : C \to C$ une fonction continue. Alors, f admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ telle que $C \subset B$. D'après Corollaire 1.1, P_C est continue ; donc l'application :
$$f \circ P_C : B \to C \subset B$$
est continue. En utilisant le lemme 1.2, on obtient que $f \circ P_C$ admet au moins un point fixe c'est à dire
$$\exists x \in C, \; f \circ P_C(x) = x,$$
et par conséquent, $P_C(x) = x$, donc $f(x) = x$. □

CHAPITRE 2

INÉQUATION VARIATIONNELLE EN DIMENSION FINI

Dans ce chapitre, on s'intéresse sur les inéquations variationnelles en dimension fini et leurs relations à de nombreux problèmes généraux d'analyse non linéaire, telles que le problème de complémentarité, problème de point fixe et problème d'optimisation. Ensuite, nous présentons des méthodes pour la résolution numérique.

Définition 2.1. Soient K un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Le problème d'inéquation variationnelle en dimension fini, noté par $IV(F,K)$, consiste à déterminer un vecteur $x \in K$ tel que

$$\langle F(x), y-x \rangle \geq 0 \,, \forall y \in K. \tag{2.1}$$

L'ensemble des solutions à cette inéquation variationnelle est notée par $Sol(F,K)$.

Remarque 2.1. Les inéquations variationnelles en dimension fini permettent la représentation mathématiques d'équilibre physiques, chimiques et économique. Un équilibre du système correspondra à une solution de l'inéquation variationnelle (2.1).

Proposition 2.1. *Soient $K = \mathbb{R}^n$ et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Un vecteur $x \in K$ solution de* (2.1) *si et seulement si $F(x) = 0$.*

Démonstration. Si $F(x) = 0$, donc l'inéquation variationnelle (2.1) se tient avec l'égalité. Au contraire, si x satisfait (2.1), on pose $y = x - F(x)$ on obtient

$$-\|F(x)\|^2 \geq 0,$$

donc, $F(x) = 0$. □

2.1 Interprétation géométrique

Soit $N_K(x)$ le cône normal à l'ensemble K au point $x \in K$, défini par :

$$N_K(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;/\; \langle d, y-x \rangle \leq 0,\ \forall y \in K \right\}. \tag{2.2}$$

L'inéquation variationnelle (2.1) dit clairement qu'un vecteur $x \in K$ solution de (2.1) si et seulement si $-F(x)$ est un vecteur normal à K en x, c'est à dire

$$-F(x^*) \in N_K(x^*). \tag{2.3}$$

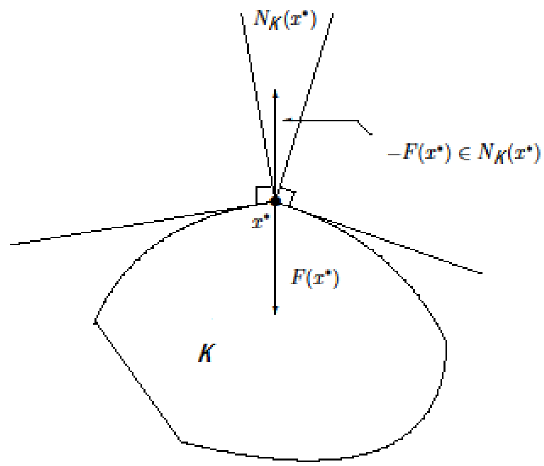

FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique

2.2 Problèmes d'optimisation

Proposition 2.2. *Soit K un sous ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème de minimisation avec contraintes suivant :*

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in K \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f : K \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable. Alors, on a :

1. *Si x une solution de problème* (2.4) *donc x est une solution d'inéquation variationnelle suivante :*

$$\left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \tag{2.5}$$

2. *De plus, si f est convexe et x est une solution d'inéquation variationnelle* (2.1) *donc x est une solution de* (2.4).

Démonstration. 1. On suppose que x une solution de problème (2.4), donc

$$f(x) \leq f\left(x + t\left(y - x\right)\right), \ \forall y \in K, \ \forall t \in [0,1].$$

En divisant sur t et par passage à la limite $t \to 0^+$, on obtient :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(x + t\left(y - x\right)\right) - f(x)}{t} = \left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

2. On suppose que f est convexe. Alors, on a :

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle, \forall y \in K.$$

Si x une solution de (2.5), donc on trouve

$$f(y) \geq f(x), \forall y \in K,$$

alors x est un point de minimum global de f sur K.

□

2.3 Problèmes de complémentarité

Définition 2.2. Soient K un cône donné et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction. *Le problème de complémentarité*, noté par $PC(F, K)$, consiste à déterminer un vecteur $x \in K$ tel que

$$\langle F(x), x \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Pour préciser la relation entre une inéquation variationnelle et un problème de complémentarité, nous avons le résultat suivant

Proposition 2.3. *Soit K un cône de $\mathbb{R}^n$. Le problème d'inéquation variationnelle* (2.1) *est équivalent le problème de complémentarité* (2.6).

Démonstration. 1. On suppose que $x \in K$ une solution de (2.1). En remplaçant (2.1) $y = 0$, on obtient :

$$\langle F(x), x \rangle \leq 0.$$

En remplaçant dans (2.1) $y = 2x$, on obtient :

$$\langle F(x), x \rangle \geq 0.$$

En combinant les deux inéquations ci-dessus, on déduit que $x \in K$ est une solution de (2.6).

2. On suppose que x une solution de (2.6)

□

2.4 Problème de point fixe

Théorème 2.1. *Soient K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, $x \in K$ est une solution du problème de l'inéquation variationnelle* (2.1) *si et seulement si, pour tout $\mu > 0$, x est un point fixe de l'application suivante :*

$$P_K\left(I - \mu F\right) : K \to K$$

c'est à dire

$$x = P_K\left(x - \mu F(x)\right)$$

Démonstration. 1. On suppose que x une solution de (2.1) c'est à dire

$$\left\langle F(x), y-x\right\rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Multipliant l'inéquation ci-dessus par $-\mu$, et en ajoutant $\langle x, y-x\rangle$ aux deux côtés de l'inéquation, on obtient :

$$\left\langle \left(x-\mu F(x)\right)-x, y-x\right\rangle \leq 0, \ \forall y \in K.$$

D'après Théorème 1.1, on conclut que

$$x = P_K\left(x-\mu F(x)\right)$$

2. inversement, si $x = P_K\left(x-\mu F(x)\right)$, pour tout $\mu > 0$, d'après Théorème 1.1, on obtient :

$$\left\langle \left(x-\mu F(x)\right)-x, y-x\right\rangle \leq 0, \ \forall y \in K,$$

et donc,

$$\left\langle F(x), y-x\right\rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

□

2.5 Existence et d'unicité

Pour l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (2.1), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit K un sous ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors,*

1. *le problème d'inéquation variationnelle* (2.1) *admet au moins une solution.*
2. *Si F est strictement monotone, donc la solution de* (2.1) *est unique.*

Démonstration. 1. On remarque que P_K et $\left(I-\mu F\right)$ sont continues, donc $P_K\left(I-\mu F\right) : K \to K$ est continue. En utilisant Théorème 1.2 et Théorème 2.2, on déduit que le problème (2.1) admet au moins une solution.

2. On suppose que x^1 et x^2 deux solutions de (2.1) telles que $x^1 \neq x^2$. Alors, on a :

$$\left\langle F\left(x^1\right), y-x^1\right\rangle, \ \forall y \in K, \tag{2.7}$$
$$\left\langle F\left(x^2\right), y-x^2\right\rangle, \ \forall y \in K. \tag{2.8}$$

En remplaçant $y = x^2$ dans (2.7) et $y = x^1$ dans (2.8), on obtient :

$$\left\langle F\left(x^1\right)-F\left(x^2\right), x^1-x^2\right\rangle \leq 0. \tag{2.9}$$

Mais l'inéquation (2.9) est en contradiction avec la définition de de la monotonicité stricte de F. Donc, $x^1 = x^2$.

□

2.6 Méthode de projection

Soit K un sous ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On considère la suite $\left(x^k\right)$ de K définie par l'équation de récurrence :

$$\begin{cases} x^0 \in K, \\ x^{k+1} = \Phi(x^k) = P_K\left(x^k - \mu F\left(x^k\right)\right), \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.10}$$

où $\mu > 0$ est un paramètre. On suppose que F est fortement monotone c'est à dire

$$\exists \alpha > 0 \ / \ \left\langle F(x) - F\left(y\right), x - y\right\rangle \geq \alpha \left\| x - y \right\|^2, \ \forall x, y \in K, \tag{2.11}$$

et lipschitzienne c'est à dire

$$\exists L > 0, \ \left\| F(x) - F\left(y\right)\right\| \leq L \left\| x - y \right\|, \ \forall x, y \in K. \tag{2.12}$$

Pour la convergence de la suite $\left(x^k\right)$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Si $\mu < 2\alpha/L^2$, la suite $\left(x^k\right)$ définie par* (2.10) *est convergente vers $x^* \in K$ l'unique solution de l'inéquation variationnelle* (2.1).

Démonstration. En utilisant (2.10)-(2.12) et Corollaire 1.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \left\| x^{k+1} - x^* \right\|^2 &= \left\| \Phi\left(x^k\right) - \Phi\left(x^*\right)\right\|^2 \\ &= \left\| P_K\left(x^k - \mu F\left(x^k\right)\right) - P_K\left(x^* - \mu F\left(x^*\right)\right)\right\|^2 \\ &\leq \left\| \left(x^k - \mu F\left(x^k\right)\right) - \left(x^* - \mu F\left(x^*\right)\right)\right\|^2 \\ &= \left\| x^k - x^* \right\|^2 - 2\mu \left\langle F\left(x^k\right) - F\left(x^*\right), x^k - x^* \right\rangle \\ &+ \mu^2 \left\| F\left(x^k\right) - F\left(x^*\right)\right\|^2 \\ &\leq \left(1 - 2\mu\alpha + \mu^2 L^2\right) \left\| x^k - x^* \right\|^2. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \rho^k \left\| x^0 - x^* \right\|, \ \rho = \sqrt{1 - 2\mu\alpha + \mu^2 L^2}. \tag{2.13}$$

On remarque que

$$0 < \mu < 2\alpha/L^2 \Rightarrow 0 < 1 - 2\mu\alpha + \mu^2 L^2 < 1 \Rightarrow 0 < \rho < 1.$$

donc, d'après (2.13), $x^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x^*$. □

2.7 Méthode de l'extragradient

On suppose que l'ensemble des solutions $Sol(F,K)$ de l'inéquation variationnelle (2.1) est non vide et F est une fonction monotone c'est à dire

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \; \forall x, y \in K. \tag{2.14}$$

On considère la suite (x^k) définie par les deux projections à chaque itération :

$$\begin{cases} x^0 \in K, \\ y^k = P_K\left(x^k - \mu F\left(x^k\right)\right), \\ x^{k+1} = P_K\left(x^k - \mu F\left(y^k\right)\right). \end{cases} \tag{2.15}$$

où $\mu > 0$ est une constante.

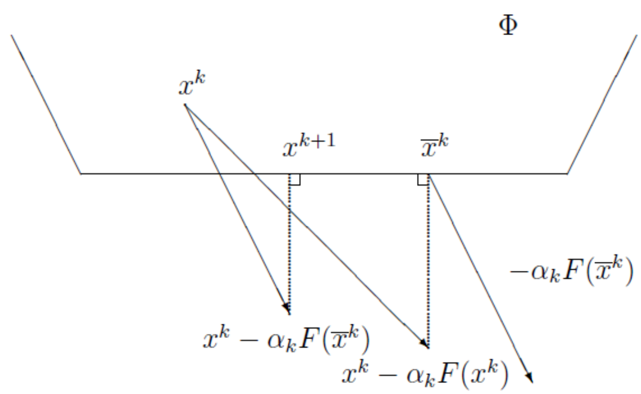

FIGURE 2.2 – L'extragradient

Lemme 2.1. *Soient K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, satisfaite la condition de monotonie* (2.14) *et la condition de Lipschitz* (2.12). *Soit $x^* \in Sol(F,K)$ une solution de l'inéquation variationnelle* (2.1). *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :*

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\|^2 \leq \left\| x^k - x^* \right\|^2 - \left(1 - \mu^2 L^2\right) \left\| y^k - x^k \right\|^2. \tag{2.16}$$

Démonstration. En remplaçant dans (2.14) $x = x^*$ et $y = y^k$, on obtient :

$$\left\langle F\left(y^k\right), y^k - x^* \right\rangle \geq \left\langle F\left(x^*\right), y^k - x^* \right\rangle \geq 0, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, on a :

$$\left\langle F\left(y^k\right), x^* - x^{k+1} \right\rangle \leq \left\langle F\left(y^k\right), y^k - x^{k+1} \right\rangle. \tag{2.17}$$

De (2.15) et Théorème 1.1, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left\langle x^{k+1}-y^k, x^k-\mu F\left(y^k\right)-y^k\right\rangle \\
&=\left\langle x^{k+1}-y^k, x^k-\mu F\left(x^k\right)-y^k\right\rangle+\mu\left\langle x^{k+1}-y^k, F\left(x^k\right)-F\left(y^k\right)\right\rangle \\
&=\underbrace{\left\langle x^{k+1}-P_K\left(x^k-\mu F\left(x^k\right)\right), x^k-\mu F\left(x^k\right)-P_K\left(x^k-\mu F\left(x^k\right)\right)\right\rangle}_{\leq 0} \\
&+\mu\left\langle x^{k+1}-y^k, F\left(x^k\right)-F\left(y^k\right)\right\rangle \\
&\leq \mu\left\langle x^{k+1}-y^k, F\left(x^k\right)-F\left(y^k\right)\right\rangle .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

On pose $z^k=x^k-\mu F\left(y^k\right)$. En utilisant Théorème 1.1, (2.17) et (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2 &= \left\|P_K\left(z^k\right)-x^*\right\|^2=\left\|P_K\left(z^k\right)-z^k+z^k-x^*\right\|^2 \\
&=\left\|z^k-x^*\right\|^2+\left\|P_K\left(z^k\right)-z^k\right\|^2+2\left\langle P_K\left(z^k\right)-z^k, z^k-x^*\right\rangle \\
&=\left\|z^k-x^*\right\|^2-\left\|P_K\left(z^k\right)-z^k\right\|^2+2\underbrace{\left\langle P_K\left(z^k\right)-z^k, P_K\left(z^k\right)-x^*\right\rangle}_{\leq 0} \\
&\leq\left\|z^k-x^*\right\|^2-\left\|P_K\left(z^k\right)-z^k\right\|^2 \\
&=\left\|x^k-x^*-\mu F\left(y^k\right)\right\|^2-\left\|x^k-x^{k+1}-\mu F\left(y^k\right)\right\|^2 \\
&=\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left\|x^k-x^{k+1}\right\|^2+2\mu\left\langle x^*-x^{k+1}, F\left(y^k\right)\right\rangle \\
&\leq\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left\|x^k-x^{k+1}\right\|^2+2\mu\left\langle y^k-x^{k+1}, F\left(y^k\right)\right\rangle \\
&=\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left\|x^k-y^k\right\|^2-\left\|y^k-x^{k+1}\right\|^2 \\
&+2\left\langle x^{k+1}-y^k, x^k-\mu F\left(y^k\right)-y^k\right\rangle \\
&\leq\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left\|x^k-y^k\right\|^2-\left\|y^k-x^{k+1}\right\|^2 \\
&+2\mu\left\langle x^{k+1}-y^k, F\left(x^k\right)-F\left(y^k\right)\right\rangle \text{ (d'après (2.18))} \\
&\leq\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left\|x^k-y^k\right\|^2-\left\|y^k-x^{k+1}\right\|^2 \\
&+2\mu L\left\|x^{k+1}-y^k\right\|\left\|x^k-y^k\right\|, \text{ (d'après inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.12))} \\
&\leq\left\|x^k-x^*\right\|^2-\left(1-\mu^2L^2\right)\left\|x^k-y^k\right\|^2, \text{ (d'après l'inégalité de Young)}.
\end{aligned}$$

D'où la preuve de Lemme 2.1. □

Pour la convergence de la suite (2.15), nous avons le théorème suivant

Théorème 2.4. *(Voir [11, p.1118]). Soient K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $F: K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, satisfaite la condition de monotonie* (2.14) *et la condition de Lipschitz* (2.12)*. Si $0<\mu<1/L$, la suite $\left(x^k\right)$ définie par* (2.15) *est convergente vers une solution $x^* \in Sol(F,K)$.*

Démonstration. On pose $\rho = 1 - \mu^2 L^2$. Donc, $0 < \mu < 1/L$ implique que $0 < \rho < 1$. D'après (2.16), on obtient :

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \leq \left\| x^k - x^* \right\|$$

Par sommation, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left\| x^{k+1} - x^* \right\| - \left\| x^k - x^* \right\| \right) \leq 0,$$

Après calcul on trouve :

$$\left\| x^n - x^* \right\| \leq \left\| x^0 - x^* \right\|.$$

Alors, on a :

$$\left\| x^n \right\| \leq \left\| x^n - x^* \right\| + \left\| x^* \right\| \leq \left\| x^0 - x^* \right\| + \left\| x^* \right\|.$$

D'où $\left(x^k\right)$ est bornée. Donc, il existe une sous suite notée par $\left(x^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\bar{x}$. D'autre part, de (2.16) nous avons :

$$\rho \sum_{k=0}^{+\infty} \left\| x^k - y^k \right\|^2 \leq \left\| x^0 - x^* \right\|^2.$$

Alors, implique que

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^k - y^k \right\| = 0,$$

donc, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} y^{\varphi(k)} = \bar{x}$$

De (2.15) et d'après la continuité de F et P_k, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lim_{k \to +\infty} y^{\varphi(k)} \\ &= \lim_{k \to +\infty} P_K \left(x^{\varphi(k)} - \mu F \left(x^{\varphi(k)} \right) \right) \\ &= P \left(\bar{x} - \mu F(\bar{x}) \right), \end{aligned}$$

d'où $\bar{x} \in Sol(F, K)$. En remplaçant dans (2.16), $x^* = \bar{x}$, on trouve que la suite $\left(\left\| x^k - \bar{x} \right\| \right)$ est décroissante, donc converge. Alors, nous avons :

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^k - \bar{x} \right\| = \lim_{k \to +\infty} \left\| x^{\varphi(k)} - \bar{x} \right\| = 0,$$

d'où $\left(x^k\right)$ converge vers $\bar{x}$. □

CHAPITRE 3

QUELQUES APPLICATIONS

Les inéquations variationnelles représentent le cadre mathématique approprié pour modéliser des situations d'équilibre. Dans ce chapitre, j'en donnerai quelque exemples, principalement reliés à un contexte "économique" ou "compétitif" sur des réseaux de transports. D'autre modèles du même type sont présentés dans le livre de Nagurney.

3.1 Équilibre oligopolistique

Soit un ensemble de n firmes en compétition pour la vente d'un bien sur un marché unique. On suppose que le coût de production est une fonction croissante de la quantité produite (la production du bien n'est pas soumise à des économies d'échelle).

Chaque firme $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ est caractérisée par un coût de production $c_i(x_i)$ qui dépend de sa propre production x_i. Une fonction de demande inverse P relie le prise du marché $P(Q)$ à la production totale $Q = \sum_{i \in I} x_i$. Un équilibre de cournot-Nash est un vecteur x^* qui satisfait aux conditions :

$$x_i \in \arg\max f_i(x_i) = x_i P\left(x_i + \sum_{j \neq i} x_j^*\right) - C_i(x_i) \;\; \forall i \in I.$$

A l'équilibre, aucune firme ne peut augmenter son profit, une fois fixées les quantités produites par les firmes concurrentes. Cet notion d'équilibre constitue un cas particulier de la notion d'équilibre de Nash.

3.1.1 Hypothèses

Des hypothèses classiques sur les fonctions C_i et P sont :

1. La fonction P est non négative et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. La fonction $QP(Q)$ est concave.
3. Les fonctions C_i sont positives, convexes et croissantes.

4. Pour tout i dans I, il existe une quantité non négative $x_{\bar{i}}$, telle que $x_{\bar{i}} P(x_{\bar{i}}) - C_i(x_{\bar{i}})$ soit négative.
5. Les fonctions sont toutes continument différentiables sur $\mathbb{R}^+$.

Sous les hypothèses $1-4$, chaque fonction de profit f_i est concave par rapport à x_i et l'ensemble des solutions d'équilibre est non vide, convexe et compact. Si l'hypothèse 5 est satisfaite, la fonction f_i atteint sont maximum en un point x_i satisfaisant la condition d'optimalité du premier ordre :

$$P\left(\sum_{j\in I} x_j\right) + x_i P'\left(\sum_{j\in I} x_j\right) - C_i'(x_i) \leq 0$$

$$x_i\left[P\left(\sum_{j\in I} x_j\right) + x_i P'\left(\sum_{j\in I} x_j\right) - C_i'(x_i)\right] = 0$$

$$x_i \geq 0.$$

Ce problème de complémentarité non linéaire peut être mis sous forme variationnelle $IV(F,\mathbb{R}^n)$ en posant :

$$F_i(x) = -\left[P\left(\sum_{j\in I} x_j\right) + x_i P'\left(\sum_{j\in I} x_j\right) - C_i'(x_i)\right].$$

Sous les hypothèses $1-5$, la fonction F n'est pas nécessairement monotone. Une condition suffisante assurant la monotonie de F est que la fonction de demande inverse P soit convexe. D ans ce cas, des algorithmes classiques peuvent être implantés. Ils requièrent, à chaque itération k, de résoudre n programmes mathématiques, un par firme :

$$\overline{K}_i^k \in \arg\max_{x_i\geq 0} x_i P\left(x_i + \sum_{j\in I_{j\neq 0} x_{k-1}^j}\right) - C_i(x_i).$$

A l'itération $k+1$ on pose $x^{k+1} = tx^k + (1-t)x^k$ où $t(0 < t \leq 1)$ est un paramètre de sous-relaxation.

Remarque 3.1. Dans le cas de l'oligopole, la formulation variationnelle obscurcit la structure inhérente au problème. Il est en effet préférable de construire un algorithme de résolution autour d'un problème unidimensionnel auxiliaire. En effet, si la production totale Q à l'équilibre était connue apriori, il serait aisé d'obtenir les productions individuelles x_i à partir des formules :

$$\begin{cases} x_i = 0 \; si \; P(Q) - C_i' \leq 0 \\ P(Q) + x_i P'(Q) - C_i'(x_i) = 0 \; sinon \end{cases}$$

Ces conditions sont les conditions d'optimalités du premier ordre du problème de maximisation concave paramétré en Q :

$$\max P(Q)\sum_{i\in I} x_i + 1/2P'(Q)\sum_{i\in I} x_i^2 - \sum_{i\in I} C_i x_i. \tag{3.1}$$

Puisque je recherche des solutions des programmes ci-dessus qui soient compatibles avec la production totale Q, il est naturel d'étudier le programme mathématique :

$$\max P(Q) \sum_{i \in I} x_i + 1/2 P'(Q) \sum_{i \in I} x_i^2 - \sum_{i \in I} C_i x_i$$

$$sujet \text{à} \sum_{i \in I} x_i = Q.$$

Théorème 3.1. *(voir [11]). Si la fonction de demande est strictement décroissante, la solution $x(Q)$ est unique.*

Soit $\lambda(Q)$ la variable duale optimale associé à l'unique contrainte du programme 3.1. Murphy, soyster ont démontré que $\lambda(Q)$ est une fonction continue et non croissante de Q et que Q est une production totale d'équilibre si et seulement si $\lambda(Q) = 0$. Les auteurs ont proposé un algorithme de fouille dichotomique pour localiser l'intervalle contenant la valeur optimale de Q. Si les fonctions C_i sont strictement convexes, ou si $QP(Q)$ est strictement concave, alors le vecteur d'équilibre est unique.

3.2 Équilibre sur des réseaux de transport

Dans cette section, nous reprenons le modèle d'équilibre du trafic en zone urbaine. La situation à modéliser est le choix d'itinéraires des usagers d'un réseaux routier urbain à l'heure de pointe. Le réseaux comprend des arcs, des sommets 'origines'. Des sommets'destinations' ainsi que des sommets intermédiaires. Soit P_{kl} l'ensemble des chemins reliant l'origine k à la destination l, et d_{kl} la demande de transport entre les sommets k et l. Le temps de transport sur un arc a est fonction des débits sur les arcs du réseau, exprimés en véhicules/minute. Le temps de transport sur le chemin j est la somme des temps de transport sur les arcs constituent le chemin j. Une affectation d'équilibre est obtenue lorsque, pour tout couple origine destination (k, l), les temps de transport sur les chemins utilisés sont tous égaux, et inférieurs au temps de parcours des chemins non utilisés (principe d'équilibre de wardrop). Le problème d'affectation d'équilibre à été abondamment étudié.

Je dénote par v_0 le débit sur l'arc a, x_j le débit sur le chemin j, $C_a(v)$ le temps de parcours de l'arc a, d_{kl} la demande de transport entre k, l, A la matrice d'incidence arc-chemin, $F_j(x)$ le temps de parcours du chemin j et

$$K = \left\{ x \geq 0 : \sum_{j \in P_{kl}} x_j = d_{kl} \ \forall (k,l) \right\}$$

l'ensemble des vecteurs de débit admissibles. On a les relations :

$$v = Ax$$

$$F(x) = A^t C(Ax).$$

Le principe de Wardrop peut se reformuler de la façon suivante : un vecteur x est un vecteur d'équilibre si et seulement s'il n'existe pas un vecteur y de coût inférieur par rapport au vecteur de coût $F(x)$, c'est-à-dire que x est un vecteur de plus courts chemins par rapport à $F(x)$:

$$\langle F(x), x \rangle \leq \left\langle F(x), y \right\rangle \ \forall y \in K.$$

Ceci correspond à l'inégalité variationnelle :

$$\left\langle F(x), x - y \right\rangle \leq 0 \ \forall y \in K.$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudie les inéquations variationnelles en dimension fini avec un opérateur monotone.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Etude mathématique et numérique :** nous considérons les principaux résultats de la théorie des problèmes d'inéquations variationnelles avec un opérateur continu et leurs relations avec d'autres problèmes généraux d'analyse non linéaire, telles que le problème de complémentarité, problème de point fixe et problème d'optimisation. Ensuite, nous présentons des méthodes pour la résolution numérique.
- ✓ **Applications :** nous présentons deux exemples : équilibre oligopolistique et équilibre sur des réseaux de transport.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Problème de complémentarité : étude théorique numérique.
- ☞ Inéquations variationnelles en dimension fini avec un opérateur multivoque.
- ☞ Résolution numérique d'inéquations variationnelles en dimension fini par des méthodes de type extragradient.

Bibliographie

[1] KIM C. BORDER. *Fixed point theorems with applications to economics and game theory.* Cambridge University Press, 1985.

[2] G. Cohen. Auxiliary problem principle extended to variational inequalities. *JOTA*, 59 :325–333, 1988.

[3] S. C. Dafermos. An iterative scheme for variational inequalities. *Math-ematical Programming*, 26 :40–47, 1983.

[4] L. F. Demkowicz and J. T. Oden. *Applied Functional Analysis.* CRC Press,, 1996.

[5] F. Facchinei and J-S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume II.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] Francisco Facchinei and Jong-Shi Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems Volume II.* Springer-Verlag New York, Inc, 2003.

[7] J. Hadamard. *Lectures on Cauchys Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press, 1923.

[8] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I.* Springer-Verlag, 1996.

[9] G. M. Korpelevich. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *(Russian) Ekonom. i Mat. Metody*, 12(4) :747–756, 1976.

[10] J. Oleksyn. Extragradient methods for elliptic inverse problems and image denoising. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, England, 2011.

[11] Francisco Facchinei Jong-Shi Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems Volume II.* Springer-Verlag New York, Inc., 2003.